

特異有限要素を用いたき裂先端の固有値解析

Solution of Eigen State at the Crack Tip Using Singular Finite Element

山田 嘉昭*・奥村 秀人*

Yoshiaki YAMADA Hidehito OKUMURA

本特集号の省資源に関する研究において、筆者らは初年度に特異変換を用いる有限要素法の手法を開発して、特異応力場あるいはひずみ場の解析を容易にした。第2年度では、複合材料に特有の局所応力を解析する3次元の有限要素プログラムの開発を重点とした。さらに重要な成果として、中型あるいは大型計算機だけに可能であった有限要素解析をマイクロコンピュータで実行することに成功を収めた。これにより、技術者が直接に手で構造計算を行うことができるようになり、精神的な負担も伴う計算の労力や実質的な計算時間の節減を達成することができた。ここのまでの研究は、主として等方性材料の $1/\sqrt{r}$ 特異性を対象としたものであった。そこで、第3年度では、特異変換を用いる方法を複合材料等の異質材料接合部に拡張することを試み、簡潔な手法を確立することができた。本報告は、主としてその結果について述べ、3年にわたる研究の結びとするものである。

1. はじめに

均質等方性体中にき裂が存在する場合に、き裂先端の応力の特異性が $r^{\lambda-1}$ ($\lambda=1/2$) であることは、よく知られている。本報告では、特異変換を用いる筆者らの有限要素法による固有値解析によりこのことを確かめ、次に複合材料のような不均質の材料あるいは異質材料接合部における特異性の解析に、同じ方法を拡張適用することとする。

き裂先端近傍の応力場を、固有関数展開により最初に解析したのは、Williams^{1),2)}である。その後、複合材料などの異種材料の結合面に直角あるいは平行に生じたき裂の先端部の応力あるいはひずみの特異性についても研究が進み、いままでにHeinとErdogan³⁾, CookとErdogan⁴⁾, LinとMar⁵⁾など多くの研究が発表されている。有限要素法による解析も行われて、藤谷^{6),7)} BažantとEstenssoro⁸⁾などをあげることができる。

ここでは、筆者らの報告^{9),10)}から主要な結果をまとめて報告することとする。

2. 特異変換を用いた有限要素法による解法定式化

図1のように、き裂先端を中心にして半径 r_0 の円筒面 S で囲まれる弾性体の領域 V を考える。簡単のため物体力を零とすると、仮想仕事の原理の表示式は次のようである。ただし $\mathbf{T}=(T_r, T_\theta)$ は表面 S の外側から作用するトラクション、 $\mathbf{u}=(u, v)$ は同じ表面上の点における変位を表す。

$$\int_0^{r_0} \int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_r \delta \epsilon_r + \sigma_\theta \delta \epsilon_\theta + \tau_{r\theta} \delta \gamma_{r\theta}) t \cdot r dr d\theta$$

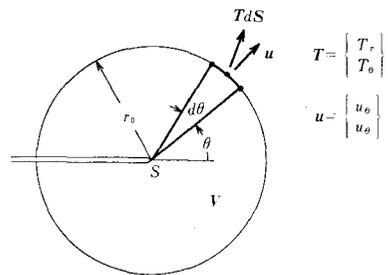


図1 き裂先端において対象とする解析領域

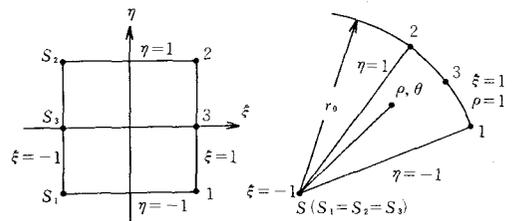


図2 変換による特異要素の創成

$$= r_0 \int_{-\pi}^{\pi} (T_r \delta u + T_\theta \delta v) t d\theta \quad (1)$$

式(1)において、 t は板厚である。表面 S 上では、内部応力とのつり合いにより次の条件が成立している。

$$T_r = \sigma_r, \quad T_\theta = \tau_{r\theta} \quad (2)$$

図2はここで用いる扇形要素を表し、変位関数は次のように ξ, η をパラメータ座標とする通常のものである。

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} (1-\xi) \mathbf{u}_s + \frac{1}{2} (1+\xi) \sum_{i=1}^3 H_i \mathbf{u}_i \quad (3)$$

* 東京大学生産技術研究所 第1部, 複合材料技術センター

ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T &= [u, v], \mathbf{u}_s^T = [u_s, v_s], \mathbf{u}_i^T = [u_i, v_i] \\ H_1 &= (1-\eta)/2 - H_3/2, H_2 = (1+\eta)/2 - H_3/2 \\ H_3 &= n_3(1-\eta^2) \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)の n_3 は節点3が存在する場合は1で、 η 方向に2次の関数系を形成する。存在しない場合は0であり、 η 方向に線形変化する変位を表す。これは、可変節点数要素¹¹⁾の概念を適用した1つの取扱いとみなすことができる。

頂点Sにおける変位 \mathbf{u}_s に対して、相対変位 $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}_i$ を導入すると、式(3)は

$$\bar{\mathbf{u}} = \{(1+\xi)/2\} \sum_{i=1}^3 H_i \bar{\mathbf{u}}_i \quad (5)$$

ただし

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_s, \bar{\mathbf{u}}_i = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_s \quad (6)$$

山田らの方法^{10), 11)}では一方において、パラメータ座標から物理平面への写像に次の特異変換を用いる。

$$\mathbf{r} = \left\{ \frac{1}{2}(1+\xi) \right\}^{\frac{1}{2}} \mathbf{r}_0, \theta = \sum_{i=1}^3 H_i \theta_i \quad (7)$$

物理面において、無次元半径座標を $\rho = r/r_0$ で表すと、式(5)の変位場の物理面における表現は

$$\bar{\mathbf{u}} = \rho^\lambda (H_1 \bar{\mathbf{u}}_1 + H_2 \bar{\mathbf{u}}_2 + H_3 \bar{\mathbf{u}}_3) \quad (8)$$

式(8)から、ひずみ-節点変位関係式が次のように求められる。

$$\{\varepsilon\} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}_i \{\bar{\mathbf{u}}_i\} \quad (9)$$

ただし

$$\{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_r \ \varepsilon_\theta \ \tau_{r\theta}], \{\bar{\mathbf{u}}_i\}^T = [\bar{u}_i \ \bar{v}_i] \quad (10)$$

$$\mathbf{B}_i = \rho^{\lambda-1} \frac{1}{r_0} \begin{bmatrix} \lambda H_i & 0 \\ H_i & \frac{2}{\theta_s} \frac{\partial H_i}{\partial \eta} \\ \frac{2}{\theta_s} \frac{\partial H_i}{\partial \eta} & (\lambda-1)H_i \end{bmatrix}, \quad i=1, 2, 3 \quad (11)$$

$\theta_s = \theta_2 - \theta_1$

$\mathbf{B}_i, i=1, 2, 3$ を成分とするマトリックス $[\mathbf{B}]$ は λ を含む項とそうでない項に分離することができて

$$[\mathbf{B}] = \rho^{\lambda-1} (\lambda [\mathbf{B}_a] + [\mathbf{B}_b]) / r_0 \quad (12)$$

こうして、応力-ひずみ関係式を

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}]\{\varepsilon\} \quad (13)$$

とするとき、式(1)の左辺は次の形に整理される。

$$\{\delta \bar{\mathbf{u}}\}^T \frac{t \theta_s}{4\lambda} \{ \lambda^2 [\mathbf{k}_a] + \lambda [\mathbf{k}_b] + [\mathbf{k}_c] \} \{\bar{\mathbf{u}}\} \quad (14)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{k}_a] &= \int_{-1}^1 [\mathbf{B}_a]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_a] d\eta \\ [\mathbf{k}_b] &= \int_{-1}^1 ([\mathbf{B}_a]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_b] + [\mathbf{B}_b]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_a]) d\eta \\ [\mathbf{k}_c] &= \int_{-1}^1 [\mathbf{B}_b]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_b] d\eta \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

また、式(1)の右辺は、次のようになることを示すことができる。

$$\{\delta \bar{\mathbf{u}}\}^T \frac{t \theta_s}{4\lambda} \{ \lambda^2 [\mathbf{k}_{sa}] + \lambda [\mathbf{k}_{sb}] \} \{\bar{\mathbf{u}}\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{k}_{sa}] &= \int_{-1}^1 2 [\mathbf{H}]^T [\mathbf{d}] [\mathbf{B}_a] d\eta \\ [\mathbf{k}_{sb}] &= \int_{-1}^1 2 [\mathbf{H}]^T [\mathbf{d}] [\mathbf{B}_b] d\eta \\ [\mathbf{H}] &= [H_1 [\mathbf{I}] \ H_2 [\mathbf{I}] \ H_3 [\mathbf{I}]] \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

マトリックス $[\mathbf{I}]$ は 2×2 の単位マトリックス、マトリックス $[\mathbf{d}]$ は応力-ひずみマトリックス $[\mathbf{D}]$ の中で応力 σ_r と $\tau_{r\theta}$ に関係する第1行と第3行ベクトルからなる 2×3 のマトリックスである。

式(14)と式(16)から全体剛性方程式を組み立てると

$$\{ \lambda^2 [\mathbf{A}] + \lambda [\mathbf{B}] + [\mathbf{C}] \} \{\bar{\mathbf{U}}\} = 0 \quad (18)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{A}] &= \sum ([\mathbf{k}_a] - [\mathbf{k}_{sa}]), [\mathbf{B}] = \sum ([\mathbf{k}_b] - [\mathbf{k}_{sb}]) \\ [\mathbf{C}] &= \sum [\mathbf{k}_c] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

λ に関する式(18)の2次の固有値問題は、次の標準固有値問題に帰着することができる。

$$[\mathbf{S}] \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{V}} \\ \bar{\mathbf{U}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{V}} \\ \bar{\mathbf{U}} \end{Bmatrix}, \quad [\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} & -\mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (20)$$

式(20)をダブルQR法によって解き、一般に複素数を含む固有値 λ を求めた。

3. 数値計算例

(a) 等方弾性体中のき裂先端の特異性

図3はいわゆる Mode I と Mode II に相当するき裂先端の特異性解析、図4は切欠きの一つの表面が固定、他の表面が自由の境界条件のもとでの同様の固有値問題である。前者では、材料を等方性とすれば、 $\lambda = 0.5$ であることが知られており、表1は、本報告の方法によるその確認である。

つぎに図5では、前に図4に示した問題について、

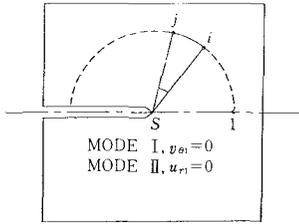


図3 Mode I および Mode II は対するき裂先端の特異応力場の解析

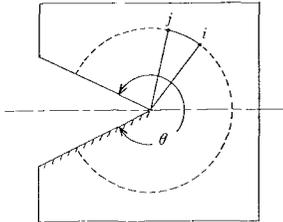


図4 自由および固定の境界面を有するき裂と解析領域

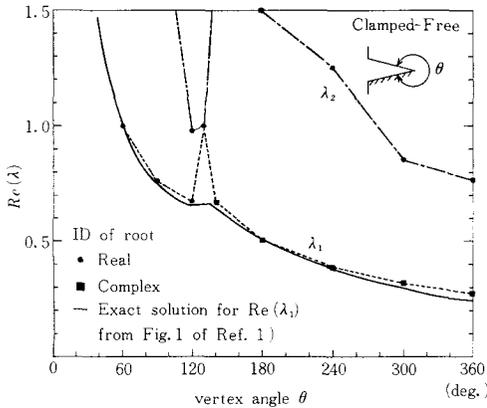


図5 自由および固定の境界面を有するき裂先端の最小および2次固有値

表1 き裂先端の特異平面応力場における固有値の計算結果

element ID	linear		quadratic	exact
	10	20	10	
number of element	10	20	10	
mode I	0.5115	0.5031	0.5010	0.5
mode II	0.5361	0.5090	0.5001	0.5

$Re(\lambda) > 0$ 範囲で得た最小固有値と2次固有値の計算結果を示し、文献1)の解析解と比較している。

(b) 複合材料中の特異性

図6と図7は、次に取り扱った重要な例題で、異種材料の境界にき裂が存在する場合、および積層構造における接合部の特異性を取り扱ったものである。

接合面に垂直なき裂の場合についての解析解は、文献4), 5)により求められており、図8および表2では、解析解と比較した結果を示している。

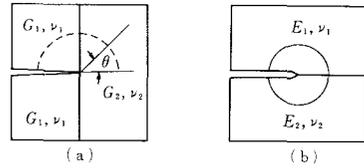


図6 異種材料の接合面に直角および平行に存在するき裂

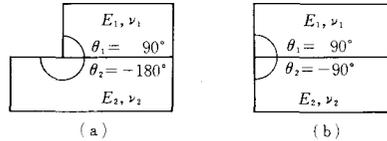


図7 積層構造の段付き接合部および接合端面

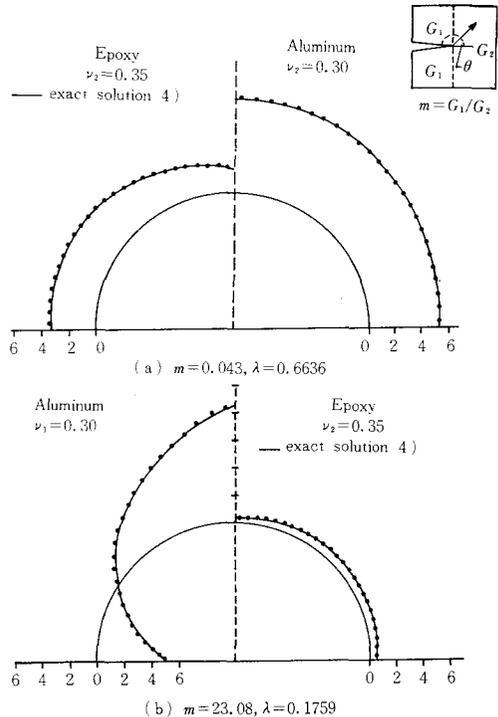


図8 接合面に直角なき裂における半径方向応力 σ_r の分布

表2 異種材料接合面に直角なき裂の特異応力場の固有値

material pair		$m = \frac{G_1}{G_2}$	plane stress		plane strain	
1	2		numerical *	exact**	numerical *	exact**
Epoxy	Al	0.043	0.7133	0.7110	0.6636	0.6619
Al	Epoxy	23.08	0.1728	0.1758	0.1759	0.1752

* obtained by linear element, 50 divisions

** references [4.5]

次に図9は、き裂が接合面上に存在する場合の結果である。図10と図11は、積層材の接合部についての解析結果であるが、ここで図10において、 $0.1 < E_1/E_2 < 10$ の範囲で応力場の特異性を与える固有値 ($\lambda < 1.0$) が2個

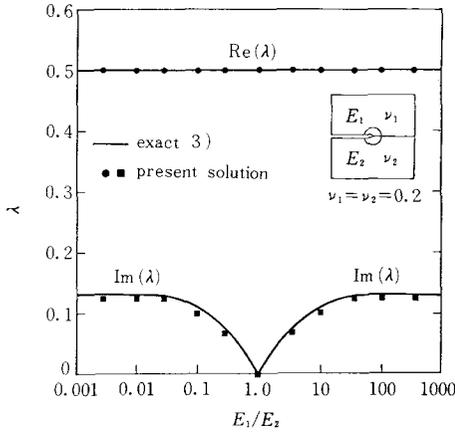


図9 接合面に平行なき裂における特異応力場の固有値

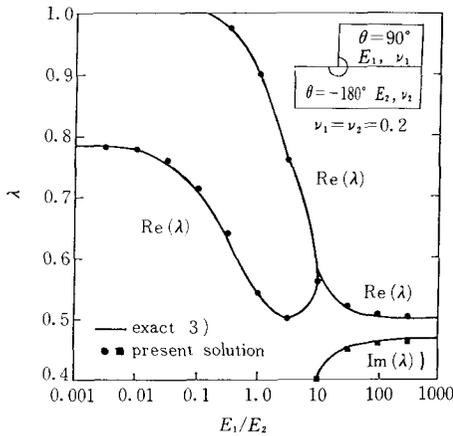


図10 段付き接合部の応力場の固有値

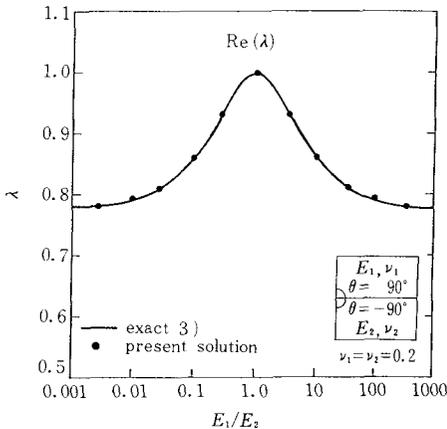


図11 接合端面の応力場の固有値

存在することは注目に値する。

4. む す び

本報告の方法は、特異変換を用いることで一貫して

り、2次元から3次元問題に拡張することも容易である。これにより、従来は種々の方法で試みられていた、き裂や応力集中部の固有応力状態の解析に統一を与えたものといえる。また、3年間にわたり等方性から異方性体、複合材料へと進めてきた一連の研究の窮極の目的にも到達することができた。

(1981年3月24日受理)

参 考 文 献

- 1) Williams, M. L., Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension, J. Appl. Mech., Vol. 19, 526-528 (1952)
- 2) Williams, M. L., On the Stress Distribution at the Base of Stationary Crack, J. Appl. Mech., Vol. 24, 109-114 (1957)
- 3) Hein, V. L. and Erdogan, F., Stress Singularities in a Two Material Wedge, Int. J. Fracture Mechanics, Vol. 7, 317-330 (1971)
- 4) Cook, T. S. and Erdogan, F., Stresses in Bonded Materials With a Crack Perpendicular to the Interface, Int. J. Engineering Science, Vol. 10, 677-697 (1972)
- 5) Lin, K. Y. and Mar, J. W., Finite Element Analysis of Stress Intensity Factors for Cracks at Bi-material Interface, Int. J. of Fracture, Vol. 12, 521-531 (1976)
- 6) 藤谷義信, 有限要素法によるクラック問題特異解の解析—その1 二次元クラック問題—, 生産研究, 29巻 9号, 459-462 (1977)
- 7) 藤谷義信, 有限要素法によるクラック問題特異解の解析—その2 三次元クラック問題の定式化—, 生産研究, 29巻 10号, 515-518 (1978)
- 8) Bazant, Z. P. and Estenssoro, L. F., Surface Singularity and Crack Propagation, Int. J. Solids and Structures, Vol. 15, 405-426 (1979)
- 9) Yamada, Y. and Okumura, H., Analysis of Local Stress in Composite Materials by the 3D Finite Element. Proceeding of Japan-US Symposium on Composite Materials, Tokyo, Jan. 1981.
- 10) Yamada, Y. and Okumura, H., Finite Element of Stress and Strain Singularity Eigen State in Inhomogeneous Media or Composite Materials, Submitted to International Symposium on Hybrid & Mixed Finite Element Methods, April 8-10, 1981, Atlanta, U. S. A.
- 11) 山田嘉昭, 江沢良孝, 西口磯春, 岡部政之, 特異有限要素とその構造解析への応用, 生産研究, 31巻 3号, 176-185 (1979)
- 12) 山田嘉昭, マトリックス法材料力学, 培風館, 6-3: 3節 (1980)