研　究　速　報

特 集 12　　　　　　　　UDC 533.6.011.1：533.697.3

レイノルズ応力の統計理論的研究

Investigation of Reynolds Stress by a Statistical Theory

岡 本 正 芳*・吉 澤　徴*

Masayoshi OKAMOTO and Akira YOSHIZAWA

1. 序　論

自然科学や工学の分野において乱流をアンサンブル平均を用いて研究する際，レイノルズ応力をいかに取り扱うかということが根本的な問題になる．この問題に対して今日に至るまで大別して二つのアプローチがなされてきた．その一つはレイノルズ応力自体をモデル化する方法であり，代表的なものとして混合距離モデルやK-εモデル等がある．もう一つは，レイノルズ応力の輸送方程式をモデル化し，その解としてレイノルズ応力を求める方法であり，代数応力モデル等がある．

本研究で着目する前者の利点は，後者と比較してモデル化すべき項が少なく，輸送方程式を解かなくてよいという点にある．しかし難点としては，レイノルズ応力自体をモデル化するので適切に物理現象を反映するようなモデル化をしないとまったく実現象と異なった結果が生じてしまうということがあげられる．実際，レイノルズ応力に対するモデルとして広く利用されてきた渦粘性表現に対していくつかの問題点が指摘されている．それらの問題の一つは，方形管流中の二次流の生成が等方的である渦粘性表現では説明がつかないことである．この問題に対しては，レイノルズ応力に非等方性効果を有する非線形項を導入する必要があることが知られている．さらにもう一つ問題は，時間的，空間的に変動をする流れに対して渦粘性表現では本来定数である渦粘性率が変化するということである．これに対しては渦粘性表現に非平衡性の効果を導入すべきであるということが指摘されている．

これらの問題に対して物理現象をより反映したモデル化を行うために，われわれは乱流の統計理論の一つである2スケール直接相関近似（TSDIA）[1]を用いた．今日に至るまで1次のTSDIAによる解析は行われ，渦粘性表現に対する理論的アプローチとしての成果を収めてきた．上述の問題は渦粘性表現の高次からくる補正が重要になるために生じた問題であるという立場に立ち，2次および3次のTSDIAの解析から以上の問題を議論する．

*東京大学生産技術研究所　第1部

2. モデリング

ここでの解析には以下に示すような非圧縮性を仮定したナヴィアーストークス方程式を使用した：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=-\nabla p+\nu\Delta\mathbf{u}, \qquad (1)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0. \qquad (2)$$

ただし，$\mathbf{u}$は速度ベクトル，pは圧力，νは粘性率を表している．

乱れの大きい現象に対する統計物理学の取り扱い方と同様に，式(1)と(2)に対してアンサンブル平均を取ると，速度と圧力を平均場 $\{\mathbf{U}, P\}$ と揺らぎの場 $\{\mathbf{u}', p'\}$ に分離することができる．平均場のナヴィアーストークス方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+(\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U}-\nabla\mathbf{R}=-\nabla P+\nu\Delta\mathbf{U}, \qquad (3)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{U}=0. \qquad (4)$$

ただし，$\mathbf{R}$はレイノルズ応力を示す2階のテンソルであり，次の式で定義されている：

$$\mathbf{R}\equiv-\langle\mathbf{u}'\mathbf{u}'\rangle. \qquad (5)$$

このレイノルズ応力こそ平均場の方程式中で唯一の揺らぎの効果を示す物理量であり，平均場の量でモデル化する必要がある．

一方，揺らぎ場に関するナヴィアーストークスの式は

$$\frac{Du'}{Dt}+(u'\cdot\nabla)U+(u'\cdot\nabla)u'+\nabla R=\nabla p'+\nu\Delta u', \tag{6}$$

$$\nabla\cdot u'=0, \tag{7}$$

のようになる．左辺の時間微分はラグランジェ時間微分を意味し，次のように定義される：

$$\frac{D}{Dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+U_j\frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{8}$$

乱流エネルギーを

$$K\equiv\frac{1}{2}\langle u'\cdot u'\rangle, \tag{9}$$

のように定義すると，揺らぎの場の方程式から以下のように乱流エネルギーに関する支配方程式

$$\frac{DK}{Dt}=P_K-\varepsilon+D_K, \tag{10}$$

が得られる．また，右辺に現われた項は順にそれぞれ生成項，散逸項，拡散項とよばれていて，次のように定義される．

$$P_K\equiv R_{\alpha\beta}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}, \tag{11}$$

$$\varepsilon\equiv\nu\left\langle\frac{\partial u'_j}{\partial x_m}\frac{\partial u'_j}{\partial x_m}\right\rangle, \tag{12}$$

$$D_K\equiv-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\langle u'_j u'_m u'_m\rangle+\langle u'_j p'\rangle\right)+\nu\Delta K. \tag{13}$$

揺らぎの場に関する式(6)と(7)で展開パラメータの3次まで考慮したTSDIAの解析を施してレイノルズ応力を求めた．このときの数値的評価に対しては慣性領域でコルモゴロフ-スペクトルが成立しているとして導かれた慣性領域理論[2)]を用いた．その結果，

$$R_{\alpha\beta}=-\frac{2}{3}K\delta_{\alpha\beta}+\nu_T\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right)+\gamma_1\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right)$$
$$+\gamma_2\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_j}\right)^*+\gamma_3\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial U_j}{\partial x_\beta}+\frac{\partial U_\beta}{\partial x_j}\frac{\partial U_j}{\partial x_\alpha}\right)^*$$
$$+\gamma_4\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_\alpha}\frac{\partial U_j}{\partial x_\beta}\right)+\cdots. \tag{14}$$

ただし，ここで2次の解析結果から現われる項のみを与え，3次の解析により始めて生ずる項はすべて省略した．また添え字の星印＊は以下の例のようにテンソルの縮約を取ると消えるような構造をしている：

$$\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_j}\right)^*=\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_j}-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial U_m}{\partial x_j}\frac{\partial U_m}{\partial x_j}. \tag{15}$$

式(14)に現れている係数は

$$\nu_T=1.23\times10^{-1}\frac{K^2}{\varepsilon}-1.47\times10^{-1}\frac{K^2}{\varepsilon^2}\frac{DK}{Dt}+9.33\times10^{-2}\frac{K^3}{\varepsilon^3}\frac{D\varepsilon}{Dt}, \tag{16}$$

$$\nu_1=-4.27\times10^{-2}\frac{K^3}{\varepsilon^2}+1.07\times10^{-1}\frac{K^3}{\varepsilon^3}\frac{DK}{Dt}-6.40\times10^{-2}\frac{K^4}{\varepsilon^4}\frac{D\varepsilon}{Dt}, \tag{17}$$

$$\nu_2=-5.42\times10^{-2}\frac{K^3}{\varepsilon^2}+1.39\times10^{-1}\frac{K^3}{\varepsilon^3}\frac{DK}{Dt}-8.52\times10^{-2}\frac{K^4}{\varepsilon^4}\frac{D\varepsilon}{Dt}, \tag{18}$$

$$\nu_3=-2.97\times10^{-2}\frac{K^3}{\varepsilon^2}+7.50\times10^{-1}\frac{K^3}{\varepsilon^3}\frac{DK}{Dt}-4.54\times10^{-2}\frac{K^4}{\varepsilon^4}\frac{D\varepsilon}{Dt}, \tag{19}$$

$$\nu_4=-5.25\times10^{-3}\frac{K^3}{\varepsilon^2}+1.26\times10^{-2}\frac{K^3}{\varepsilon^3}\frac{DK}{Dt}-7.47\times10^{-3}\frac{K^4}{\varepsilon^4}\frac{D\varepsilon}{Dt}. \tag{20}$$

また，2次までを考慮したTSDIAの解析結果からエネルギー散逸率εの輸送方程式は

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}=1.71\frac{\varepsilon}{K}P_K-1.71\frac{\varepsilon^2}{K}+1.71\frac{\varepsilon}{K}D_K$$
$$-0.0467K\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_m}\frac{\partial U_m}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_m}\frac{\partial U_j}{\partial x_m}\right), \tag{21}$$

のように導かれる．このε方程式の中には通常のK-εモデルで使用されているε方程式と異なり速度勾配の2乗に関連する項が付与している．しかし，この付与項は式(11)で定義されている生成項と同一の項であり，

$$-0.0367K\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_m}\frac{\partial U_m}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_m}\frac{\partial U_j}{\partial x_m}\right)=-0.380\frac{\varepsilon}{K}P_K, \tag{22}$$

のように書き換えることが可能である．この関係を利用して式(21)の最後の項を生成項に繰り込むと最終的にε方程式は

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}=1.33\frac{\varepsilon}{K}P_K-1.71\frac{\varepsilon^2}{K}+1.71\frac{\varepsilon}{K}D_K, \tag{23}$$

となる．TSDIAの解析の際高次の相関については無視したので拡散項D_Kにについては式(14)と同精度の議論はできない．よって，拡散項を除いた係数を他の統計理論から導かれた結果や実験などからK-εモデルに対して広く認められている値と比べてみると表1のようになる．

表1　ε-方程式の係数比較

	生成項の係数	散逸項の係数
典型的な値[3)]	1.44	-1.92
RNGの結果[4)]	1.063	-5.65
TSDIAの1次解析の結果[5)]	1.71	-1.71
今回のTSDIAの結果	1.33	-1.71

以上より，今回の解析では典型的な値と比べて，約10％程度，生成項，散逸項の両方の係数が小さく見積られてはいるが，他の理論計算による結果よりも比較的よくをK-εモデルの定数を再現できているといえよう．また，この結果は生成項と散逸項の係数の大小関係もよく再現できているので，K-εモデルに対する理論的裏付けとしても意味あることであろう．

3．非線形レイノルズ応力の比較

今回のTSDIAの解析ではレイノルズ応力をモデル化し，われわれは3次のオーダーまで取り込んだため非線形なレイノルズ応力の成分が導出できた．非線形なレイノルズ応力の概念は序論で触れたように，渦粘性表現では説明できない方形管流の2次流の発生など，非等方性が重要になってくる流れに対して必要になってくる．そのため，過去非等方性のレイノルズ応力のモデルとして研究されてきた．そこで，本モデルと他のモデルを比較してみる．比較する他のモデルは非線形レイノルズ応力として平均速度勾配の2次まで与えられているので，非線形レイノルズ応力は以下の表式のようになる：

$$R_{\alpha\beta}^{\mathrm{nonlinear}}=-\frac{K^3}{\varepsilon^2}\left\{\zeta_1\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_j}\right)^* +\zeta_2\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial U_j}{\partial x_\beta}+\frac{\partial U_\beta}{\partial x_j}\frac{\partial U_j}{\partial x_\alpha}\right)^* +\zeta_3\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_\alpha}\frac{\partial U_j}{\partial x_\beta}\right)^*\right\}. \tag{24}$$

これらの係数は本モデルでは

$$\zeta_1=0.0542\qquad \zeta_2=0.0297\qquad \zeta_3=0.00525. \tag{25}$$

RubinsteinとBarton[6)]は本解析と同様に乱流統計理論の1つである繰り込み郡理論（RNG）を用いて理論的に以下のような係数値を導いた．

$$\zeta_1=0.034\qquad \zeta_2=0.104\qquad \zeta_3=-0.014. \tag{26}$$

ただし，彼らの理論からは本結果の式(14)の右辺第3項のような対流に関する項は導出できていない．

理論的に非線形レイノルズ応力を導出して数値計算の結果や実験データから係数値を評価したモデルとしては次の2つがある．吉澤と西島[7)]はチャンネル流とCouette流に吉澤のモデルを適用し

$$\zeta_1=0.057\qquad \zeta_2=-0.167\qquad \zeta_3=-0.0067. \tag{27}$$

を得，Speziale[8)]は連続体理論から導出したモデルをチャンネル流とダクト流に適用して

$$\zeta_1=0.041\qquad \zeta_2=0.014\qquad \zeta_3=-0.014. \tag{28}$$

のような係数を得た．これら2つのモデルには先ほど触れた対流に関係する項が存在する．

上に挙げたモデルはすべて統計理論や連続体理論からレイノルズ応力をモデル化していたが，応力方程式を考慮したモデルとしては，線形化したDemurenとRodi[9)]の代数応力モデルからは

$$\zeta_1=0.092\qquad \zeta_2=0.052\qquad \zeta_3=0.013. \tag{29}$$

を得る．

実験値や数値計算のデータを反映させた吉澤，西島のモデルとSpezialeのモデルは共にチャンネル流の結果を利用している．チャンネル流では式(24)の第2項は消える．実験値や数値計算のデータは共通して第1項の係数はおよそ0.05前後であり，第3項は負の値であり第1項の値に比べると小さいことを述べている．RNGによる値はこのことに大体合致しているが，本モデルでは第1項の値はほぼ一致しているが，第3項の値は逆に正の値になっている．また，第2項の値に関しては，実験，数値計算に依存したモデルにおいても一致は見られず値を特定できない．

一方，Spezialeにより指摘されている「座標の選び方には物理系は依存しないので，モデルも座標変換に関して不変にすべきである．」というフレーム不変性[10)]を考慮すると，一様乱流やチャンネル流においてはレイノルズ応力が次の表式に書き変えられることが必要になってくる：

$$R_{\alpha\beta}=-\frac{2}{3}K\delta_{\alpha\beta}+2\nu_T S_{\alpha\beta}+(C_D-2C_E)\frac{K^3}{\varepsilon^2}(S_{\alpha j}S_{j\beta})^* -C_E\frac{K^3}{\varepsilon^2}(W_{\alpha j}S_{j\beta}+W_{\beta j}S_{j\alpha}). \tag{30}$$

ただし，上式に現われたテンソルSとWはそれぞれストレインとボーテシティーであり

$$S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right), \tag{31}$$

$$W_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right), \tag{32}$$

で定義される．この表式に合うモデルは本モデル，Speziale モデルと Demuren と Rodi のモデルである．本モデルにおいては式(30)で現われた定数は以下の値を取る．

$$C_D=-0.0210 \qquad C_E=0.0490. \tag{33}$$

また，Speziale のモデルでは次のようになる．

$$C_D=0.056 \qquad C_E=0.056. \tag{34}$$

以上から，TSDIA と慣性領域理論より導いた本モデルは Speziale のモデルに比べてストレインの2乗の係数を過大に評価する傾向にあることがわかった．また，さらに広い意味でのフレーム不変性[8]（オルドロイド微分を使った対流項まで含めた不変性のこと）については本モデルは Speziale のモデルと異なり成立していなかった．

4．非平衡性

式(16)から(20)を見てわかるように TSDIA による解析を行うと，各係数は乱流エネルギーKと散逸率εのベキ乗の積とモデル定数で成り立地，その中にラグランジェ時間微分の項が現われる．著者の一人である吉澤は西島とともに渦粘性表現に於いて，このことを非平衡性の現われ[11]として説明している．たとえば，チャンネル流と一様剪断流を比較すると，渦粘性率中の定数ががチャンネル流では通常の0.09なのに対して，一様剪断流では0.04程度にするとと数値計算のデータとよい一致が得られる．この原因は，一様剪断流はチャンネル流とは異なり時間とともに発展する流れであり，ラグランジェ時間微分の効果が効いて，見かけ上渦粘性率が下がることにある．よって，時間変動や空間変動がある流れにおいてはこのような非平衡性の概念は必要不可欠になる．

これに対し，今回の解析においては TSDIA の3次までの解析を行ったので非線形のレイノルズ応力における非平衡性について調べることができる．すると，式(16)から(20)は以下のように書き換えることが慣性領域理論で導入した数値の誤差の範囲内で可能となる：

$$\nu_T=0.123\frac{K^2}{\varepsilon}\Lambda(K,\ \varepsilon), \tag{35}$$

$$\gamma_\alpha=\chi_\alpha\frac{K^3}{\varepsilon^2}\Lambda^2(K,\ \varepsilon). \tag{36}$$

ただし、新たに導入した関数$\Lambda(K,\varepsilon)$は

$$\Lambda(K,\ \varepsilon)\equiv 1-\frac{5}{4}\frac{1}{\varepsilon}\frac{DK}{Dt}+\frac{3}{4}\frac{K}{\varepsilon^2}\frac{D\varepsilon}{Dt}, \tag{37}$$

で定義される．また，係数χ_α（α＝1～4）はそれぞれ式(17)から(20)に合うように$\chi_1=-0.0428$，$\chi_2=-0.0556$，$\chi_3=-0.0300$，$\chi_4=-0.00510$という値をとる．この結果から TSDIA の解析においては，非平衡性を示す構造は渦粘性項のみに現われるものではなく非線形成分にも存在して，展開次数に応じて決まるということがいえる．

5．結論

今回の解析により広く使用されているK-εモデルの生成項と散逸項に関して，統計理論の立場から係数を含めて比較的よい精度で説明，導出できることがわかった．また，その過程で定数の評価においては高次からの繰り込みが有効になることが確認された．一方，非線形レイノルズ応力のモデル定数については若干の問題が残り，この問題の解消には理論的手段の改善が必要になると思われる．また，レイノルズ応力の高次項においても最近指摘され始めた非平衡性の構造が存在し，この解析結果によると展開次数に依存した構造を持つことがわかった．この結果が現実を反映しているかどうかは実験や数値計算の結果と比較検証する必要がある．

（1993年11月10日受理）

参考文献

1) A. Yoshizawa, J. Phys. Soc. Jpn. 52 (1984) 1194.
2) A. Yoshizawa, J. Phys. Soc. Jpn. 45 (1978) 1734.
3) V. C. Patel, W. Rodi and G. Scheuerer, AIAA J. 23 (1985) 1308.
4) L. M. Smith and W. C. Reynolds, Phys. Fluids A 4 (1992) 364.
5) A. Yoshizawa, J. Fluid Mech. 195 (1988) 541.
6) R. Rubinstein and J. M. Barton, Phys. Fluids A 2 (1990) 1472.
7) S. Nisizima and A. Yoshizawa, AIAA J. 25 (1987) 414.
8) C. G. Speziale, J. Fluid Mech. 178 (1987) 459.
9) A. O. Demuren and W. Rodi, J. Fluid Mech. 140 (1984) 189.
10) C. G. Spezilae, Theoret. Comput. Fluid Dyn. 1 (1989) 3.
11) A. Yoshizawa and S. Nisizima, Phys. Fluids A 5 (1993) No12.