

MSCP 法における鋼構造立体部材の塑性耐力相関面

Interaction Surface of Plastic Resistances for 3 D Steel Structural Members in Multi-Spring Compact Procedure

大井謙一*・伊藤拓海*

Kenichi OHI and Takumi ITO

1. はじめに

1950年代の終わりから線形計画法（シンプレックス法）が骨組構造物の極限解析法に適用されはじめ、現在では静的許容条件に基づく Static LP と運動学的許容条件に基づく Kinematic LP とが解法の主流になっている。Static LP における部材応力は負部材耐力と正部材耐力によって限界付けられるが、これをスラック変数、サプレス変数を導入することなく、元の釣合式の枠内でシンプレックス法における最適性規準と基底・非基底変数の交換規則にしたがって釣合式の正準形を改善してゆくアルゴリズムを利用して解く場合が多い。Livesley¹⁾によって紹介されたこの方法は、Compact Procedure と呼ばれ（以下 CP 法と略記する）、骨組構造物のコンピューターによる極限解析法としては、最も一般的に用いられている。

軸力の影響を考慮した CP 法については、深井・滝野らの先駆的な研究²⁾があり、軸力と曲げの耐力相関曲線を区分線形（多角形）で近似して補助変数を導入し、追加された釣合式および制約条件式に対して CP 法を適用している。

本稿で取り上げる MSCP 法³⁾では、深井・滝野らの方法における補助変数が、部材の塑性化領域を構成する複数の単軸バネの応力という物理的意味をもつことになるほか、耐力相関面の全体像を把握していなくても、断面をマルチ・スプリングに置換するだけで極限解析が実行できるという簡便性がある。特に立体骨組内のビームカラム部材は、2軸曲げと軸力の耐力相関面の全体像を把握すること自体に、本稿で提示するような exhaustive な解析手法が必要である。本稿では、鉄骨ラーメン骨組でよく用いられる正方形中空断面と H 形断面を簡単なバネ配置で近似した場合の耐力相関面を凸集合理論に基づく解析手法で具体的に求め、既往の設計式・提案式と比較する。

*東京大学生産技術研究所 情報・システム大部門

2. MSCP 法の概要

2.1 CP 法における全体釣合式の構成

解かれる問題を通常の CP 法について記述しておく。

Maximize λ

Subject to: 全体釣合式 $\lambda \{P_0\} = [C] \{M\} \dots \dots \dots (1)$

塑性条件 $|M_j| \leq M_{pj} \dots \dots \dots (2)$

ここで、 λ : 荷重係数、 $\{p_0\}$: 節点荷重ベクトルの基準値、 $[C]$: 接続マトリクス (Connectivity matrix)、 $\{M\}$: 部材力 (内力) ベクトル、 M_{pj} : 部材耐力 (正負共通と仮定) である。

2.2 MSCP 法における部材釣合式と付加釣合式

通常の CP 法においては、曲げモーメントおよび軸力などの合応力成分が内力成分として選択され、これらの合応力成分に対して、(2)式の塑性条件が制約条件式として考慮される。MSCP 法では、合応力成分の代わりに、部材端に配置されたマルチ・スプリングを構成する各バネ力が内力成分として選択され、各バネ力に対して、直接、塑性条件を制約条件式として考慮する。

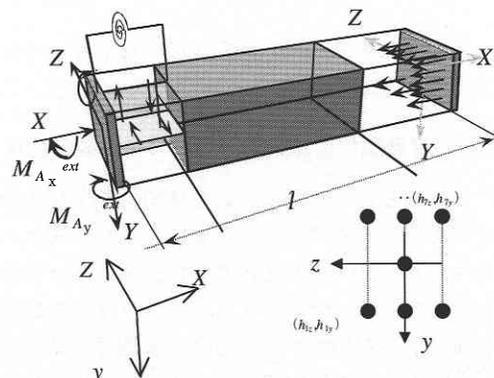


図1 両端にマルチ・スプリングを有する立体部材

研 究 速 報

立体部材の両端に下記の (2n+6) 個の単軸バネを配置する。(1)軸バネ: n個/1端, (2)せん断バネ: 2個/1端, (3)振りバネ: 1個/1端, マルチ・スプリングに挟まれる中間部材を自由物体としたときの釣合条件式は6個あるので, 互いに独立なバネ力の数は, (2n+6)-6=2n個である。ここでは, せん断バネの力に対しては制約を設けない(塑性化しない)ものとして消去し, 2n個の軸バネ力に両端共通の振りモーメント1個を加えた2n+1個の内力成分に関して, (3)式の部材釣合式が得られる。なお弾塑性解析に用いるマルチ・スプリングには有限の長さを持たせることがあるが, ここでは極限解析に用いるので長さを無視する。

$$\begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A l \\ Z_A l \\ M_{Ax}^{ext} \\ M_{Ay}^{ext} \\ M_{Az}^{ext} \\ X_B \\ Y_B l \\ Z_B l \\ M_{Bx}^{ext} \\ M_{By}^{ext} \\ M_{Bz}^{ext} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_{1y} & h_{2y} & \dots & h_{ny} & -h_{1y} & -h_{2y} & \dots & -h_{ny} & 0 \\ h_{1z} & h_{2z} & \dots & h_{nz} & -h_{1z} & -h_{2z} & \dots & -h_{nz} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -h_{1z} & -h_{2z} & \dots & -h_{nz} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_{1y} & h_{2y} & \dots & h_{ny} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ -h_{1y} & -h_{2y} & \dots & -h_{ny} & h_{1y} & h_{2y} & \dots & h_{ny} & 0 \\ -h_{1z} & -h_{2z} & \dots & -h_{nz} & h_{1z} & h_{2z} & \dots & h_{nz} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -h_{1z} & -h_{2z} & \dots & -h_{nz} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_{1y} & h_{2y} & \dots & h_{ny} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{A1} \\ p_{A2} \\ \vdots \\ p_{An} \\ p_{B1} \\ p_{B2} \\ \vdots \\ p_{Bn} \\ M_x \end{Bmatrix} \quad \dots (3)$$

なお, 2n個の軸バネは互いに独立ではないので, (4)式の付加釣合式を考慮する。

$$0 = -\sum_{j=1}^n p_{Aj} + \sum_{j=1}^n p_{Bj} \quad \dots (4)$$

これは, 材軸方向の中間荷重が作用していないという意味の条件式である。

(3)式を全体釣合式に寄与させ, また(4)式の条件式を追加する。各軸バネの軸力の制約条件式(塑性条件)は,

$$|p_{ij}| \leq p_{vij} \quad (i=A, B \quad j=1, 2, \dots, n) \quad \dots (5)$$

なお, p_{vij} : 各軸バネの降伏軸力で, 通常各軸バネの軸断面積 A_{ij} に材料の降伏強さ σ_y を乗じて設定する。

3. 凸集合理論による耐力相関面の全体像の把握

本節では, ある軸バネ配置に対して耐力相関面の全体像を把握する手順について述べる。もちろんマルチ・スプリング要素単体を対象としてCP法をパラメトリックに適用することもできるが, マルチ・スプリング単体は比較的要素数の少ない構造なので, ここでは釣合条件と塑性条件を満足する合応力成分の領域を下記の手順で直接評価する。

(1) 軸力と曲げの2成分の合応力(立体部材の場合は, 軸

力と2軸曲げの3成分)と, n個の軸バネの軸力成分との釣合式をたてる。

$$\begin{Bmatrix} M \\ N \end{Bmatrix} \text{ or } \begin{Bmatrix} M_z \\ M_y \\ N \end{Bmatrix} = [C_{spring}] \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix} \quad \dots (6)$$

(2) n次元軸バネ力の空間において, 軸バネの塑性条件を満足する領域はn次元超立方体(降伏軸力が共通の場合, n次元超立方体)になる。n次元超立方体は, (補遺1)で定義を与えている凸集合であり, その端点 $\{p^*\}$ は2のn乗個ある。

$$\{p^*\} = \{\pm p_{v1}, \pm p_{v2}, \dots, \pm p_{vn}\}^T \quad (\text{複号任意}) \quad \dots (7)$$

(3) 上記(7)式の端点を(6)式の釣合式を用いて, 2次元M-N合応力空間(立体部材の場合は, 3次元 M_z - M_y - N 合応力空間)へ線形写像する。(補遺1)の定理2の系に示すように, 合応力空間における耐力相関面の端点は, 元の軸バネ力空間における超立方体の端点を線形写像した点の中に存在する。例えば, 理想2フランジ断面の場合のように, 線形写像が双射の場合には, 軸バネ力空間における端点は,

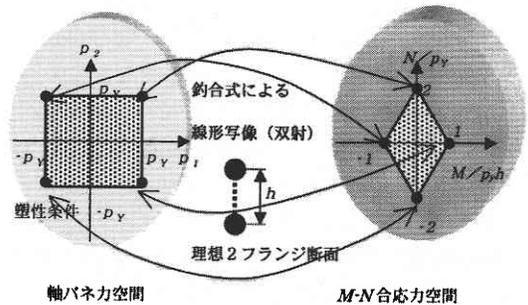


図2 凸集合の線形写像(双射: 1対1対応の場合)

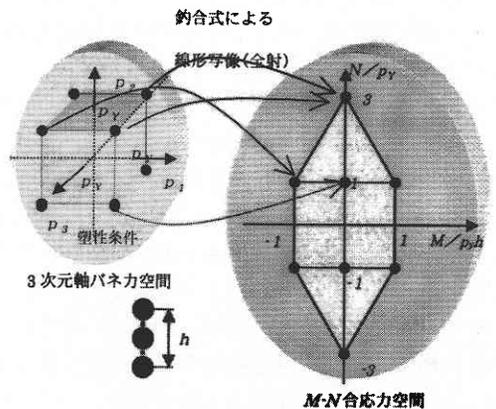


図3 凸集合の線形写像(全射)

研究速報

全て合応力空間の端点になる。

通常は次元が退化するので、線形写像された点は、全てが合応力空間での耐力相関面の端点とはならず耐力相関面の内側にくる場合がある。しかし、凸集合としての性質

は線形写像では保存されるので、線形写像された点の凸集合で耐力相関面と内部の点が表現できる。補遺 1 に、本解析に関連する凸集合の基本定理を証明なしで記述している。

ここでは、図 4 に示すような正方形中空断面、H 形断面を対象とした 8 個の軸バネ配置に対して、 M_z - M_y - N 3 次元合応力空間における耐力相関面を提示し、既往の設計式と比較する。解析に用いた数値演算環境を補遺 2 に示している。

基本的な軸バネ置換の方法は、断面を適当なセグメントに分け各セグメントの断面積を各セグメントの重心に配置することであるが、ここでは同一軸バネを単純化した位置に配置している。図 4 に示す 8 個の軸バネ配置に対して、2 軸曲げと軸力に対する耐力相関面を求めた結果を、図 5 から図 7 に示している。

単軸曲げと軸力に対する相関線を日本建築学会から刊行されている鋼構造限界状態設計指針⁵⁾などで採用されている次のような耐力相関式(図中の点線)と比較したものが図 8 である。

$$H \text{形断面強軸曲げ} : \frac{N}{N_y} + 0.85 \frac{M}{M_p} \leq 1 \text{ and } M \leq M_p \dots (8)$$

$$H \text{形断面弱軸曲げ} : \left(\frac{N}{N_y}\right)^2 + 0.84 \frac{M}{M_p} \leq 1 \text{ and } M \leq M_p \dots (9)$$

同指針では、長方形中空断面の場合には、H 形断面強軸曲げの場合の式を準用することになっているが、マルチ・スプリングによる結果と若干の差が生じている。図 8 中には、せいと幅の比が 1 以上 3 未満の長方形中空断面に対して提案されている次の(10)式⁶⁾を破線で記入しているが、こちらの方がマルチ・スプリング近似との差が小さい。

$$\left(\frac{N}{N_y}\right)^{1.5} + \frac{M}{M_p} \leq 1 \left(1 \leq \frac{D}{B} < 3\right) \dots (10)$$

2 軸曲げに関しては、次式のような Chen らの提案式⁷⁾

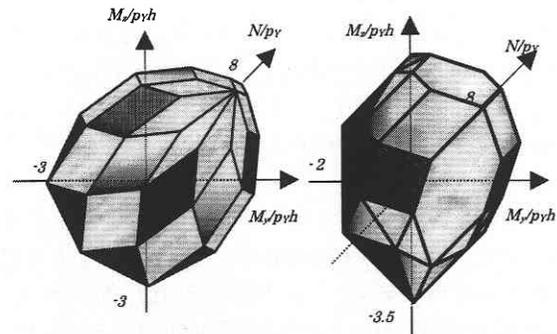
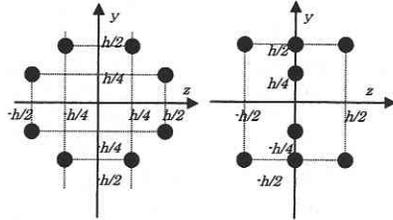


図 7 8 軸バネ近似による耐力相関面の概観 (アイソメ図)



(1) 正方形中空断面 (2) H 形断面
($M_{pz}/M_{py}=7/4$)

図 4 単純化した軸バネ配置

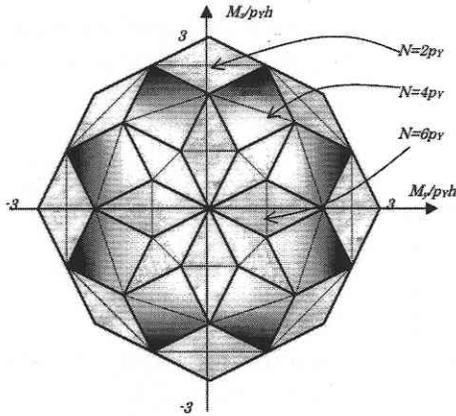


図 5 正方形中空断面の 8 軸バネ近似による耐力相関面 (平面図, 破線は等軸力線, 実線は稜線)

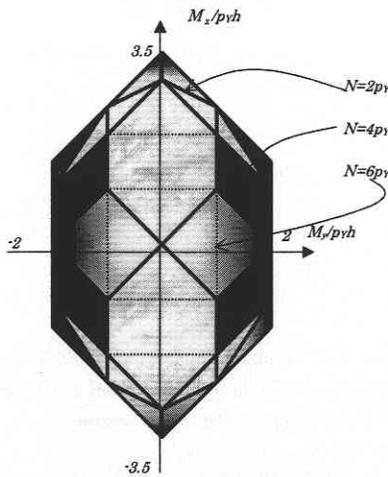


図 6 H 形断面の 8 軸バネ近似による耐力相関面 (平面図, 波線は等軸力線, 実線は稜線)

研究速報

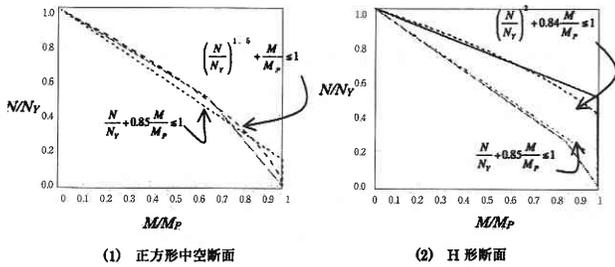


図8 単軸曲げ-軸力 耐力相関 (実線：マルチスプリング)

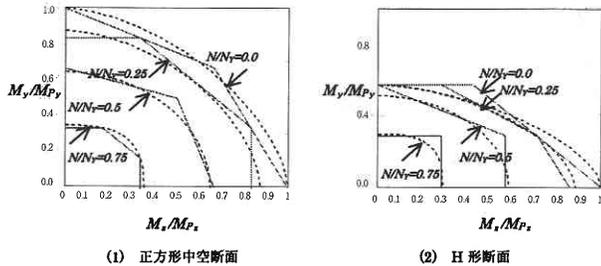


図9 2軸曲げ-耐力相関 (等軸力線) (実線：マルチ・スプリング, 点線：Chenらの式)

と比較した結果を図9に示している。なお、軸力を考慮した1軸曲げの全塑性モーメント M_{PCz} , M_{PCy} に関しては、H形断面に関しては、(8)および(9)式、正方形中空断面に関しては(11)式を用いて算定している。

$$\left(\frac{M_x}{M_{PCz}}\right)^\alpha + \left(\frac{M_y}{M_{PCy}}\right)^\alpha \leq 1 \dots\dots\dots(11)$$

$$\text{ただし, } \alpha = 1.6 - \frac{N/N_y}{2 \ln(N/N_y)} \dots\dots\dots(12)$$

図8ならびに図9から、(8)式から(12)式に示すような既往の指針式ないし提案式と、8バネ近似による耐力相関面は実用的には大略等価であるとみなせることが分かる。

4. ま と め

部材塑性化領域をマルチ・スプリング・モデルで近似した骨組構造物の釣合式を構成し、CP法における制約条件として、マルチ・スプリングを構成する単軸バネの塑性条件を直接用いる方法(MSCP法)が提案されている⁸⁾。

本稿では、マルチ・スプリング単体の耐力相関面の全体像を把握するための解析手法として、凸集合理論を応用して軸バネ力空間における超直方体の端点を、合応力空間へ線形写像する手法を示し、正方形中空断面、H形断面の2軸曲げ-軸力空間における耐力相関面の計算例を示した。

(補遺1) 凸集合に関連した定義³⁾と基本定理

定義1「凸結合」：n次元ユークリッド空間 E^n の有限個の点 $x_1,$

x_2, \dots, x_k に対して、次式で与えられる点 x を x_1, x_2, \dots, x_k の凸結合という。

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j \quad \text{ただし} \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \quad 0 \leq \lambda_j \leq 1$$

定義2「凸集合」：Sを E^n の部分集合としたとき、Sに含まれる任意の2要素の凸結合もまたSに含まれる場合、Sを凸集合という。

定義3「端点」：凸集合Sに含まれるが、Sに含まれる別の要素の凸結合で表せない要素を、凸集合Sの端点という。

定理1：凸集合に含まれる任意の点は、端点の凸結合で表せる。(凸集合の分解定理、いわゆる線形計画法の基本定理の背景である。)

定理2： E^n から E^m への線形写像を与えたとき、凸集合Sの E^m への全射である像Tは、 E^m における凸集合となる。

定理2の系：このとき、凸集合Tの端点は、凸集合Sの端点を線形写像した点の中にある。ただし、Sの端点の像が全てTの端点であるとは限らない。それは線形写像が双射の場合に成立する。

(補遺2) 会話式数学ソフトによる凸集合端点の線形写像

凸集合端点の線形写像は、MELD(組合せ融合)機能を有する会話式数値演算環境で容易に実行できる。文献4)の環境におけるコマンド入力例を以下に示す。

```

:a=1,-1
:_b=a; c=a; d=a; e=a; f=a; g=a; h=a (8バネの正負降伏軸力)
:_meld(a,b,c,d,e,f,g,h) (256個の超立方体端点へ組合せ融合)
:_mx=a+b-g-h+0.5*(c+d-e-f)
:_my=c+e-d-f+0.5*(a+g-b-h)
:_n=a+b+c+d+e+f+g+h (線形写像, 256成分ベクトル処理)
:_constrain(n,mx,my: n.ge.0 .and. mx.ge.0 .and. my.ge.0)
:_tabulate n,mx,my (第1象限の端点像を作成)
    
```

(2000年6月15日受理)

参 考 文 献

- 1) R. K. Livesley: Matrix Method of Structural Analysis (2nd ed.) Pergamon Press, 1976.
- 2) 深井 豊, 滝野文雄: 「軸力の影響を考慮した骨組のリミット・アナリシス」, 第1回電子計算機利用シンポジウム, 日本建築学会, 1979年3月.
- 3) 坂和正敏: 線形システムの最適化, 森北出版, 1984.
- 4) 新村秀一: パソコンらくらく数学, ブルーボックス, 1999年4月.
- 5) 日本建築学会: 鋼構造限界状態設計指針・同解説, 1998年.
- 6) Galambos, T. V. (Editor): Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures (5th Edition), John Wiley&Sons, 1998.
- 7) Chen, W.F. and Atsuta, T.: Theory of Beam-Columns, Vols.1 and 2, McGraw-Hill, New York, 1977.
- 8) 大井謙一, 孫宏, 伊藤拓海: 「軸力と曲げの耐力相関を考慮した骨組構造物のマトリクス極限解析法」, 日本建築学会構造系論文報告集 (投稿中)