

諸元変動を含む構造系の数値構造解析手法

Numerical Analysis Techniques for Structures with Parameter Changes

中 桐 滋*
Shigeru NAKAGIRI

構造設計の一過程として広く用いられている数値構造解析においては解析精度の向上がこれまでの主な関心事であった。解析に用いられる構造諸元には構造のモデル化等に伴う不確定な変動が含まれている。設計においては構造諸元を意図的に変動させて、その効果を計算せねばならない。本稿では、不確定または意図的な構造諸元変動を取り扱う数値解析手法を主として有限要素法に関して述べる。

1. 結 言

宇宙空間、地上、地中、海中で用いられる高機能の構造物の設計には、大型計算機と計算コードを用いた数値解析が現在広く用いられている。構造解析に利用される従来の計算プログラムは確定的な入力に対する確定的な構造応答を算出するものであった。ここでいう入力とは構造諸元を意味するものとし、構造物に作用する外力等は除外するものとする。その理由は、地震、突風、波浪荷重等の自然現象による外力は非定常、不規則、不確定であり、これ等についても構造自体は確定的であるとして、かかる不確定外力に対する応答の不確定性についてこれまでも研究されているからである^{1),2)}。

本稿では構造諸元の変動を含む構造系の応答に注目する。外力が確定的であっても、構造系の諸元が変動するとき出力である構造応答は変動する。使用材料の材料定数、構造寸法、境界条件等が構造諸元であり、有限要素法で用いられる剛性、質量マトリックスはこれ等に支配されている。したがって、有限要素法の文脈において構造諸元の変動を取り扱うとは、剛性マトリックス等の変動を取り扱うことにほかならない。

構造諸元の変動には不確定なものや意図的なものがある。前者には、弾性定数や降伏応力のように自然現象として不確定な場合と、建造物の剛性や重量見積りのように構造をモデル化するときに混入する人為的な不確定性が属する^{3),4)}。後者は、期待される機能に適應するように構造物に設計変更を加える場合と試設計から最適設計を求める場合の再設計で重要となる^{5),6)}。不確定な諸元変動を構造解析に取り入れるときには、変動の統計的性質に関するデータが必要であり、構造応答も確率過程として取り扱わねばならない⁷⁾。諸元変動と応答変動の関係

を評価しうることは、一方では構造製作に関する品質管理の指針として役立つ、他方では構造信頼性の定量的評価に資するものである。

変動を取り扱う代表的な手法としてシミュレーションと摂動法が挙げられる。シミュレーションではある種の規則に従って諸元を変動させ、個々の諸元に対する確定的な構造解析を多数回繰り返すことにより応答の変動を求める。通常は大規模計算を伴う数値構造解析では1回の確定計算に長大な演算時間を要する。また、多数の諸元を取り扱えるのが数値構造解析の利点であるので、変動をうける諸元個数も多数選択しうる。多数の諸元変動の影響を特に諸元間の相関を含めてシミュレーションで評価するには現在の計算機の能力は不足しているといえよう。摂動法には場の性質が不変であるとの前提、換言すれば応答の諸元に関する微分可能性が成立する範囲でしか有効ではないとの限界があるが、シミュレーションに較べて演算上ははるかに有利である⁸⁾。

本稿では摂動法に基づく確率有限要素法による不確定諸元変動の解析について述べ、さらにその外延として意図的な諸元変動に関する最適設計への応用について触れることとする。

2. 摂動法に基づく確率有限要素法

構造諸元が不確定であるとき、それを確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n と表す。また、その関数である構造応答を Y_1, Y_2, \dots, Y_n と表し、関数関係が式(1)で与えられるとする。

$$\begin{aligned} Y_1 &= g_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ Y_2 &= g_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ &\vdots \\ Y_n &= g_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{aligned} \quad (1)$$

確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n の結合確率密度関数 $f_X(x_1, x_2,$

*東京大学生産技術研究所 第1部

…, x_n) が与えられたとき, 確率変数 Y_1, Y_2, \dots, Y_n の実現値 y_1, y_2, \dots, y_n の連立方程式 (2)

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_n &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2)$$

が実現値 x_1, x_2, \dots, x_n の唯一の実数解をもつとき, 確率変数 Y_1, Y_2, \dots, Y_n の結合確率密度は式 (3) で与えられる.

$$f_Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{|J(\frac{g_1, g_2, \dots, g_n}{x_1, x_2, \dots, x_n})|} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3)$$

ここで J は $\partial g_i / \partial x_j$ を成分とする変換のヤコビアンである. 式 (3) は $X_i (i=1 \sim n)$ で表される構造諸元の確率的変動に対する構造応答の確率的変動 Y_i が確率密度の形で評価しうることを意味している. 実際の構造解析においては, 結合確率密度関数 $f_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が多くの場合不明である. また有限要素法においては関数関係 $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が陽的に閉じた形で求められておらず, したがって変換のヤコビアンが得られていないので, 式 (3) により応答変動の評価を実行することは事実上不可能と考えられる.

有限要素法を用い, さらに確率的応答変動を評価するには, 確率密度関数にとらわれない新しい手法が必要であり, これに対処すべく考案されたのが摂動法に基づく確率有限要素法である. 本節では摂動法による有限要素解の変動率の求め方を述べる.

2.1 静的問題

静的問題の基礎方程式を式 (4) と置く. ここで外力 $\{F\}$ は確定的とし, 剛性マトリックス $[K]$ が構造諸元の確率的変動の影響を受けるものとする.

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (4)$$

確率的に変動する任意の諸元値 X_i を微小な確率変数 ϵ_i (その期待値は $E[\epsilon_i] = 0$ とする) により, \bar{X}_i を確定項として (以後上付き棒はすべて確定項を意味する) 式 (5) と表すことができる.

$$X_i = \bar{X}_i (1 + \epsilon_i) \quad (5)$$

このとき $[K]$ の変動は, $[K]$ の定式が既知でありさえすれば諸元期待値近傍での ϵ_i についてのテイラー展開により, 式 (6) の形に評価できる.

$$[K] = [\bar{K}] + \sum_{i=1}^n [K_i^I] \epsilon_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [K_{ij}^{II}] \epsilon_i \epsilon_j + \dots \quad (6)$$

$[K]$ の変動率 $[K_i^I], [K_{ij}^{II}]$ (肩符は変動率次数を示す) は $[K]$ の X_i に関する微分操作により期待値における値が容易に求められる. $[K]$ の変動に対する変位 $\{U\}$ の変動もその確定項近傍でのテイラー展開で近似しうると仮定

して式 (7) の形に置く.

$$\{U\} = \{\bar{U}\} + \sum_{i=1}^n \{U_i^I\} \epsilon_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{U_{ij}^{II}\} \epsilon_i \epsilon_j + \dots \quad (7)$$

未知変位 $\{\bar{U}\}$, とその変動率 $\{U_i^I\}, \{U_{ij}^{II}\}$ は式 (6) と式 (7) を式 (4) に代入し, その結果に摂動法⁹⁾を適用すれば肩符 -1 を逆行列演算として式 (8), (9), (10) と求められる.

$$\{\bar{U}\} = [\bar{K}]^{-1} \{F\} \quad (8)$$

$$\{U_i^I\} = -[\bar{K}]^{-1} [K_i^I] \{\bar{U}\} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \{U_{ij}^{II}\} &= -[\bar{K}]^{-1} ([K_i^I] \{U_j^I\} + [K_j^I] \{U_i^I\} + [K_{ij}^{II}] \{\bar{U}\}) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (10)$$

上式は確率変数 ϵ_i のいかんにかかわらず, 連立 1 次方程式の求解はすべて同一の $[\bar{K}]^{-1}$ のみにより, $\{\bar{U}\}, \{U_i^I\}, \{U_{ij}^{II}\}$ が逐次求められることを意味している. $[K_i^I], [K_{ij}^{II}]$ は一般に $[\bar{K}]$ によりはるかに疎なマトリックスであるので, 上式右辺の所要演算時間は短い.

式 (6) と (7) はテイラー展開であるので確率変数に関する $[K], \{U\}$ の微分可能性を前提とする. したがって, 弾性から塑性へと解析対象の場の性質が変化するためには適用できない. また, 摂動法においては摂動次数を増加させても摂動解の正解への収束は必ずしも保証されていない. したがって, 確率変数 ϵ_i の大きい変動に対しては一般には対処できない. 一方, ある諸元の応答に及ぼす影響は多くの場合線形ではないので, これを考慮するため摂動は少なくとも 2 次以上が必要となる場合が多い.

2.2 固有値問題

固有値問題の基礎方程式を式 (11) と置く. ここで $[H]$ は振動問題の場合は質量マトリックス, 座屈問題の場合は初期応力マトリックスである. $[K], [H]$ は対称であるとする.

$$([K] - \lambda[H])\{\phi\} = \{0\} \quad (11)$$

$[K], [H]$ の確率的変動に対して, 固有値 λ と固有ベクトル $\{\phi\}$ の変動率は以下のように求められる. $[H]$ は式 (12) の形に評価し, λ と $\{\phi\}$ の変動を式 (13), (14) の形に仮定する.

$$[H] = [\bar{H}] + \sum_{i=1}^n [H_i^I] \epsilon_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [H_{ij}^{II}] \epsilon_i \epsilon_j + \dots \quad (12)$$

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sum_{i=1}^n \lambda_i^I \epsilon_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}^{II} \epsilon_i \epsilon_j + \dots \quad (13)$$

$$\{\phi\} = \{\bar{\phi}\} + \sum_{i=1}^n \{\phi_i^I\} \epsilon_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{\phi_{ij}^{II}\} \epsilon_i \epsilon_j + \dots \quad (14)$$

式 (6), (12), (13), (14) を式 (11) に代入した結果に摂動法を適用すると式 (15), (16), (17) が得られる.

$$([\bar{K}] - \bar{\lambda}[\bar{H}])\{\bar{\phi}\} = \{0\} \quad (15)$$

$$([\bar{K}] - \bar{\lambda}[\bar{H}])\{\phi_i^I\} = -([K_i^I] - \bar{\lambda}[H_i^I] - \lambda_i^I[\bar{H}])\{\bar{\phi}\} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 ([\bar{K}] - \bar{\lambda}[\bar{H}])\{\phi_{ij}^{\text{II}}\} = & -([\bar{K}_i^{\text{I}}] - \bar{\lambda}[H_i^{\text{I}}] - \lambda_i^{\text{I}}[\bar{H}])\{\phi_j^{\text{I}}\} \\
 & -([\bar{K}_j^{\text{I}}] - \bar{\lambda}[H_j^{\text{I}}] - \lambda_j^{\text{I}}[\bar{H}])\{\phi_i^{\text{I}}\} \\
 -([\bar{K}_{ij}^{\text{II}}] - \bar{\lambda}[H_{ij}^{\text{II}}] - \lambda_i^{\text{II}}[H_j^{\text{I}}] - \lambda_j^{\text{II}}[H_i^{\text{I}}] - \lambda_{ij}^{\text{II}}[\bar{H}])\{\bar{\phi}\} \\
 & \vdots \quad (17)
 \end{aligned}$$

式(15)は、静的問題の式(8)と同様に、確定構造の解である。

$\bar{\lambda}$ と $\{\bar{\phi}\}$ が求められると固有値 1 次変動率 λ_i^{I} は、式(16)に左側から $\{\bar{\phi}\}^T$ (肩符 T はマトリックスの転置を以後意味する) を乗じ、 $[\bar{K}] - \bar{\lambda}[\bar{H}]$ の対称性を利用すると式(18)と得られる。

$$\lambda_i^{\text{I}} = \frac{\{\bar{\phi}\}^T ([\bar{K}_i^{\text{I}}] - \bar{\lambda}[H_i^{\text{I}}]) \{\bar{\phi}\}}{\{\bar{\phi}\}^T [\bar{H}] \{\bar{\phi}\}} \quad (18)$$

$\bar{\lambda}$ 代入後は $[\bar{K}] - \bar{\lambda}[\bar{H}]$ は特異となるので式(16)を連立 1 次方程式として解いて $\{\phi_i^{\text{I}}\}$ を求めることはできない。これは固有ベクトルの規準化条件に関連するものであり、種々の解法が提案されている^{10),11),12)}。その一つとして、変動を含む $[H]$ と $\{\phi\}$ について式(19)の規準化条件を適用する。

$$\{\phi\}^T [H] \{\phi\} = 1 \quad (19)$$

式(12), (14)を式(19)に代入し、その 1 次摂動を作り、それを式(16)の付帯条件として用いれば、固有ベクトル 1 次変動率の決定方程式が式(20)と得られる。

$$[C]^T [C] \{\phi_i^{\text{I}}\}^k = -[C]^T [D] \{\bar{\phi}\}^k \quad (20)$$

ここで

$$[C] = \begin{bmatrix} [\bar{K}] - \bar{\lambda}^k [\bar{H}] \\ 2\{\bar{\phi}\}^{kT} [\bar{H}] \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} [\bar{K}_i^{\text{I}}] - \bar{\lambda}^k [H_i^{\text{I}}] - \lambda_i^{\text{I}k} [\bar{H}] \\ \{\bar{\phi}\}^{kT} [H_i^{\text{I}}] \end{bmatrix} \quad (22)$$

とし、肩符 k は固有次数を示す。この定式によれば、固有次数 k についての変動率は k 次の諸量のみの閉じた形で求められる。2.1 節の所論と同じく、固有値問題においても必要となる連立 1 次方程式の求解は確率変数 ϵ_i によらず唯一の $([C]^T [C])^{-1}$ のみである。2 次以上の固有値、固有ベクトル変動率も上述と同様の定式により求められる。

以上のごとく、構造系に総数 n 個の確率変数 ϵ_i で表される変動が内在する場合、それ等に対応する構造応答の変動率は摂動法により求めることができ、その求解に表れる主要な演算、たとえば $[\bar{K}]^{-1}$ はすべての確率変数に対して共通に用いることができる点が本摂動解法の特長である。ここでは、その概念を明示するため、簡単な基礎方程式を例に挙げたが、初期不整による組立建造物の初期応力問題⁸⁾、FRP 積層平板の不確定材料定数による応答変動¹³⁾等対象とする問題に応じて定式の細部は当然異なる。しかしながら、上述の特長は静的問題、固有値問題に限らずある種の時刻歴応答解析¹⁴⁾においても成立している。

3. 確率有限要素法の入力と出力

2 章では有限要素解の確率変数 ϵ_i に関する変動率が摂動法により効率的に求められることを述べた。その結果は、着目する構造応答 Y が式(23)の形にまとめられることを意味している。

$$Y = \bar{Y} + \sum_{i=1}^n Y_i^{\text{I}} \epsilon_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Y_{ij}^{\text{II}} \epsilon_i \epsilon_j + \dots \quad (23)$$

この確率量 Y の期待値 $E[Y]$ と分散 $\text{Var}[Y]$ はかかる統計量計算における 2 次近似法¹⁵⁾によれば式(24), (25)と得られる。

$$E[Y] = \bar{Y} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Y_{ij}^{\text{II}} E[\epsilon_i \epsilon_j] \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[Y] = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Y_i^{\text{I}} Y_j^{\text{I}} E[\epsilon_i \epsilon_j] \\
 & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n Y_{jk}^{\text{I}} Y_i^{\text{I}} E[\epsilon_i \epsilon_j \epsilon_k] \\
 & + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n Y_{ij}^{\text{II}} Y_{kl}^{\text{II}} (E[\epsilon_i \epsilon_j \epsilon_k \epsilon_l] \\
 & - E[\epsilon_i \epsilon_j] E[\epsilon_k \epsilon_l]) \quad (25)
 \end{aligned}$$

ここで $E[\epsilon_i \epsilon_j]$, $E[\epsilon_i \epsilon_j \epsilon_k]$, $E[\epsilon_i \epsilon_j \epsilon_k \epsilon_l]$ は確率変数 ϵ_i の 2 次、3 次、4 次のモーメントである。確率変数が正規分布に従う場合、3 次モーメントは零、4 次モーメントは 2 次モーメントの積和で表される。応答の統計量計算における 1 次近似法によれば、 Y の期待値と分散は式(24), (25)の第 1 項のみにより定められる。したがって、 Y の確定頂 \bar{Y} は 1 次近似法によれば期待値となるが、2 次近似法においては期待値ではない。

\bar{Y} , Y_i^{I} , Y_{ij}^{II} は有限要素摂動近似解として定められる。一方、 Y の期待値と分散計算においては、2 次摂動法によっても確率変数 ϵ_i の少なくとも 2 次モーメントが 1 次近似法で、4 次までのモーメントが 2 次近似法で必要となる。3 次摂動法によれば 2 次近似法では 6 次までのモーメントが必要となる。単に数学上の問題ではともかく、実際の構造系に内在する不確定性を確率変数として表すとき、確率変数の 3 次以上のモーメントを同定するには多大の費用がかかる。したがって、現実的には 2 次モーメントまでが利用しうるデータであろう。この観点から、摂動次数を増加させることは構造評価上得策ではない。前述した諸元効果の非線形性を考慮すれば、2 次摂動法が最も現実的であり、本稿の研究は 2 次摂動法を主体としている。

2 次モーメント $E[\epsilon_i^2]$, $E[\epsilon_i \epsilon_j]$ はそれぞれ i , j 番目の確率変数 ϵ_i , ϵ_j の分散にはかならない。したがって、標準偏差の 2 乗値として推定できる。また $E[\epsilon_i \epsilon_j]$ は ϵ_i , ϵ_j の共分散であるので、変数間の相関係数を基に推定できる。一方、基礎の地盤反力係数、FRP 積層平板の材料定数、不確定輪郭を有する構造の輪郭上の節点座標のように空間確率過程とみなすべき諸量に関しては、ウィーナー・キンチンの関係式に基づき、この場での i を虚数単位と

して、

$$E[\epsilon_i, \epsilon_j] = R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) e^{i2\pi f\tau} df \quad (26)$$

との関係を用いることも可能である。ここで R は自己相関関数、 S はパワー・スペクトル、 f は空間周波数である。

上述のように、確率変数を含む構造系の有限要素解析では、確定構造解析が必要となる構造諸元の期待値のほかに、確率変数のモーメント、少なくとも共分散が入力として必要となる。そして、直接的な出力は構造応答の分散である。そして、ここに述べた手法によれば確率変数の確率密度関数についての情報は一切要求されていない。構造諸元の共分散という入力に対して構造応答の分散が出力として得られることは、構造評価と品質管理において工学的判断を下すときの定量的な判断規準を供するものである。

問題点は確率変数のモーメントのデータがほとんど整備されていないことである。たとえば、圧延鋼板の板厚分布はある程度測定されているが、自動車車体外板へとプレス成形されたのちの板厚の空間分布は定かではない。数結晶粒程度の極薄板のヤング率も、サンプルについてのばらつきを求めることはやや容易であるが、1 サンプル内の空間確率過程としてのばらつきを求めることは容易ではない。したがって、着目する確率変数に関して知識と経験を総動員し、工学的に妥当と考えられる共分散を構築しているのが現状である。この際、最も演算時間を要する変動率計算は確定構造について1回行うのみで良く、応答の分散計算で種々の2次モーメントを式(24)、(25)に投入することは容易であることが、摂動法に基づく確率有限要素解析の利点である。

4. 確率有限要素法の解析例

本節では構造応答の分散の推定例を、静的問題、振動固有値問題、時刻歴応答問題について述べる。

4.1 繊維強化複合材積層平板の層内応力変動

繊維強化により直交異方性を有する平板を積層すると繊維配向角と層厚を適切にすることにより積層平板の力

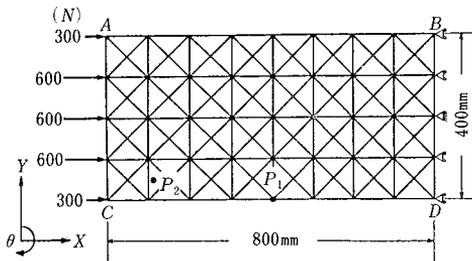


図1 長方形積層平板の有限要素分割と負荷

学的特性の制御が可能となり、テイラリングデザインの可能性が開ける。一方、このことは繊維配向角と層厚がその設計値より変動した場合、力学的特性も敏感に変化するおそれのあることを示している。この観点から、図1に負荷状態と要素分割を示すボロン/エポキシ積層平板の層内応力を検討する¹⁰⁾。積層は6層とし、繊維配向角の設計値は120°/60°/0°/0°/60°/120°、層厚の設計値はすべて0.1mmとする。この積層設計では中央面上下対称積層となり、面内変形と面外変形は連成しない。しかし、繊維配向角と層厚が上記設計値と異なれば、連成を生じ、また層内応力も変化する。そこで、繊維配向角と層厚は各層ごとに確率量であるが板面内では一様であるとして2.1節所論の解析を行う。図2は、変動率計算の正しさを検証するものであり、第1層厚のみが変化する場合の第1層下面せん断応力の確定解、1次摂動解、2次摂動解の比較を示す。2次摂動解と確定解の一致は、計算の妥当性と2次摂動近似の必要性を示すものである。かかる検証を踏まえて層内応力の3σ限界(期待値に対する標準偏差3倍値の加減)を求めた結果が図3である。諸元変動の入力としては、6層の層厚標準偏差をすべて2°、6層層厚の標準偏差をすべて0.001mmにとり、各層の変動は無作為に生ずる場合を想定して、相関係数はすべて零にとったものである。このようにして確率変数の2次モーメントを作成し、さらに確率変数には正規分布を仮定して4次モーメントを求め、分散は2次近似法により計算した。層内応力の期待値は平面内で一定であるが、標準偏差は空間的に変化する。図3の3σ限界は図2のP1点のものであり、板厚方向に一定値となっていないのは、面内外力に対して面外変形の連成により曲げが生じていることを示している。

4.2 レストレイント取り付け位置が不確定な立体配管の振動固有値

図4は両端2点でアンカーされ、中間4点で振れ止め

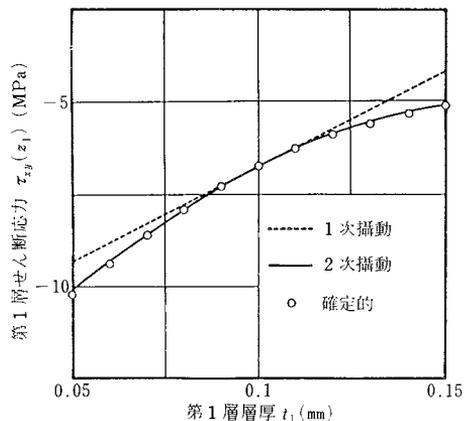


図2 1次、2次摂動解と確定解の比較

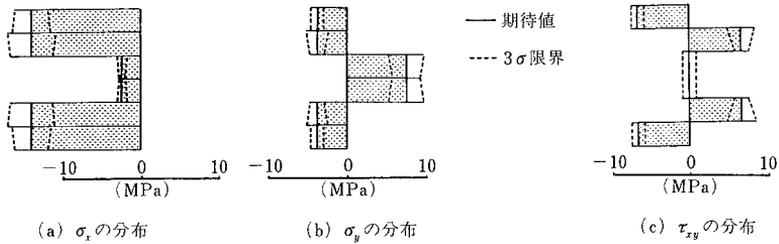


図3 6層積層平板の層内分布応力の期待値と3 σ 限界

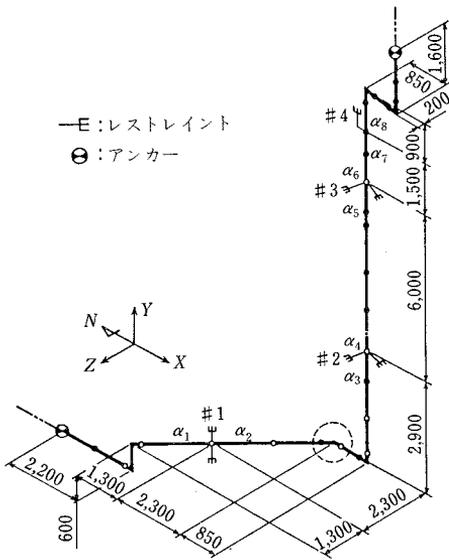


図4 レストレイント取り付け位置が不確定な立体配管

のレストレイントを有する外径162.5 mmの鋼製立体配管の模式図である。レストレイント取り付け位置は建屋建設の寸法精度に依存して往々不確かとなる。これを、境界条件の指定される節点位置が確率的であるとして2.2節の手法により解析する⁸⁾。レストレイント取り付け位置はその設計位置から ± 300 mmの範囲で不確かであるとする。これ以上の情報はないので、位置変動量の確率密度関数は計600 mmの範囲のみで一様であると仮定し、設計位置まわりの確率変数の2次モーメントを $300^2/3 \text{ mm}^2$ とする。1個のレストレイントをはさむ2個の有限要素の長さを確率変数にとると、その2個の確率変数は和が零でなければならないので、二者には完全に負の相関を与える。4個所の取り付け位置変動については、ケース1として各取り付け位置が完全無相関で変動する、ケース2として各取り付け位置が配管に沿って同方向に同量だけ変動する、ケース3としてケース2の第1レストレイント位置のみが逆方向に変動する、ケース4として相隣るレストレイント位置が相関係数0.5で変

表1 4次までの固有円振動数 ω^i (rad/sec)の統計量解析結果

モード(i)	ケース	1	2	3	4
1	期待値	44.90			
	標準偏差	2.12	0.69	3.31	1.73
	変動係数	4.72%	1.54%	7.37%	3.85%
	期待値	88.06			
2	標準偏差	2.92	1.44	0.93	1.70
	変動係数	3.32%	1.64%	1.11%	1.93%
	期待値	104.59			
	標準偏差	4.91	0.91	1.07	3.58
3	変動係数	4.69%	0.87%	1.02%	3.42%
	期待値	107.88			
	標準偏差	3.25	2.29	0.30	2.15
	変動係数	3.01%	2.12%	0.28%	1.99%

動する場合を想定し共分散マトリックスを作成する。表1は上述の入力に対する4次振動までの固有円振動数の変動の解析結果をまとめたものであり、この変動は取り付け位置が無相関に変動する場合に大きくなる傾向を有している。

4.3 減衰が不確定な塔状構造物の時刻歴応答

構造物の振動解析において減衰はしばしば確定されていない。減衰の発生する物理的な機構を特定するのも困難であり、測定した振動記録から減衰の値を定める過程によっても不確実性が混入してくる。一般に用いられている減衰比によって減衰を表すこととし、その減衰比が不確定な場合の塔状構造物の時刻歴応答を解析する。減衰が減衰比で与えられる場合、構造物のマトリックス表示された運動方程式は構造物の実固値問題から得られる実モーダルマトリックスの左右乗積によりモード分解が可能となり、運動方程式は一般化座標を未知数とするスカラー方程式に変形される。各振動次数の減衰比を確率変数とし、2章所論の手法を運動方程式に適用すると、2次摂動近似により、一般化座標の2次変動率までの決定方程式が得られる¹⁰⁾。図5は、同図左に示す鋼製塔状構造物にエルセントロ地地震波(NS成分)を入力し、ニューマーク β 法で運動方程式を直接時間積分して得られた塔根元点の曲げ表皮応力の時刻歴応答の解析結果を期待値と3 σ 限界により示したものである。本構造の6次ま

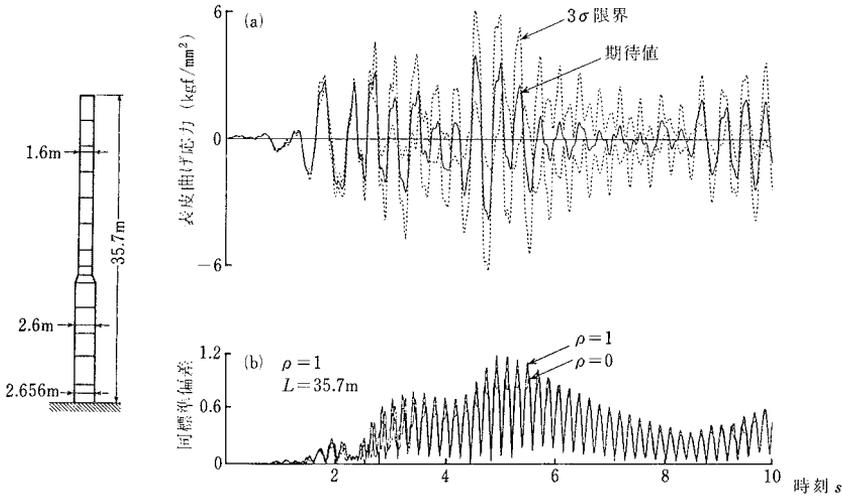


図 5 塔状構造物の底部曲げ応力の時刻歴応答の変動

での無減衰固有円振動数は 17.05, 56.36, 160.81, 332.22, 505.09, 822.57 rad/sec であり, 6 次までとれば解は十分収束していた。6 次までの減衰比の期待値はすべて 0.05, 標準偏差は $0.05 \times 0.5 = 0.025$ としている。また各次数の減衰比間の相関係数はすべて 1 としている。この構造では 1 次振動が卓越しているの、相関係数の解析結果に及ぼす影響は僅少であった。

減衰の変化は時刻歴応答の波高には影響を与えるが, 波形には大きい影響を及ぼさない。これに反し, 固有円振動数の変化は, 位相を変えるので, 波形に大きい影響を及ぼす。したがって, 摂動法による時刻歴応答変動の解析は減衰変動の場合には有効であるが, 固有円振動数変動の場合には有効ではない。

5. ヘッセ行列に基づく最適設計手法

前章までは構造諸元の変動を摂動法により取り扱う手法と不確定変動による確率的構造応答解析への応用を述べた。本章では構造諸元の意図的な変更に関連した最適化問題への応用について述べる。最近では逆変分原理に基づく構造物の形状決定問題¹⁷⁾が論じられるほど, 最適設計手法は多岐にわたり研究されている¹⁸⁾。本稿では, 2 次摂動法で得られる変動率の最も簡単な応用例として, 面内一様圧縮を受ける FRP 積層平板の座屈固有値の繊維配向角に関する無制約条件下での最大化を取り上げる。この問題は既に有限要素法によらない方法で解かれているので¹⁹⁾, その結果と比較する。ここで, 設計変数としては各層の繊維配向角 $\theta_i (i=1 \sim n$: 総層数) と取る。

繊維配向角が任意の値をとるとき, 積層平板は面内剛性の $[K_p]$, 面外剛性の $[K_b]$ のほか, 面内変形と面外変形の連成によるカップリング剛性の $[K_c]$ マトリックスが構成され, 座屈固有値問題は初期応力マトリックスを

$[K_c]$ として式(27)の形にまとめられる²⁰⁾。

$$\begin{pmatrix} [K_p] & [K_c] \\ [K_c] & [K_b] \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [K_c] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_p \\ \phi_b \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (27)$$

式(27)より $\{\phi_b\}$ を消去することにより

$$([K'_b] - \lambda [K'_c]) \{\phi_p\} = \{0\} \quad (28)$$

ここで $[K'_b]$ は下式で得られる。

$$[K'_b] = [K_b] - [K_c]^T [K_p]^{-1} [K_c] \quad (29)$$

$[K_b], [K_c], [K_p]$ は i 層の繊維配向角 θ_i の関数であり, これが初期値 $\bar{\theta}_i$ として $\theta_i = \bar{\theta}_i (1 + \epsilon_i)$ と変化するとする。このとき座屈固有値 λ の変化を ϵ_i に関する 2 次までのテイラー展開として式(30)と近似する。

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sum_{i=1}^n \lambda_i^I \epsilon_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}^{II} \epsilon_i \epsilon_j \quad (30)$$

座屈固有値初期値 $\bar{\lambda}$, と固有値変動率 $\lambda_i^I, \lambda_{ij}^{II}$ は 2 章所論の手法により容易に求められる。無制約条件下で λ を最大にする ϵ_i の値は, 式(30)の ϵ_i に関する極値化条件式(31)の解として近似的に求められる。

$$[\lambda_{ij}^{II}] \{\epsilon_i\} = -\{\lambda_i^I\} \quad (31)$$

2 次変動率を正方マトリックスに配列したものはヘッセ行列と呼ばれている。式(31)のヘッセ行列は非特異であるとの保証はなく, 定値性を有するとの保証もない。しかしながら, λ を大きくするのが変更目的であれば λ_i^I が正で大きい値をとる設計変数のみを選択する等の方法を援用すれば, そのようにして得られる(縮小された)式(31)を反復して目的関数である固有値を最大にする繊維配向角が定められる。

上述の手法により得られた座屈応力と繊維配向角の最適値への収束状況を図 6 に示す。一辺 400 mm のポロン/エポキシ 4 層正方形板の圧縮座屈に関する本手法の結果²⁰⁾と平野の結果¹⁹⁾の一致を示したものである。使用有限要素は 64 個の 2 等辺 3 角形要素である。図における

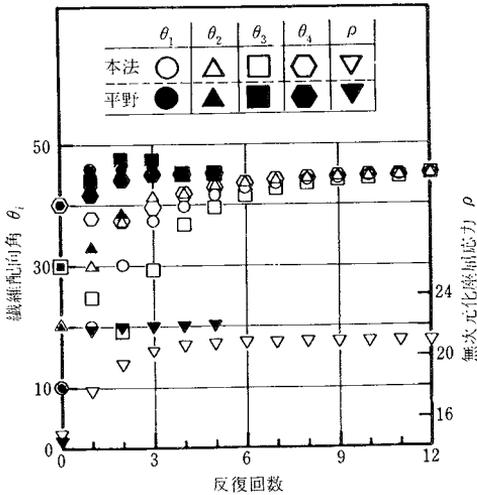


図6 4層積層平板の座屈応力の最大値への収束状況

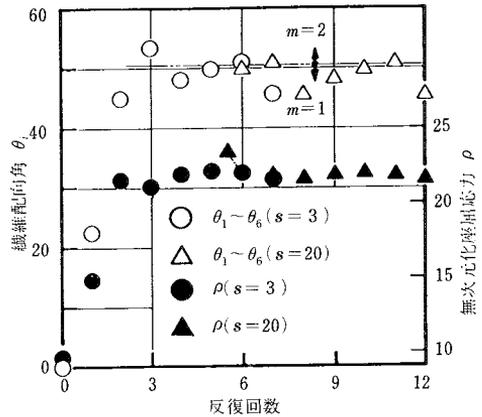


図7 アスペクト比1.25の6層積層平板の座屈固有値の最大化(モード変化のある場合)

ρ は下式による無次元化座屈応力である。

$$\rho = 12\lambda N_x b^2 / (\pi^2 t^3 Q_{22}) \quad (32)$$

ここで N_x は単位長さあたりの面内圧縮力, b は圧縮辺長, t は総板厚, $Q_{22} = E_T / (1 - \nu_{LT}\nu_{TL})$ は材料の弾性定数から定められるものである。本手法においても、座屈応力の最大値への収束より繊維配向角の最適値への収束が遅いことが示されている。

図7はアスペクト比1.25の6層長方形板の解析結果を示す。アスペクト比1.25は座屈モードが圧縮方向半波数 m が1から2へと遷移する場合である。この座屈モードの遷移点で座屈応力が最大となる場合、1座屈モードに関する最適化のみでは繊維積層角は最適値への接近、離脱を繰り返す。このような場合、式(31)で定められる ϵ_i を直接1ステップにとらず、数ステップに分ける。すなわち、ステップ数を s とすると、 ϵ_i/s を変化量にとる。このように繊維配向角変化量を小さく設定することにより最適値を見つけ出すことができる。

6. 結 言

本稿では、構造諸元の変動に着目し、変動が不確定である場合については有限要素解析による構造応答の期待値と分散を求める手法を2次摂動法と2次近似法に基づき定式化し、解析例を示した。この定式は境界要素法についても適用可能である²¹⁾。構造物の安全性を評価する際には、構造諸元の期待値で定められる構造応答から大きくへだたった応答を推定しなければならない。このとき、変動を表す確率変数が微小であるとの仮定は妥当ではない。微小でない確率変数の影響を推定するには2次摂動法はもはや有効ではなく、逐次摂動法²²⁾が有効である。逐次摂動法を利用した構造信頼性指標の評価も既に試みられている²³⁾。

構造諸元をある意図をもって変動させる場合の一例として、無拘束条件下での固有値最大化問題に対するヘッセ行列の応用例を挙げた。従来の最適化手法では、求めるのが繁雑であるとの理由をもってなぜか2次変動率の利用が等閑視されていた。数式処理をふくむ現代の計算機的能力を考慮すれば2次変動率で定められるヘッセ行列は最適化手法の1つとしてより多く取り上げられるべき素質を有していると考えられる。

本稿で述べた摂動法は微分可能性を前提としている。諸元の変動いかんによっては変動に対する微分可能性の成立しない問題も多々存在している。このような問題に現在適用可能な手法はシミュレーションであり、シミュレーションを実行可能とするものとしてスーパーコンピュータの活用が今後期待される。

末尾ながら、筆者の関心を構造系にふくまれる不確定量に誘っていただいた本所柴田碧教授、確率有限要素法の展開に尽力された東大工学部久田俊明助教授、本稿でその一部を紹介した解析例の計算に協力された研究室の諸氏に謝意を表する。(1986年5月12日受理)

参 考 文 献

- 1) Lin, Y.K.: Probabilistic Theory of Structural Dynamics, McGraw-Hill, 1967
- 2) G.I.シユエーラー著、小西一郎、高岡宣善、石川浩訳：構造物の安全性と信頼性、丸善、1984
- 3) Vanmarcke, E.: Random Fields-Analysis and Synthesis, The MIT Press, 1984
- 4) Dietlevsen, O.: Uncertainty Modeling, McGraw-Hill, 1981
- 5) Arora, J.S.: Survey of Structural Reanalysis Techniques, Proc. ASCE, 102, ST4, 1976, 783~802
- 6) Wang, B.P., Pilkey, W.D. and Palazzolo, A.R.: Reanalysis, Modal Synthesis and Dynamic Design,

- The State of Art Surveys on Finite Element Technology, ed. Noor, A.K. and Pilkey, W.D., Chap. 8, ASME, 1983
- 7) 星谷勝：確率論手法による構造解析，鹿島出版会，1973
 - 8) 中桐滋，久田俊明：確率有限要素法入門，不確定構造の解析，培風館，1985
 - 9) Bellman, R.: Perturbation Techniques in Mathematics, Physics and Engineering, Holt, Rinehart and Winston, 1964
 - 10) Collins, J.P. and Thompson, W.T.: The Eigenvalue Problem for Structural Systems with Statistical Properties, AIAA J., 7, 4, 1969, 642~648
 - 11) Fox, R.L. and Kapoor, M.P.: Rate of Change of Eigenvalues and Eigenvectors, AIAA J., 6, 12, 1968, 2426~2429
 - 12) 井上喜雄，藤川猛，今西悦二郎，阿部享：減衰振動系における感度解析と設計変更後の動特性予測，日本機械学会論文集C編，50，452，1984，597~605
 - 13) 中桐滋，鈴木敬子：FRP 積層平板熱変形の確率有限要素解析，日本機械学会論文集A編，掲載予定
 - 14) Nakagiri, S., Hisada, T. and Toshimitsu, K.: Stochastic Time-History Analysis of Structural Vibration with Uncertain Damping, Probabilistic Structural Analysis, PVP. Vol. 93, ed. Sundavaran, C., ASME Book No. H00307, 1984, 109~120
 - 15) Ang, A.H.S., and Tang, W.H.: Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Vol. 1, Basic Principles, John Wiley and Sons, 1975
 - 16) 谷周一，高畑秀行，中桐滋，久田俊明：繊維強化形複合材積層平板の変形と応力の確率有限要素解析，日本機械学会論文集A編，51，465，1985，1504~1509
 - 17) 浜田実，瀬口靖幸，多田幸生：逆変分原理による構造物の形状決定問題（第2報 座屈問題と振動問題），日本機械学会論文集A編，46，402，1980，187~198
 - 18) 尾田十八：機械構造設計の最適化法の現状と問題点，日本機械学会論文集A編，50，452，1984，543~549
 - 19) Hirano, Y.: Optimum Design of Laminated Plates under Axial Compression, AIAA J., 17, 9, 1979, 1017~1019
 - 20) 中桐滋，高畑秀行：積層平板座屈固有値のヘッセ行列に基づく最適設計，日本機械学会論文集A編，52，474，1986，481~485
 - 21) 中桐滋，鈴木敬子，久田俊明：不確定形状による応力変動の確率境界要素解析，日本機械学会論文集A編，51，461，1985，116~122
 - 22) Der Kiureghian, A. and Taylor, R.L.: Numerical Methods in Structural Reliability, 4th Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, 1983, 769
 - 23) Hisada, T., Nakagiri, S. and Mashimo, M.: A New Stochastic FEM-Based Reliability Assessment of BWR Mark-II Type Reactor Building, Trans. 8th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, 1985, M1 1/4

