

骨組み構造物の畳み込み解析

Numerical Analysis for Folding of Space Frames

川 口 健 一*・那 花 謙 二**・半 谷 裕 彦*

Kenichi KAWAGUCHI, Kenji NABANA and Yasuhiko HANGAI

1. は じ め に

3 次元のな広がりを持った構造物を平面や点に畳み込む、あるいは、点や平面に畳み込まれた構造物を展開して広がりのある構造を築くという手法は、展開、可変型構造物への応用、建物の合理的な建設解体工法等、さまざまな応用が考えられる。宇宙構造物への応用を目指し、宇宙工学の分野では、展開構造物の研究が盛んに行われており、建築・土木の分野でもいくつかの提案や研究がある。これら既往の研究の多くは、特殊な機構を持った構造を提案したり、与えられた展開構造の力学的挙動について調べるといふものである。

本研究では、力学的関係にかかわらず、与えられた構造の幾何学的形状に基づいて、その構造物を目的の形状に畳み込むために、最も適した経路を求めることを考える。つまり、点や線や平面、曲面等の畳み込み目標形状を自由に設定し、さらに、その畳み込みが最も速やかに行われる経路を求めることを主眼とする。このような経路は、逆にたどれば、展開のための一つの最適経路をも与えている。

本研究で提案している手法では、あらかじめ構造物に多くのヒンジ点を設定し、不安定な構造とする。そしてあらかじめ設定した畳み込みの計量を最も速く減少させる変位方向を見つかることで、大変位過程を決定していく。本手法により、最適な畳み込み経路を定性的に把握することが可能となる。

解析上の興味としては、従来の大変位解析や形状決定解析がもたらす、最終形状を求めることを目標としていたのに対し、本研究では、最終形状に到るまでの経路に注目している点にある。

2. 幾何学的関係式

構造物の幾何学的な形状を記述する方法として、有限要素法のように、ある形状関数や変位関数を仮定し、それらを用いて、構造形状の変化を記述することもできる。ここでは、骨組み構造を多くのヒンジ点からなるリンク構造とみなすため、構造物を、自由なヒンジ点の間に幾何学的な拘束条件が与えられたシステムとして捉える。幾何学的な拘束条件が次式で与えられるものとする。

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (1)$$

ここに、 x_1, \dots, x_n は、直交デカルト座標系における各節点の座標値成分。n は自由度数、m は拘束条件の数である。以下、添字は総和規約に従う。(1) 式を一般増分パラメータ s について Maclaurin 展開すると、

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k} x'_k s + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_k \partial x_l} x'_k x'_l + \frac{\partial g_i}{\partial x_k} x''_k \right) s^2 + \dots = 0 \quad (2)$$

ここに ' は s で一回微分したことを表す。上式が任意の s で成り立つことより、各項の係数を零とおいて、

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k} x'_k = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k} x''_k + \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_k \partial x_j} x'_k x'_j = 0 \quad (4)$$

等を得る。これらをマトリクス形式に書き替えると、

$$Ax' = 0 \quad (5)$$

$$Ax'' + A'x' = 0 \quad (6)$$

となる。ここに、

* 東京大学生産技術研究所 第 5 部

** 東京都立大学

$$A = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_k} \right] \quad (7)$$

$$A' = \left[\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_k \partial x_j} x'_k \right] \quad (8)$$

$$x' = \left\{ \frac{dx_i}{ds} \right\} \quad (9)$$

$$x'' = \left\{ \frac{d^2 x_i}{ds^2} \right\} \quad (10)$$

マトリクス A や A' は $m \times n$ の長方形マトリクスである。 A の零空間の正規直交基底を h_1, \dots, h_p とおき、これらを列ベクトルとして並べた、正規直交補空間マトリクス H を考える。

$$H = [h_1, \dots, h_p] \quad (11)$$

ここで p は零空間の次元であり、幾何学的拘束条件に拘束されず残った変位の自由度数である。 A のムーアペンローズ型一般逆行列 A^\dagger を用いると、(5), (6) 式に対する解は、

$$x' = H\alpha' \quad (12)$$

$$x'' = -A^\dagger A' x' + H\alpha'' \quad (13)$$

という形に表すことができる。ここに、 α' と α'' は、任意の p 次元マトリクスでよい。ただし、今後解を一意に求めていくには、これらの値を適当に決めていくことが必要となる。

3. 幾何学的計量

畳み込みの解析を実行するためには、現時点での畳み込みの度合いを表す計量 r が必要になる。これを x_i の関数として

$$r = R(x_1, \dots, x_n) \quad (14)$$

と表す。 r は畳み込みの進行に伴い小さくなっていくように定義する。たとえば、平面に畳み込む場合であれば、平面からの各節点の路離の和や、平面との間の内包体積等、点に畳み込むのであれば、各節点のその点からの路離の和等が容易に考えられる。このような r は、畳み込み解析を行う動機によって、適当に設定することができる。最終的に畳み込みたい形状が、点であるか線であるか、平面か、曲面かによって、あるいは、遠くの点ほど早く畳み込みた

いなら、節点の路離の自乗和や 3 乗和を幾何学的計量として設定することもできる。

r の s に対する 1 階, 2 階の導関数は、

$$r' = R'^T x' \quad (15)$$

$$r'' = x'^T R'' x' + R'^T x'' \quad (16)$$

である。また、

$$R' = \{R'_{ij}\} = \left\{ \frac{\partial R(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right\} \quad (17)$$

$$R'' = \{R''_{ij}\} = \left\{ \frac{\partial^2 R(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j} \right\} \quad (18)$$

である。 R' は、 n 次元の列ベクトル。 R'' は $n \times n$ のマトリクスである。(12), (13) 式を (15) ~ (18) に代入し、 s に対して (14) 式をマクローリン展開したものにさらに代入すると、高次項を省略した結果、次式を得る。

$$r = R'^T H \alpha' s + \frac{1}{2} [\alpha'^T R'' H \alpha' - R'^T A^\dagger A' x'] s^2 \quad (19)$$

上式を整理すると、次元が得られる。

$$r = a^T (\alpha' s) + \frac{1}{2} (\alpha' s)^T T (\alpha' s) \quad (20)$$

但し、

$$x'^T B' x' = R'^T A^\dagger A' x' \quad (21)$$

$$a^T = R'^T H, T = H^T (R'' - B') H \quad (22)$$

まず、(20) 式の第 1 項のみを考慮して次式により解く。

$$\alpha' \Delta s = (\alpha'^T)^\dagger \Delta r \quad (23)$$

この解は、解が不定の場合にはノルム最小解を与える。この性質により、各ステップのノルム最小解の積み重ねとして得られた変位経路を最小変位経路の一つの解であると見なしているのである。

(23) 式で得られた値をもとに、節点変位ベクトル Δx は以下のように得られる。

$$\Delta x = H (\alpha' \Delta s) + \frac{1}{2} (-A^\dagger A' H \alpha') (\Delta s)^2 \quad (24)$$

上記の手順で、与えられた増分値 Δx を求め、形状を更新

研 究 速 報

するという操作を $|a|$ が零になるまで繰り返す。 $a=0$ が成り立つ状態に到ったら、以下の2通りの判定基準に従う。

1. もし、 $R'=0$ であったら、 r が停留値に到ったと考え、解析を終える。
2. もし、 $R' \neq 0$ であつ、 $a=0$ なら、 r はまだ停留値に到っていないと考え、(20)式の実対称マトリクス T の最小固有値を求め考察する。最小固有値が正值でなければ、最小固有値に対応する固有ベクトルの方向へ解析を続行する。

4. 数 値 計 算 例

4.1 ラメラパターン・ドーム

図1に示すような、36節点、84部材を有するラメラパターンドームの畳み込み解析を行った。幾何学的計量 r として、各節点の地上レベルからの路離の自乗和を用いた。畳み込みの過程は図1に、増分ステップの進行と、 r および $|a|$ の減少の関係は、図2にそれぞれ示されている。

各ヒンジ点の重要度は解析結果から容易に判断される。基礎部の一段上の周のヒンジ点を中心とする部材の回転は大きいが、頂部の周のヒンジ点の回転は非常に小さい。実際にはこの点をヒンジ点にする必要性は他の点に比べ少ないことがわかる。

4.2 正12角形の点への畳み込み

正12角形を3次元空間で、その重心点へ畳み込みことを考える。このような簡単な骨組み構造に対してさえ、一般には最終形状に到る畳み込み経路は無数に存在する。幾何学的計量はその点から各節点までの路離の和とする。解析の第1ステップにおいて $|a|=0$ となったので、固有値の分解による選択を行った。その結果、図3のジグザク

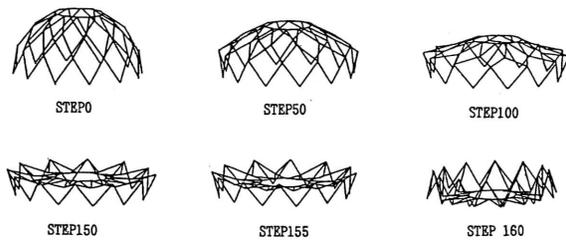


図1 ラメラパターンドームの畳み込み

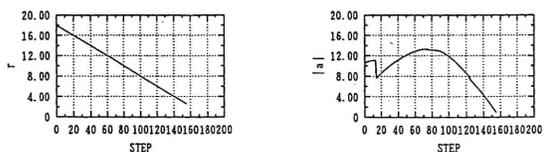


図2 ステップ- r とステップ- $|a|$ 曲線(ラメラドーム)

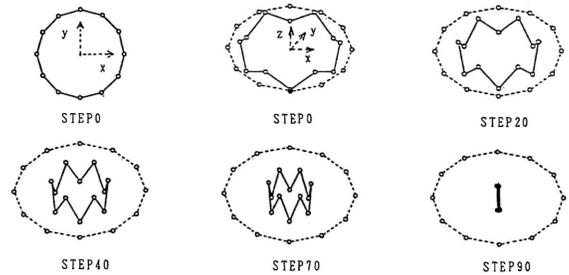


図3 3次元空間における正12角形の畳み込み

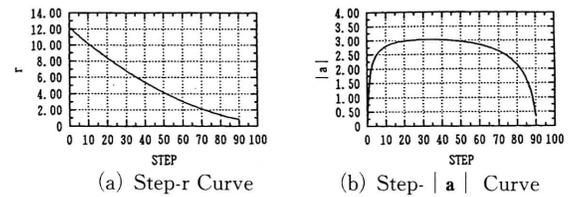


図4 ステップ- r とステップ- $|a|$ 曲線(正12角形)

パターンが最小固有値として選ばれた。

4.3 正12面体の平面への畳み込み

正12面体は各頂点でピン結合されていると考えると、高次の不安定次数を有し、畳み込みが可能である。各節点の底面からの路離の自乗和を幾何学的計量として選んだ場合の、畳み込み解析例を示す。この解析では、畳み込みが約半分進行した時点で、 $|a|=0$ となり、分岐点に到った。固有値解析の結果を表1に示す。第1、第2固有値は重根である。ここでは、既往の固有値解析ライブラリサブルーチンが示した2つのベクトルをそのまま採用し、おのおの方向へ解析を進行させた。また第3固有値方向へも解析を行った。それぞれの方向に対応する最終形状を図5に示す。

第1、第2固有値では非対称な複雑な最終形状が得られた。問題の対称性を考えると、これらの形状は最適最終形状としては不自然である。第3固有値に対する最終形状は、きれいなねじれのパターンであり、こちらの方が、直観的には妥当性が感じられる。

図6に上記3つの畳み込み経路に対する、経路長 s と r の間の関係を示す。分岐点付近では確かに、第1、2固有値方向に対応する経路が、 r を有効に減少させているが、

表1 Tの3つの最小固有値

	Tの最小固有値
第1最小固有値	-3.714835
第2最小固有値	-3.714835
第3最小固有値	-3.071208

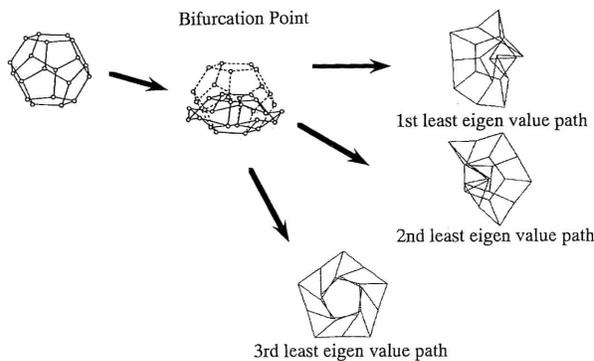


図5 正12面体の畳み込み

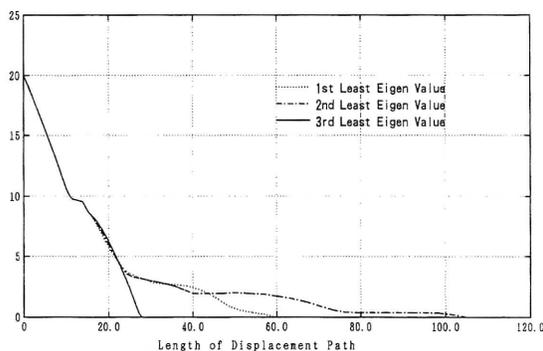


図6 s-r 曲線(正12面体)

その後、いずれの経路も、第3固有値に対応する経路に追い抜かれている。結局、最終的には、第3固有値に対応する経路が、この3つの経路の中では、最も速やかに畳み込みが達成できる経路であることがわかる。(最終形状までの変位経路の長さは、第1最小固有値が、60.16、第2最小固有値が、104.84、第3最小固有値が、27.95で第3固有値方向が圧倒的に速い)。3つの経路は、前半は同じ経路をたどっているが、分岐点以降は異なる経路をたどるため、その後は曲線の交点においても、形状は一般には異っている。この例を見るように、本手法で採用している。固有値解析による分岐経路の判定方法は、分岐点近傍においてのみ有効であり、大域的な性質が分岐点近傍における性質と異なる場合には、必ずしも良い方向性を与えるとは限らない。

本手法では、現在の形状近傍での挙動を参考にして得た解を積み重ねて増分ステップを更新していくという手法で一貫しており、確実に経路を決定していくことを可能としている。しかし、この種の増分手法では、大域的な挙動をあらかじめ見越すことは困難であり、今後の大きな課題となっている。

5. ま と め

骨組み構造を希望の形状に畳み込む経路を見つける数値計算手法について述べた。本手法はいくつか特徴的な点を備えているが、主な点をまとめると、

1. 畳み込みの経路に注目している。
 2. 幾何学的計量を導入しているが、これは解析を行う目的に従って、自由に設定することができる。
 3. 求められた経路は通常、可逆で、逆にたどることにより、一つの最適な組立経路と考えることもできる。
- 等である。

そもそも解の唯一性の成り立たない問題であるから、確実に一つの経路を決定していくという点が重要となる。応用としては、先に挙げた展開構造物や、適応構造物、また、建築構造物の合理的な建設解法法の決定、膜の畳み込みやフィッティング問題への適応が考えられる。

問題点としては、経路の分岐点における扱いが挙げられる。本手法では2次項までの近似で分岐経路を調べているが、最後の例題に示したように、分岐点での最小固有値が大域的に最適な経路であるという保証は必ずしもない。特に対称性の強い構造では、重根が多く発生するなど、さらに問題が複雑になる。

(1994年10月7日受理)

参 考 文 献

- 1) CRAWFORD R. F., "Strength and Efficiency of Deployable Booms for Space Applications", AIAA Paper No. 7, 1971, Apr.
- 2) PINERO E., "Three Dimensional Reticular Structures", 165, U.S.Pat 3, 185, 164.
- 3) ZEIGLER, "Collapsible Self-Supporting Structures", 1984, U.S.Pat 4, 434, 245.
- 4) NATORI M. MIURA K. AND FURUYA H., "Deployable Truss Concepts in Space Technology", Proceedings of IASS Symposium, Osaka, Vol. 3, 1986, pp. 261-298.
- 5) JOSEPH D. CLINTON, "Advanced Structural Geometry Studies, Part II-Geometric Transformation Concept For Expanding Rigid Structures", NASA Contractor Report, NASA CR-1735, 1971, Sept.
- 6) HUGO F. VERHEYEN, "Expandable Polyhedral Structures, 1984, pp. 88-93.
- 7) SIMON D.G., "Deployable Structures: Concepts and Analysis", Ph-D Dissertation, University of Cambridge, May, 1994.
- 8) KAWAGUCHI K., NABANA K. AND HANGAI Y., "Numerical Analysis for Folding of Space Structures", Space Structures 4, Proceedings of Fourth International Conference on Space Structures, 1993, pp. 813-823.