

き裂進展を考慮した構造最適設計に関する研究

66778 市川 幸太
指導教員 鈴木 克幸 准教授

In recent years, many fatigue cracks by intermittently load are found and worried. Because of difficulty in finding the fatigue cracks on the maintenance before destruction, the structure with the shape with the longest fatigue life is needed. Practical fatigue destruction is occurred by plural fatigue cracks with mutually influenced. In this paper, we present a method how to decide a initial crack, simulations of plural fatigue cracks with X-FEM, and estimation of the fatigue life. And we present the optimization of structure by using result of the simulation as objective function with a sequence of meshes by Basis Vector Method.

Key words: Plural fatigue cracks, X-FEM, Structure optimization

1. 緒言

近年、構造物に断続的な荷重がかかり、き裂が進展することによる脆性破断が問題となっている。脆性破壊では、一般的に要求される設計強度を満足した条件の下で発生するため、予測することが難しく、破断を防ぐための対策としては定期的なメンテナンスにおける目視や非破壊検査に頼っているのが現状である。しかし、このような定期的なメンテナンスを行っても、初期のき裂は短く発見しづらい場合が多く、見落とした場合には重大な被害を招きかねない。

そこで本論文では、定期的なメンテナンスで見落とされた場合でも破断を招くことが無い様、き裂の進展により破断にいたるまでの寿命を最大化する最適な構造設計見つけ出すことにより、構造物の安全性を向上することを目的とする。

き裂の発生・進展のシミュレーションについては、簡便で精度の高いシミュレーション技術が必要であり Belytschko ら¹⁾によって提案された簡便で精度の高い extended finite element method (X-FEM)を用いる。

また、一般の構造物における脆性破壊は、複数のき裂が偶発的に発生し、相互のき裂の進展に影響を及ぼしながら進展する。本論文では複数き裂の影響を考慮したき裂進展解析により疲労寿命を算出し、疲労寿命を目的関数として構造最適化を行った結果について報告する。

2. 定式化

2.1 X-FEM

X-FEM は、Babuska ら²⁾の PU-FEM の重み関数において重み関数として有限要素法の形状関数を使い、近似関数として要素内でのき裂の不連続性を表す関数およびき裂先端の特異場を表す関数を付加したもので、変位の近似式は次式で表される。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{d}_i + \sum_{j \in J} N_j(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{b}_j + \sum_{k \in K} N_k(\mathbf{x}) \sum_{l=1}^4 \psi_l(\mathbf{x}) \mathbf{c}_k^l \quad (1)$$

ここで、 N_i は節点 i に関する (通常の FEM と同じ) 内挿関数である。また、 $H(\mathbf{x})$ はき裂面の不連続性を表す関数、そして $\psi_l(\mathbf{x})$ はき裂端周辺の特異変位場を表す関数の基底であり、それぞれ次式で表される。

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & y > 0 \\ -1 & y < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum_{l=1}^4 \psi_l(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^4 \psi_l(r, \theta) = \begin{Bmatrix} \sqrt{r} \sin(\theta/2) \\ \sqrt{r} \cos(\theta/2) \\ \sqrt{r} \sin(\theta/2) \sin \theta \\ \sqrt{r} \cos(\theta/2) \sin \theta \end{Bmatrix}^T \quad (3)$$

ただし、これらはき裂端を原点とし、き裂線に平行に x 軸をとった局所直交座標系及びそれと対応する極座標系の関数である。また、 J はき裂面周辺の変位の不連続性を考慮する節点の集合、そして K は、き裂端周辺の特異性変位場を考慮する節点の集合である。

2.2 き裂進展方向の決定

き裂が進展するときの進展方向角度 θ の決定には **maximum circumferential stress criterion** を用いた。これは円周方向の応力が最大となるような方向にき裂が進展するという仮説に基づいている。各計算ステップにおいて得られた応力拡大係数 K_I 値、 K_{II} 値を用いて次式により進展方向角度が求まる。

$$\theta = 2 \arctan \frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \quad (4)$$

2.3 き裂進展量

繰り返し荷重が与えられた時のき裂伝播寿命の計算で広く使われている手法として **Paris** によって提案されたパリス則がある。

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \quad (5)$$

ここで、 a : き裂進展長さ、 N : 繰り返し回数、 C 、 m : 伝播定数、 ΔK : 応力拡大係数範囲である。次に複数き裂のき裂進展量は、規定の最大き裂進展長さを Δa_{fix} 、最大の応力拡大係数範囲 ΔK_{max} とするとき、

$$\Delta a_i = C \Delta K_i^m \frac{C \Delta K_{max}^m}{\Delta a_{fix}} \quad (6)$$

2.4 初期き裂方向

X-FEM において、き裂進展解析を行うためには初期き裂が必要である。しかし、実際の構造物において、初期状態でき裂が予め存在することは無い。そこで、実際の疲労き裂による破壊における初期のき裂が発生のアルゴリズムに照らし合わせて、初期き裂を策定する必要

がある。き裂発生アルゴリズムは、

- ① 結晶におけるすべり発生
- ② 多点表面き裂の発生
- ③ 多点表面き裂の成長
- ④ 合体
- ⑤ ひとつの大きな表面き裂

である。上記アルゴリズム①～③において、初期の表面き裂の成長段階があることが分かる。このとき、き裂成長方向は、通常なき裂進展の場合と同様のアルゴリズム、つまり円周応力 $\sigma_{\theta\theta}$ が最大である方向にき裂が発生するという仮定に基づき、初期き裂発生方向を主応力方向とする。

2.5 最適化手法

本論文では、疲労寿命が最大となる形状を解析することを目的とする。これを非線形計画法の最適化問題として考えると、本論文での解析は、き裂進展自体をひとつの関数として扱うため、勾配を求めることができない。そこで、本論文では勾配を使用せずに最適解を求めることができる **Nelder-Mead Simplex 法**³⁾を用いて解析を行う。

3. X-FEM によるき裂進展解析

3.1 形状変更時の疲労寿命数値解析例

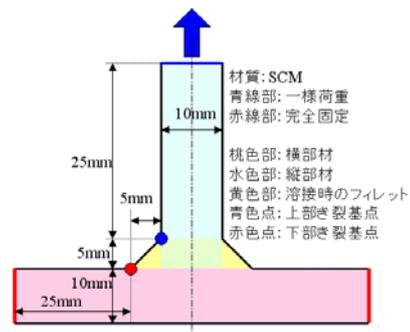


Fig.1 解析対象 (T字バー)

Fig.1の解析対象に対し縦部材幅、横部材幅をそれぞれ変化させた場合について解析を行った。形状変更の手法として **Basis Vector 法**を用いた。変更後の節点座標 M_α を形状変更の関数 α_i であらわすと以下ようになる。

$$M_\alpha = M + \sum_i \alpha_i (M_i - M) \quad (9)$$

縦部材幅を 10mm～5mm，横部材幅を 10mm～5mm に変化させた場合の疲労寿命の変化を示す。縦部材，横部材ともに幅を短くすると疲労寿命は短くなっている。しかし，縦部材幅 10mm，横部材幅 10mm の状態で，破断するのが下部のき裂であることにより，縦部材幅のみを短くした場合の疲労寿命の減少は，横部材幅のみを短くした場合の疲労寿命の減少に比べ小さくなっている。

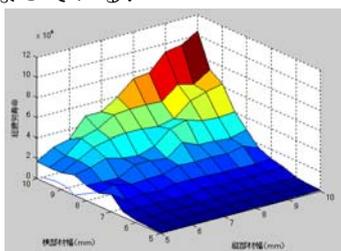


Fig.2 部材幅と応答曲面

縦部材幅	横部材幅										
	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
10mm	x	x	x	x	x	x	x	x	o	o	o
9.5mm	x	x	x	x	x	x	x	x	o	o	o
9.0mm	x	x	x	x	x	x	x	x	o	o	o
8.5mm	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
8.0mm	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
7.5mm	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
7.0mm	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
6.5mm	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
6.0mm	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
5.5mm	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
5.0mm	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o

Fig.3 部材幅と破断き裂

以下に縦部材・横部材を独立に短縮させた場合のき裂進展経路を示す。

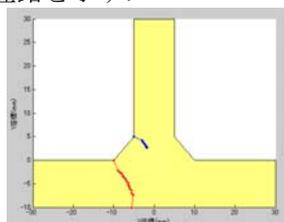


Fig.4 初期条件のき裂進展経路

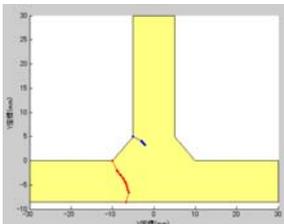


Fig.5 横部材幅 8.5mm のき裂進展経路

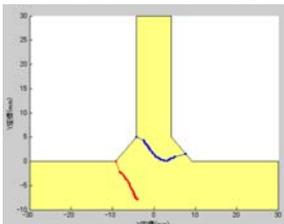


Fig.6 縦部材幅 8.5mm のき裂進展経路

き裂進展方向に関しては各部材の幅を変化させても大きな差異は無かった。

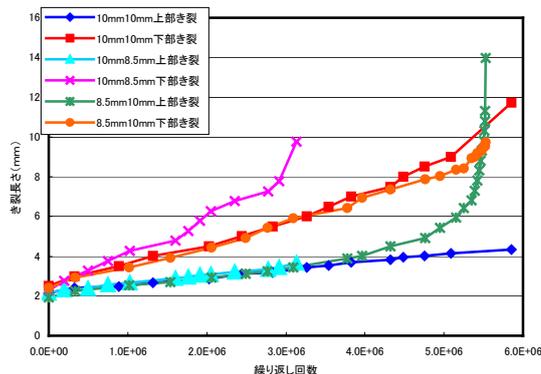


Fig.7 各部材幅のき裂進展長さとし繰り返し回数

Fig.7 より縦部材幅 10mm 横部材幅 8.5mm では形状変更前に比べて下部き裂の応力集中が増し疲労寿命が短いに対し，縦部材幅 8.5mm 横部材幅 10mm では両方のき裂が進展するため疲労寿命が延びている。また上部き裂はある程度進展した場合のみ急速進展しやすいき裂であるといえる。

3.2 構造最適化解析例

T 字バーの総重量を 6.63g とした時の最適解は以下のとおりである。

Table.1 疲労寿命最適化初期値と解析結果

	初期条件	最適化後
縦部材幅	7.5mm	6.01mm
横部材幅	7.5mm	8.25mm
総疲労寿命	2.14×10 ⁶ 回	3.17×10 ⁶ 回

この最適化により使用材料を増やすことなく疲労寿命を初期条件から 1.53 倍にすることが可能となった。縦部材幅を短縮することによりある程度上部き裂を伸ばしてエネルギーを分散させることで疲労寿命を延ばしていることが分かる。

次に von-Mises 応力を目的関数とした場合の最適解を示す。

Table.2 von-Mises 応力最適化初期値と解析結果

	初期条件	最適化後
縦部材幅	7.5mm	2.85mm
横部材幅	7.5mm	9.82mm
総疲労寿命	2.14×10 ⁶ 回	2.97×10 ⁵ 回

von-Mises 応力による最適化では上部き裂基点の応力を緩和するため縦部材幅が短くなったが短縮されすぎたため疲労寿命が短くなったと考えられる。

4. エンドヨークへの適用

4.1 現状の形状での解析

現状の形状で FEM 解析をすると以下の様になる。Fig.8 における 3 箇所なき裂基点を配置する。このときのき裂進展は Fig.9 の様に上部き裂が進展し、破断を起こす。

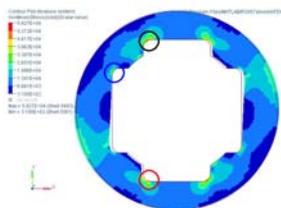


Fig.8 FEM 解析とき裂基点

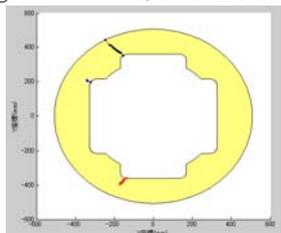


Fig.9 き裂進展図

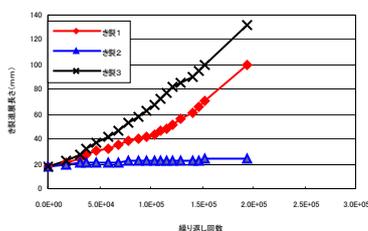


Fig.10 初期状態のき裂長さと繰り返し回数

4.2 構造最適化

材料使用量を変化させずに構造最適化を行うと以下の様になる。

Table.3 最適化初期値と解析結果

	初期条件	最適化後	応力最適化
上下保持面距離	17.0mm	9.75mm	0.0mm (下限値)
左右保持面距離	0.0mm	11.3mm	3.60mm
疲労寿命	1.94×10^5 回	2.90×10^5 回	1.56×10^5 回
寿命比	1	1.50	0.80

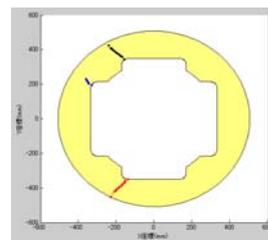


Fig.11 疲労寿命最適化後き裂進展図

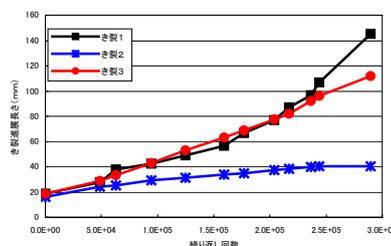


Fig.12 最適形状のき裂長さと繰り返し回数
最適化形状では上下き裂の応力集中範囲 ΔK がほぼ同じであるため、き裂進展長さが互いに影響を及ぼしながら進展している。これにより、エネルギーを消散させき裂進展を遅くしている。また、von-Mises 応力を目的関数とする最適設計では、本解析でも寿命が短くなった。

5. 結言

本論文では、複数き裂の進展や初期き裂の策定により構造物の疲労寿命を総合的に解析した。また、導かれた疲労寿命を、目的関数として構造最適設計を行った。これにより、疲労寿命が最大である最適形状を導出することを可能にした。

文献

- 1) T.Belytschko, T.Black : Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. Int.J. Numer. Meth. Eng., **45**(5), 601-620 (1999)
- 2) I.Babuska, J.M.Menlenk : The partition of unity finite element method, Int. J. Numer. Meth. Eng., **40**, 727-758 (1997)
- 3) Lagarias, J.C., J. A. Reeds, M. H. Wright, and P. E. Wright, Convergence Property of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions, SIAM Journal of Optimization, **9** (1), 112-147, (1998)