

# 耐震壁の剛性行列

Stiffness Matrix of aseismic walls

宇田川 邦明\*・田中 尚\*

Kuniaki UDAGAWA and Hisashi TANAKA

ラーメンと一体になった単一壁体の応力や変形の解析は、いくつかなされているが<sup>1)~3)</sup>、多層多スパンラーメンに壁体が混在している場合の解析は、いまだ十分なされていない。本論は多層多スパン壁付きラーメンをマトリックス変位法<sup>4)</sup>によって解析するために必要な壁体の剛性行列を壁体の四隅を nodal point として求めたものである。

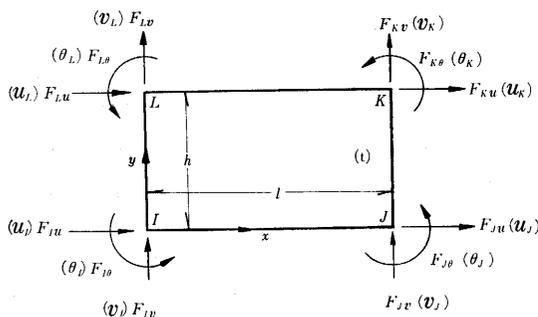


図 1

解析を行なうにあたって、まず図 1 に示すように長方形壁体を IJKL とし、座標の原点を I 点にとる。解析に用いる記号を次のように定め、符号は矢印の方向を正とする。

$l, h, t$ ; 壁体の幅、高さおよび厚さ

$F_{Iu}, F_{Ju}, F_{Ku}, F_{Lu}$ ; I, J, K, L 点の  $x$  方向の外力  
 $F_{Iv}, F_{Jv}, F_{Kv}, F_{Lv}$ ; I, J, K, L 点の  $y$  方向の外力  
 $F_{I\theta}, F_{J\theta}, F_{K\theta}, F_{L\theta}$ ; I, J, K, L 点の曲げモーメント  
 $u_i, u_j, u_k, u_l$ ; I, J, K, L 点の  $x$  方向の変位  
 $v_i, v_j, v_k, v_l$ ; I, J, K, L 点の  $y$  方向の変位  
 $\theta_i, \theta_j, \theta_k, \theta_l$ ; I, J, K, L 点の回転角

また  $\xi = x/l, \eta = y/h, \alpha = h/l$

とし、節点の外力および変位のベクトルを次のようにする。

$$f = \{F_{I\theta} \ F_{J\theta} \ F_{K\theta} \ F_{L\theta} \ F_{Iu} \ F_{Ju} \ F_{Ku} \ F_{Lu} \ F_{Iv} \ F_{Jv} \ F_{Kv} \ F_{Lv}\}$$

$$d = \{\theta_i \ \theta_j \ \theta_k \ \theta_l \ u_i \ u_j \ u_k \ u_l \ v_i \ v_j \ v_k \ v_l\}$$

変位関数を式 (1), (2) のように仮定する。すなわち  $x$  方向の変位  $u$  は、 $x$  の 1 次、 $y$  の 3 次関数、 $y$  方向の変位  $v$  は、 $x$  の 3 次、 $y$  の 1 次関数とする。この仮定

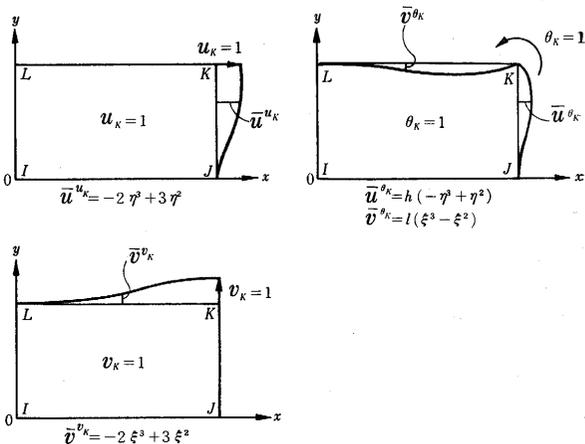


図 2

は壁体周辺において、ラーメン部材の変位に一致する。例として K 点に単位変形 ( $u_k=1, v_k=1, \theta_k=1$ ) を与えた場合の周辺の変位曲線を図 2 に示す。

$$u = h(-\eta^3 + 2\eta^2 - \eta) [(1-\xi)\theta_i + \xi\theta_j] + h(-\eta^3 + \eta^2) \times [(1-\xi)\theta_L + \xi\theta_K] + (2\eta^3 - 3\eta^2 + 1) [(1-\xi)u_i + \xi u_j] + (-2\eta^3 + 3\eta^2) [(1-\xi)u_L + \xi u_K] \quad (1)$$

$$v = l(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) [(1-\eta)\theta_i + \eta\theta_L] + l(\xi^3 - \xi^2) [(1-\eta) \times \theta_j + \eta\theta_K] + (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1) [(1-\eta)v_i + \eta v_L] + (-2\xi^3 + 3\xi^2) [(1-\eta)v_j + \eta v_K] \quad (2)$$

これを行列表示すると式 (3) のようになる。

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ u \\ v \end{bmatrix} d \quad (3)$$

ここに  $\theta, u, v$  は次のようである。

$$\theta = \begin{bmatrix} h(-\eta^3 + 2\eta^2 - \eta)(1-\xi) & h(-\eta^3 + 2\eta^2 - \eta)\xi \\ l(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)(1-\eta) & l(\xi^3 - \xi^2)(1-\eta) \\ h(-\eta^3 + \eta^2)\xi & h(-\eta^3 + \eta^2)(1-\xi) \\ l(\xi^3 - \xi^2)\eta & l(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)\eta \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$u = \begin{bmatrix} (2\eta^3 - 3\eta^2 + 1)(1-\xi) & (2\eta^3 - 3\eta^2 + 1)\xi \\ 0 & 0 \\ (-2\eta^3 + 3\eta^2)\xi & (-2\eta^3 + 3\eta^2)(1-\xi) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1)(1-\eta) & (-2\xi^3 + 3\xi^2)(1-\eta) \\ 0 & 0 \\ (-2\xi^3 + 3\xi^2)\eta & (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1)\eta \end{bmatrix} \quad (6)$$

ひずみ  $\epsilon = \{\epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy}\}$  を  $\epsilon_x = \partial u / \partial x, \ \epsilon_y = \partial v / \partial y,$

\* 東京大学生産技術研究所 第 5 部

$\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$  を用いて求めると式 (7) のようになる。

$$\epsilon = \{\epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy}\} = \{\theta' : u' : v'\} d = E d \quad (7)$$

ここに  $\theta'$ ,  $u'$ ,  $v'$  は次のようである。

$$\theta' = \begin{pmatrix} -\alpha(-\eta^3 + 2\eta^2 - \eta) & \alpha(-\eta^3 + 2\eta^2 - \eta) \\ -\frac{1}{\alpha}(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) & -\frac{1}{\alpha}(\xi^3 - \xi^2) \\ g_1 & g_2 \\ \alpha(-\eta^3 + \eta^2) & -\alpha(-\eta^3 + \eta^2) \\ \frac{1}{\alpha}(\xi^3 - \xi^2) & \frac{1}{\alpha}(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$u' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{l}(2\eta^3 - 3\eta^2 + 1) & \frac{1}{l}(2\eta^3 - 3\eta^2 + 1) \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{h}(6\eta^2 - 6\eta)(1 - \xi) & \frac{1}{h}(6\eta^2 - 6\eta)\xi \\ \frac{1}{l}(-2\eta^3 + 3\eta^2) & -\frac{1}{l}(-2\eta^3 + 3\eta^2) \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{h}(-6\eta^2 + 6\eta)\xi & \frac{1}{h}(-6\eta^2 + 6\eta)(1 - \xi) \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$v' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{h}(2\xi^3 - 3\xi^2 + 1) & -\frac{1}{h}(-2\xi^3 + 3\xi^2) \\ \frac{1}{l}(6\xi^2 - 6\xi)(1 - \eta) & \frac{1}{l}(-6\xi^2 + 6\xi)(1 - \eta) \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{h}(-2\xi^3 + 3\xi^2) & \frac{1}{h}(2\xi^3 - 3\xi^2 + 1) \\ \frac{1}{l}(-6\xi^2 + 6\xi)\eta & \frac{1}{l}(6\xi^2 - 6\xi)\eta \end{pmatrix} \quad (10)$$

ただし、 $g_1 \sim g_4$  は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= (-3\eta^2 + 4\eta - 1)(1 - \xi) + (3\xi^2 - 4\xi + 1)(1 - \eta) \\ g_2 &= (-3\eta^2 + 4\eta - 1)\xi + (3\xi^2 - 2\xi)(1 - \eta) \\ g_3 &= (-3\eta^2 + 2\eta)\xi + (3\xi^2 - 2\xi)\eta \\ g_4 &= (-3\eta^2 + 2\eta)(1 - \xi) + (3\xi^2 - 4\xi + 1)\eta \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

壁の  $x$ ,  $y$  方向の垂直応力度およびせん断応力度を  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  とすると  $\sigma = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}\}$  と  $\epsilon = \{\epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy}\}$  の間には式 (12) の関係がある。

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = D \epsilon \quad (12)$$

ここに  $E$ : ヤング係数,  $\nu$ : ポアソン比である。

仮想仕事の原理より  $d^T f = \int_V \epsilon^T \sigma dV$  ( $T$  は転置) が成り立つ。これに式 (7), (12) を代入して整理すると  $f = \int_V E^T D E dV \cdot d$  のようになる。従って求める壁の

剛性行列  $K_w$  は、 $K_w = \int_V E^T D E dV$  である。結果を表 1 に示す。

以上求めた壁体の剛性行列を用いて多層多スパン壁付きラーメンの全体の剛性行列を求めるには、ラーメン部材の剛性行列と壁体の剛性行列とを直接剛性法<sup>5)</sup> によって求めればよい。  
(1969年3月17日受理)

参 考 文 献

- 1) 坪井善勝: 耐震壁の応力解析 (壁付ラーメンの剪断変形), (建論46号, 昭28.3)
- 2) A. Hrennikoff: Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method (Jour. of Applied Mech. 1941, 12)
- 3) O. C. Zienkiewicz, G. S. Holister: Stress Analysis (John Wiley & Sons LTD, 1965)
- 4) 川股重也: マトリックス変位法による骨組の解析(東京大学, 生産研究, Vol. 18, 5号, 昭41.5)
- 5) 川股重也: マトリックス法によるラーメン解法入門 3 (技報堂, コンクリートジャーナル, Vol. 6, No. 11, 1968)

正 誤 表 (5月号・20周年誌追加)

(主要な正誤は同誌に表として添付済みです)

ページ	段	行	種 別	正	誤
20		下8	論 説	……こととした項には	……こととした項には
21		上6	”	本多助教授	本多教授
”		下13	”	一因であるが,	一因であるか,
22		上15	”	……得ないこと	……得ないこと
129	左	上4		純正並びに	純正益に
183	左	16, 17の間	共同研究 (研究課題表)	昭和39年度	(脱落)

