

## 審査の結果の要旨

論文提出者氏名 澄田 範奈

工学、物理学、経済学など、異なる分野における現象や問題に対して、その本質を抽出して定式化した結果として同一の数学的問題設定に導かれることがしばしば見られる。線形相補性問題はこのような普遍性を有する問題設定の一つであり、最適化分野における局所最適性条件、力学における接触問題、ゲーム理論における双行列ゲーム、経済学における均衡の概念などの定式化に現れる。線形相補性問題は、とくに数理計画法の分野において重要な問題と認識され、理論、応用の両面から盛んに研究が行われてきた。線形相補性問題を数学的に記述すると、二つのベクトルの間の関係を表す線形の等式条件が与えられたとき、成分がすべて非負であって、さらに、対応する成分の間に相補性条件が成り立つようなベクトルの組を求める問題ということができる。計算量理論的には線形相補性問題はNP困難であり、すべての問題例を理論的な保証をもって効率的に解くことは難しいとされている。この事実を踏まえ、アルゴリズムについては、ニュートン法やレムケ法などに基づく実用的高速アルゴリズムの研究とソフトウェア開発などの応用指向の研究、および、多項式時間で効率的に解くことのできる線形相補性問題のクラスを解明する理論研究が行われている。後者については、線形相補性問題を記述する行列の代数的性質に着目して、半正定値行列、P行列、Z行列、K行列などの場合が研究されてきたが、行列の疎性に着目した研究はなかった。線形相補性問題のもつ数学的構造については、整数性などの特別な性質をもつ解が存在する状況を明らかにする研究が行われてきた。線形計画法における完全単模性の概念に対応するものとして、主単模性の概念が線形相補性問題の文脈で論じられている。しかし、線形計画法における完全双対整数性に対応する概念が線形相補性問題に対してどのような形で定式化されるべきかについては、未だ明らかにされていない。本論文は、線形相補性問題における疎性と整数性に着目して、主に計算量理論的な観点から、線形相補性問題の新しい理論展開を図るものである。線形等式制約を記述する行列が疎である場合や解自体が疎性をもつ場合に、パラメータ化計算複雑度などの枠組みを用いて計算量解析を行うとともに、基底の方向性を考慮した問題の形式を考案し、完全双対整数性に対応する概念を定式化することに成功している。

本論文は「The Linear Complementarity Problem: Complexity and Integrality」（線形相補性問題：計算複雑度と整数性）と題し、8章からなる。

第1章「Introduction」（序論）では、線形計画法や線形相補性問題を中心とした数理計画法と双行列ゲームなどのゲーム理論の概要と、線形相補性問題に関する既存研究を述べた後、本論文の主要な成果を説明している。

第2章「Preliminaries」（準備）では、数学的議論のために、線形計画問題、双行列ゲーム、整数線形計画問題に関わる定義や問題の性質を記している。

第3章「The linear complementarity problem」（線形相補性問題）では、線形相補性問題に関連する

用語の定義と既存研究の詳細を述べている。

第4章「Polynomial solvability of sparse linear complementarity problems」（疎な線形相補性問題の多項式可解性）では、行列の疎性が理論的にも工学的にも重要であることを踏まえ、行列の各行がもつ疎性に着目して線形相補性問題の計算複雑度を分類している。具体的には、2-線形相補性問題がNP困難であることを示すとともに、符号均衡2-線形相補性問題に対して現時点で最も良いアルゴリズムを提案している。

第5章「Fixed-parameter tractability of sparse linear complementarity problems」（疎な線形相補性問題の固定パラメータ容易性）では、行列の疎性や解ベクトルの疎性をパラメータと見て、線形相補性問題に対するパラメータ化計算複雑度を解析している。

第6章「The linear complementarity problem with orientation」（方向つき線形相補性問題）では、線形相補性問題の解ベクトルの満たすべき相補性の構造に着目して、方向つき線形相補性問題と称する新しい形の問題を導入し、さまざまな部分クラスの計算複雑度を分類している。具体的には、歪対称行列とK行列に対する多項式時間解法を与え、半正定値行列、P行列、Z行列に対してはNP困難であることを示している。

第7章「Total dual integrality of the linear complementarity problem」（線形相補性問題の完全双対整数性）では、線形相補性問題に整数解が存在するための十分条件を求めることを目的として、第6章で導入した方向つき線形相補性問題に基づいて、線形相補性問題に対する完全双対整数性の概念を定義している。さらに、この概念が、線形不等式系における完全双対整数性の概念と同様の意義を有することを示している。

最後に第8章「Conclusion」（結論）では、本論文の成果を簡潔にまとめ、今後の研究課題を記している。

以上を要するに、本論文は、数理計画法の分野で重要な問題である線形相補性問題に対して計算複雑度の分類や整数性を議論する枠組みを与えたものであり、数理情報学の発展に大きく貢献するものである。

よって本論文は博士（情報理工学）の学位請求論文として合格と認められる。