研究速報

UDC 624.042.7

応答曲線を用いた機械構造物の各次振動特性の分離法 第2報
——位相曲線を考慮した場合——

Separation of Vibration Modes of Machine Structure Using Response Curves Part 2
—Treatment of a Phase Curve—

高　橋　伸　晃*
Nobuaki TAKAHASHI

1. はじめに

機械構造物では周波数応答曲線を理論的，実験的に求めて動的設計をする上での指標とすることがよく行われている．一般に構造物は多自由度系であるから多くの共振点を持つが，応答曲線が各共振点を固有振動数とする1自由度系の曲線の重ね合わせで近似的に表わせれば，各次数の振動モードを単独に考察できて取扱いも簡単になる．第一報[2)]では多自由度系の応答変位のパワを取上げ，実測値と分離系との誤差の二乗の和が最小となるような曲線のパラメータを求めて，各次数の振動特性を分離する方法を述べた．本報ではさらに加振力と応答変位の間の位相差を導入してその改良を考え，パワ法との比較を行う．

2. 位相を考慮した応答曲線の表現

N自由度系の応答曲線が粘性減衰を有するN個の1自由度系の曲線の総和として，次のような単位加振力に対する変位応答曲線と位相曲線で表わせるとする．

$$A_N(p)=\sqrt{B^2+C^2} \tag{1}$$

$$\alpha(p)=\tan^{-1}\left(\frac{-C}{B}\right) \tag{2}$$

ただし

$$B=\sum_{j=1}^{N}\frac{d_j\omega_j^2(\omega_j^2-p^2)}{(\omega_j^2-p^2)^2+4\zeta_j^2\omega_j^2p^2} \tag{3}$$

$$C=\sum_{j=1}^{N}\frac{-2d_j\zeta_j\omega_j^3p}{(\omega_j^2-p^2)^2+4\zeta_j^2\omega_j^2p^2} \tag{4}$$

ここに

A_N; 単位加振力に対する応答変位の絶対値
α; 加振力と応答変位間の位相差
p; 加振円振動数
d_j; 単位加振力に対する j 次の等価静変位
ω_j; j 次の無減衰固有円振動数
ζ_j; j 次の等価粘性減衰係数

すると単位加振力に対する強制振動の変位 x は時間を t として次の(5)式で与えられる．

$$x(t)=A_N\sin(pt-\alpha)=B\sin pt+C\cos pt \tag{5}$$

3. 最小二乗法による振動特性の分離

応答変位および位相の測定値 (A_i,α_i) のM個の組が加振円振動数 p_i に対して求められた時，次の(6)式で与えられる実験上の強制振動の単位加振力に対する変位

$$x(t)=A_i\sin(p_it-\alpha_i)\quad(i=1,2,3\cdots M) \tag{6}$$

と p_i に対し(5)式で与えられる理論上の変位との差のベクトルの大きさの2乗をデータの個数M個にわたり加え，それを最小にするように d_j,ζ_j を定める．すなわち

$$E=\sum_{i=1}^{M}(B-A_i\cos\alpha_i)^2+\sum_{i=1}^{M}(C+A_i\sin\alpha_i)^2 \tag{7}$$

とすると

$$P_j=\frac{\partial E}{\partial d_j}=2\sum_{i=1}^{M}(B-A_i\cos\alpha_i)\times\frac{\omega_j^2(\omega_j^2-p^2)}{(\omega_j^2-p^2)^2+4\zeta_j^2\omega_j^2p^2}-4\sum_{i=1}^{M}(C+A_i\sin\alpha_i)\frac{\zeta_j\omega_j^3p}{(\omega_j^2-p^2)^2+4\zeta_j^2\omega_j^2p^2}=0 \tag{8}$$

$$Q_j=\frac{\partial E}{\partial\zeta_j}=-16\sum_{i=1}^{M}(B-A_i\cos\alpha_i)\times\frac{d_j\zeta_j\omega_j^4p^2(\omega_j^2-p^2)}{[(\omega_j^2-p^2)^2+4\zeta_j^2\omega_j^2p^2]^2}-4\sum_{i=1}^{M}(C+A_i\sin\alpha_i)\times\frac{d_j\omega_j^3p[(\omega_j^2-p^2)^2-4\zeta_j^2\omega_j^2p^2]}{[(\omega_j^2-p^2)^2+4\zeta_j^2\omega_j^2p^2]^2}=0 \tag{9}$$

d_j,ζ_j $(j=1,2\cdots\mathrm{N})$ を求める手順は前報と同様であるからその概略を述べる．まず d_j,ζ_j を適当に仮定する．ω_j は A_i の極大値に対する円振動数 ω_{jp} から $\omega_j=\omega_{jp}/\sqrt{1-2\zeta_j^2}$ として求めるか，ζ が小さいことから $B/C\fallingdotseq0$，すなわち $\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$ となる ω_j を用いる．P_j，Q_j $(j=1,2\cdots\mathrm{N})$ を計算すると d_j，ζ_j が仮定値のためゼ

* 東京大学生産技術研究所　第2部

ロでない．そこで $d_k \to d_k + \Delta d_k$ および $\zeta_k \to \zeta_k + \Delta\zeta_k$ ($k=1,2\cdots N$) なる微小変化を順番に与え，P_j, Q_j を計算して増分 ΔP_{jk}, ΔQ_{jk}, ΔP_{jN+k}, ΔQ_{jN+k} が得られる。Δd_k, $\Delta\zeta_k$ は微小であり，ΔP_{jk}, ΔQ_{jk} との間に線型性が成立すると仮定すれば，P_j, Q_j をゼロとする d_j, ζ_j への移動量 $x_j \Delta d_j$, $y_j \Delta\zeta_j$ は次の2N元の連立方程式の解 x_j, y_j から与えられる．

$$\begin{bmatrix} \Delta P_{11}, \Delta P_{12} & & \\ \Delta Q_{11}, \Delta Q_{12} & & \\ \cdots\cdots & & \\ \Delta Q_{N1}, \Delta Q_{N2} & \cdots\cdots & \Delta Q_{N,2N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ y_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_1 \\ -Q_1 \\ \vdots \\ -Q_N \end{Bmatrix} \tag{10}$$

$d_j \to d_j + x_j \Delta d_j$, $\zeta_j \to \zeta_j + y_j \Delta\zeta_j$ なる変化を与え P_j, Q_j を計算すると，Δd_j, $\Delta\zeta_j$ と ΔP_{jk}, ΔQ_{jk} との間に完全な線型性がないためゼロとはならない．そこで再びこの d_j, ζ_j を仮定値として計算を行い非線型性の補償をする．P_j, Q_j が許容誤差に入るまでこの操作をくり返せば d_j, ζ_j は次第に一定値に収束する．

4. テストデータによる検証

d, ζ, ω の値を表1の真値のとおりに与え，Pは0.1から50.0まで0.1ごとにとりMを500として(1)，(2)式から応答変位 A_N，位相αを算出しテストデータとする．応答変位と位相を図1に示す．真値の約1/2を初期値として前節で述べた最小二乗法により振動特性の分離を試みる．収束状況の例を図2に，4回の繰返し計算値を表1の収束値の欄に示す．大きな誤差を含む初期値を設定しても真の値が高い精度で求められている．

5. パワを用いる方法との比較

表1 テストデータ

	真　値	初期値	収束値	パワ法収束値
d_1	5.00	3.00	5.00	5.014
d_2	5.00	3.00	5.00	4.953
d_3	0.20	0.10	0.20	0.234
d_4	−0.60	−0.30	−0.60	0.601
d_5	0.20	0.10	0.20	0.199
ζ_1	0.010	0.0050	0.010	0.0100
ζ_2	0.020	0.010	0.020	0.0198
ζ_3	0.0040	0.0020	0.0040	0.0045
ζ_4	0.0030	0.0015	0.0030	0.0030
ζ_5	0.0020	0.0010	0.0020	0.0020
ω_1	10.0	10.0	10.0	10.0
ω_2	20.0	20.0	20.0	20.0
ω_3	25.0	25.0	25.0	25.0
ω_4	35.0	35.0	35.0	35.0
ω_5	40.0	40.0	40.0	40.0

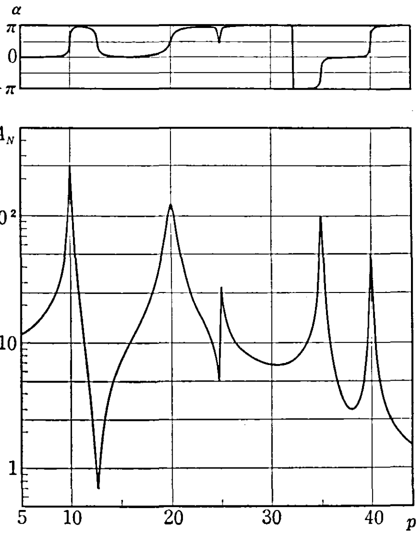

図1 テストデータの応答曲線

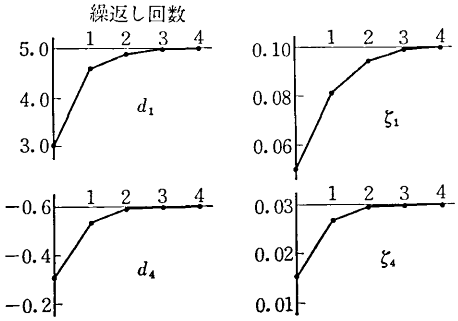

図2 収束状況

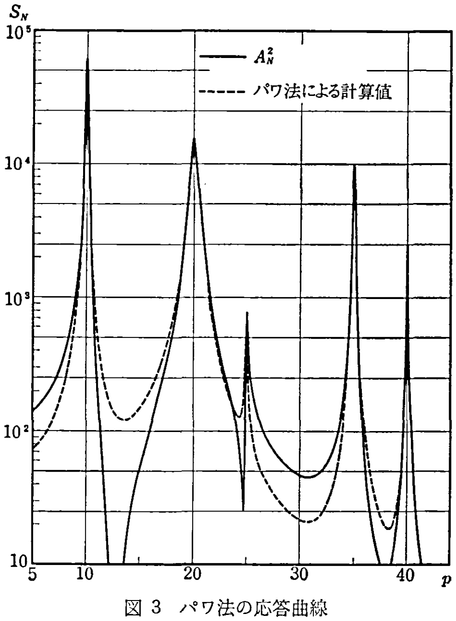

図3 パワ法の応答曲線

前報で述べたパワを用いる方法[2),3)]では応答変位の絶対値の2乗から，次の(11)式に基づいて振動特性を分離する．

$$S_N(p)=\sum_{j=1}^{N}\frac{D_j\omega_j^4}{(\omega_j^2-p^2)^2+4\zeta_j^2\omega_j^2p^2} \tag{11}$$

ここに　$D_j=d_j^2$

図3の実線は表1の真値を用いて計算した A_N^2 の曲線である．表1の初期値を使い d，ζ を分離する．パワ法収束値の欄は8回の繰返し後の計算値である．この値から S_N を逆に計算し図3の点線に示す．原データの曲線と分離された d，ζ から作成した曲線はピークの付近では一致するがノッチの部分でずれを生じており，3番目のピークではかなり上部からずれが目立つ．パワを用いる方法では位相を考慮しないため，ノッチの部分を正確に表現できないことがこのずれの原因である．d，ζ の収束値はこの例では真の値に対し 15% ほどの誤差を含む．

6. ばねで吊下げた溝型鋼材の振動特性の分離

2本のつるまきばねで溝型鋼材の両端近くを吊下げ，水平方向に加振して同方向の応答変位と位相差を加振点付近で測定した．測定変位を加速度に換算して図4の点線に示す．低周波数の2つの共振点ではばね系が振動しており，高周波数の2つの共振点では鋼材が振動している．3節に述べた最小二乗法で曲線を4つの1自由度系に分離する．ところで高周波数のピークが低いので各次

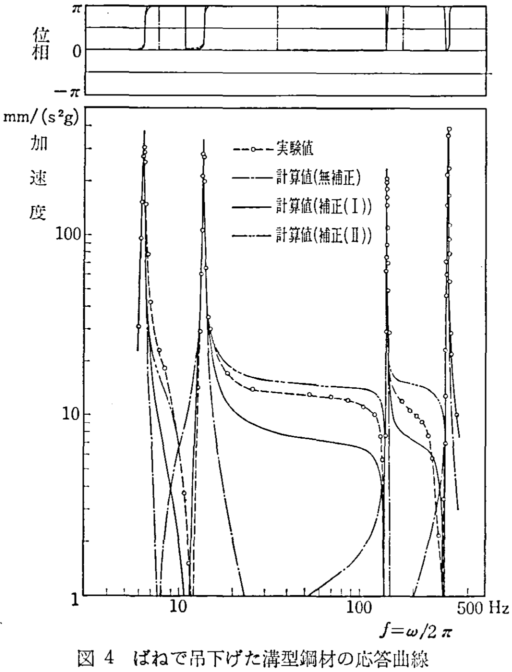

図 4　ばねで吊下げた溝型鋼材の応答曲線

表 2　ばねで吊下げた溝型鋼材の振動特性

	初期値	重みをつけた場合の収束値			重みのない収束値	パワ法収束値
		無補正	補正(I)	補正(II)	補正(I)	補正(I)
d_1	4.70 mm/g×10⁻³	2.104	2.108	2.112	2.112	4.64
d_2	0.658	0.454	0.461	0.467	0.466	0.726
d_3	0.00070	0.00049	0.00050	0.00051	0.00045	0.00062
d_4	0.00022	0.00022	0.00022	0.00022	0.00014	0.00023
ζ_1	0.0050	0.00444	0.00447	0.00450	0.00450	0.0123
ζ_2	0.0070	0.00496	0.00501	0.00506	0.00506	0.00913
ζ_3	0.00140	0.00081	0.00083	0.00084	0.00078	0.00113
ζ_4	0.0010	0.00105	0.00105	0.00106	0.00073	0.00106

$f_1=6.42$ Hz　$f_2=13.7$ Hz　$f_3=142.5$ Hz　$f_4=312.8$ Hz

数の振動特性を同程度の相対誤差で取扱うために加振周波数の2乗に比例した重みをつけることにする．これは加速度応答曲線を取扱うことと同じである．表2の初期値の欄に計算上の初期値を，重みをつけた収束値の無補正の欄に8回の繰返し計算後の収束値を示す．この d，ζ を(1)，(2)式に代入し A_N，α を求めると図4の一点鎖線のようになる．ピークの部分は実験から得た曲線と一致するが，ノッチの部分でかなりずれている．ノッチの周波数に対応する位相曲線上の π からゼロへの復帰の周波数も大幅に異なる．実験を行った加振周波数より低域にピークがあり，その裾野の潜伏している影響を無視したことがこれらの不一致の生じた原因と考えて補正を行う．すなわち実験で得られた3番目のピークの直前の深いノッチの振動数 p_O に対する A_N の計算値を $p_O^2A_O$ として，(3)式に $-(p_O/p)^2A_O$ をつけ加える．繰返し計算後の収束値を重みをつけた収束値の補正(I)の欄に示す．この d，ζ から作成した曲線は図4の実線のようになり，ノッチの部分が改善されて実験から得た曲線に近づいている．補正の量を2倍に増加すると収束値は補正(II)の欄に示すとおりとなる．この d，ζ から計算した A_N の曲線は二点鎖線で示すように低周波数では実験曲線に近いが高周波数では実験曲線よりかなり大きくなり，両者を更によく一致させるためには実験周波数より低域のピークの周波数を確定し，ピーク近傍の裾野の傾斜を考慮する必要があることを示している．傾斜の考慮をすると d，ζ の値は低次では補正(II)の場合より大きく，高次では補正(I)と(II)の場合の中間の値を取ることが予想できる．重みをつけない場合の d，ζ の収束値は高次で小さめになり低次に比べ誤差は大きくなる．

パワによる方法で加速度型の重みを加えて d，ζ を求めると全体に大きめの収束値が得られる．この方法ではノッチの考慮ができないので，潜伏した裾野の補正をしなくとも結果はほとんど同じである．パワ法による収束

値 d_1, d_2 はかなり大きめに設定した初期値に近いが, ζ_1, ζ_2 も大きいためにピークは低く鈍い形状となり, 実験装置の制約から極大値が低めに求められていることは補正されず逆に増幅されている.

しかし低周波数の共振点では実験上の位相曲線に, 位相を考慮して求めた d, ζ をもとに作成した理論上の位相曲線より鋭い立上りが現われており, ζ は本報の位相を考慮する方法で得た値よりも更に小さいと考えられる.

7. おわりに

応答変位と位相の二曲線をもとに多自由度系としての共振曲線と実測値との間の誤差の二乗が最小となるように各次数の振動特性に分解する方法を述べた. その際に重みを加え, 潜伏したピークに対する補正をすることが有効であることもわかった. おわりに有益な御示唆を下さった亘理厚教授, 実験に協力された鈴木常夫技官に感謝します.　(1973年12月23日受理)

参考文献

1) 亘理, 機械力学, (昭29), 18
2) N.Takahashi, SELSAN-KENKYU, 25-10, (1973-10), 55
3) 三井・佐藤, 機講論, No. 730-3 (昭48-4), 123
4) 岡村・松原, 精密機械, 37-4 (昭46-4), 282

東京大学生産技術研究所報告　刊行

第23巻4号

出澤　正徳 著

図形処理に関する研究（和文）

近年自動設計を中心にしたいろいろの分野において電子計算機を利用して立体に関連した計算, 処理を行なったり, 図形に関連した問題を扱う必要性が増大してきた. これに関連し, 電子計算機に図形を入力し, 目的に応じて処理し, 出力するためのシステムの開発が切望されている. このような観点から, 本論文においては, 立体を平面上に正確に表現するための手段としての三面図形式の図面から立体を機械によって自動的に形成するためのシステムの開発を中心に, 図形処理に際して基礎となる事柄を検討し, 機械に扱い易い形に定式化し, その応用について述べている.

まず計算機内部での図形の表現形式を与え, その表現形式の下で図形処理に際して必要となる基本的な事柄を機械に扱い易い形に定式化している.

つぎに立体と三面図との関係を検討し, 立体に対応した三面図を作る過程を一つの変換と考え, その機能を明らかにし, 三面図から立体形成の過程をその逆変換と考え, 3次元の点への変換, 3次元の線への変換, 虚図形の除去, 構成面の決定の4個の変換に分割し, それぞれを論理的に定式化し, 立体を多面体に限定したときの具体的なシステムを開発している. また曲面が含まれる場合のシステム, 寸法, 隠線の取扱い法について検討している.

さらに円走査によって線の性質, 特徴点, 図形の構造を認識しながら線図形を追跡し, 計算機内部の図形のモデル（表現形式）に直接関連づけながら図面を自動的に読み取るための方法を考案し, 検討している.

最後に前述の表現形式で表わされた立体図形を対象に, 立体の諸定数を算定するための方法, 立体を平面で切断するための方法および等高線表示への応用について述べ, さらに立体を透視図として表示するための方法およびその際の Hidden Line Problem の解法を与えている. (1974年2月発刊)