

## 代数応力モデルによるバックステップ流れの数値解析

## —第1報 代数化の評価と数値解析法—

Numerical Simulation of Backward-Facing Step Flow by Algebraic Stress Model

—The estimation of algebraic expression and the method of numerical simulation—

小林 敏雄\*・富 樫 盛典\*

Toshio KOBAYASHI and Shigenori TOGASHI

## 1. はじめに

工学的に見て、乱流の数値解析を複数形状へ適用しようとする動きはますます多くなり、かつ予測精度に対する要求も厳しくなっており、もはや標準k-εモデルではこの要求に応えることができず、非等方k-εモデルやレイノルズ応力の輸送方程式を用いて数値解析しなくてはならなくなっている。

近年、バックステップ流れに関しても応力モデルを用いた数値解析が行われており、予測精度の改善がみられている。しかし応力モデルはその形が複雑であり、数値計算で各応力成分を安定に求めるのは大変なことである。そこで本研究では、応力モデルよりは比較的容易に各応力成分を計算でき、実用的な代数応力モデルを用いた定常2次元の数値計算を試み、その有用性を確認したので報告する。

まず最初にバックステップ流れに応力方程式モデル(RSM)を適用した過去の研究を振り返り、応力方程式モデルが抱えている問題を明らかにしておく。

次にバックステップ流れのような形状に対して応力輸送方程式を代数化したモデル(ASM)を適用することの妥当性をLESのデータベース<sup>1)</sup>を用いて調べ、その有効性を確認する。

最後の章では、この代数応力モデルを用いて数値計算をする際に生じる問題点を取り上げる。代数応力モデルを用いた場合、運動方程式の拡散項が分子粘性による項だけになるので対流支配形となり、風上法に伴う数値拡散が無視できなくなったり、計算を安定に進めることができなくなったりする。本研究ではPseudo-viscosity法を用いてこの問題点を切り抜けたので、この点について述べる。

また、数値計算結果およびレイノルズ応力の非等方表現の評価に関しては第2報で詳しく述べることにする。

## 2. 過去の研究

応力モデルをバックステップ流れに適用して、予測精度を改善しようとする試みが、いくつかなされているが、その代表的な研究を表1に示す。Amano & Goel<sup>2)</sup>によれば、応力モデルでは再付着以降の領域での平均速度分布には改善をもたらすが、再循環流領域や再付着点領域ではそれほど改善は与えず、すべての流れ場の領域に対して同一のモデルで改善をもたらすことは難しいと報告している。また、William & Dale<sup>3)</sup>はモデル定数や境界条件を変えて応力モデルを用いた計算を行った。最も一般的に用いられる応力モデルであるLaunder, Reece and Rodi (LRR) モデルを使う場合、壁面境界条件として壁関数を用いなくてはならない。そこで、壁近傍をもう少し正確に解くためにHanjalic and Launder (HL)の低レイノルズ数型応力モデルを用いて数値解析を行った結果、再付着点近傍で流線のまわり込みが起り、非現実的な結果をもたらしてしまった。またもう1つの低レイノルズ数型モデルである島モデルでも、やはり同様な結果になり、壁まで正確に解こうとしてNo-slip条件を課したことがかえって、壁関数を用いた場合よりも悪い結果をもたらしてしまった。これは再付着点

表1 過去の研究

項目	Amano & Goel	William & Dale	Obi et al
年代	1985	1989	1989
Re	5000	5000	?
流路拡大率	1.5	1.5	2.0
数値解法	SIMPLE	SIMPLE	SIMPLE
格子	スタガード	スタガード	コロケート
応力モデル	LRR	LRR HL, 島	LRR
境界条件	壁法則	壁法則 No-slip	壁法則

\*東京大学生産技術研究所 第2部

近傍でのせん断応力 $\overline{uv}$ および垂直応力 $\overline{vv}$ のオーバーエスティメイトが原因であり、これを解決するためにLumleyは再分配項のSlow term  $\phi_{ij}$ の係数 $C_1$ を変数とする準線形のモデルを提案した。最終的には、Lumleyの再分配項および $\epsilon$ 方程式を修正した場合が最もよい計算結果が得られると報告している。また、Obi<sup>9)</sup>らは数値計算上の利点も考慮して、スタガード格子ではなくコロケート格子を用いた計算を行った。LRRの応力モデルでは、再循環流領域で垂直応力のダンピングがかかりすぎてしまうのでこの点に関するモデルの改良を指摘している。このようにみると、非等方性の強い再付着点近傍の予測精度をあげるためには応力モデルの再分配項のより良い改良が必要になっている。この再分配項に関しては最近、Sarkar-Speziale<sup>9)</sup>が非線形モデルを提案している。またほかにも三次型等方化モデルなどが提案されている。

3. 応力輸送方程式の代数化

レイノルズ応力の輸送方程式は、一般に(1)式のような形で表わすことができる。

$$\frac{D(\overline{u_i u_j})}{Dt} = D_{ij} + D_{ij} + \phi_{ij} - \epsilon_{ij} \quad (1)$$

(1)式の右辺は第1項が拡散項、第2項が生成項、第3項が再分配項、第4項が散逸項を表している。輸送方程式の代数化はRodi<sup>10)</sup>の方法を採用すると(1)式の対流項と拡散項を(2)式のように代数化できる。

$$\frac{D(\overline{u_i u_j})}{Dt} - D_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \cdot (P - \epsilon) \quad (2)$$

(2)式を用いて(1)式を整理すると、最終的にレイノルズ応力は(3)式のような形であらわされる。

$$\overline{u_i u_j} = k \left[ \frac{P_{ij} + \phi_{ij} - \epsilon_{ij}}{P - \epsilon} \right] \quad (3)$$

(3)式はレイノルズ応力を代数的に表示した式であるが、右辺の中にもレイノルズ応力を含んでいるので、陽的に求めることはできない。そこでレイノルズ応力に適当な初期値を与えて反復計算させて求めることになる。

4. 代数化の評価

レイノルズ応力の輸送方程式を代数化した(3)式の中でモデル化の必要がある項は再分配項 $\phi_{ij}$ と散逸項 $\epsilon_{ij}$ で

表2 代数応力モデルの各項

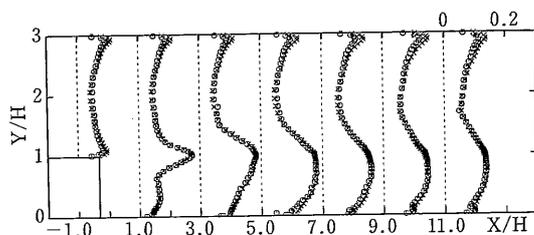
$P_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$	$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} \frac{2}{3} \epsilon$
$\phi_{ij} = -C_1 \frac{\epsilon}{k} (\overline{u_i u_j} - \delta_{ij} \frac{2}{3} k) - C_2 (P_{ij} - \delta_{ij} \frac{2}{3} P)$	
$C_1 = 1.8,$	$C_2 = 0.6, \quad P = P_{kk}/2$

研究速報  
ある。このモデル化に関してはもっとも広く用いられているLRRのものを用いた。その場合、(3)式中の各項は表2のように表され、これを整理すると(4)式のようになる。

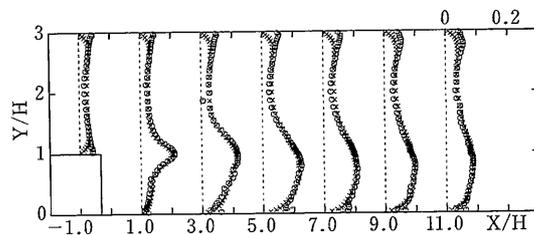
$$\overline{u_i u_j} = k \left[ \frac{2}{3} \delta_{ij} + \frac{(1 - C_2) (P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P) + \phi_{ijw}}{(C_1 - 1) \epsilon + P} \right] \quad (4)$$

(4)式中の $\phi_{ijw}$ は再分配項のWall reflection termであり、この項の取り扱いについては第2報で述べる。

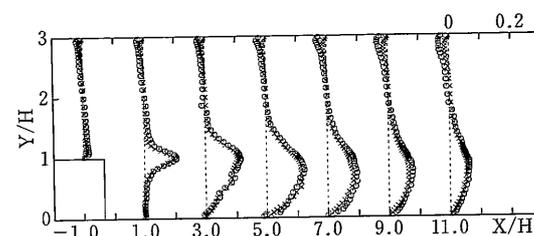
この代数式の妥当性を評価するために、比較的信頼性の高いLESデータベース<sup>11)</sup>を用いた。評価方法は次のような手順に進めた。(4)式中の右辺に表れる物理量 $U, V, k, \epsilon$ に対してLESのデータを用いて、(4)式を反復計算してレイノルズ応力の各成分( $\overline{uu}, \overline{vv}, \overline{uv}$ )を代数的に求める(図1の○印)。次にこれをLESで求めたレイノルズ応力(図1の×印)と比較する。図1の両者を比較すると、かなりよく一致していて、(4)式のような代数化の妥当性がうかがえる。この結果と比較するために $k-\epsilon$ モデルで使われている渦粘性表現(5)式についてもLESデータを用いて評価してみた。



(a) レイノルズ応力 $\overline{uu}$  (○ASM、×LES)



(b) レイノルズ応力 $\overline{vv}$  (○ASM、×LES)



(c) レイノルズ応力 $\overline{uv}$  (○ASM、×LES)

図1 LESとASMの比較

研究速報

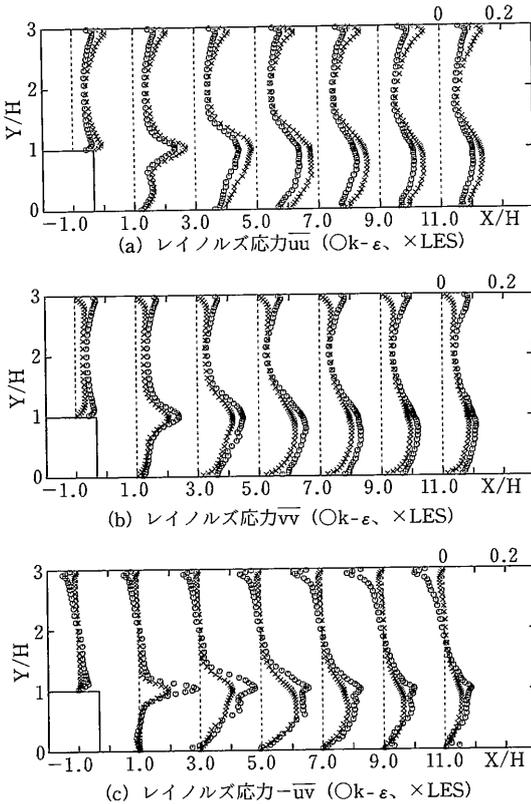


図2 LESと $k-\epsilon$ の比較

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

(5)式より求めたレイノルズ応力(図2の○印)とLESで求めたレイノルズ応力(図2の×印)を比較すると図1ほどの一致は見られず、特に流れの急拡大に伴い強いせん断が存在する場所やそれより下流の場所でのせん断応力 $-\overline{u v}$ が大きく見積られてしまっている。

以上のように応力輸送方程式の代数化と渦粘性表現の評価をした結果、応力輸送方程式の代数化は比較的妥当な近似法であることがわかった。

ただし、この結果から代数応力モデルの使用がかならずしも良い計算結果をもたらすとは一概には言えない。なぜならば、代数応力モデルを用いた場合、 $k$ と $\epsilon$ の方程式も解く必要があるため、 $k$ と $\epsilon$ の予測精度の影響がレイノルズ応力を代数的に求める際に入ってくることになるからである。

5. Pseudo-viscosity法による数値解析

本計算で使用した連続の式、運動方程式、乱流エネルギー $k$ と乱流エネルギーの散逸率 $\epsilon$ に関する方程式を以

表3 計算条件

圧力解法	SIMPLE	
差分格子	230×50	
流入条件	速度	LESの計算結果
	$k$ と $\epsilon$	LESの計算結果
流出条件	自由流出	
壁面条件	速度	壁関数
	$k$ と $\epsilon$	壁関数に基づく補正

下に示す(無次元テンソル表示)。

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial (U_i U_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) \quad (7)$$

$$\frac{\partial (U_i k)}{\partial x_i} = C_s \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{k}{\epsilon u_i u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G - \epsilon \quad (8)$$

$$\frac{\partial (U_i \epsilon)}{\partial x_i} = C_\epsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{k}{\epsilon u_i u_j} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} G - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (9)$$

ここで $G$ は生成項であり、 $G = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ となっている。

また、モデル定数は、 $C_s=0.22$ 、 $C_\epsilon=0.16$ 、 $C_{\epsilon 1}=1.44$ 、 $C_{\epsilon 2}=1.92$ を用いた。

数値解析アルゴリズムは半陰解法であるSIMPLE法により行い、表3に示すような格子数、境界条件を用いて計算を進めた。計算の手順は、まず(4)式より反復計算でレイノルズ応力 $\overline{u_i u_j}$ を代数的に求め、その値を用いて(7)、(8)、(9)式を計算し、収束条件を満たすまでこの操作を反復する。ただしこのとき、(7)式の取り扱いには注意を要する。(7)式の拡散項は分子粘性による項のみであり、本報では $Re=46000$ であるので、実質的には拡散のない対流支配の形となっている。この場合セルペクレ数(対流/拡散)が大きな値になり風上法で解かざるをえなくなり、それに伴う数値粘性の影響が無視できなくなったり、計算が不安定になるという問題が生じてしまう。ちなみに $k-\epsilon$ モデルの場合には、(5)式のような渦粘性表現により $\mu$ が拡散係数として入ってくるのでこのような問題は生じない。

そこでこの問題点を解決する方法としてPseudo-viscosity法<sup>(4),(7),(8)</sup>を採用した。この方法は(4)式を変形していわゆる拡散項に対応する部分とそうでない部分に分けてそれを(7)式に代入して計算する方法である。たとえば $\overline{u u}$ の場合には(10)式のような表現ができ、 $\sim$ は拡散項として取り扱い、残りの項はすべてSource項に加える

研究速報  
 ことよって数値計算を行う。

$$-\overline{uu} = \left[ \frac{k(1-C_2)}{\varepsilon(C_1-1)+P} \overline{vv} \right] \frac{dU}{dx} - \frac{2}{3} K$$

$$-\frac{k(1-C_2)}{\varepsilon(C_1-1)+P} \left[ \frac{2}{3} \overline{uv} \left( -2 \frac{dU}{dy} + \frac{dV}{dx} \right) + \frac{4}{3} \overline{uu} \frac{dV}{dy} + \frac{\phi_{11w}}{1-C_2} \right]$$

(10)

$\overline{uv}$ ,  $\overline{uv}$ に対しても同様な取り扱いができ, このような方法で計算すると, 計算が安定に進み, よい結果を得ることができた。

#### 6. お わ り に

バックステップ流れのような形状に対して応力輸送方程式を代数化したモデル (ASM) を適用することの妥当性をLESのデータベースを用いて調べ,  $k-\varepsilon$ モデルと比較してその有効性が確認できた。また代数応力モデルを用いて数値計算する際に問題となる数値拡散や計算の不

安定性は, Pseudo-viscosity法を用いることにより, 解決できることを確認した。

第2報では数値計算結果およびレイノルズ応力の非等方表現の評価に関して報告する。

(1991年11月13日受理)

#### 参 考 文 献

- 1) Morinishi and Kobayashi, Int. Symp. on Eng. Turbulence Modelling and Measurements, 279 (1990).
- 2) R.S. Amano and P. Goel, AIAA Journal, vol. 23, No. 9, September, 1356 (1985).
- 3) William and Dale, Seventh symposium on turbulent shear flows. 10.5.1. (1989).
- 4) Obi, Peric and Scheuerer, 2nd Int. Symp. on Transport Phenomena, 839 (1987).
- 5) S. Sarkar and C.G. Speziale, Phys. Fluids A2, 84 (1990).
- 6) W. Rodi, ZAMM 56, 219 (1976).
- 7) 村上ほか2名, 第4回生研NSTシンポジウム講演論文集, 31.
- 8) 秋山ほか4名, 機論B, 55巻510号, 351 (1989).