論文の内容の要旨

論文題目　　$\mathcal{W}$-algebras, free vertex algebras, and the Deligne exceptional series
（$\mathcal{W}$ 代数, 自由な頂点代数とドリーニュの例外系列）

氏　　名　　川節　和哉

■　頂点代数（VA）や, VA に共形構造を入れた頂点作用素代数（VOA）の理論において, 指標のモジュラー不変性は重要な性質であり, モジュラー不変性を持つ VOA や VA の分類は最重要課題の一つである.

本博士論文では, 上記の分類問題に関連して, モジュラー不変性を持つ $\mathcal{W}$ 代数およびモジュラー不変性を持つが共形構造は持たない VA の具体例について, 分岐則と拡大の観点から考察した.

$\mathcal{W}$ 代数は, アフィン VOA に量子化された Drinfeld-Sokolov リダクションを適用して構成される VOA である. $\mathcal{W}$ 代数がモジュラー不変性を持つのは, レベルが許容数の場合に限られる, と予想され広く信じられてきた（cf. Kac-Wakimoto 2008）.

本博士論文で, 拡大の理論を用いて, その予想の反例を与えた. また, 拡大の理論を用いてモジュラー不変性を示すことが出来るような $\mathcal{W}$ 代数を分類し, その結果, Deligne の例外系列と呼ばれる系列が現れることを観察した. この結果より, これまで考えられていたよりもずっと多くの, 性質の良い $\mathcal{W}$ 代数が存在する可能性が高まり, さまざまな応用が期待される.

さて, 頂点代数 $V_{E_{7+1/2}}$ は, モジュラー不変性を持つ（Kawasetsu 2014）が, 共形構造を持たない VA の例である. 共形構造を持たない VA のモジュラー不変性に関する一般論はまだ存在しないので, まずは $V_{E_{7+1/2}}$ を詳しく調べたい. そのため, $V_{E_{7+1/2}}$ の構造を, 自由性の観点から考察しよう. なお, 自由な頂点代数の非自明な部分 VA は共形構造を持たないことに注意しておく.

本博士論文で, 自由な頂点代数を一般化して, 自由な擬 GVA の概念を導入し, ある自由な擬 GVA W の極大部分 VA W^0 がモジュラー不変性を持つことを示した. 自由な擬 GVA のフェルミオニックな指標公式を確立し, その指標公式と, フェルミオニック和公式を用いて, W^0 の指標が, モジュラー不変性を持つある VOA の指標と一致することを示した. こうして VA W^0 のモジュラー不変性が得られたことになる. VA $V_{E_{7+1/2}}$ とその部分 VOA V_{E_7} を考え, VA W^0 とその表現を用いて, 組 $(V_{E_7} \subset V_{E_{7+1/2}})$ の分岐則を記述した. さらに, 上記で言及した $\mathcal{W}$ 代数の具体例のうち, E_8 に付随するものの指標は, $V_{E_{7+1/2}}$ の指標と一致することを示した.

本博士論文は 3 つのパートからなる. 以下, 各パートの内容について詳しく説明する.

■パート 1　頂点作用素代数 V と, V 上の単純カレント加群 N を考えると, 単純カレントの定義より, V の N による拡大の構造は同型を除いて高々一意である. そのような拡大は単純カレント拡大と呼ばれる. また, 単純カレント拡大の一般論より, C_2-余有限かつ有理的な単純 VOA の単純カレント拡大は, C_2-余有限かつ $\mathbb{Z}_2$-有理的な単純 VOA であり（cf. Lam 2001, Yamauchi 2004, Carnahan 2014）, 従ってモジュラー不変性を持つ（Zhu 1996, Dong-Li-Mason 2000, Van Ekeren 2013）.

さて, $\mathfrak{g}$ を有限次元単純リー環, k を複素数とし, 極小べき零元 $f_\theta \in \mathfrak{g}$ を考える. それらに付随する単純 $\mathcal{W}$ 代数 $W_{\mathfrak{g},k} = \mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f_\theta)$ を考え, ある部分 VOA $V_{\mathfrak{g},k}, U_{\mathfrak{g},k} \subset W_{\mathfrak{g},k}$ を考える. 次の定理がパート 1 の主定理である.

Theorem 1. $\mathfrak{g}$ は A 型でないと仮定し, 次の条件を考える：

(1) 部分 VOA $V_{\mathfrak{g},k}, U_{\mathfrak{g},k}$ は, C_2-余有限かつ有理的な単純 VOA である;

(2) 随伴表現でない単純カレント $V_{\mathfrak{g},k}, U_{\mathfrak{g},k}$-加群 N, M が存在して, $V_{\mathfrak{g},k} \otimes U_{\mathfrak{g},k}$-加群としての同型 $W_{\mathfrak{g},k} \cong V_{\mathfrak{g},k} \otimes U_{\mathfrak{g},k} \oplus N \otimes M$ が成り立つ.

組 $(\mathfrak{g}, k)$ が上の条件を満たすことは, 組 $(\mathfrak{g}, k)$ が次のいずれかであることと同値である：

(i) $\mathfrak{g} = sp(4)$, $k = 1/2$;

(ii) $\mathfrak{g} = G_2, D_4, F_4, E_6, E_7, E_8$, $k = -h^\vee/6$.

上の定理で, 技術的な都合上, A 型は省いた.

定理中のリスト (ii) は, Deligne の例外系列を彷彿とさせる. Deligne の例外系列とは, 単純リー環の系列

$$A_1 \subset A_2 \subset G_2 \subset D_4 \subset F_4 \subset E_6 \subset E_7 \subset E_8$$

である. Deligne の例外型リー環 $\mathfrak{g}$ に対して, レベル 1 アフィン VOA $V_1(\mathfrak{g})$ を考える. $\mathfrak{g}$ が A_1 型でないと仮定し, $V_1(\mathfrak{g})$ のある部分 VOA $V_1(A_1)$ と $V^{(\mathfrak{g})}$ を考える. $V_1(A_1) \otimes V^{(\mathfrak{g})}$-加群としての分解 $V_1(\mathfrak{g}) \cong V^{(\mathfrak{g})} \otimes V_1(A_1) \oplus N^{(\mathfrak{g})} \otimes V_1(A_1; \theta/2)$ を考えると, $N^{(\mathfrak{g})}$ は単純カレント $V^{(\mathfrak{g})}$-加群であることが分かる. また, $\mathfrak{g} = A_1$ のときは, $V^{(A_1)} = \mathbb{C}$, $N^{(A_1)} = 0$ と解釈する.

さて, リスト (ii) に $\mathfrak{g} = A_1, A_2$, $k = -h^\vee/6$ も加え, リスト (ii)$'$ と書く. このとき, 次の $V_{\mathfrak{g},k} \otimes U_{\mathfrak{g},k}$-加群としての同型が得られた：

(i) $\mathcal{W}_{1/2}(sp(4), f_\theta) \cong V_1(A_1) \otimes L(-25/7, 0) \oplus V_1(A_1; \alpha/2) \otimes L(-25/7, 5/4)$,

(ii)$'$ $\mathcal{W}_{-h^\vee/6}(\mathfrak{g}, f_\theta) \cong V^{(\mathfrak{g})} \otimes L(-3/5, 0) \oplus N^{(\mathfrak{g})} \otimes L(-3/5, 3/4)$.

ただし, $\mathfrak{g} = A_1, A_2$ の場合は, $V^{(\mathfrak{g})} \otimes L(-3/5, 0)$-加群としての同型である. 単純カレント拡大の一意性より, これらは VOA としての同型であるとみなせる.

さらに, $\mathfrak{g} = A_1$ の場合を除くと, 冒頭に述べたように, 単純カレント拡大の一般論から次の系が得られる.

Corollary 1. 単純 $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f_\theta)$ は C_2-余有限かつ $\mathbb{Z}_2$-有理的である. ただし, 組 $(\mathfrak{g}, k)$ はリスト (i), (ii)$'$ 中の組であり, $\mathfrak{g} = A_1$ の場合は除く.

系より, $W_{\mathfrak{g},k}$ の指標はモジュラー不変である（Dong-Li-Mason 2000, Van Ekeren 2013）. ただし, $W_{\mathfrak{g},k}$ の表現の指標と, Ramond ツイスト表現の指標を考えている. なお, $\mathfrak{g} = D_4, E_6, E_7, E_8$

のときには, 数 $k=-h^\vee/6=-1,-2,-3,-5$ は許容数ではないので, モジュラー不変性を持ち, 非許容レベルに付随する W 代数の例が得られたことになる.

■パート２　頂点代数 $V=V_{E_{7+1/2}}$ を考える. これは, E_8 型ルート格子に付随する格子 VOA V_{E_8} の部分 VA である. $V_{E_{7+1/2}}$ は, E_7 型ルート格子に付随する格子 VOA V_{E_7} を部分 VA として含む. ある巡回 V-加群 $N=V_{E_{7+1/2}+\alpha_8}\subset V_{E_8}$ を考えると, V と N の指標はモジュラー不変である（Kawasetsu 2014）が, V は共形構造を持たない. $V_{E_{7+1/2}}$ を調べるため, 自由な VA の概念を拡張することによって, $V_{E_{7+1/2}}$ に含まれる V_{E_7} との分岐則を記述する.

自由な VA は, Borcherds により最初に言及され, Roitman によって構成された. 自由な VA は生成元と局所性の限界の組に対して構成される. 自由な VA と同値な概念として, 格子 VOA に付随する Feigin-Stoyanovsky 型主部分空間（Milas-Penn 2012）という概念がある. また, VA の一般化として, Dong-Lepowsky による, 一般化された頂点代数（GVA）がある.

本博士論文では, GVA を一般化し, 頂点代数 $V_{E_{7+1/2}}$ の研究に応用するのに適切な, 擬 GVA というクラスを導入した. また, 自由な擬 GVA という概念を導入し, その一般論を展開した. 自由な擬 GVA は, 生成元と局所性の限界に局所性の補正項を加えた三組みに対して構成される. 自由な VA の場合と同様に, 自由な擬 GVA の非自明な部分 VA は共形構造を持たない.

また, 格子擬 GVA の一般化された主部分空間（GPS）という概念を導入し, GPS は自由であるということを示した. さらに, GPS の基底を構成し, その記述から, 次の指標公式を得た.

Theorem 2. *一般化された主部分空間 $W_L(B)$ の指標 $\chi_{W_L(B)}$ に対して, 次の公式が成り立つ：*

$$\chi_{W_L(B)}(x_1,\ldots,x_l;q)=\sum_{i_1,\ldots,i_l\geq 0}\frac{q^{\frac{\boldsymbol{i}\cdot A\cdot\boldsymbol{i}^T}{2}}}{(q)_{i_1}\cdots(q)_{i_l}}x_1^{i_1}\cdots x_l^{i_l},$$

ただし, $\boldsymbol{i}=(i_1,\ldots,i_l)$ であり, A は格子 L のグラム行列, $x_1,\ldots,x_l,q$ は不定元である.

自然数 $k\geq 0$ に対して, $1/(q)_k$ は, ある種の分割の個数の母関数と一致するので, この公式は, ある種の分割の個数の母関数の足し上げのみによって記述されている. このように, （無限和）−（無限和）という差ではなく, 足し上げのみによって記述されている指標公式を, フェルミオニックな指標公式という. フェルミオニックな指標公式は, 組合せ論的な指標公式とも言われる.

また, GPS のある種の巡回加群に対しても, 同様の指標公式が得られた. 上記の結果は, Roitman, Milas-Penn の結果の一般化である.

ところで, VA V と部分 VA $U\subset V$ を考えると, U の双対とは, 不変部分空間 V^{U_+} のことである. GPS に対して, 次のような双対性が得られた. 有限ランクの非退化格子 L とその $\mathbb{Z}$-基底 B を考え, その双対格子と双対基底を L°, B° とおく.

Theorem 3. *一般化された主部分空間 $W_{L^\circ}(B^\circ)\subset V_{L^\circ}$ の V_L の中での不変空間 $(V_L)^{(W_{L^\circ}(B^\circ))_+}\subset V_L$ は, 一般化された主部分空間 $W_L(B)$ と一致する.*

$(L^\circ)^\circ=L$ より, 定理から等式 $(V_{L^\circ})^{(W_L(B))_+}=W_{L^\circ}(B^\circ)$ も得られるので, この意味で, $W_L(B)$

と $W_{L^\circ}(B^\circ)$ とは互いに双対である．なお, 主部分空間の双対 GPS は主部分空間ではない．

さて, A_1 型のウェイト格子 $A_1^\circ = \mathbb{Z}\theta/2$ とその基底 $B = \{\theta/2\} \subset A_1^\circ$ に付随する GPS $W = W_{A_1^\circ}(B)$ を考え, 巡回 W-加群 $M = W \cdot e^{\theta/2} \subset V_{A_1^\circ}$ を考える． $W^0 = W \cap V_{A_1}$, $W^1 = W \cap V_{A_1+\theta/2}$, $M^0 = M \cap V_{A_1}$, $M^1 = M \cap V_{A_1+\theta/2}$ とおくと, W^0 は W の極大部分 VA であり, W^0, W^1, M^0, M^1 は VA W^0 上の加群である．このとき, 指標公式とフェルミオニック和公式（Kedem-Klassen-McCoy-Melzer 1993）より, W^0, W^1, M^0, M^1 の指標は, ヴィラソロ極小模型 $L(-3/5, 0)$ の既約表現の指標と一致することがわかる．VOA $L(-3/5, 0)$ はモジュラー不変性を持つので, VA W^0 上の表現 W^0, W^1, M^0, M^1 の指標はモジュラー不変である．こうしてモジュラー不変性を持つが共形構造は持たない VA の新しい例が得られたことになる．

上で構成した W^0 とその表現を用いると, 組 $(V_{E_7} \subset V_{E_{7+1/2}})$ の分岐則を記述できる．その結果, 次の定理を得た．

Theorem 4. 頂点代数の同型 $\phi : V_{E_8} \cong V_{E_7} \otimes V_{A_1} \oplus V_{E_7+\varpi_7} \otimes V_{A_1+\theta/2}$ は, 頂点代数 $V_{E_{7+1/2}} \subset V_{E_8}$ への, 頂点代数 $V_{E_7} \otimes W^0$ の埋め込みを引き起こす．さらに, ϕ は, 次の $V_{E_7} \otimes W^0$-加群としての同型を引き起こす：

$$V_{E_{7+1/2}} \cong V_{E_7} \otimes W^0 \oplus V_{E_7+\varpi_7} \otimes W^1, \quad V_{E_{7+1/2}+\alpha_8} \cong V_{E_7} \otimes M^0 \oplus V_{E_7+\varpi_7} \otimes M^1.$$

■**パート３**　パート 1 の Theorem 1 (ii) で, $\mathfrak{g} = E_8$ の場合を考えると, 単純 $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}_{-5}(E_8, f_\theta)$ と V_{E_7} との組の分岐則が得られる．それを用いて, 単純 $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}_{-5}(E_8, f_\theta)$ の Ramond ツイスト既約表現を具体的に記述し, パート 2 の Theorem 4 と, W^0, W^1, M^0, M^1 の指標が $L(-3/5, 0)$ の表現の指標と一致することとを用いると, 次の結果が得られる．

Theorem 5. 単純 $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}_{-5}(E_8, f_\theta)$ の Ramond ツイスト既約表現の指標は, $V_{E_{7+1/2}}$, $V_{E_{7+1/2}+\alpha_8}$ の指標と一致する．