論文の内容の要旨

論文題目: Schubert polynomials, Kraśkiewicz-Pragacz modules and highest weight categories

(Schubert 多項式, Kraśkiewicz-Pragacz 加群と最高ウェイト圏)

氏名: 渡部 正樹

本論文では, Schubert 多項式の正値性に関するいくつかの問題を動機として, KP 加群の構造および homological な性質について調べた.

Schubert 多項式は旗多様体のコホモロジー環の Schubert 類の記述に現れる多項式の族であり, 代数的組合せ論における大きなテーマの 1 つである. Schubert 多項式は特別な場合として Schur 多項式を含むことが知られており, Schur 多項式は一般線形 Lie 環 $\mathfrak{gl}_n$ の既約表現の指標として現れるが, これを Schubert 多項式の場合に一般化したものが Kraśkiewicz と Pragacz によって導入された表現の族 (この論文では **Kraśkiewicz-Pragacz 加群**もしくは **KP 加群**と呼ぶ) である ([3], [4]). KP 加群 $\mathcal{S}_w$ は置換 w に対して定義され, $w \in S_\infty^{(n)} = \{w : w(n+1) < w(n+2) < \cdots\}$ なら $n \times n$ 上三角行列全体のなす Lie 環 $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_n$ の表現になる. $\mathcal{S}_w$ はその指標が Schubert 多項式 $\mathfrak{S}_w$ になるという性質をもつ.

Schubert 多項式に関するよく知られた性質の 1 つに, 積の Schubert 正値性がある. これは, 2 つの Schubert 多項式の積を Schubert 多項式の一次結合に $\mathfrak{S}_w\mathfrak{S}_v = \sum_u c_{wv}^u \mathfrak{S}_u$ $(c_{wv}^u \in \mathbb{Z})$ と展開すると, $c_{wv}^u \geq 0$ となるというものである. この性質について, 今までに知られていた証明は, c_{wv}^u に幾何的な解釈を与える, つまり, c_{wv}^u が旗多様体の Schubert 部分多様体たちの交点の個数であるということを利用するものであった.

Schur 多項式どうしの積の場合は, 積の展開に現れる係数は例えば Littlewood-Richardson 盤のような組合せ論的対象の個数として表すことができる. これに対応する, c_{wv}^u の組合せ論的記述を与える問題, つまり, c_{wv}^u をなんらかの組合せ論的対象の個数として表す問題は, 代数的組合せ論における長らくの未解決問題となっている.

本研究では Schubert 多項式の積の Schubert 正値性について新たに表現論的なアプローチを行った. 本研究の結果の 1 つとして, c_{wv}^u の非負性に KP 加群を使った新たな証明を与え, また, 後で述べるような KP 加群による c_{wv}^u の "表現論的" な記述を与えることもできた.

本研究の動機となった他の問題として, Schur 関数どうしの **plethysm** と呼ばれるある種の積の正値性を, Schubert 多項式の場合に拡張したい, というものがある. 対称関数 f と g に対し, それらの plethysm $f[g]$ は次のように定義される. 簡単のため g の係数はすべて正整数であるとし, $g = x^\alpha + x^\beta + \cdots$ と係数が 1 の単項式の和に展開する. このとき,

$$f[g] = f(x^\alpha, x^\beta, \ldots)$$

を f と g の plethysm という. 2 つの Schur 関数 s_λ と s_μ に対しそれらの plethysm $s_\lambda[s_\mu]$ は Schur 関数の非負係数の和になる, という性質はよく知られている. 上で与えた plethysm の定義は g が対称関数ではなく一般の多項式である場合にも容易に一般化でき, 本研究では KP 加群を用いて, Schur 関数と Schubert 多項式の

plethysm $s_\lambda[\mathfrak{S}_w]$ が Schubert 多項式の非負係数の和になるという新しい結果を得ることもできた.

多項式の Schubert 正値性を調べる上で, **KP filtration** をもつような $\mathfrak{b}$-加群のクラスを考えることが非常に重要となる. $\mathfrak{b}$-加群 M の KP filtration とは, filtration $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M$ であって, 各 M_i/M_{i-1} が KP 加群に同型になっているようなものをいう. KP 加群の指標は Schubert 多項式であるから, ある $\mathfrak{b}$-加群 M が KP filtration を持てば, M の指標は Schubert 多項式の非負係数和となることがわかる. つまり, たとえば

- テンソル積加群 $\mathcal{S}_w \otimes \mathcal{S}_v$ や,
- Schur 函手での KP 加群の像 $s_\lambda(\mathcal{S}_w)$

が KP filtration をもつことがいえれば, それぞれ,

- Schubert 多項式の積の Schubert 正値性の新たな証明, および
- Schur 関数と Schubert 多項式の plethysm の正値性の証明

が得られることになる.

本研究では, KP filtration をもつ加群のクラスを調べるために**最高ウェイト圏** (Cline-Parshall-Scott, [1]) の手法を用いた. 最高ウェイト圏とは大まかにいえば, **標準対象**とよばれる対象の族 $\{\Delta(\lambda)\}$ が定められておりいくつかの公理をみたす abel 圏である. 最高ウェイト圏には**余標準対象**と呼ばれる対象が自然に定まり, ある対象が標準対象による filtration をもつことと, 余標準対象との Ext^1 がすべて 0 になることが同値であるという性質をもつ. 本研究では, $\mathfrak{b}$-加群の圏の適切な部分圏に KP 加群が標準対象となるような最高ウェイト圏の構造を定義し, それを用いて KP filtration をもつ加群のクラスを調べた. これは Polo や van der Kallen などによる Demazure 加群についての同様の研究 ([6], [8], [9, §3]) がモデルとなっている.

以下で本論文における主な結果を紹介する. 以下 $\mathfrak{b}$-加群としては対角行列のなす部分代数に関するウェイト分解をもつもののみを考える.

$\lambda \in \mathbb{Z}^n$ に対し $|\lambda| = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ とおく. 置換 $w \in S_\infty^{(n)}$ に対しその Lehmer code (§1.1) を $\mathrm{code}(w) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ で表し, また, $\lambda \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対し Lehmer code が λ になるような置換を $\mathrm{perm}(\lambda)$ で表す. $\mathbb{Z}^n$ 上の順序 $<$ および $<'$ を,

$$\lambda < \mu \overset{\text{def}}{\iff} |\lambda| = |\mu|, \mathrm{perm}(\lambda + k\mathbf{1})^{-1} \underset{\text{lex}}{>} \mathrm{perm}(\mu + k\mathbf{1})^{-1}$$

$$\lambda <' \mu \overset{\text{def}}{\iff} |\lambda| = |\mu|, \mathrm{perm}(\lambda + k\mathbf{1})^{-1} \underset{\text{rlex}}{>} \mathrm{perm}(\mu + k\mathbf{1})^{-1}$$

で定める. ただし, $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^n$ であり, また, $k \in \mathbb{Z}$ は $\lambda + k\mathbf{1}, \mu + k\mathbf{1} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ となるようにとる. また, $\underset{\text{lex}}{>}$, $\underset{\text{rlex}}{>}$ はそれぞれ置換の辞書式順序 (列 $(w(1), w(2), w(3), \ldots)$ の辞書式順序) および逆辞書式順序 (列 $(\ldots, w(3), w(2), w(1))$ の辞書式順序) である. また, $\lambda \prec \mu \overset{\text{def}}{\iff} \lambda < \mu$ かつ $\lambda <' \mu$ と定める.

> **定理.** (Theorem 2.3.1) $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$ を $\prec$ に関する (有限な) order ideal とする. このとき, ウェイトが Λ に含まれるような $\mathfrak{b}$-加群全体の圏 $\mathcal{C}_\Lambda$ は (Definition 1.3.1 の意味で) weight poset を $(\Lambda, \prec)$, 標準対象を $\mathcal{S}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ とする最高ウェイト圏になる. $\mathcal{C}_\Lambda$ の余標準対象は $\mathcal{S}^*_{\rho-\mu} \otimes K_\rho$ $(\lambda \in \Lambda)$ で与えられる.

ただし K_ν はウェイトが $\nu \in \mathbb{Z}^n$ の 1 次元表現を表す. また, $\mathcal{S}_\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{Z}^n)$ は KP 加群をすこし一般化したものである. 具体的には, $\lambda \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ なら $\mathcal{S}_\lambda$ は $w = \mathrm{perm}(\lambda)$ に対応する KP 加群 $\mathcal{S}_w$ であり, 一般の λ に対しては $\mathcal{S}_\lambda := \mathcal{S}_{\lambda + k\mathbf{1}} \otimes K_{-k\mathbf{1}}$ $(k \in \mathbb{Z},\ \lambda + k\mathbf{1} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0})$ と定義する. また, $\rho = (n-1, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^n$ である.

上の定理を証明する過程で, KP 加群の次のような表示を得てそれを用いた. これは Joseph による Demazure 加群の表示 ([2, Theorem 3.4]) の類似物とみることができる (KP 加群が Demazure 加群の特別な場合として現れるというわけではない. Example 3.5 を参照).

定理. (Theorem 2.1.1) $w \in S_\infty^{(n)}$ と $1 \le i < j \le n$ に対し, $m_{ij}(w) = \#\{k \in \mathbb{Z}_{>0} : k > j, w(i) < w(k) < w(j)\}$ とおく. I_w を $h - \langle \mathrm{code}(w), h\rangle$ (h: diagonal) と $e_{ij}^{m_{ij}(w)+1}$ ($1 \le i < j \le n$) で生成される $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$ の左イデアルとする. このとき, $\mathcal{S}_w \cong \mathcal{U}(\mathfrak{b})/I_w$ である.

先の定理と最高ウェイト圏の一般論から, 次の系が従う.

系 1. (Corollary 2.3.5) 有限次元 $\mathfrak{b}$-加群 M が KP filtration をもつ $\iff$ $\mathrm{Ext}^1(M, \mathcal{S}_{\rho-\lambda}^* \otimes K_\rho) = 0$ ($\forall \lambda \in \mathbb{Z}^n$). またこのとき M の KP filtration に $\mathcal{S}_\lambda$ が現れる回数は $\dim \mathrm{Hom}(M, \mathcal{S}_{\rho-\lambda}^* \otimes K_\rho)$ で与えられる.

系 2. (Corollary 2.3.6) M が KP filtration をもつならば M の任意の直和因子も KP filtration をもつ. また, 完全列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ において M と N が KP filtration をもつならば L も KP filtration をもつ.

系 2 を用いて, 先に述べた KP filtration に関する問題を解決することができる.

定理. (Theorem 3.1.1, Corollary 3.1.5) $\mathcal{S}_\lambda \otimes \mathcal{S}_\mu$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{Z}^n$) および $s_\lambda(\mathcal{S}_\mu)$ (λ: partition, $\mu \in \mathbb{Z}^n$) は KP filtration をもつ.

先に述べた通り, この定理から, 積の正値性の新たな証明, および, plethysm の正値性という新たな結果が得られる. また, 系 1 から, 積の展開 $\mathfrak{S}_\lambda \mathfrak{S}_\mu = \sum c_{\lambda\mu}^\nu \mathfrak{S}_\nu$ に現れる係数が $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(\mathcal{S}_\lambda \otimes \mathcal{S}_\mu, \mathcal{S}_{\rho-\nu}^* \otimes K_\rho) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(\mathcal{S}_\lambda \otimes \mathcal{S}_\mu \otimes \mathcal{S}_{\rho-\nu}, K_\rho)$ の次元として表せるということもわかる.

この定理の証明には系 2 に加え, KP 加群のテンソル積のうち特別な場合である $\mathcal{S}_w \otimes \mathcal{S}_{s_i}$ については KP filtration が具体的に構成できるということも示してそれを用いた. また, 今回の論文では, これらの $\mathcal{S}_w \otimes \mathcal{S}_{s_i}$ よりも少し一般の場合 $\mathcal{S}_w \otimes S^d(\mathcal{S}_{s_i})$ や $\mathcal{S}_w \otimes \bigwedge^d(\mathcal{S}_{s_i})$ についても KP filtration の具体的な構成を得ることができた.

上述の最高ウェイト圏 $\mathcal{C}_\Lambda$ の中でも特に興味深いのが $\Lambda = \Lambda_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : 0 \le a_i \le n - i\}$ の場合である. これは考える KP 加群を $\mathcal{S}_w$ ($w \in S_n$) に限ることに対応している.

定理. (Theorem 4.1.1, Theorem 4.2.1) $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_{\Lambda_n}$ の Ringel 双対 ([7]) は $\mathcal{C}_n$ 自身と圏同値になる. KP filtration をもつ加群のなす充満部分圏 $\mathcal{C}_n^\Delta$ の上に Ringel 双対性から自然に定まる反自己同値 $F : \mathcal{C}_n^\Delta \to \mathcal{C}_n^\Delta$ は $\mathcal{S}_w$ を $\mathcal{S}_{w_0 w w_0}$ にうつす ($w_0 \in S_n$ は最長元).
また, 上の F は $\mathcal{C}_n^\Delta$ 上の演算 $(M, N) \mapsto (M \otimes N)^{\Lambda_n}$ を保つ: つまり, $F((M \otimes N)^{\Lambda_n}) \cong (FM \otimes FN)^{\Lambda_n}$ ($M, N \in \mathcal{C}_n$) が成り立つ. ただし L^{Λ_n} で L の商加群であってウェイトがすべて Λ_n の元であるような最大のものを表す.

定理の前半部からとくに, KP 加群の間の Ext 群が次のような興味深い対称性をもつことがわかる.

系. (Corollary 4.1.2) $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{S}_w, \mathcal{S}_v) \cong \mathrm{Ext}^i(\mathcal{S}_{w_0 v w_0}, \mathcal{S}_{w_0 w w_0})$ ($w, v \in S_n, i \ge 0$).

参考文献

[1] E. Cline, B. Parshall, and L. Scott. Finite-dimensional algebras and highest weight categories. *J. Reine Angew. Math.*, 391:85–99, 1988.

[2] A. Joseph. On the Demazure character formula. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 18(3):389–419, 1985.

[3] W. Kraśkiewicz and P. Pragacz. Foncteurs de Schubert. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 304(9):209–211, 1987.

[4] W. Kraśkiewicz and P. Pragacz. Schubert functors and Schubert polynomials. *Eur. J. Comb.*, 25(8):1327–1344, 2004.

[5] A. Lascoux and M. Schützenberger. Polynômes de Schubert. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 294(13):447–450, 1982.

[6] P. Polo. Variétés de Schubert et excellentes filtrations. *Astérisque*, (173-174):10–11, 281–311, 1989. Orbites unipotentes et représentations, III.

[7] C. M. Ringel. The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences. *Math. Z.*, 208(2):209–223, 1991.

[8] W. van der Kallen. Longest weight vectors and excellent filtrations. *Math. Z.*, 201(1):19–31, 1989.

[9] W. van der Kallen. *Lectures on Frobenius Splittings and B-modules.* Springer, 1993.