

第 7 章

結論

7.1	結論	150
7.2	今後の展望	152

7.1 結論

本論文では、ロボットによるグラスプレス・マニピュレーション一般を対象とし、その力学解析およびマニピュレーション計画について研究を行った。本論文によって明らかになったことを以下にまとめる。

まず、グラスプレス・マニピュレーションの概念および、nonprehensile manipulation の概念を整理した。またグラスプレス・マニピュレーションの力学解析の準備として、回転を伴う面接触が存在する場合でも、従来の方より正確に接触力をモデル化するための手法を提案した (2 章)。

次いで、グラスプレス・マニピュレーションの計画・実行のためには、操作中 (運動中) であることを考慮に入れた「操作の確実性」の評価が重要であることを示した。そして、操作の確実性を「ある大きさまでの外乱力が加わっても、対象物の運動が乱されないという性質」と定義した。また、この許容できる外乱力の大きさで操作の確実性を定量的に評価することを提案するとともに、線形計画法によるその (近似的な) 計算法を示した (3 章)。

さらに、グラスプレス・マニピュレーションのような環境との接触作業において重要となる、内力の問題について解析を行った。ここでは「無限大の大きさの内力が発生しうること」を過大な内力の発生可能性の定義とし、線形計画法によって過大な内力の発生可能性の有無を判定する手法を提案した (4 章)。

また、以上の結果を踏まえて、「過大な内力が発生しない」かつその上で「操作の確実性を最大にする」という方針によって、グラスプレス・マニピュレーションにおいて、ロボット指の制御モード (位置制御/力制御) を適切に決定する手法を提案した。このアプローチによって、妥当な制御モードを自動的に決定できることを数値例によって確認した (5 章)。

そして最後に、対象物を初期コンフィギュレーションから目標コンフィギュレーションまでグラスプレス・マニピュレーションによって動かすための、ロボット指の動作計画問題を扱った。具体的には、グラスプレス・マニピュレーションのための動作計画問題をグラフ探索に帰着させ、 A^* 探索によって解く手法を提案した。この手法では、上記のロボット指の制御モードの決定手法を組み込むことにより、適切に制御モードを決定し、できるだけ外乱に強いマニピュレーションを計画するようになっている。グラスプレス・マニピュレーション一般を対象とした力学解析に基づいて計画アルゴリズムを構築することによって、押し操作や転がし操作など多様なグラスプレス・マニピュレーションの計画を、指の持ち替えも含めて統一的に実現可能であることを示した。また、実機ロボットハンドへの計画結果の適用も行った (6 章)。提案した計画アルゴリズムを用いれば、さまざまな条件の下で一般的なグ

ラスプレス・マニピュレーションを実行させるためのロボットへの動作指令を生成することができる。

以上のように、本論文では一般的なグラスプレス・マニピュレーションを対象に、基礎的な力学解析（接触力のモデル化・操作の確実性の評価・過大な内力の発生可能性の判定）を行うとともに、その応用としての複数のロボット指によるグラスプレス・マニピュレーションの計画手法（指の制御モードの決定・指の動作計画）を示した。これらは、ロボットによって多様なグラスプレス・マニピュレーションを実現するための基本的な道具立てとなるものであり、ひいてはロボットによる器用なマニピュレーションの実現に大きく資するものと期待される。

7.2 今後の展望

本論文において未解決の重要な問題を列挙する。

異なる観点からの操作の確実性の評価 本論文の3章では、グラスプレス・マニピュレーションの操作の確実性として、「ある大きさまでの外乱力が加わっても、対象物の運動が乱されないという性質」について評価を行った。この性質はグラスプレス・マニピュレーションにおいては第一義的に評価すべきものであるが、つねにこれだけの評価すればよい、というものではない。例えば、弾性指によるピボット操作などでは、いくつかの自由度に関しては「操作中の対象物に、外乱力が加わって対象物の運動が乱されても、その外乱力が取り除かれれば元の運動に戻るという性質」を評価する方が適切な場合もある。これらの複数の観点からの評価を統一的に定式化し、マニピュレーションの計画・実行に役立てることが求められる。

過大な内力の発生可能性のより厳密な判定 本論文の4章では過大な内力の発生可能性を判定する方法を示したが、これは必要条件であった。これをより必要十分条件に近づけるため、さらなる解析が必要である。パワーグラスプに関する力学解析の結果[小俣 1995, 小俣 2001]が参考になると思われる。

グラスプレス・マニピュレーション計画の高速化と適用可能範囲の拡大 本論文の6章で一般的なグラスプレス・マニピュレーションの計画手法を提案したが、計算量がかなり大きいことから、現実的にこの計画手法を適用可能な範囲はまだ限られている。したがって、計画アルゴリズムの高速化を図ること、および対象物の動きだけを計画するような大域的な計画手法（例えば[吉川 1992a, 余 1995a, 相山 1999, Ji 2001]）との統合を行うことによって、計画可能な問題のクラスを広げていく必要がある。

パラメータの不確実性への対応 本論文における力学解析の結果は、パラメータの不確実性に対する考慮がまだ十分でない。特に、グラスプレス・マニピュレーションでは環境との接触が存在するため、摩擦係数の不確実性が大きな問題である。また、指位置などの誤差の問題による影響を受ける場合もある。本論文においては、操作の確実性の概念とその定量的評価を導入したことで、ある程度までこれらパラメータの不確実性に対応できると考えられるが、より詳しい解析が望まれる。

把持によるマニピュレーション計画との融合 本論文においては、グラスプレス・マニピュレーションの計画問題を扱ったが、把持によるマニピュレーションとグラスプレス・マニピュレーションの両方を柔軟に使い分けるような計画が実現できれば、その効果は極めて大きい。現状でも、把持によるマニピュレーションをグラスプレス・マニピュレー

ションの特別な場合だと考えれば、本論文のアルゴリズムを把持によるマニピュレーションにそのまま適用することも可能である。しかし、計算量の点から、把持によるマニピュレーション計画手法と、グラスプレス・マニピュレーションの計画手法を別々に構築し、それらを統合するアプローチが現実的であると思われる。

近年のマニピュレーション研究には元気がないとの指摘がある [中村 2002]。必ずしも本質的とは言えない小さな問題を解くことに終始しているのではないか、という批判である。一方で、マニピュレーション研究はボトムアップ的に進めるべき、との意見も出されている [内山 2002]。本論文の内容は、疑いようもなくボトムアップ的なものであった。今後の大きな課題としては、このようなボトムアップ的に得られた知見を、実際に使えるレベルの技術へと育てること、そして、マニピュレーションの背後にある知能の問題へとつなげる道を模索することが重要であると思われる。

謝辞

本論文の審査の主査を務めて下さった、

東京大学 大学院工学系研究科 精密機械工学専攻 新井民夫教授

に、心より感謝申し上げます。先生には研究指導はもとより、学生時代から公私に渡ってさまざまなご助力、ご助言を頂きました。先生の下で、自由な雰囲気の中で研究生活をスタートさせることができたことは、非常に幸運なことでした。どうもありがとうございました。

また、副査を務めて下さった、

東京大学 大学院情報理工学系研究科 知能機械情報学専攻	井上博允教授
東京大学 大学院工学系研究科 精密機械工学専攻	木村文彦教授
東京大学 大学院情報理工学系研究科 知能機械情報学専攻	中村仁彦教授
東京大学 新領域創成科学研究科 環境学専攻	佐々木健助教授

からは、厳しくも暖かいご指導を賜りました。謹んで感謝の意を表します。斯界の第一人者の先生方から貴重なご助言を多数頂くことができたことは、この上なく恵まれた環境でありました。

東京大学大学院工学系研究科精密機械工学専攻の太田順助教授からは、動作計画手法に関する専門的な内容から研究に対する姿勢に至るまで、節目節目でたくさんの重要なことを教えて頂きました。また、研究を進める上でさまざまなご配慮および激励をいただきました。どうもありがとうございました。

前・東京大学大学院工学系研究科精密機械工学専攻助教授の故・湯浅秀男先生からは、研究内容についても研究者としての心構えについても極めて多くのことを教わりました。深く感謝申し上げるとともに、先生のあまりにも早いご逝去に、心より哀悼の意を表します。

筑波大学機能工学系の相山康道講師は、この研究をスタートさせるきっかけを作って下さったのみならず、東京大学ご在職中から現在に至るまで、専門的立場からのご助言を下さ

いました。また、実験設備の使用を快諾いただきました。どうもありがとうございました。

東京大学大学院工学系研究科精密機械工学専攻の新井・湯浅・太田研究室に在籍されたメンバーの方々には、さまざまな形でお世話になりました。すべての方のお名前をここに挙げることはできませんが、深く感謝の意を表します。本当にありがとうございました。特に、本論文には木地本浩和氏（現・NTT コミュニケーションズ）および中村智久氏（現・NTT データ）と共同で行った研究の成果が反映されています。両氏の大きな貢献に心より感謝いたします。

筑波大学機能工学系相山研究室の京増司氏には、多指ハンドシステムの実験について多くのご助力を頂きました。ありがとうございました。

そのほか、本論文の研究の遂行にあたっては、日本学術振興会科学研究費補助金（奨励研究 (A) / 若手研究 (B), No. 13750210, 平成 13 年度～14 年度）による支援を頂きました。また、本論文の研究成果の発表に対して、(財) 井上科学振興財団および (財) スズキ財団より援助を頂きました。研究活動を支援して下さった関係各位に心より御礼申し上げます。

最後に、いつも私を見守ってくれた両親、そして、傍らで明るく私を支えてくれた妻のなつきに感謝して、謝辞の結びとします。

参考文献

論文

- [相山 1992] 相山 康道, 稲葉 雅幸, 井上 博允: “ピボット操作を用いた多面体物体操作,” 日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会講演論文集, pp. 93–96, 1992.
- [相山 1995] 相山 康道: “グラスプレス・マニピュレーションに関する研究,” 東京大学大学院工学系研究科 博士論文, 1995.
- [相山 1996a] 相山 康道, 稲葉 雅幸, 井上 博允: “グラスプレス・マニピュレーションの研究: 操作形態の分類とピボット操作の実現,” 日本ロボット学会誌, Vol. 14, No. 1, pp. 114–121, 1996.
- [相山 1996b] 相山 康道, 茶碗谷 健, 朱 赤, 新井 民夫: “リリース型マニピュレーションの研究: 平面運動の基礎的解析と学習による位置決め精度の向上,” 日本機械学会論文集 (C 編), Vol. 62, No. 602, pp. 34–41, 1996.
- [Aiyama 1997] Y. Aiyama and T. Arai: “Grasplless Manipulation with Sensor Feedback,” Proc. of IEEE Int. Symp. on Assembly and Task Planning, pp. 78–83, 1997.
- [相山 1999] 相山 康道, 安井 俊徳, 新井 民夫: “グラスプレス・マニピュレーションの操作計画のための接触状態遷移グラフの生成,” 日本機械学会論文集 (C 編), Vol. 65, No. 636, pp. 3239–3244, 1999.
- [Akella 1998] S. Akella and M. T. Mason: “Posing Polygonal Objects in the Plane by Pushing,” Int. J. of Robotics Research, Vol. 17, No. 1, pp. 70–88, 1998.
- [Asada 1985] H. Asada and A. B. By: “Kinematic Analysis of Workpart Fixturing for Flexible Assembly with Automatically Reconfigurable Fixtures,” IEEE J. of Robotics and Automation, Vol. RA-1, No. 2, pp. 86–94, 1985.
- [浅田 1987] 浅田 春比古: “マニピュレーションの知能,” 日本ロボット学会誌, Vol. 5, No. 6, pp. 487–494, 1987.
- [Bicchi 2000] A. Bicchi and V. Kumar: “Robotic Grasping and Contact: A Review,” Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 348–353, 2000.

- [Bruyninckx 1998] H. Bruyninckx, S. Damey and V. Kumar: "Generalized Stability of Compliant Grasps," Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 2396–2402, 1998.
- [Desai 1989] R. S. Desai and R. A. Voltz: "Identification and Verification of Termination Conditions in Fine Motion in Presence of Sensor Errors and Geometric Uncertainties," Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 800–807, 1989.
- [Doty 1993] K. L. Doty, C. Melchiorri, C. Bonivento: "A Theory of Generalized Inverses Applied to Robotics," Int. J. of Robotics Research, Vol. 12, No. 1, pp. 1–19, 1993.
- [Donald 1997] B. R. Donald, J. Jennings and D. Rus: "Information Invariants for Distributed Manipulation," Int. J. of Robotics Research, Vol. 16, No. 5, pp. 673–702, 1997.
- [Eppstein 1998] D. Eppstein: "Finding the k Shortest Paths," SIAM J. on Computing, Vol. 28, No. 2, pp. 652–673, 1998.
- [Erdmann 1994] M. Erdmann: "On a Representation of Friction in Configuration Space," Int. J. of Robotics Research, Vol. 13, No. 3, pp. 240–271, 1994.
- [Erdmann 1998] M. Erdmann: "An Exploration of Nonprehensile Two-Palm Manipulation," Int. J. of Robotics Research, Vol. 17, No. 5, pp. 485–503, 1998.
- [藤田 2002] 藤田 悠介, 中村 仁彦, Zvi Shiller: "トポロジの異なる経路を計算するデュアルダイキストラ法," 日本ロボット学会創立 20 周年記念学術講演会予稿集, 1D22, 2002.
- [Goldberg 1993] K. Y. Goldberg: "Orienting Polygonal Parts Without Sensors," Algorithmica, Vol. 10, pp. 201–225, 1993.
- [Goyal 1991a] S. Goyal, A. Ruina and J. Papadopoulos: "Planar sliding with dry friction Part 1. Limit surface and moment function," Wear, Vol. 143, pp. 307–330, 1991.
- [Goyal 1991b] S. Goyal, A. Ruina and J. Papadopoulos: "Planar sliding with dry friction Part 2. Dynamics of Motion," Wear, Vol. 143, pp. 331–352, 1991.
- [Harada 2002] K. Harada, J. Nishiyama, Y. Murakami and M. Kaneko: "Pushing Multiple Objects using Equivalent Friction Center," Proc. 2002 of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 2485–2491, 2002.
- [原田 2002] 原田 研介, 梶田 秀司, 金子 健二, 比留川 博久: "手先反力を考慮したヒューマノイドによる押し作業," 日本ロボット学会創立 20 周年記念学術講演会予稿集, 1D14, 2002.
- [長谷川 1996] 長谷川 勉: "マニピュレーションの知能," 日本機械学会論文集 (C 編), Vol. 62, No. 602, pp. 3740–3745, 1996.
- [平井 1988] 平井 慎一, 浅田 春比古, 得丸 英勝: "組立作業における物体の接触状態遷移に関する運動学的解析とそのネットワーク表現の自動生成," 計測自動制御学会論文集, Vol. 24, No. 4, pp. 406–413, 1988.

- [平井 1999] 平井 慎一: “凸多面錐理論に基づくマニピュレーションの運動学・静力学とそのマニピュレーション計画問題への応用,” 日本ロボット学会誌, Vol. 17, No. 1, pp. 68–83, 1999.
- [比留川 1994] 比留川 博久: “経路探索問題—ロボットの動作計画—,” 情報処理, Vol. 35, No. 8, pp. 751–760, 1994.
- [黄 1999] 黄 昶淳: “多指ハンドによる操りの運動学シミュレータの開発と動作計画への応用,” 東京大学大学院工学系研究科 博士論文, 1999.
- [Ji 2001] X. Ji and J. Xiao: “Planning Motions Compliant to Complex Contact States,” *Int. J. of Robotics Research*, Vol. 20, No. 6, pp. 446–465, 2001.
- [Kavraki 1996] L. Kavraki, P. Svestka, J.-C. Latombe, and M. Overmars: “Probabilistic Roadmaps for Path Planning in High-Dimensional Configuration Spaces,” *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 12, No. 4, pp. 566–580, 1996.
- [金子 2002] 金子 真 ほか: “特集「マニピュレーション: 21 世紀に向けた新展開」,” 日本ロボット学会誌, Vol. 20, No. 2, pp. 123–154, 2002.
- [Kerr 1986] J. Kerr and B. Roth: “Analysis of Multifingered Hands,” *Int. J. of Robotics Research*, Vol. 4, No. 4, pp. 3–17, 1986.
- [Kijimoto 1999] H. Kijimoto, T. Arai, Y. Aiyama and T. Yamamoto: “Performance Analysis and Planning of Grasplless Manipulation,” *Proc. of IEEE Int. Symp. on Assembly and Task Planning*, pp. 238–243, 1999.
- [Klein 1990] C. A. Klein and S. Kittivatcharapong: “Optimal Force Distribution for the Legs of a Walking Machine with Friction Cone Constraints,” *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 6, No. 1, pp. 73–85, 1990.
- [栗栖 1995] 栗栖 正充, 吉川 恒夫: “押し作業における対象物の軌道計画,” 日本ロボット学会誌, Vol. 13, No. 8, pp. 1115–1121, 1995.
- [栗栖 1996] 栗栖 正充, 吉川 恒夫: “押し作業における対象物の軌道追従制御,” 日本ロボット学会誌, Vol. 14, No. 8, pp. 1200–1207, 1996.
- [栗栖 1999] 栗栖 正充, 塚田 和彦, 花崎 紘一: “転がし作業における対象物の経路計画,” 日本ロボット学会学術講演会予稿集, pp. 1021–1022, 1999.
- [栗栖 2002] 栗栖 正充: “連続した転がし操作における力作用点の選定,” 日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会’02 講演論文集, 2P1-G08, 2002.
- [京増 2001] 京増 司, 相山 康道: “一般多面体形状物体のピボット操作計画,” 計測自動制御学会システムインテグレーション部門学術講演会講演論文集, pp. 263–264, 2001.
- [LaValle 2001] S. M. LaValle and J. J. Kuffner: “Rapidly-Exploring Random Trees: Progress and Prospects,” B. R. Donald, K. M. Lynch and D. Rus, eds., *Algorithmic and Computational Robotics: New Directions*, pp. 293–308, A. K. Peters, 2001.

- [Lynch 1996a] K. Lynch: “Nonprehensile Robotic Manipulation: Controllability and Planning,” Technical Report, CMU-RI-TR-96-05, Carnegie Mellon University, 1996.
- [Lynch 1996b] K. Lynch and M. Mason: “Stable Pushing: Mechanics, Controllability, and Planning,” *Int. J. of Robotics Research*, Vol. 15, No. 6, pp. 533–556, 1996.
- [Lynch 1999a] K. Lynch and M. Mason: “Dynamic Nonprehensile Manipulation: Controllability, Planning, and Experiments,” *Int. J. of Robotics Research*, Vol. 18, No. 1, pp. 64–92, 1999.
- [Lynch 1999b] K. Lynch: “Locally Controllable Manipulation by Stable Pushing,” *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 15, No. 2, pp. 318–327, 1999.
- [Maeda 2001] Y. Maeda, Y. Aiyama and T. Arai: “Planning of Quasi-Static Graspless Manipulation,” *Proc. of 4th IEEE Int. Symp. on Assembly and Task Planning*, pp. 98–103, 2001.
- [Marigo 2000] A. Marigo, M. Ceccarellio, S. Piccinocchi, and A. Bicchi: “Planning Motions of Polyhedral Parts by Rolling,” *Algorithmica*, Vol. 26, pp. 560–576, 2000.
- [Mason 1986] M. T. Mason: “Mechanics and Planning of Manipulator Pushing Operations,” *Int. J. of Robotics Research*, Vol. 5, No. 3, pp. 53–71, 1986.
- [Mason 1993] M. Mason and K. Lynch: “Dynamic Manipulation,” *Proc. of IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, pp. 152–159, 1993.
- [Mason 1999] M. T. Mason: “Progress in Nonprehensile Manipulation,” *Int. J. of Robotics Research*, Vol. 18, No. 11, pp. 1129–1141, 1999.
- [Mattikalli 1995] R. Mattikalli, D. Baraff, P. Khosla and B. Repeto: “Gravitational Stability of Frictionless Assemblies,” *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 11, No. 3, pp. 374–388, 1995.
- [Mirza 1994] K. Mirza and D. E. Orin: “General Formulation for Force Distribution in Power Grasp,” *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 880–887, 1994.
- [中村 1986] 中村 仁彦, 永井 清, 吉川 恒夫: “複数のロボット機構による協調的あやつりの力学,” *日本ロボット学会誌*, Vol. 4, No. 5, pp. 489–498, 1986.
- [中村 1990] 中村 仁彦: “把持とあやつり,” *計測と制御*, Vol. 29, No. 3, pp. 206–212, 1990.
- [中村 1991] 中村 仁彦: “指の制御,” *計測と制御*, Vol. 30, No. 5, pp. 395–399, 1991.
- [中村 1995] 中村 仁彦, 張 曉毅, 吉本 堅一: “パワーグラスプとそのロバスト性の評価法,” *日本ロボット学会誌*, Vol. 13, No. 6, pp. 866–874, 1995.
- [中村 1997] 中村 仁彦, 来島 正一郎: “多面凸集合演算を用いたパワーグラスプの限界外力空間計算,” *日本ロボット学会誌*, Vol. 15, No. 5, pp. 728–735, 1997.
- [中村 2002] 中村 仁彦: “Open Problem を探すよりも Open The Problem,” *日本ロボット学会誌*, Vol. 20, No. 2, pp. 130–131, 2002.
- [Okamura 2000] A. M. Okamura, N. Smaby and M. R. Cutkosky: “An Overview of Dexterous

- Manipulation,” Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 255–262, 2000.
- [小俣 1995] 小俣 透, 永田 和之: “多指ハンドによるパワーグラスプの力学的特性,” 日本ロボット学会誌, Vol. 13, No. 4, pp. 525–531, 1995.
- [小俣 2001] 小俣 透, P. Daengtamai: “パワーグラスプの不静定把持力計算法,” 日本ロボット学会誌, Vol. 19, No. 7, pp. 874–881, 2001.
- [小俣 2002] 小俣 透: “パワーグラスプの最適関節トルク計算法,” 日本機械学会論文集 (C 編), Vol. 68, No. 672, pp. 2395–2401, 2002.
- [大川 1993] 大川 善邦, 横山 乾: “移動ロボットによる箱押し作業の制御,” 日本ロボット学会誌, Vol. 11, No. 1, pp. 148–155, 1993.
- [Peshkin 1988] M. A. Peshkin and A. C. Sanderson: “Planning Robotic Manipulation Strategies for Workpieces that Slide,” IEEE J. of Robotics and Automation, Vol. 4, No. 5, pp. 524–531, 1988.
- [Raibert 1981] M. H. Raibert and J. J. Craig: “Hybrid Position/Force Control of Manipulators,” ASME J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 102, No. 2, pp. 126–133, 1981.
- [沢崎 1991] 沢崎 直之, 井上 博允: “多指ハンドによる物体の転がし操作,” 日本ロボット学会誌, Vol. 9, No. 5, pp. 560–571, 1991.
- [沢崎 1993] 沢崎 直之, 井上 博允: “複数の自律ロボットによる協調物体操作,” 日本機械学会論文集 (C 編), Vol. 59, No. 564, pp. 2318–2325, 1993.
- [Shimoga 1996] K. B. Shimoga: “Robot Grasp and Synthesis Algorithms: A Survey,” Int. J. of Robotics Research, Vol. 15, No. 3, pp. 230–266, 1996.
- [寺崎 1994] 寺崎 肇, 長谷川 勉: “平行 2 指ハンドによる滑らし操作を利用した知的物体操作のための動作計画,” 日本ロボット学会誌, Vol. 12, No. 7, pp. 1056–1065, 1994.
- [寺崎 1995] 寺崎 肇, 長谷川 勉: “指先に回転機構を有する平行 2 指ハンドによる知的物体操作のための動作計画,” 日本ロボット学会誌, Vol. 13, No. 7, pp. 1044–1052, 1995.
- [Trinkle 1992] J. C. Trinkle: “On the Stability and Instantaneous Velocity of Grasped Frictionless Objects,” IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 8, No. 5, pp. 560–572, 1992.
- [Trinkle 1993] J. C. Trinkle, R. C. Ram and A. O. Farahat: “Dexterous Manipulation Planning and Execution of an Enveloped Slippery Workpiece,” Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 442–448, 1993.
- [Trinkle 1995] J. Trinkle, A. Farahat and P. Stiller: “First-Order Stability Cells of Active Multi-Rigid-Body Systems,” IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 11, No. 4, pp. 545–557, 1995.
- [内山 1983] 内山 勝: “マニピュレーション技術の現状と将来,” 日本ロボット学会誌, Vol. 1,

- No. 2, pp. 4–9, 1983.
- [内山 2002] 内山 勝: “マニピュレーション理論のフロンティア,” 日本ロボット学会誌, Vol. 20, No. 2, pp. 132–133, 2002.
- [渡辺 2002] 渡辺 哲陽, 吉川 恒夫: “要求外力集合を用いた環境との接触を伴う物体の把持の最適化,” 日本ロボット学会創立 20 周年記念学術講演会予稿集, 3E18, 2002.
- [Whitney 1982] D. E. Whitney: “Quasi-Static Assembly of Compliantly Supported Rigid Parts,” Trans. of the ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 104, No. 1, pp. 65–77, 1982.
- [Xiao 2001] J. Xiao and X. Ji: “Automatic Generation of High-Level Contact State Space,” Int. J. of Robotics Research, Vol. 20, No. 7, pp. 584–606, 2001.
- [山下 2001] 山下 淳, 太田 順, 河野 功, 福地 正樹, 新井 民夫, 浅間 一: “複数移動ロボットによる協調物体操作計画,” 電気学会論文誌 (C 編), Vol. 121, No. 3, pp. 549–556, 2001.
- [吉川 1992a] 吉川 恒夫, 横小路 泰義, 余 永: “拘束状態遷移難度に基づくロボットによる組立作業の計画法,” システム制御情報学会論文誌, Vol. 5, No. 7, pp. 283–293, 1992.
- [吉川 1992b] 吉川 恒夫, 栗栖 正充: “対象物押し操作にもとづく摩擦力分布の推定法,” 日本ロボット学会誌, Vol. 10, No. 5, pp. 632–638, 1992.
- [吉川 1995] 吉川 恒夫: “把持と操りの基礎理論 1. 受動拘束と能動拘束,” 日本ロボット学会誌, Vol. 13, No. 7, pp. 950–957, 1995.
- [吉川 1996a] 吉川 恒夫: “把持と操りの基礎理論 2. 指先力,” 日本ロボット学会誌, Vol. 14, No. 1, pp. 48–54, 1996.
- [吉川 1996b] 吉川 恒夫: “把持と操りの基礎理論 3. 制御,” 日本ロボット学会誌, Vol. 14, No. 4, pp. 505–511, 1996.
- [吉川 1996c] 吉川 恒夫, 栗栖 正充, 水野 光政: “ロボットによる対象物の押し作業の最適計画,” 日本ロボット学会誌, Vol. 14, No. 6, pp. 846–852, 1996.
- [吉川 1998] 吉川 恒夫: “マニピュレーション,” 日本ロボット学会誌, Vol. 16, No. 7, pp. 910–912, 1998.
- [Yoshikawa 2000] T. Yoshikawa and T. Watanabe: “Dynamic Control of Soft-finger Hands for Pivoting an Object in Contact with the Environment,” Proc. of IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, pp. 324–329, 2000.
- [余 1995a] 余 永, 横小路 泰義, 吉川 恒夫: “拘束状態における二種類の運動自由度の定義と組立作業計画への応用,” システム制御情報学会論文誌, Vol. 8, No. 2, pp. 80–90, 1995.
- [余 1995b] 余 永, 横小路 泰義, 中須 信昭, 吉川 恒夫: “複数のロボット指による環境と接触している物体の準動的操作,” 日本ロボット学会誌, Vol. 13, No. 6, pp. 875–885, 1995.
- [余 1999] 余 永, 竹内 賢一, 吉川 恒夫: “ロボットハンドによるパワーグラスプの最適化,” 日本ロボット学会誌, Vol. 17, No. 4, pp. 557–566, 1999.

- [余 2000] 余 永, 吉川 恒夫: “物体間の接触の安定性に関する評価,” 日本ロボット学会誌, Vol. 18, No. 7, pp. 1026–1033, 2000.
- [張 1996] 張 曉毅, 中村 仁彦, 吉本 堅一: “不完全な接触をもつ把持の力学的多面凸解析,” 日本ロボット学会誌, Vol. 14, No. 1, pp. 105–113, 1996.
- [張 1997] 張 曉毅, 中村 仁彦, 吉本 堅一: “パワーグラスプを含む一般的な把持とあやつりの力学,” 日本ロボット学会誌, Vol. 15, No. 2, pp. 207–215, 1997.

図書

- [エイホ 1987] A. V. エイホ, J. E. ホップクロフト, J. D. ウルマン (大野義夫 訳): “データ構造とアルゴリズム,” 培風館, 1987.
(原著 A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. D. Ullman: “Data Structure and Algorithms,” Addison-Wesley, 1983.)
- [有本 2002] 有本 卓: “新版 ロボットの力学と制御,” 朝倉書店, 2002.
- [藤原 1984] 藤原 邦男: “物理学序論としての力学,” 東京大学出版会, 1984.
- [古川 1997] 古川 康一 監訳: “エージェントアプローチ 人工知能,” 共立出版, 1997.
(原著 S. Russel and P. Norvig: “Artificial Intelligence –A Modern Approach,” Prentice-Hall, 1995.)
- [伊理 1995] 伊理 正夫, 今野 浩, 刀根 薫 監訳: “最適化ハンドブック,” 朝倉書店, 1995.
(原著 G. L. Nemhauser, A. H. G. Rinnooy Kan, M. J. Todd eds., Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol. 1, OPTIMIZATION, Elsevier Science Publishers, 1989.)
- [小山 1980] 小山 昭雄, 森田 道也: “オペレーションズ・リサーチ,” 培風館, 1980.
- [Latombe 1991] J.-C. Latombe: “Robot Motion Planning,” Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [Murray 1994] R. M. Murray, Z. Li and S. S. Sastry: “A Mathematical Introduction to ROBOTIC MANIPULATION,” CRC Press, 1994.
- [太田 2001] 太田 順, 倉林 大輔, 新井 民夫: “知能ロボット入門 —動作計画問題の解法—,” コロナ社, 2001.
- [Pearl 1984] J. Pearl: “Heuristics: Intelligent Search Strategies for Computer Problem Solving,” Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [丹慶 1993] 丹慶 勝市, 奥村 晴彦, 佐藤 俊郎, 小林 誠 訳: “NUMERICAL RECIPES in C [日本語版],” 技術評論社, 1993.
(原著 W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery: “Numerical

Recipes in C: The Art of Scientific Computing,” Cambridge University Press, 1992.)

[吉川 1988] 吉川 恒夫: “ロボット制御基礎論,” コロナ社, 1988.

その他

[石綿] 石綿 陽一: ART-Linux,

<http://www.movingeye.co.jp/~you1/art-linux/download.html>

[Makhorin] A. Makhorin: GLPK (GNU Linear Programming Kit),

<http://www.gnu.org/software/glpk/glpk.html>

研究業績

本論文に関連するもの

査読あり学術論文

1. 前田 雄介, 木地本 浩和, 太田 順, 相山 康道, 新井 民夫:
複数のロボット指による平面内グラスプレス・マニピュレーションの計画
(日本ロボット学会誌, Vol. 19, No. 8, pp. 1010–1017, 2001.)
2. 前田 雄介, 相山 康道, 新井 民夫:
ロボットによる接触作業における内力の解析
(精密工学会誌, Vol. 67, No. 12, pp. 1996–1999, 2001.)

査読あり講演論文

1. Jun Sasaki, Yusuke Maeda, Yasumichi Aiyama, Jun Ota and Tamio Arai:
Initial Grasping Strategy for an Unknown Object by Cooperative Mobile Robots
(Proc. of 1996 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 2781–2786, 1996.)
2. Yusuke Maeda, Yasumichi Aiyama, Tamio Arai and Taiga Ozawa:
Analysis of Object-Stability and Internal Force in Robotic Contact Tasks
(Proc. of 1996 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, pp. 751–756, 1996.)
3. 前田 雄介, 相山 康道, 新井 民夫:
準静力学に基づくグラスプレス・マニピュレーションの計画
(第5回ロボティクスシンポジウム予稿集, pp. 128–133, 2000.)
4. Yusuke MAEDA, Hirokazu KIJIMOTO, Yasumichi AIYAMA and Tamio ARAI:
Planning of Graspless Manipulation by Multiple Robot Fingers
(Proc. of 2001 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 2474–2479, 2001.)
5. Yusuke MAEDA, Yasumichi AIYAMA and Tamio ARAI:
Planning of Quasi-Static Graspless Manipulation
(Proc. of 4th IEEE Int. Symp. on Assembly and Task Planning, pp. 98–103, 2001.)
6. Yusuke MAEDA and Tamio ARAI:
A Quantitative Stability Measure for Graspless Manipulation
(Proc. of 2002 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 2473–2478, 2002.)

7. 前田 雄介, 新井 民夫:

グラスプレス・マニピュレーションのためのロボット指の動作計画

(第 8 回ロボティクスシンポジウム予稿集, pp. 391–396, 2003.)

口頭発表

1. 前田 雄介, 相山 康道, 新井 民夫:

Gravity Closure による物体の安定的拘束

(第 13 回日本ロボット学会学術講演会予稿集, pp. 125–126, 1995.)

2. 相山 康道, 小澤 大雅, 木村 和伸, 前田 雄介, 新井 民夫:

センサ情報に基づくグラスプレス・マニピュレーションの操作切替え手法

(1996 年度精密工学会秋季大会学術講演会講演論文集, pp. 25–26, 1996.)

3. 前田 雄介, 相山 康道, 新井 民夫:

グラスプレス・マニピュレーションにおける物体の安定性と内力の解析

(第 14 回日本ロボット学会学術講演会予稿集, pp. 129–130, 1996.)

4. 木地本 浩和, 新井 民夫, 相山 康道, 太田 順, 山本 尚史, 前田 雄介:

グラスプレス・マニピュレーションにおける操作計画

(2000 年度精密工学会春季大会学術講演会講演論文集, pp. 472, 2000.)

5. 前田 雄介, 木地本 浩和, 太田 順, 相山 康道, 新井 民夫:

複数のロボット指による準静的グラスプレス・マニピュレーションの計画

(日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会 '01 講演論文集, 2P2-F3, 2001.)

6. 中村 智久, 前田 雄介, 新井 民夫:

三次元環境におけるグラスプレス・マニピュレーションのためのロボット指の動作計画

(第 19 回日本ロボット学会学術講演会予稿集, pp. 267–268, 2001.)

7. 前田 雄介, 新井 民夫:

グラスプレス・マニピュレーションにおける操作の确实性の定量的評価

(第 19 回日本ロボット学会学術講演会予稿集, pp. 269–270, 2001.)

8. 前田 雄介, 中村 智久, 太田 順, 新井 民夫:

操作确实性の指標を利用したグラスプレス・マニピュレーションの計画

(日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会 '02 講演論文集, 2P2-F08, 2002.)

9. 前田 雄介, 新井 民夫:

グラスプレス・マニピュレーションにおけるロボット指の制御モードの自動決定

(日本ロボット学会創立 20 周年記念学術講演会予稿集, 1K16, 2002.)

10. 前田 雄介, 新井 民夫:

指の制御モードを考慮に入れたグラスプレス・マニピュレーションの計画

(第 3 回計測自動制御学会システムインテグレーション部門学術講演会講演論文集,
Vol. I, pp. 87-88, 2002.)

11. 前田 雄介, 新井 民夫:

複数のロボット指によるグラスプレス・マニピュレーションの計画と実行

(日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会 '03 講演論文集, 2003, 発表予定)

本論文に直接関連しないもの

査読あり学術論文

1. T. Arai, Y. Aiyama, Y. Maeda, M. Sugi, J. Ota:
Agile Assembly System by “Plug & Produce”
(Annals of the CIRP, Vol. 49, No. 1, pp. 1–4, 2000.)
2. 太田 順, 新井 民夫, 井上 康介, 千葉 龍介, 平野 智一, 前田 雄介:
コンベア搭載型 AGV の協調による物体搬送システム
(日本機械学会論文集 C 編, Vol. 67, No. 658, pp. 1905–1911, 2001.)
3. T. Arai, Y. Maeda, H. Kikuchi, M. Sugi:
Automated Calibration of Robot Coordinates for Reconfigurable Assembly Systems
(Annals of the CIRP, Vol. 51, No. 1, pp. 5–8, 2002.)
4. Yusuke MAEDA, Takayuki HARA and Tamio ARAI:
Human-Robot Cooperative Handling of an Object with Motion Estimation
(J. of Robotics and Mechatronics, Vol. 14, No. 5, pp. 432–438, 2002.)
5. 前田 雄介, 原 崇之, 新井 民夫:
躍度最小モデルを用いた動作予測に基づく人間—ロボット協調作業
(日本機械学会論文集 C 編, Vol. 68, No. 675, pp. 3367–3372, 2002.)
6. Yusuke MAEDA, Atsushi TAKAHASHI, Takayuki HARA and Tamio ARAI:
Human-Robot Cooperative Rope Turning —An Example of Mechanical Coordination through Rhythm Entrainment
(Advanced Robotics, Vol. 17, No. 1, pp. 67–78, 2003.)
7. Haruka KIKUCHI, Yusuke MAEDA, Masao SUGI and Tamio ARAI:
Automatic Calibration of Assembly Robots for Instantaneous Installation ‘Plug & Produce’
(Advanced Robotics, Vol. 17, No. 1, pp. 41–52, 2003.)
8. Masao SUGI, Yusuke MAEDA, Yasumichi AIYAMA, Tomokazu HARADA and Tamio ARAI:
A Holonic Architecture for Easy Reconfiguration of Robotic Assembly Systems
(IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 19, No. 6, 2003, to appear)

査読あり講演論文

1. Masao SUGI, Yusuke MAEDA, Yasumichi AIYAMA and Tamio ARAI:
A Flexible Robot System for Assembly with a Concept of Holon
(Proc. of 32nd Int. Symp. on Robotics, pp. 844–849, 2001.)
2. Masao SUGI, Yusuke MAEDA, Yasumichi AIYAMA and Tamio ARAI:
Holon Robot System: A Flexible Assembly System with High Reconfigurability
(Proc. of 2001 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 799–805, 2001.)
3. Yusuke MAEDA, Atsushi TAKAHASHI, Takayuki HARA and Tamio ARAI:
Human-Robot Cooperation with Mechanical Interaction Based on Rhythm Entrainment —
Realization of Cooperative Rope Turning—
(Proc. of 2001 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 3477–3482, 2001.)
4. Haruka KIKUCHI, Yusuke MAEDA, Masao SUGI, and Tamio ARAI:
Automated Calibration for Assembly Device Installation Based on Plug & Produce Concept
(I. Inasaki ed., Initiatives of Precision Engineering at the Beginning of a Millennium,
Kluwer Academic Publishers, pp. 729–733, 2001.)
5. Yusuke MAEDA, Takayuki HARA and Tamio ARAI:
Human-Robot Cooperative Manipulation with Motion Estimation
(Proc. of 2001 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, pp. 2240–2245,
2001.)
6. Yusuke MAEDA, Nanako ISHIDO, Haruka KIKUCHI and Tamio ARAI:
Teaching of Grasp/Graspless Manipulation for Industrial Robots by Human Demonstration
(Proc. of 2002 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, pp. 1523–1528,
2002.)
7. Yusuke MAEDA, Haruka KIKUCHI, Hidemitsu IZAWA, Masao SUGI and Tamio ARAI:
An Easily Reconfigurable Robotic Assembly System
(Proc. of 2003 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 2003, to appear)
8. Tamio ARAI, Hidemitsu IZAWA, Yusuke MAEDA, Haruka KIKUCHI, Hiroki OGAWA
and Masao SUGI:
Real-Time Task Decomposition and Allocation for a Multi-Agent Robotic Assembly Cell
(Proc. of 5th IEEE Int. Symp. on Assembly and Task Planning, 2003, to appear)

口頭発表

1. 大隅 久, 沈 于思, 新井 民夫, 前田 雄介:
ワイヤ懸垂系における運動制御
(第 12 回日本ロボット学会学術講演会予稿集, pp. 799–800, 1994.)
2. 大隅 久, 前田 雄介, 沈 于思, 新井 民夫:
ZMP を安定規範として利用するワイヤ懸垂系の運動軌道の生成
(1995 年度精密工学会春季大会学術講演会講演論文集, pp. 585–586, 1995.)
3. 大隅 久, 前田 雄介, 沈 于思, 新井 民夫:
ZMP を安定規範として利用するワイヤ懸垂系の運動制御
(日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会 '95 講演論文集, pp. 1291–1292, 1995.)
4. 前田 雄介, 沈 于思, 大隅 久, 新井 民夫:
複数ワイヤ懸垂系における ZMP を利用した運動軌道の生成
(第 13 回日本ロボット学会学術講演会予稿集, pp. 67–68, 1995.)
5. 前田 雄介, 高橋 篤志, 新井 民夫:
局所的相互作用の評価に基づく協調作業の実現—人とマニピュレータの協調縄回し動作—
(日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会 '00 講演論文集, 2P1-76-120, 2000.)
6. 前田 雄介, 原 崇之, 高橋 篤志, 新井 民夫:
エネルギー授受量に基づく協調縄回しの実現とその解析
(第 18 回日本ロボット学会学術講演会予稿集, pp. 1019–1020, 2000.)
7. 山本 尚史, 前田 雄介, 菊地 悠, 新井 民夫:
非接触インピーダンスモデルに基づいた人間のけん玉の技能解析
(2001 年度精密工学会春季大会学術講演会講演論文集, pp. 443, 2001.)
8. 原 崇之, 前田 雄介, 新井 民夫:
動作予測に基づく人間—ロボット協調作業
(第 19 回日本ロボット学会学術講演会予稿集, pp. 1171–1172, 2001.)
9. 菊地 悠, 前田 雄介, 杉 正夫, 新井 民夫:
“Plug & Produce” のためのロボット間自動キャリブレーション
(第 19 回日本ロボット学会学術講演会予稿集, pp. 1065–1066, 2001.)

10. 小河 寛揮, 前田 雄介, 菊地 悠, 井澤 秀益, 新井 民夫:
Plug & Produce 機能を備えたホロニック組立セルの構築
(2002 年度精密工学会春季大会学術講演会講演論文集, pp. 226, 2002.)
11. 前田 雄介, 新井 民夫:
容易に再構成可能なホロニック・パーツハンドリングシステム
(平成 14 年度 IMS 研究成果講演論文集, pp. 69-72, 2002.)
12. 井澤 秀益, 前田 雄介, 菊池 悠, 小河 寛揮, 新井 民夫:
Plug & Produce 機能を備えたホロニック組立システム —交渉によるスケジューリング
機構の提案—
(日本ロボット学会創立 20 周年記念学術講演会予稿集, 1B37, 2002.)
13. 前田 雄介, 井澤 秀益, 菊池 悠, 小河 寛揮, 新井 民夫:
柔軟に再構成可能なホロニック組立システムの開発
(第 3 回計測自動制御学会システムインテグレーション部門学術講演会講演論文集,
Vol. II, pp. 375-376, 2002.)
14. 前田 雄介, 井澤 秀益, 池田 優, 新井 民夫:
マルチエージェント・アーキテクチャによる柔軟な組立ロボットセル
(日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会 '03 講演論文集, 2003, 発表予定)

付録

A.1	回転を伴う接触における接触力の例	174
A.1.1	辺接触の例	174
A.1.2	面接触の例	177
A.2	6次元単位超球の外接超多面体近似	183
A.3	ヒューリスティック関数の単調性	185

A.1 回転を伴う接触における接触力の例

2 章において、面接触・線接触の接触力のモデル化について触れ、接触面が回転を伴いながら滑る場合は、その接触力は接触面の凸包の頂点における接触点の効果とは等価とはならないことを述べた (2.3.4 項)。ここではその実例を挙げ、回転を伴う面接触を接触面の凸包の頂点における点接触だけでモデル化するのが不適切であることを、数値例で示す。具体的には、「典型的な荷重分布」において、面接触における接触力によって対象物に作用する一般化力を求め、これを接触面の凸包の頂点のみにおける接触力の重ね合わせでは表現できないことを示す。

A.1.1 辺接触の例

凸包の頂点での接触によるモデル化

Fig. A.1(a) のように、水平面上に線分状の物体が置かれているとする。「線分状の物体」とは、Fig. A.1(b) のような物体をモデル化したものと考えても良い。この物体の長さは L 、質量は M で、質量分布は均一である。鉛直方向には、重力とクーロン摩擦以外の外力はは

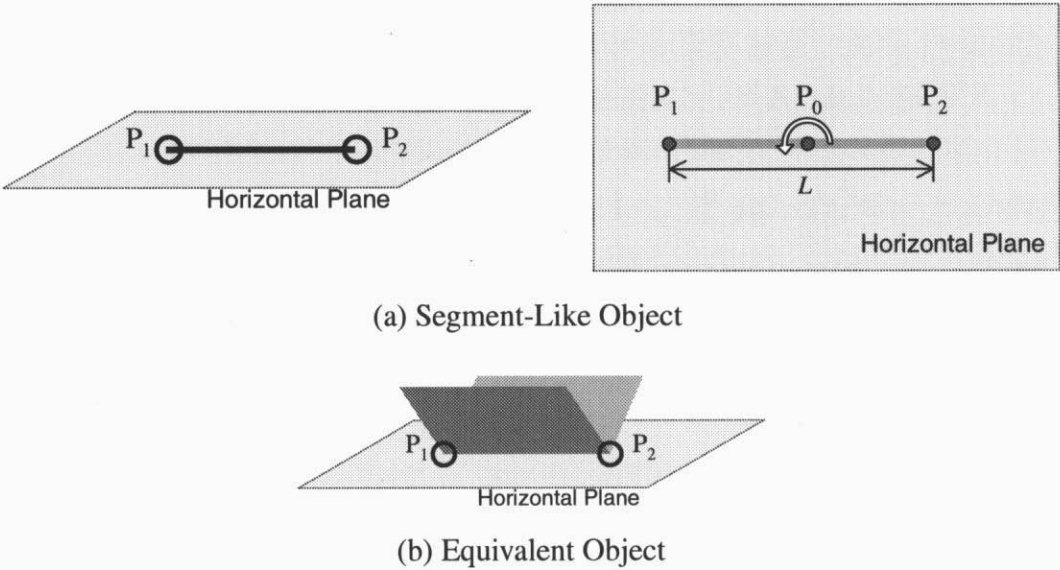


Fig. A.1: Example: A Line Contact

たっていないものとし、物体と平面の間の摩擦係数を μ で一様、また重力加速度は g とする。

いま、この線分状の物体が、中心 P_0 の周りに反時計回りの準静的な等速回転運動をしているとする。典型的な荷重分布として、線分上の荷重が一様である場合を考える。 P_0 から線分の片方の端点 P_2 の方向を x 軸、水平面上でそれに垂直な方向を y 軸、鉛直方向を z 軸とすると、 x 軸方向の接触力の合力 F_x は、滑りの方向の x 成分はゼロなので

$$F_x = 0$$

y 軸方向の接触力の合力 F_y は

$$\begin{aligned} F_y &= \mu \int_{-\frac{L}{2}}^0 \frac{Mg}{L} dl + \int_0^{\frac{L}{2}} \left(-\frac{Mg}{L} \right) dl \\ &= \mu \left(\frac{Mg}{2} - \frac{Mg}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

z 軸方向の接触力の合力 F_z は、重力とつりあうので

$$F_z = Mg$$

接触力による z 軸まわりの合モーメント M_z は

$$\begin{aligned} M_z &= \mu \int_{-\frac{L}{2}}^0 \frac{Mg}{L} l dl + \int_0^{\frac{L}{2}} \left(-\frac{Mg}{L} l \right) dl \\ &= -\mu \left(\frac{MgL}{8} + \frac{MgL}{8} \right) = -\frac{\mu MgL}{4} \end{aligned}$$

荷重分布が一様なので、接触力による x 軸、 y 軸周りの合モーメント M_x, M_y はともに 0 である。

以上の結果から、 z 軸周りに $\mu MgL/4$ のモーメントを加えれば、物体を準静的に回転させることができ、そのとき接触力の合力・合モーメントが

$$[F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z]^T = \left[0, 0, Mg, 0, 0, -\frac{\mu MgL}{4} \right]^T \quad (\text{A.1})$$

となることがわかる。

今度は逆に、複数の点接触によって、ありうる接触力の 1 つである式 (A.1) が表現できるかを確かめる。接触辺の凸包の頂点である、 P_1, P_2 の 2 点で接触をモデル化した場合、それぞれの接触点での接触力（およびモーメント） $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ は、

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= k_1 \left[0, \mu, 1, 0, \frac{L}{2}, -\mu \frac{L}{2} \right]^T \\ \mathbf{Q}_2 &= k_2 \left[0, -\mu, 1, 0, -\frac{L}{2}, -\mu \frac{L}{2} \right]^T \end{aligned}$$

と書ける．ただし, $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$ である．したがって, P_1, P_2 の 2 点での接触力の合力は,

$$\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu(k_1 - k_2) \\ k_1 + k_2 \\ 0 \\ \frac{L(k_1 - k_2)}{2} \\ -\mu \frac{L(k_1 + k_2)}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

である．

式 (A.1) と式 (A.2) を比較すると,

$$\begin{cases} k_1 - k_2 = 0 \\ k_1 + k_2 = Mg \\ k_1 + k_2 = \frac{Mg}{2} \end{cases}$$

明らかに, この連立方程式は解を持たない．したがって, P_1, P_2 における接触力により対象物に作用可能な一般化力 (式 (A.2)) では, 面接触力における接触力により対象物に作用する一般化力 (式 (A.1)) を表現できない．つまり, Fig. A.1 のような極めて簡単な場合でも, 接触面が回転を伴いながら滑る場合は, その接触力は接触面の凸包の頂点における接触点の効果と等価とはならないことがわかる．そして, このような典型的な荷重分布における接触力でさえ表現できないため, 面接触を接触面の凸包の頂点における点接触で置き換えることは不適当であると言える．

回転中心での接触を加えたモデル化

一方, P_0, P_1, P_2 の 3 点で接触をモデル化することを考える． P_0 は, 接触辺上で $+y$ 方向に滑る点と $-y$ 方向に滑る点の境界であるから, その重ね合わせだと考えて, そこでの接触力 (およびモーメント) \mathbf{Q}_0 は

$$\mathbf{Q}_0 = k_{01} [0, \mu, 1, 0, 0, 0]^T + k_{02} [0, -\mu, 1, 0, 0, 0]^T$$

である．また, P_1, P_2 での接触力 (およびモーメント) $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ は,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= k_1 \left[0, \mu, 1, 0, \frac{L}{2}, -\mu \frac{L}{2} \right]^T \\ \mathbf{Q}_2 &= k_2 \left[0, -\mu, 1, 0, -\frac{L}{2}, -\mu \frac{L}{2} \right]^T \end{aligned}$$

と書ける．ただし， $k_{0i} \geq 0, k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$ である．したがって， P_0, P_1, P_2 の3点での接触力の合力は，

$$\mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu(k_{01} - k_{02} + k_1 - k_2) \\ (k_{01} + k_{02} + k_1 + k_2) \\ 0 \\ \frac{L(k_1 - k_2)}{2} \\ -\mu \frac{L(k_1 + k_2)}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

である．

式 (A.1) と式 (A.3) を比較すると，

$$\begin{cases} k_{01} - k_{02} + k_1 - k_2 = 0 \\ k_{01} + k_{02} + k_1 + k_2 = Mg \\ k_1 - k_2 = 0 \\ k_1 + k_2 = \frac{Mg}{2} \end{cases}$$

上記の方程式を解くと，

$$k_{01} = k_{02} = k_1 = k_2 = \frac{Mg}{4}$$

となり，このとき式 (A.1) と式 (A.3) が一致する．つまり，この場合，代表点として接触面の凸包の頂点に加えて回転中心での接触を追加したことによって，もとの接触力を表現することが可能になったことが分かる．言い換えれば，代表点として回転中心を追加することで，面接触のより正確なモデル化ができた，ということになる．

A.1.2 面接触の例

凸包の頂点での接触によるモデル化

Fig. A.2 のように，水平面上に直方体が置かれており，底面（正方形）で面接触している場合を考える．この接触面の一辺の長さは L ，質量は M で，質量分布は均一である．鉛直方向には，重力とクーロン摩擦以外の外力ははたらいっていないものとし，物体と平面の間の摩擦係数を μ で一様，また重力加速度は g とする．

いま，この物体が，底面の図心 P_0 の周りに反時計回りの準静的な等速回転運動をしているとする．典型的な荷重分布として，底面での荷重が一様である場合を考える．原点を P_0 とし， P_1 から P_2 の方向を x 軸， P_1 から P_4 の方向を y 軸，鉛直方向を z 軸とする．

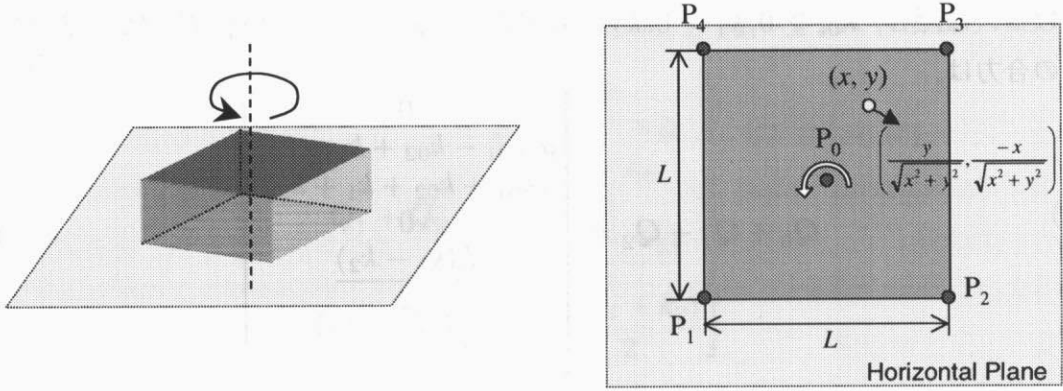


Fig. A.2: Example: A Surface Contact

いま、点 $(x, y, 0)$ において、滑りの方向は $(-y, x, 0)$ である。したがって、この点での接触力 \mathbf{f} は

$$\mathbf{f} = \frac{Mg dx dy}{L^2} \begin{bmatrix} \frac{\mu y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{\mu x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表せる。よって、 x 軸方向の接触力の合力 F_x は

$$F_x = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\mu Mg}{L^2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = 0$$

y 軸方向の接触力の合力 F_y は

$$F_y = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\mu Mg}{L^2} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = 0$$

z 軸方向の接触力の合力 F_z は、重力とつりあうので

$$F_z = Mg$$

接触力による z 軸まわりの合モーメント M_z は

$$\begin{aligned} M_z &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\mu Mg}{L^2} (-\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy \\ &= -\frac{2\sqrt{2} + \log(3 + 2\sqrt{2})}{12} \mu Mg L \\ &(\approx -0.38 \mu Mg L) \end{aligned}$$

荷重分布が一様なので、接触力による x 軸, y 軸周りの合モーメント M_x, M_y はともに 0 である。

以上の結果から, z 軸周りに $\frac{2\sqrt{2}+\log(3+2\sqrt{2})}{12}\mu MgL$ のモーメントを加えることにより, 物体を準静的に回転させることができ, このとき接触力の合力・合モーメントが

$$[F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z]^T = \left[0, 0, Mg, 0, 0, -\frac{2\sqrt{2}+\log(3+2\sqrt{2})}{12}\mu MgL \right]^T \quad (\text{A.4})$$

となることがわかる。

今度は逆に, 複数の点接触によって, ありうる接触力の 1 つである式 (A.4) が表現できるかを確認する。接触辺の凸包の頂点である, P_1, \dots, P_4 の 4 点で接触をモデル化した場合, それぞれの接触点での接触力 (およびモーメント) $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_4$ は,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= k_1 \left[-\frac{\mu}{\sqrt{2}}, \frac{\mu}{\sqrt{2}}, 1, -\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, -\mu\frac{L}{\sqrt{2}} \right]^T \\ \mathbf{Q}_2 &= k_2 \left[-\frac{\mu}{\sqrt{2}}, -\frac{\mu}{\sqrt{2}}, 1, -\frac{L}{2}, -\frac{L}{2}, -\mu\frac{L}{\sqrt{2}} \right]^T \\ \mathbf{Q}_3 &= k_3 \left[\frac{\mu}{\sqrt{2}}, -\frac{\mu}{\sqrt{2}}, 1, \frac{L}{2}, -\frac{L}{2}, -\mu\frac{L}{\sqrt{2}} \right]^T \\ \mathbf{Q}_4 &= k_4 \left[\frac{\mu}{\sqrt{2}}, \frac{\mu}{\sqrt{2}}, 1, \frac{L}{2}, \frac{L}{2}, -\mu\frac{L}{\sqrt{2}} \right]^T \end{aligned}$$

と書ける。ただし, $k_1, \dots, k_4 \geq 0$ である。したがって, P_1, \dots, P_4 の 4 点での接触力の合力は,

$$\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_4 = \begin{bmatrix} \mu \frac{-k_1 - k_2 + k_3 + k_4}{\sqrt{2}} \\ \mu \frac{k_1 - k_2 - k_3 + k_4}{\sqrt{2}} \\ k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \\ L \frac{-k_1 - k_2 + k_3 + k_4}{2} \\ L \frac{k_1 - k_2 - k_3 + k_4}{2} \\ -\mu L \frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

である。

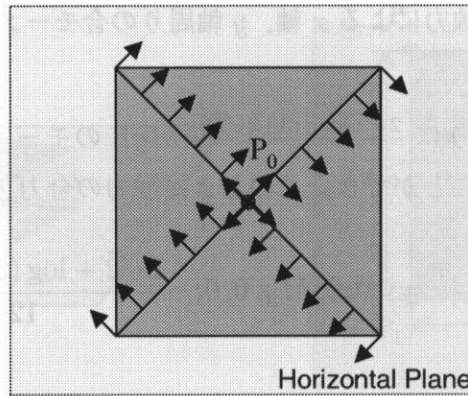


Fig. A.3: Directions of Frictional Forces

式 (A.4) と式 (A.5) を比較すると,

$$\begin{cases} -k_1 - k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ k_1 - k_2 - k_3 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = Mg \\ \frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_4}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} + \log(3 + 2\sqrt{2})}{12} Mg \end{cases}$$

明らかに, この連立方程式は解を持たない. したがって, P_1, \dots, P_4 における接触力により対象物に作用可能な一般化力 (式 (A.5)) では, 面接触力における接触力により対象物に作用する一般化力 (式 (A.4)) を表現できない. つまり, Fig. A.2 のような極めて簡単な場合でも, 接触面が回転を伴いながら滑る場合は, その接触力は接触面の凸包の頂点における接触点の効果とは等価とはならないことがわかる. そして, このような典型的な荷重分布における接触力でさえ表現できないため, 面接触を接触面の凸包の頂点における点接触で置き換えることは不適当であると言える.

回転中心での接触を加えたモデル化

一方, P_0, \dots, P_4 の 5 点で接触をモデル化することを考える. P_0 は回転中心なので, 滑りの方向が不連続に変わる点である (Fig. A.3). 回転中心からわずかにずれた点では, 任意の方向の滑りが存在することを考えると, P_0 における接触力は, 任意の方向へ滑っている点での接触力の重ね合わせだと思えることができ, したがって P_0 は静止している接触点と等価だと思えることができる. よって, P_0 での摩擦円錐をそれに内接する正四角錐で近似す

ると、そこでの接触力（およびモーメント） \mathbf{Q}_0 は

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_0 &= k_{01} [\mu, 0, 1, 0, 0, 0]^T + k_{02} [-\mu, 0, 1, 0, 0, 0]^T \\ &\quad + k_{03} [0, \mu, 1, 0, 0, 0]^T + k_{04} [0, -\mu, 1, 0, 0, 0]^T\end{aligned}$$

である。また、 P_1, \dots, P_4 での接触力（およびモーメント） $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_2$ は、

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_1 &= k_1 \left[-\frac{\mu}{\sqrt{2}}, \frac{\mu}{\sqrt{2}}, 1, -\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, -\mu \frac{L}{\sqrt{2}} \right]^T \\ \mathbf{Q}_2 &= k_2 \left[-\frac{\mu}{\sqrt{2}}, -\frac{\mu}{\sqrt{2}}, 1, -\frac{L}{2}, -\frac{L}{2}, -\mu \frac{L}{\sqrt{2}} \right]^T \\ \mathbf{Q}_3 &= k_3 \left[\frac{\mu}{\sqrt{2}}, -\frac{\mu}{\sqrt{2}}, 1, \frac{L}{2}, -\frac{L}{2}, -\mu \frac{L}{\sqrt{2}} \right]^T \\ \mathbf{Q}_4 &= k_4 \left[\frac{\mu}{\sqrt{2}}, \frac{\mu}{\sqrt{2}}, 1, \frac{L}{2}, \frac{L}{2}, -\mu \frac{L}{\sqrt{2}} \right]^T\end{aligned}$$

と書ける。ただし、 $k_{0i} \geq 0, k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$ である。したがって、 P_0, \dots, P_4 の 5 点での接触力の合力は、

$$\mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_4 = \begin{bmatrix} \mu \left(k_{01} - k_{02} + \frac{-k_1 - k_2 + k_3 + k_4}{\sqrt{2}} \right) \\ \mu \left(k_{03} - k_{04} + \frac{k_1 - k_2 - k_3 + k_4}{\sqrt{2}} \right) \\ k_{01} + k_{02} + k_{03} + k_{04} + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \\ L \frac{-k_1 - k_2 + k_3 + k_4}{2} \\ L \frac{k_1 - k_2 - k_3 + k_4}{2} \\ -\mu L \frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

である。

式 (A.4) と式 (A.6) を比較すると、

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{01} - k_{02} + \frac{-k_1 - k_2 + k_3 + k_4}{\sqrt{2}} = 0 \\ k_{03} - k_{04} + \frac{k_1 - k_2 - k_3 + k_4}{\sqrt{2}} = 0 \\ k_{01} + k_{02} + k_{03} + k_{04} + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = Mg \\ -k_1 - k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ k_1 - k_2 - k_3 + k_4 = 0 \\ \frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_4}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} + \log(3 + 2\sqrt{2})}{12} Mg \end{array} \right.$$

上記の方程式は不定だが，例えば

$$\begin{cases} k_{01} = k_{02} = k_{03} = k_{04} = \frac{8 - \sqrt{2} \log(3 + 2\sqrt{2})}{48} Mg \approx 0.115Mg \\ k_1 = k_2 = k_1 = k_2 = \frac{4 + \sqrt{2} \log(3 + 2\sqrt{2})}{48} Mg \approx 0.135Mg \end{cases}$$

とすれば，式 (A.4) と式 (A.6) を一致させることができる．つまり，この場合，代表点として接触面の凸包の頂点に加えて回転中心での接触を追加したことによって，もとの接触力を表現することが可能になったことが分かる．言い換えれば，代表点として回転中心を追加することで，面接触のより正確なモデル化ができた，ということになる．

A.2 6次元単位超球の外接超多面体近似

3章において、操作の確実性の評価指標を近似的に求めるために、6次元単位超球を、それに外接する超多面体で近似する手法を示した。そして、この超多面体の頂点として、数値例(3.6節)では以下の76点をとった($N_{\text{vert}} = 76$)。

$$l_i = \begin{cases} k[\pm 1, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\ k[0, \pm 1, 0, 0, 0, 0]^T \\ k[0, 0, \pm 1, 0, 0, 0]^T \\ k[0, 0, 0, \pm 1, 0, 0]^T \\ k[0, 0, 0, 0, \pm 1, 0]^T \\ k[0, 0, 0, 0, 0, \pm 1]^T \\ k\left[\pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right]^T \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

ここでは $k = 2\sqrt{3 - \sqrt{6}} (\approx 1.48)$ とすれば、 l_1, \dots, l_{76} が外接超多面体となることを示す。

まず、以下の76点を頂点とする、6次元単位超球に内接する超多面体を考える。

$$\begin{cases} [\pm 1, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\ [0, \pm 1, 0, 0, 0, 0]^T \\ [0, 0, \pm 1, 0, 0, 0]^T \\ [0, 0, 0, \pm 1, 0, 0]^T \\ [0, 0, 0, 0, \pm 1, 0]^T \\ [0, 0, 0, 0, 0, \pm 1]^T \\ \left[\pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right]^T \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

これを全体に k 倍に拡大することによって、外接超多面体を作る。上記の内接超多面体の表面上の点で、もっとも原点から近い点は、例えば下記の6頂点

$$\begin{cases} [1, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\ [0, 1, 0, 0, 0, 0]^T \\ \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]^T \\ \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]^T \\ \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]^T \\ \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right]^T \end{cases}$$

から構成される超平面上に位置し，この場合は

$$\frac{\sqrt{6}}{24} \left[2 + \sqrt{6}, 2 + \sqrt{6}, 1, 1, 1, 1 \right]^T$$

がその点となる．その原点からの距離は $1/2\sqrt{3 - \sqrt{6}}$ (≈ 0.674) である．

したがって，この内接超多面体を全体に $2\sqrt{3 - \sqrt{6}}$ (≈ 1.48) 倍することによって，6次元超球に外接する超多面体をつくることができる．つまり， $k = 2\sqrt{3 - \sqrt{6}}$ とすればよい．

なお，式 (A.8) を頂点とする超多面体は，例えば下記の頂点

$$\left\{ \begin{array}{l} [1, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\ \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right]^T \\ \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right]^T \\ \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right]^T \\ \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right]^T \\ \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right]^T \end{array} \right.$$

から構成される，原点からの距離 $3/\sqrt{44 - 10\sqrt{6}}$ (≈ 0.679) の面も持っている．つまり，ここで求めた外接超多面体は，最適なものよりわずかに大きめになっている．

A.3 ヒューリスティック関数の単調性

6章において、マニピュレーション計画を A^* 探索で実現するにあたり、ヒューリスティック関数を提案した (6.6.2 項)。ここではそのヒューリスティック関数の単調性を証明する。

隣接するノード n, n' をつなぐアークに割り当てられるコストは

$$c(n, n') = \begin{cases} \max_i \sum_{j=1}^P \left(1 + \frac{X_{\text{stab}}}{z_j}\right) \|\Delta \mathbf{q}_{\text{finger } i, j}\| & (\text{対象物変位に対応するアークの場合}) \\ X_{\text{regr}} & (\text{持ち替えに対応するアークの場合}) \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

であった。それに対して、ノード n に関するヒューリスティック関数は

$$h(n) = \begin{cases} \max_i \|\Delta \mathbf{q}_{\text{finger } i}^*(n)\| & \begin{pmatrix} \text{現在の指配置で目標位置に到達} \\ \text{しても指が環境と干渉しない場合} \end{pmatrix} \\ n_{\text{viol}} X_{\text{regr}} & \begin{pmatrix} \text{現在の指配置で目標位置に到達} \\ \text{すると指が環境と必ず干渉する場合} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

と定義されている。ここで、以下の関係が成り立つことを証明すればよい。

$$h(n) \leq c(n, n') + h(n') \text{ for } \forall n, n' | n' \in \text{successor}(n) \quad (\text{A.11})$$

証明. まず、 $h(n) = n_{\text{viol}} X_{\text{regr}}$ の場合 (現在の指配置で目標位置に到達すると指が環境と必ず干渉する場合) を考える。このとき、次のノード n' として持ち替えを行わないで到達できるノードを選んだとすると、 n' でも指配置が変わっていないので、そのまま目標位置に到達した場合には、依然として同じ数の指が環境と必ず干渉する。したがって、

$$h(n') = n_{\text{viol}} X_{\text{regr}} (= h(n))$$

である。 $c(n, n') \geq 0$ だから、明らかに $h(n) \leq c(n, n') + h(n')$ である。

一方、次のノード n' として持ち替えによって到達できるノードを選んだ場合、 $c(n, n') = X_{\text{regr}}$ である。このとき、目標位置で環境と干渉する指が 1 本減る可能性があるので、

$$h(n') \geq (n_{\text{viol}} - 1) X_{\text{regr}}$$

である。よって、この場合も $h(n) = X_{\text{regr}} \leq c(n, n') + h(n')$ が成り立つ。

次に、 $h(n) = \max_i \|\Delta \mathbf{q}_{\text{finger } i}^*(n)\|$ の場合 (現在の指配置で目標位置に到達しても指が環境と干渉しない場合) を考える。次のノード n' として持ち替えを行わないで到達できるノードを選んだとすると、

$$c(n, n') + h(n') = \max_i \sum_{j=1}^P \left(1 + \frac{X_{\text{stab}}}{z_j}\right) \|\Delta \mathbf{q}_{\text{finger } i, j}\| + \max_i \|\Delta \mathbf{q}_{\text{finger } i}^*(n')\|$$

である。いま,

$$\max_i \|\Delta \mathbf{q}_{\text{finger } i}^*(n)\| \leq \max_i \sum_{j=1}^P \|\Delta \mathbf{q}_{\text{finger } i, j}\| + \max_i \|\Delta \mathbf{q}_{\text{finger } i}^*(n')\|$$

であり, また $X_{\text{stab}}/z_j > 0$ であることから, $h(n) < c(n, n') + h(n')$ である.

一方, 次のノード n' として持ち替えによって到達できるノードを選んだ場合, $c(n, n') = X_{\text{regr}}$ となる. X_{regr} は十分大きい数をとるので,

$$h(n) \ll c(n, n') + h(n')$$

が成り立つ.

以上より, すべての場合において

$$h(n) \leq c(n, n') + h(n') \text{ for } \forall n, n' | n' \in \text{successor}(n)$$

が成り立つ. □