

審査の結果の要旨
論文題目
Option Pricing under Various Market Restrictions
(種々の市場制約下でのオプション価格付けについて)

氏名：齊藤大河

2007 年以降の度重なる金融危機に際し、金融機関はオプション取引において、オプション原資産の流動性の低下及び激しい市場変動によるヘッジ取引費用の増大により、当初より準備していたヘッジ取引コストの資金が枯渇する状況や、顧客とのオプション取引から同様のポジションを抱える複数の金融機関のヘッジ取引により原資産価格の変動をさらに加速される状況を経験した。この様な状況下では、ヘッジ取引に係る費用、ヘッジ取引がヘッジ対象資産価格に与える影響を考慮したオプション等デリバティブ価格の評価が極めて重要である。

以上の問題意識の下、齊藤大河君は、(1) オプションのヘッジ取引に係る流動性コスト及び、ヘッジ取引によるヘッジ対象資産の市場価格に与える影響と、(2) 為替市場におけるある水準を超える通貨高を防ぐための通貨当局による為替介入を考慮に入れたオプション価格評価モデルを研究し、いくつかの独自かつ重要な結果を導き、彼の考案した方法、モデルが国際的な金融市場取引やリスク管理の実務において極めて有意義であることを示した。従って、齊藤君が博士学位授与に値するものであると審査委員は全員一致で判断した。

尚、本論文の主要部分はテーマ別に 3 章により構成されており、上記、(1)については、`Local Risk Minimization with Supply Curve Model with Market Impacts` (第 2 章) 及び、`Representation of Self-Financing Strategy for Non-linear Supply Curve Model` (第 3 章)、(2)に関しては、`Foreign Exchange Option Pricing under Intervention` (第 4 章) である。以下では、本博士論文をより具体的に紹介する。

第 2 章は、不完備市場でのオプション取引について、ヘッジ対象資産における流動性による取引コストとヘッジ取引によるヘッジ対象資産の市場価格への影響(以下マーケットインパクトと呼ぶ)を考慮した離散時間のモデルにおいて、局所リスク最小化法による最適なヘッジ戦略を明示的に与えた。より具体的には以下の結果を得た。(a) マーケットインパクトの大きさに係るパラメータ(以下マーケットインパクトパラメータと呼ぶ)が確定的な時間についての関数の場合に、(i) オプションが満期において差金決済される場合は、最適なヘッジ戦略が満期から後ろ向きに明示的に解けること、(ii) オプションが満期において現物決済される場合は、マーケットインパクトパラメータが 0、即ちマーケットインパクトがない場合の最適戦略の周りで、摂動法により最適戦略のマーケットインパクトパラメータによる 1 次までの展開が後ろ向きに明示的に与えられることを示した。(b) マーケットインパクトパラメータが時間依存しない定数の場合に、最適戦略が一意に存在すること、及び満期から後ろ向きに明示的に与えられることを示した。マーケットインパクトを考慮するモデルについて、予め定められた量の商品を一定期間内に売り切る、所謂最適執行の問題は先行研究が多く存在するが、オプション価格評価の研究は数少ない。特に不完備市場でのオプション価格評価について最適戦略を明示的に与えているものはこれまでに無く、本論文は局所リスク最小化法による最適戦略を離散時間のモデルについて与えている。これにより現物取引が困難な原資産に係るオプションを、原資産と相関のあるマーケットインパクトがあるヘッジ対象資産を用いてヘッジを行う際の最適取引戦略及び初期時点において受け取るべきオプションプレミアムが導かれる。平均分散最小化など異なる定義による最適戦略及びヘッジ対象資産の流動性が時間依存する確率過程である場合は今後の研究課題である。

第 2 章では、まず、離散時間において、ヘッジ対象資産について Cetin et al. (2004) による線形な供給関数、及びマーケットインパクトを定義した。ここで線形な供給関数とマーケットインパクトは、ヘッジ対象資産のオーダーブックにおいて、すべての価格に渡り定数の注文密度を持ち、特にビッド・オフアースプレッドが無い場合に相当する。さらにマーケットインパクトを定義する際に、マーケットインパクトパラメータを時間依存する確定的な関数とした。これはヘッジ対象資産価格における、累積マーケットインパクトがヘッジ対象資産の最終的なポジションにのみ依存する定数パラメータの場合を含む一般的な形になっている。次に Lamberton et al. (1998) の離散時間における固定率の取引コストのみが存在する場合の局所リスク最小化を基に、マーケットインパクトが存在する場合の局所リスク最小化を定式化した。この

下で上述(b)を示した。これはLamberton et al. (1998)の結果が、マーケットインパクトがある場合にも同様に成立することを示したものである。次に上述(a)を示した。(a)-(ii)は、累積マーケットインパクトが途中のヘッジ対象資産のポジションに依存する場合、現物決済の場合の局所リスク最小化戦略は、確率変数に関する非線形連立方程式の解で与えられ、明示的に解くことが出来ないが、マーケットインパクトが無い場合の最適戦略の周りにおいて摂動を行うことで1次近似が明示的に与えられることを示している。さらに(a)-(i)(ii)について数値例を与えた。具体的には、ヘッジ対象資産が原資産と正の相関を持つ場合に、2期間の2項モデルにおいて、差金決済における最適戦略と現物決済における摂動法による最適戦略の1次近似の例を示した。特に現物決済の場合について、2期間の場合においては、最適戦略を得るための非線形連立方程式が3次方程式に帰着され、その戦略が一意解を持つ条件を示した後、最適戦略と摂動法による近似戦略との数値比較を行った。

第3章は、Roch (2011)におけるオーダーブックの注文密度が一樣かつマーケットインパクトパラメーターが定数の場合の自己資金調達戦略の連続時間の資産過程の表現の拡張を与えた。具体的には、オーダーブックの注文密度が一樣で無い場合に、自己資金調達戦略の資産過程の連続時間での表現を拡張した。これにより実務において見られるオプション原資産が一般的なオーダーブックの形状を持つ場合に、オプションヘッジに関する最適なポートフォリオを構成する問題を考えることができる。

第3章では、まず、オーダーブックの密度の分布と供給関数、最大購入価格の間に成立する関係式を示した後、離散時間において非線形な供給関数に対応する最大購入価格を通じてマーケットインパクト、自己資金調達戦略及びその資産過程を定義し、時間幅を0に近づける際の確率収束極限を導出した。さらに具体例としてCetin et al. (2004)におけるマーケットインパクトが存在せず非線形な供給関数の場合の自己資金調達戦略の資産過程と、Roch (2011)におけるマーケットインパクトが存在し、線形な供給関数の場合の自己資金調達戦略の資産過程、またマーケットインパクトが存在し非線形な供給関数でかつビッド・オファースプレッドが存在する場合の資産過程の表現を導出し、Cetin et al. (2004)とRoch (2011)の資産過程の表現の拡張となっていることを示した。

第4章は、外国為替市場において為替介入が存在する場合の為替オプションの価格評価を考察した。具体的にはフォワード為替レートの価格過程を、時間依存し確定的な吸収壁付き拡散過程によって表現し、ボラティリティ過程が時間依存する確定的な場合に、ヨーロッパンオプション、デジタルオプション価格及びグリークスの解析解を与えた。さらに介入の水準が有限個の値をとる確率変数で、フォワード為替レートを駆動するブラウン運動と独立な場合にモデルを拡張し、その場合のヨーロッパンオプション価格が解析的に計算されることを示した。これまでに存在する先行研究は、ユーロ発足時のあるバンドの中で為替レートが管理されていた欧州通貨のオプション価格評価を動機とするもので、バンド内で為替レートが上下の境界に近づく場合に拡散項が0に近づくものや、無裁定条件を満たさない反射壁を用いたモデルであった。これに対し本論文では、金融危機以後の為替レートの一方向に介入が起こりうる場合を想定し、さらに介入水準が時間依存する場合および有限個の値をとる確率変数の場合に吸収壁を用いて、時間依存する確定的なボラティリティ過程の場合に無裁定の枠組みでヨーロッパンオプションの価格を導出した。フォワード為替レートのボラティリティ過程が確率過程で表現される場合、及び介入水準がフォワード為替レートと相関を持つ確率過程である場合のオプション価格の評価は今後の研究課題である。

第4章では、まず、オプション満期に対応する自国フォワード測度の下で、時間依存する確定的な吸収壁付き拡散過程を定義した後、その拡散過程の強い解の存在と一意性を示した。さらにそのモデルの下でヨーロッパンプットオプション、デジタルオプション価格及び、介入時刻の分布関数、オプションのデルタ、ガンマ、セータ、ベガの解析的な表現を与えた。さらに介入水準が有限個の値をとる確率変数で表される場合にモデルを拡張し、介入水準がフォワード為替レートを駆動するブラウン運動と独立な場合に、ヨーロッパンプットオプションの価格が各介入水準に対応するヨーロッパンオプション価格の重みづけの和で表されることを示した。最後に数値例として、2009年以降為替介入が継続されているユーロスイスフランについての為替オプション価格について、モデル価格と市場価格の比較を行った。

以上により、齊藤大河君の論文は、博士学位を授与するに十分な水準に達していると審査委員全員一致で判断した。

審査委員：高橋明彦（主査）、大日方隆、佐藤整尚、藤井優成、白谷健一郎