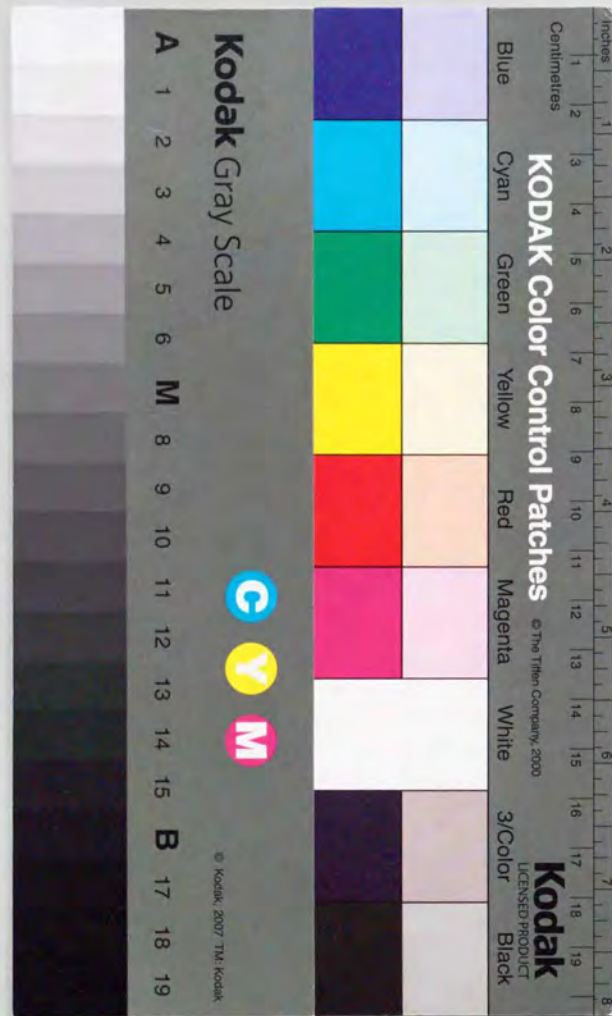


# 離散ひびわれ用の新ハイブリッドストレス 要素とコンクリートの破壊への応用

A New Hybrid Stress Element for Discrete Crack and  
its Application to Fracture of Concrete

平成4年9月

伊良波 繁 雄





①

離散ひびわれ用の新ハイブリッドストレス  
要素とコンクリートの破壊への応用

A New Hybrid Stress Element for Discrete Crack and its Application  
to Fracture of Concrete

伊良波繁雄

## 目次

### 第1章 序論

1. 1 研究の背景および目的 .....	1
1. 2 既往の研究と問題点 .....	3
1. 3 本論文の構成 .....	8

### 第2章 ハイブリッド型コンプリメンタリーエネルギーにもとづく

#### 極限解析用離散化モデルの機能拡張

2. 1 はじめに .....	10
2. 2 変分原理 .....	11
2. 3 弾塑性剛性行列の誘導 .....	17
2. 4 数値計算結果による検証 .....	21
2. 5 まとめ .....	29

### 第3章 ハイブリッド型コンプリメンタリーエネルギーにもとづく

#### 弾塑性離散化モデルの構築

3. 1 はじめに .....	30
3. 2 弾塑性剛性行列の誘導 .....	
3. 2. 1 要素境界で塑性を表すときの弾塑性剛性行列 .....	31
3. 2. 2 要素内で塑性を表すときの弾塑性剛性行列 .....	33
3. 3 数値計算 .....	
3. 3. 1 ハイブリッドストレス要素による弾性解の収束特性 .....	40
3. 3. 2 要素境界で塑性を表すときの弾塑性問題の解析例 .....	45
3. 3. 3 要素内で塑性を表すときの弾塑性問題の解析例 .....	48
3. 4 まとめ .....	55

### 第4章 コンクリートのひずみ軟化解析に資するハイブリッド型

#### 離散化モデルの開発

4. 1 はじめに .....	57
-----------------	----



4. 2 ひずみ軟化を考慮した変分原理 .....	58
4. 3 ひずみ軟化を考慮した弾塑性剛性行列の誘導 .....	60
4. 4 複合モード破壊の条件式と引張軟化	
4. 4. 1 セン断破壊および引張破壊の条件式 .....	64
4. 4. 2 複合モード破壊での引張軟化 .....	64
4. 4. 3 引張破壊により完全にひびわれが開口したときの せん断応力の伝達 .....	66
4. 5 数値解析法 .....	66
4. 6 ひずみ軟化材料の破壊に関する数値解析と検証 .....	69
4. 7 まとめ .....	81
第5章 内圧を受けるコンクリート中空円筒の破壊挙動の解明	
5. 1 はじめに .....	83
5. 2 内圧を受ける中空円筒の破壊圧力および破壊性状 .....	84
5. 3 解析条件	
5. 3. 1 材料特性 .....	86
5. 3. 2 破壊モード .....	87
5. 3. 3 円筒の寸法および要素分割 .....	87
5. 4 挙動の解明	
5. 4. 1 主ひびわれ本数と破壊圧力 .....	89
5. 4. 2 主ひびわれと微細ひびわれを考慮したときの破壊圧力 .....	92
5. 4. 3 引張軟化曲線と破壊圧力 .....	95
5. 4. 4 寸法効果 .....	96
5. 4. 5 円筒の破壊性状 .....	101
5. 4. 6 平面応力または平面ひずみを仮定したときの破壊圧力 .....	101
5. 5 まとめ .....	104
第6章 一次元要素を用いた簡易ひずみ軟化解析法	
6. 1 はじめに .....	107
6. 2 弾塑性剛性行列の誘導	

6. 2. 1 トラス要素の弾塑性剛性行列 .....	107
6. 2. 2 はり要素の弾塑性剛性行列 .....	111
6. 3 オフセットビーム要素 .....	115
6. 4 トラス要素による数値計算結果による検証 .....	116
6. 5 はり要素による数値計算結果による検証 .....	120
6. 6 まとめ .....	126
第7章 結論 .....	127
付録 .....	132
謝辞 .....	148
参考文献 .....	149



1. The first part of the paper discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that proper record-keeping is essential for the success of any business or organization. The author argues that without reliable records, it is impossible to make informed decisions or to track progress over time.

2. The second part of the paper focuses on the challenges of record-keeping in a digital age. While technology offers many advantages, it also introduces new risks, such as data loss and security breaches. The author suggests that organizations should invest in robust backup systems and implement strict security protocols to protect their data.

3. The third part of the paper explores the role of record-keeping in legal and regulatory compliance. Many industries are subject to strict regulations, and maintaining accurate records is often a legal requirement. The author notes that failure to comply with these requirements can result in severe penalties and damage to the organization's reputation.

4. The fourth part of the paper discusses the importance of record-keeping in financial management. Accurate records are necessary for preparing financial statements, budgeting, and forecasting. The author argues that good record-keeping practices can help organizations identify areas for improvement and make more effective use of their resources.

5. The fifth part of the paper concludes by summarizing the key points discussed and offering final thoughts on the importance of record-keeping. The author reiterates that while record-keeping may seem like a tedious task, it is a critical component of any successful organization's operations.

6. The sixth part of the paper discusses the importance of record-keeping in human resources management. Accurate records are necessary for tracking employee performance, managing payroll, and ensuring compliance with labor laws. The author suggests that organizations should implement a system for tracking employee data and use this information to make informed decisions about hiring, training, and retention.

7. The seventh part of the paper explores the role of record-keeping in marketing and sales. Accurate records are necessary for tracking sales performance, identifying trends, and developing targeted marketing campaigns. The author argues that good record-keeping practices can help organizations better understand their customers and improve their marketing efforts.

8. The eighth part of the paper discusses the importance of record-keeping in research and development. Accurate records are necessary for tracking the progress of research projects, managing budgets, and ensuring the integrity of the data. The author suggests that organizations should implement a system for tracking research data and use this information to make informed decisions about the direction of their research.

9. The ninth part of the paper concludes by summarizing the key points discussed and offering final thoughts on the importance of record-keeping. The author reiterates that while record-keeping may seem like a tedious task, it is a critical component of any successful organization's operations.

10. The tenth part of the paper discusses the importance of record-keeping in the construction industry. Accurate records are necessary for tracking project progress, managing budgets, and ensuring compliance with building codes. The author suggests that organizations should implement a system for tracking construction data and use this information to make informed decisions about the direction of their projects.



## 第1章 序論

### 1. 1 研究の背景および目的

電子計算機の普及と発達に伴って、有限要素法、境界要素法や差分法のような数値解析法が発展し固体力学、流体力学、熱伝導問題等のように工学上のあらゆる問題の解析に応用されるようになった<sup>1)</sup>。今やこれらの数値解析法は構造物の設計や研究上の道具としても必要欠くべからざるものとなった。特に、有限要素法は1967年にCalifornia大学のNgoとScordelisら<sup>2)</sup>が鉄筋コンクリートはりのせん断破壊の問題に応用して以来、現在まで、コンクリートの研究者にも親しまれてきた数値解析法である。有限要素法がコンクリートの分野に使われる理由は、設計上では大型構造物や特殊構造物が多く出現するに伴い、構造物を骨組構造や簡単な板構造にモデル化することが困難な場合が増加したこと、部材もしくは構造物全体の終局耐力を精度良く求めたい場合等がある<sup>3)</sup>。また、部材や構造物の破壊実験においては、実験では計測できない部分のひずみを求めたり、破壊メカニズムを推定するために、有限要素法による非線形解析が望まれてきた。

有限要素法でコンクリート構造物のひびわれの問題を取り扱うとき、ひびわれを分散ひびわれと仮定して解析する方法と離散ひびわれと仮定して解析する方法がある<sup>4), 5)</sup>。有限要素法は連続体を取り扱うのに容易であるので、ひびわれが分散していると見なせる場合は、平面要素内で複数のひびわれ挙動を平均的に扱う分散ひびわれモデルが有利である。したがって、空間的に鉄筋が分散配置されている鉄筋コンクリート構造の解析に大きな力を発揮するのである。しかし、分散ひびわれモデルは、小数のひびわれが解析対象の全体挙動を支配するケースに応用することは原理的にも不適切である。これに対し、離散ひびわれモデルに基づく解析方法は、解析対象物を平面要素とバネまたはlink要素でモデル化し解析する<sup>4), 5)</sup>。このとき、ひびわれ発生が予測される位置で平面要素の要素境界とひびわれの進行方向を一致させるように要素分割を行い、ひびわれ発生の予測される要素境界のみにバネまたはlink要素を配置する。離散ひびわれモデルはひびわれを一本ずつモデル化するので、ひびわれ間隔やひびわれの幅が評価できるが、ひびわれ発生箇所の予測には、専門的知識と経験に依存しなければならない。一般的には構造物やコンクリート部材の解析では、両者の長所を取り入れて、併用して解析する例もみられる<sup>6)</sup>。

通常の離散ひびわれモデルを用いた解析が、ひびわれ発生箇所の予測される要素境界の



みにバネまたはlink要素を配置するのに対して、平面要素のすべての要素境界にバネ要素を配置する方法もある。このような解析モデルの一つに、川井が開発した剛体バネモデルがある<sup>7)</sup>。剛体バネモデルでは解析対象物を剛体の平面要素とすべての要素境界間を連結するバネでモデル化しているために、どの要素境界でもひびわれの発生が可能な解析モデルとなっている。剛体バネモデルは最初からすべり破壊や引張破壊を考慮に入れて作られた解析モデルであるので、地盤、板殻、骨組の非線形解析に大きな成果を上げている。しかし、剛体バネモデルは元来固体の極限解析専用モデルであり、はり要素や軸対称変形リングシェル要素等を除いて、その弾性解の精度の保証は困難といわれている<sup>11)・8)</sup>。

最近、コンクリートの破壊に破壊力学を応用する研究が世界的に活発に行われている<sup>9)・10)・11)</sup>。破壊力学は寸法効果が顕著に現れる構造物の挙動、ひずみの局所化や破壊の集中化により、不連続体に近い挙動を示す無筋コンクリートおよび鉄筋コンクリート構造物の挙動を解明するのに有効である。コンクリートが引張破壊を起こすときは、ひびわれ先端に破壊過程領域ができ、この領域では応力が引張強度に達した後でひずみの増加に伴って応力の減少が起こる。このような引張破壊によるひずみ軟化を数値解析に考慮する方法の一つに仮想ひびわれモデルがある。仮想ひびわれモデルでは、引張軟化の構成式として、ひびわれ面に垂直な応力とひびわれ幅の関係式を用いている。このために、離散ひびわれモデルは容易に引張軟化構成式を取り込むことができるために、破壊力学の研究において離散ひびわれモデルはよく用いられている。

コンクリートの引張軟化を考慮した数値解析は、その非線形性ゆえに増分法で行われるが、数値解析の上で困難な問題の一つに安定性の問題がある。すなわち、引張軟化が生じるときはみかけの剛性が負になるために snap-back のような不安定現象が起こる。この現象に対しては座屈のシミュレーションで用いられている増分法の一つである弧長法<sup>12)</sup>を用いる方法があるが、アルゴリズムは複雑である。

本論文では以上の背景を考慮にいれ、以下の開発項目をとりあげた。

- 1) 剛体バネモデルのように要素境界ですべり破壊や引張破壊をあらわす、いわゆる離散ひびわれモデルを容易に取り扱うことができ、かつ、弾性材料のみならず非線形材料に対しても、変位や応力度の精度が高い平面要素の開発を行う。
- 2) 開発した平面要素をコンクリートおよび部材の破壊現象の解明に応用するために、仮想ひびわれモデルを取り込んだ弾塑性剛性行列の定式化を行う。引張軟化を考慮した解析では snap-back のような不安定現象が現れるので、このような不安定現象に対し

ても解を追跡できるアルゴリズムの開発を併せて行う。

以上の開発を通じて、ひびわれが主たる非線形性の源であるコンクリート構造の挙動解明にアプローチできる素地ができあがる。本研究では、これを内圧を受ける中空円筒の破壊解明に応用した。内圧を受ける中空円筒の破壊問題は、コンクリート構造の取り壊し、タンク系構造の設計等に共通する問題である。このような問題に対しては、従来、厚肉円筒理論を用いて破壊圧力の推定や実験結果の整理が行われているが、今回開発した平面要素を中空円筒の破壊の問題に適用し、破壊圧力の寸法効果や破壊性状等を明らかにすることを試みた。一方、コンクリートの破壊力学の解析を平面要素で行うのは精度は良いが入力データの作成や計算コストの点で問題がある。このために、平面要素よりも手軽に破壊力学の解析を行う目的に沿って、一次元要素（トラス要素やはり要素）を開発した。

## 1. 2 既往の研究と問題点

### (a) 離散ひびわれ

ひびわれ部分にバネまたはlink要素を用いて解析する離散ひびわれモデルは、これまで地盤、岩盤<sup>13)</sup>やコンクリート等の土木工学の多くの分野で用いられた。コンクリートの分野ではNgoとScordelisらが鉄筋コンクリートはりを解析したように、ひびわれ部分に用いるバネまたはlink要素と平面要素ではりを要素分割し解析したのが最初である。離散ひびわれモデルを用いればひびわれ幅が求められる、骨材のかみ合いも考慮できる等の利点があり、現在までコンクリートの分野では多くの研究に用いられてきた。離散ひびわれモデルはひびわれの進行方向があらかじめ判明しているときに特に有効なモデルである<sup>14)</sup>。また、ひびわれの進行方向が不明でも、ひびわれの進行と共に要素の再分割を行い、新しい節点を追加して解析する方法もある。しかし、この解析方法は解析プログラムが複雑になるという欠点がある<sup>5)</sup>。一方、地盤や岩盤の分野では、川本ら<sup>6)</sup>はモール・クーロンの破壊条件に基づいて局所破壊の発生の有無を調べ、破壊した要素に対してクラック三角形要素を適用し、逐次破壊現象の解析を行っている。クラック要素は4個の部分三角形要素と1個のジョイント要素で構成されており、クラック発生による変位の自由度の増加はクラック要素ごとに消去できるので、クラックの発生によって全体剛性行列のサイズが増加することはない。Wanら<sup>8)</sup>は土質中の Shear Band を考慮する方法を示した。それは、仮想仕



事の原理に不連続面に作用するせん断応力のなす仕事を追加する手法、すなわち、修正した仮想仕事の原理を用いて弾塑性剛性行列を導く解析手法である。この解析手法は要素内の応力状態によって自動的にShear Bandを導入することができるので、剛体パネモデルのように要素分割に苦勞することはない。しかし、これらの研究は地盤や岩盤のすべり破壊問題に対しては有効であるが、コンクリートの引張破壊のように、ひびわれ幅の増加に伴って伝達応力が減少する、いわゆる、引張軟化を考慮するときは解析手法の改良が必要である。

離散ひびわれモデルでは平面要素の要素境界がひびわれ面のときは、その部分にパネまたはlink要素を配置するというモデルであるが、ひびわれ面のあるなしにかかわらず、全ての要素境界面に最初からパネを配置するモデルが川井によって提案された。川井が開発した剛体パネモデルは解析対象を有限個の剛体と剛体間を連結するパネで表し、破壊条件に達した要素境界面のパネを切断することですべり破壊や引張破壊を取り扱おうとするモデルである。剛体パネモデルは破壊が生じても要素境界面のパネを切断するだけであるから、ひびわれがどの方向に進行しても、節点の増加はない。このために、解析プログラムも複雑になるという欠点はない。ただし、ひびわれの発生箇所は要素境界面だけという欠点はまぬがれない。

剛体パネモデルは元来固体の極限解析専用モデルであり、はり要素や軸対称変形リングシェル要素等を除いて、その弾性解の精度の保証は困難といわれている<sup>8)</sup>。渡辺らは剛体パネモデルの欠点を解決するための一連の要素モデルを提案している<sup>15)</sup>。これらの要素はハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理に基づいて導かれたので、ハイブリッドストレスモデル (hybrid stress model)<sup>15)</sup>またはハイブリッドストレス要素 (hybrid stress element)<sup>16)</sup>と呼ばれる。渡辺らの提案した要素は平面要素については、図-1.1に示すように、要素境界の辺中央のみに節点を有しており、剛体パネモデルと同様に要素境界ですべり破壊 (図-1.2)を表すのに便利である。渡辺らは平面要素の剛性行列を導くのに式 (1.1)のハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理を用いた。

$$-\Pi_{CH} = \iiint_{V_a} B(\sigma_{ij}) dV - \iint_{s_{V_a}} u_i T_i dS \quad (1.1)$$

ここで、 $B(\sigma_{ij})$  : コンプリメンタリエネルギー関数、 $T_i : \sigma_{ij} n_j$ 、 $\sigma_{ij}$  : 応力、

$n_j$  : 物体表面における外向き法線ベクトルの方向余弦、 $u_i$  : 全体座標系での変位、 $v_a$  : 要素 $a$ の体積、 $s_{V_a}$  : 要素 $a$ の周辺積分、なお、式(1.1)は簡単の為に要素境界がすべて他の要素と接している場合について示した。

渡辺らは式(1.1)の右辺の2項目の要素境界に関する項で、 $u_i, T_i$ を図-1.1に示す局所座標系を用いて変形し、変位を要素境界に垂直な変位:  $U$ と要素境界に平行な変位:  $V$ で表した。つぎに、応力場として一次式の釣合応力場を仮定し、 $U$ を一次式、 $V$ を一定として要素の剛性行列式を求めている。渡辺らはこのモデルを用いて、完全弾塑性体の上界解を求める方法を示した<sup>15)</sup>。渡辺らの示した解析方法は、要素境界が降伏面に達したとき、その境界面に新しい節点を設けて、要素境界面が自由にすべるようにしているために、次のような問題点が挙げられた。

- 1) すべり面が増加するたびに、新しい節点番号が必要なのでプログラミングが複雑になり、全体剛性方程式の未知数も増加する。
- 2) 降伏条件としてはトレスカの条件のみが使用可能である。

建設材料としてよく用いられる、コンクリート、土、岩等の材料のすべり破壊の条件式としてはモール・クーロン型がより適当と思われるため、渡辺らの提案した要素および解析方法をそのまま、コンクリートの構造物の極限解析に用いることはできない。

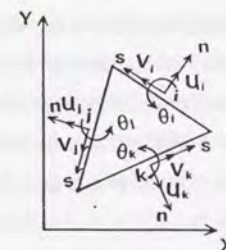


図-1.1 ハイブリッドストレス要素  
(渡辺)

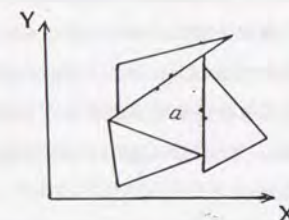


図-1.2 ハイブリッドストレス要素  
によるすべり破壊の表現



### (b) コンクリートの破壊力学

コンクリートが引張破壊を起こすときは、ひびわれ先端に破壊過程領域<sup>10)</sup>ができ、この領域では応力が引張強度に達した後でひずみの増加に伴って応力の減少が起こる。このような引張破壊によるひずみ軟化を考慮する方法の一つにHillerborgによって提案された仮想ひびわれモデル<sup>17)</sup>がある。仮想ひびわれモデルでは、ひびわれ面に垂直な引張応力： $\sigma_n$ とひびわれ幅： $w$ の関係いわゆる引張軟化曲線であらわされる。引張軟化曲線と破壊過程領域との対応関係<sup>21)</sup>

は、図-1.3の引張軟化曲線の前半部分

が引張破壊開始後の初期の段階で卓越する微細ひびわれ領域、後半部分がひびわれ幅が大きくなるにつれて主要なメカニズムとなる架橋領域に対応する。

引張破壊によるひずみ軟化を考慮して解析する方法として、有限要素法や境界要素法がある。いずれの解析法でもひびわれ面で引張軟化曲線で示される式（以後、引張軟化構成式とする）を満足しなければならない。有限要素法では引張軟化構成式を満たすためにひびわれ面に棒要素やジョイント要素を用いる方法<sup>18)</sup>とひびわれ面の開口変位と結合力間の撓性方程式に基づく応力法<sup>19)</sup>がある。棒要素を用いる方法は要素境界に長さが零の要素を入れるために変位の自由度が増加し全体剛性行列式の大きさも増加する。このため、あらかじめ、ひびわれの発生が予想されるような要素境界のみに棒要素を配置する方法が行われている。撓性方程式を用いる方法も同様に、あらかじめ、ひびわれの発生が予想できる場合のみ有効である。しかし、任意の荷重や任意の形状のコンクリート構造物に適用するときはひびわれの発生を予想することは困難である。計算手法が複雑であるという欠点はあるが Arrea ら<sup>20)</sup>が示したように自動的に要素分割を行い、ひびわれを自動的に進展させる方法もある。

以上の解析では、コンクリートの材料特性として引張軟化曲線を必要としたが、近年、引張軟化曲線を必要としないラティスモデルが開発された。ラティスモデルは連続体を格子でモデル化する方法で、Schlangenら<sup>82)</sup>は三角形の格子網でコンクリートをモデル化し、

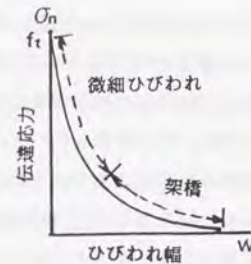


図-1.3 引張軟化曲線

両側切欠きを有する棒の直接引張試験、片側または両側切欠きを有するはりのせん断試験のシミュレーションを行っている。解析結果によれば、得られた荷重と変位の関係は実験結果に比べて最大荷重後の荷重の低下が大きくなっている。Schlangenらは、三次元解析によってこの問題点が解決されることが期待されると述べている。

境界要素法による破壊の計算は材料内部に多数のひびわれが進展するときは有限要素法よりも不利になると思われるが、ひびわれが小数であれば境界要素法は破壊力学の理論に忠実なすぐれた数値解析法である。境界要素法による研究は天津ら<sup>22)</sup>が精力的に進めている。境界要素法に類似した解析法に積分方程式による数値解析法があるが、堀井<sup>23)</sup>はひびわれ面上の伝達応力に関する2つの積分方程式を導き、この方程式を用いて最大荷重を求める方法を示した。

これまでは、離散ひびわれモデルについて述べてきたが、引張軟化を要素内で一様に分散していると仮定して解析する方法、いわゆる、分散ひびわれモデルを用いる方法もある。分散ひびわれモデルはひびわれの発生方向が何等制限を受けることはないが、要素の大きさによってみかけの軟化挙動を変更しないかぎり解が一定値に収束しないという欠点がある<sup>12)</sup>。

引張軟化を考慮した数値解析で困難な問題の一つに安定性の問題がある。すなわち、引張軟化が生じるときは剛性が負になるために荷重の急激な低下や snap-back のような不安定現象が起こる。この現象に対しては座屈のシミュレーションで用いられている増分法の一つである弧長法<sup>12)</sup>を用いる方法があるが、計算のアルゴリズムが複雑である。

### (c) 内圧を受ける中空円筒の破壊

内圧を受ける中空円筒の破壊の問題はコンクリート構造の分野では割合多くみられる。たとえば、Tepfers<sup>25)</sup>は鉄筋コンクリートにおける付着割裂強度を求めるのに、内圧を受ける円筒でモデル化し付着割裂強度を求めるための式を導いている。森川ら<sup>26)</sup>は正方形断面中央に埋められた鉄筋の腐食膨張によるコンクリートのひびわれ発生荷重を求めるのに、正方形に内接する厚肉円筒でモデル化している。原田<sup>27)</sup>は静的破砕剤を用いて、コンクリートを破砕するときの破砕圧力の推定を行うのに中空円筒の供試体を用いて、実験および解析的研究を行っている。原田が行った実験では、円筒の外径と内径の比と破壊圧力の関係を調べているが、ばらつきはかなり大きい。同様なことは、Tepfersの行った付着割裂強度の実験でも同じである。これらの研究ではいずれも厚肉円筒の弾性理論解を用いているために、破壊圧力の変動については十分な解析的検討がなされていない。本来、コンクリー



トの破壊挙動の再現性は±10%内におさまることが知られている。したがって、大きなばらつきが見かけ上生じるのは、何らかの考慮されていない項目があると考えられる。

#### (d) 一次元要素によるコンクリートの破壊力学

引張軟化は平面要素だけでなく、トラス要素のような一次元要素を用いても研究されてきた。Runessonら<sup>23)</sup>はポテンシャルエネルギーの原理を用いて、増分法で解を求めている。園田<sup>24)</sup>は引張軟化を示す部材で構成されるトラスの破壊のシミュレーションを行っている。このとき、全ポテンシャルエネルギー増分関数の最小化問題を非線形計画法で解を求めている。これらの解析方法は陽な型で弾塑性剛性行列を示していないので、計算は複雑である。

### 1. 3 本論文の構成

本論文は、本章・序論以降、次のような構成で展開される。

第2章では、渡辺らが導いた平面問題解析用のハイブリッドストレス要素をモール・クーロンの降伏条件で表されるコンクリート、土、岩等の材料の極限解析まで適用範囲を拡げる方法を示す。弾塑性剛性方程式はすべり面でモール・クーロンの式を付帯条件として、ラグランジュの未定乗数を用いてハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理に導入する方法で求めている。数値計算例として、浅い基礎の支持力、斜面上の基礎の支持力の問題、弾性体の接触問題を解析し解析方法の妥当性を明らかにした。

第3章では渡辺らが導いた平面問題解析用のハイブリッドストレス要素の変位の精度を改善した新しいハイブリッドストレス要素を提案した。新しい要素は渡辺らと同様にハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理を用いている。要素内の応力パラメータを12個として、要素境界の変位場は要素境界に垂直方向および平行な方向に一次式を仮定している。新しい要素を用いた弾性解析解は変位および要素内部の応力の精度が良いために、要素内だけで塑性を考慮する方法について検討を行った。塑性条件式を満足させるために、ここでも、ラグランジュの未定乗数法を用いて塑性条件式をハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理に導入する方法を用いている。

渡辺らが導いたハイブリッドストレス要素と新しく提案したハイブリッドストレス要素の比較を行うために、片持はりの弾性解析を行い、変位や要素内の応力の精度の比較を行った。つぎに、提案したハイブリッドストレス要素を極限解析に適用し剛体パネモデルとの比較を行った。要素内だけで塑性を考慮したときの弾塑性剛性方程式の特性を知るため

に、弾塑性の解析を行い検討を加えた。

第4章では、新しいハイブリッドストレス要素をコンクリートの破壊解析に応用する方法を示した。仮想ひびわれモデルを用いるときは、塑性条件式の内に応力のみならず、ひびわれ幅も入ってくる。このために、塑性条件式をハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理にラグランジュの未定乗数法を用いて導入するときに、ひびわれ幅とラグランジュの未定乗数との関係を明らかにする必要がある。そこで、本論文では、最初に、ハイブリッド型 Hellinger-Reissnerの変分原理を用いてひびわれ幅とラグランジュの未定乗数との関係を明らかにした。つぎに、この関係式を用いて、ひずみ軟化を考慮した弾塑性剛性方程式を導く方法を示した。数値計算例としては、CT試験体の実験のシミュレーションを行い本論文で示している解析手法が十分精度の高いことを示した。

第5章では第4章で述べたコンクリートの引張軟化に関する解析方法を、内圧を受けるコンクリートの中空円筒の破壊現象の解明に適用した。内圧を受ける中空円筒の破壊の問題は従来、厚肉円筒の弾性理論解を用いて破壊圧力の推定や実験結果の整理が行われたが、本章ではハイブリッドストレス要素を円筒の破壊解析に適用し、破壊圧力の寸法効果や破壊性状等の検討を行った。なお、解析では円筒に生じるひびわれパターン、引張軟化曲線、円筒の外径と内径の比等を変えて数値解析を行い、これを通じて、内圧下での中空円筒の破壊挙動の解明を行った。

第6章では一次元要素（トラス要素やはり要素）を用いたひずみ軟化解析法について述べている。数値解析例として直接引張試験のシミュレーションや切欠きを有するはりの曲げ試験等に適用し、解の精度や特性について検討した。解析の対象によっては、一次元要素は高精度な平面要素による解析に比べ、解の精度をそれほど落とすことなく、簡易に破壊解析ができ、データの作成や計算コストの面で大きな利点があることを示した。

第7章では本論文の結論を述べた。







## 第2章 ハイブリッド型コンプリメンタリーエネルギーの原理にもとづく 極限解析用離散化モデルの機能拡張

### 2. 1 はじめに

有限要素法は連続体の力学的挙動を解析するのに適した手法である。また、構造物と地盤の境界面、地盤や岩盤中の断層のように部分的に不連続な挙動を示す場所があっても、不連続部分にバネやlink要素などを用いることにより解析が可能となる。しかし、コンクリート構造物や地盤、岩盤が荷重を受けて崩壊する場合はすべりや分離が材料中に進展し不連続性を示す部分が逐次変化するために、すべりや分離に伴う自由度の増加、要素の再分離の問題が起こり、解析は非常に困難になる。このために、要素境界だけですべりや分離を表現する新しい型の要素が開発された。

川井によって開発された剛体バネモデル<sup>8)</sup>は要素重心に自由度をもつ要素で、固体を有限個の剛体および剛体間を連結するバネによって表現している。荷重の増加に伴うすべりや分離は、降伏強度に達したバネを切断することにより簡単に表現でき、自由度の増加もない。このために、剛体ばねモデルは地盤、板殻、骨組の非線形解析に大きな成果を上げており、鉄筋コンクリート構造物の非線形解析でも上田ら<sup>28)</sup>が剛体バネモデルを壁式構造に適用しており、少ない要素数で最終の崩壊荷重および崩壊メカニズムを求めることができることを示した。しかし、一方、剛体バネモデルは元来固体の極限解析専用モデルであり、はり要素や軸対称変形リングシェル要素等を除いて、その弾性解の精度の保証は困難であるといわれている<sup>8)</sup>。

渡辺らは剛体バネモデルの欠点を解決するための一連の要素モデル<sup>15)</sup>を提案している。これらの要素は、ハイブリッド型コンプリメンタリーエネルギーの原理にもとづいて導かれたハイブリッドストレス要素である。渡辺らの提案した平面要素は要素境界の辺中央に節点を有しており、剛体ばねモデルと同様に要素境界ですべり線を表しているので、これを極限解析に用いれば上界解を得ることができる。

渡辺はこのハイブリッドストレス要素を用いて、完全弾塑性体の上界解を求める方法を示した。しかし、渡辺らの示した解析方法は、要素境界が降伏面に達したとき、その境界面に新しい節点を設けて、要素境界面が自由にすべるようにしている。このために、すべり面が増加するたびに、新しい節点番号が必要となるのでプログラミングが複雑になり、



全体剛性方程式の未知数も増加する。また、降伏条件としてはトレスカの条件だけしか使えないという欠点がある。

一方、建設材料としてよく用いられる、コンクリート、土、岩等の材料のすべり破壊の条件としてはモール・クーロンの式がよく用いられるために、渡辺らの提案した要素および解析方法をそのまま、コンクリート、土、岩等の構造物の極限解析に用いることはできない。このために、本章ではハイブリッドストレス要素を用いてモール・クーロンの式で表される材料の上界解を求める方法を示す。

要素境界ですべり面ができたとき、応力場はすべり面においてモール・クーロンの式を満たさねばならない。このために、本章ではモール・クーロンの式を付帯条件として、ラグランジュの未定乗数を用いてハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理に導入する方法を用いる。

数値計算例としては浅い基礎の支持力、斜面上の基礎の支持力の問題等の解析を行い、提案した解析法の妥当性を示した。さらに、本解析法は極限解析だけでなく弾性体の接触問題にも適用できることを示した。

## 2.2 変分原理

本研究では、すべり面でモール・クーロンの式を満足させる方法として、ラグランジュの未定乗数を用いる。モール・クーロンの式を付帯条件として、ラグランジュの未定乗数を用いてハイブリッド型コンプリメンタリエネルギー原理に導入したとき、ラグランジュの未定乗数の物理的意味を明らかにする。このために、鷲津が示しているようにハイブリッド型 Hellinger-Reissnerの原理<sup>29)</sup>を用いる。

ハイブリッド型 Hellinger-Reissnerの原理の汎関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} -\Pi_{RH} = & \sum_e \int \int \int_{V_e} [B(\sigma_{ij}) + (\sigma_{ij,i} + \bar{F}_i) u_i] dV - \sum \int \int_{S_{ab}} u_i (T_i^a + T_i^b) dS \\ & - \int \int_{S_e} (T_i - \bar{T}_i) u_i dS - \int \int_{S_k} T_i \bar{u}_i dS \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここで、 $B(\sigma_{ij})$ :コンプリメンタリエネルギー関数、 $\bar{F}_i$ :物体力、 $\bar{T}_i$ :表面力、

$T_i$ : $\sigma_{ij}n_j$ 、 $\sigma_{ij}$ :応力、 $n_j$ :外向き法線ベクトルの方向余弦、 $u_i$ :変位、 $\bar{\quad}$ 付き:既知量、 $a$ :要素 $a$ 、 $b$ :要素 $b$ 、 $V_e$ :要素 $a$ の体積、 $S_{ab}$ :要素 $a, b$ の境界、 $S_e$ :幾何学的境界、 $S_e$ :力学的境界、 $\sum_e$ :すべての要素の総和、 $\sum$ :すべての要素境界の総和である。ここでは平面問題に限定して定式化を行う。式(2.1)は全体座表系における変分原理であるので、極限解析に適用しやすいように図-2.1に示す局所座表系を用いて変形する。局所座表系は辺中央を原点として $n$ 軸を辺に垂直にとり、 $s$ 軸を辺に平行にとる。座標系 $n-s$ の向きは要素 $a$ について示すと、 $n$ が外向きの時は $s$ は反時計方向、 $n$ が内向きのときは時計方向とする。 $S_a, S_b$ 上では $n$ を外向き、 $s$ を反時計方向とする。

$n$ 軸方向のベクトルの方向余弦を $l, m$ とすれば、応力の変換式は、

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + 2\tau_{xy} lm + \sigma_y m^2 \quad (2.2)$$

$$\sigma_s = \sigma_x m^2 + \sigma_y l^2 - 2\tau_{xy} lm \quad (2.3)$$

$$\tau_{ns} = -(\sigma_x - \sigma_y) lm + \tau_{xy} (l^2 - m^2) \quad (2.4)$$

で表される。 $x-y$ 座標系での $x, y$ 方向の変位をそれぞれ $u, v$ とし、局所座表系での $n, s$ 方向の変位をそれぞれ $U, V$ とすれば、これらの変位の間には、それぞれ次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} u &= Ul - Vm \\ v &= Um + Vl \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

式(2.1)の右辺第2項を式(2.2),(2.4),(2.5)を用いて変形すると、

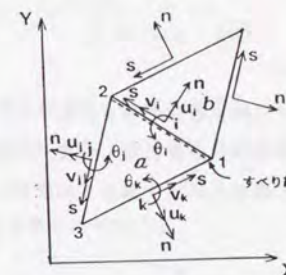


図-2.1 局所座標系



$$\begin{aligned} \int_{S_{ab}} u_i (T_{ij}^a + T_{ij}^b) dS &= \int_{S_{ab}} [(\sigma_n^a l + \tau_{ns}^a m) u + (\tau_{ns}^a l + \sigma_n^a m) v] dS \\ &- \int_{S_{ab}} [(\sigma_n^b l + \tau_{ns}^b m) u + (\tau_{ns}^b l + \sigma_n^b m) v] dS \\ &= \int_{S_{ab}} (\sigma_n^a U + \tau_{ns}^a V - \sigma_n^b U - \tau_{ns}^b V) dS \quad (2.6) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\sigma_n^a U, \tau_{ns}^a V$  の符号が負になったのは局所座標系  $n$  の正方向ベクトルの方向余弦  $l, m$  を用いたためである。同様な方法で式(2.1)の右辺第3,4項を変換すれば式(2.1)は次のようになる。

$$\begin{aligned} -\Pi_{RH} &= \sum_a \iint_{V_a} [B(\sigma_{ij}) + (\sigma_{ij,i} + \bar{F}_i) u_i] dx dy \\ &- \sum_a \int_{S_{ab}} [(\sigma_n^a - \sigma_n^b) U + (\tau_{ns}^a - \tau_{ns}^b) V] dS \\ &- \int_{S_a} [(\sigma_n - \bar{\sigma}_n) U + (\tau_{ns} - \bar{\tau}_{ns}) V] dS \\ &- \int_{S_n} (\sigma_n \bar{U} + \tau_{ns} \bar{V}) dS \quad (2.7) \end{aligned}$$

剛体バネモデルでは要素境界に作用する垂直応力とせん断応力で降伏条件を表しているが<sup>8)</sup>、本研究でも剛体バネモデルと同様に要素境界の応力  $\sigma_n^a, \tau_{ns}^a$  だけで次式のように降伏条件を仮定する。

$$f(\sigma_n^a, \tau_{ns}^a) = 0 \quad (2.8)$$

ここで、 $f$  は降伏関数である。表-2.1に降伏関数の具体的な例を示してある。

要素境界が降伏条件に達した後、荷重の増加後も塑性状態を維持しているなら、要素境界でつぎの塑性条件式を満たさねばならない。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \Delta \sigma_n^a + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} \Delta \tau_{ns}^a = 0 \quad (2.9)$$

表-2.1 すべり面での条件式

	降伏関数: $f$	塑性条件式
モール・クーロン	$\tau_{ns} \pm c, \sigma_n \mp c_0$	$\Delta \tau_{ns} \pm c, \Delta \sigma_n = 0$
ミーゼス	$\tau_{ns}^2 + \sigma_n^2 / 4 - c^2$	$\Delta \tau_{ns} + \Delta \sigma_n \cdot \sigma_n / 4 \tau_{ns} = 0$
トレスカ	$\tau_{ns} \mp c$	$\Delta \tau_{ns} = 0$

すなわち、図-2.1に示すように、要素  $a, b$  境界近傍の要素  $a$  側に破壊が発生したときは式(2.9)の付帯条件のもとで式(2.7)を解けばよい。ここで、ラグランジュの未定乗数:  $\Gamma^a$  を用いて付帯条件式を(2.7)の変分原理に導入すれば、

$$-\Delta \Pi_{RH}^a = -\Delta \Pi_{RH} + \int_{S_{ab}} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \Delta \sigma_n^a + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} \Delta \tau_{ns}^a \right) \Delta \Gamma^a dS \quad (2.10)$$

となる。ここで、 $\Delta \Pi_{RH}$  は式(2.7)の変位や応力を増分量で表した式である。

式(2.10)の  $\Gamma^a$  の物理的意味を明らかにするために  $\Pi_{RH}^a$  の第一変分を求める必要があるが、簡単のために増分記号  $\Delta$  を省略して示す。

$\Pi_{RH}^a$  の第一変分の内、 $S_{ab}$  上の停留条件に関連する項のみを示せば



$$\begin{aligned}
-\delta \Pi_{kin} = & \int_{S_{ab}} [U^a \delta \sigma_n^a + \sigma_n^a \delta U^a + V^a \delta \tau_{ns}^a + \tau_{ns}^a \delta V^a \\
& - U^b \delta \sigma_n^b - \sigma_n^b \delta U^b - V^b \delta \tau_{ns}^b - \tau_{ns}^b \delta V^b \\
& - (\sigma_n^a - \sigma_n^b) \delta U - U \delta \sigma_n^a + U \delta \sigma_n^b \\
& - (\tau_{ns}^a - \tau_{ns}^b) \delta V - V \delta \tau_{ns}^a + V \delta \tau_{ns}^b \\
& + \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \sigma_n^a + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} \tau_{ns}^a \right) \delta \Gamma^a + \left( \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \delta \sigma_n^a + \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} \delta \tau_{ns}^a \right) \\
& + \dots \\
= & \int_{S_{ab}} \left[ \left( U^a - U + \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \right) \delta \sigma_n^a + (-U^b + U) \delta \sigma_n^b \right. \\
& + \left( V^a - V + \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} \right) \delta \tau_{ns}^a + (-V^b + V) \delta \tau_{ns}^b \\
& - (\sigma_n^a - \sigma_n^b) \delta U - (\tau_{ns}^a - \tau_{ns}^b) \delta V \\
& \left. + \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \sigma_n^a + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} \tau_{ns}^a \right) \delta \Gamma^a \right] dS + \dots
\end{aligned} \quad (2.11)$$

となる。式(2.11)から次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} U^a &= U - \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a}, & U^b &= U \\ V^a &= V - \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a}, & V^b &= V \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

$$\sigma_n^a = \sigma_n^b, \quad \tau_{ns}^a = \tau_{ns}^b \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \sigma_n^a + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} \tau_{ns}^a = 0 \quad (2.14)$$

式(2.12)は破壊面での変位の適合条件、式(2.13)は破壊面での応力の釣合条件、式(2.14)は塑性条件式を満たすことを意味する。図-2.2に示すように、破壊によって生じた要素間のズレを $\Delta U$ 、ひびわれ幅を $\Delta V$ とすると、式(2.12)より

$$\Delta U = U^b - U^a = \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \quad (2.15)$$

$$\Delta V = V^b - V^a = \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} \quad (2.16)$$

が得られる。すなわち、降伏関数が明らかであれば、ラグランジュの未定乗数 $\Gamma^a$ から $\Delta U$ と $\Delta V$ を求めることができる。降伏関数 $f$ が図-2.3に示すモール・クーロンの式の場合は、

$$f = \tau_{ns} \pm C_1 \sigma_n \mp C_0 \quad (2.17)$$

であるから

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_n} = \pm C_1 \quad (2.18)$$

となる。これを式(2.15)、(2.16)に代入すれば

$$\Delta U = \pm C_1 \Gamma^a, \quad \Delta V = \Gamma^a \quad (2.19)$$

となり、 $\Gamma^a$ の物理的意味は要素間のズレの量を意味している。

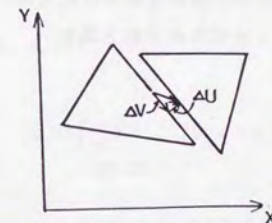


図-2.2 要素境界のひびわれ幅

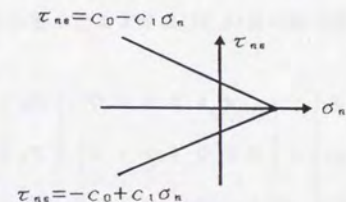


図-2.3 モール・クーロンの降伏関数



式(2.10)において、要素間の応力場を釣合応力場に仮定すれば、要素境界で塑性を考慮したハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理が次式のように得られる。

$$-\Pi_{CH}^e = -\Pi_{CH} + \int_{S_e} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^e} \sigma_n^e + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^e} \tau_{ns}^e \right) \Gamma^e dS \quad (2.20)$$

ここで、 $S_e$ は塑性が生じている要素境界を意味する。 $-\Pi_{CH}$ は

$$-\Pi_{CH} = \iint_{V_n} B(\sigma_{ij}) dx dy - \int_{\partial V_n} (U \sigma_n + V \tau_{ns}) dS + \int_{S_e} (U \bar{\sigma}_n + V \bar{\tau}_{ns}) dS \quad (2.21)$$

である。付帯条件は

$$\left. \begin{array}{ll} \sigma_{ij}, j=0 & \text{in } V_n \\ V=\bar{V}, U=\bar{U} & \text{on } S_e \end{array} \right\} \quad (2.22)$$

となる。

### 2.3 弾塑性剛性行列の誘導

式(2.20)を用いて、辺中央に3自由度を有する三角形要素の弾塑性剛性行列を導く方法を示す。応力場は式(2.23)に示すように渡辺ら<sup>15)</sup>と同じ一次式の釣合応力場を

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \\ 0 & -y & 0 & 0 & 0 & -x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

と仮定し、これを、

$$\{\sigma\} = [B]\{\beta\} \quad (2.24)$$

と置く。応力と歪の関係式は、

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} \quad (2.25)$$

とする。ここで、 $\{\varepsilon\} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})^T$ であり、 $[C]$ は平面ひずみ問題では、

$$[C] = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

平面応力問題では、

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

である。

式(2.21)でコンプリメンタリエネルギー関数の積分は式(2.24),(2.25)を用いて、

$$\int_{V_n} B(\sigma_{ij}) dx dy = \frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} \quad (2.28)$$

となる。ここで、

$$[H] = \int_{V_n} [B]^T [C] [B] dx dy \quad (2.29)$$

である。次に式(2.21)の第2項の積分を図-2.1に示す辺 $\bar{12}$ について示す。外向き法線  
の方向余弦を $l, m$ とし、図-2.1に示すように、辺 $\bar{12}$ の変位を節点 $i$ の変位



$u_i, v_i, \theta_i$  を用いて、次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} U &= u_i - \theta_i S \\ V &= v_i \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

ここで、 $S$  は辺  $\overline{12}$  の局所座標系の原点からの距離である。つぎに、式(2.2), (2.4), (2.30) を式(2.21)の第2項に代入すれば、

$$\begin{aligned} \int_1^2 (U \sigma_n + V \tau_{ns}) dS &= \int_1^2 [ (u_i - \theta_i S) (\sigma_x l^2 + 2\tau_{xy} lm + \sigma_y m^2) \\ &\quad + v_i (-(\sigma_x - \sigma_y) lm + \tau_{xy} (l^2 - m^2)) ] dS \\ &= \{\beta\}^T \int_1^2 \begin{bmatrix} l^2 & -lm & -l^2 S \\ l^2 x - 2lm y & -lm x - y(l^2 - m^2) & -x l^2 S + 2lm y x \\ l^2 y & -lm y & -l^2 S y \\ m^2 & lm & -m^2 S \\ m^2 x & lm x & -m^2 S x \\ m^2 y - 2lm x & lm x y (l^2 - m^2) & -m^2 S y + 2lm \\ 2lm & l^2 - m^2 & -2lm S \end{bmatrix} dS \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.31)$$

となる。同様な計算を辺  $\overline{23}$  , 辺  $\overline{31}$  について行い、これをたし合わせ、

$$\int_{\Delta} (U \sigma_n + V \tau_{ns}) dS = \{\beta\}^T [G] \{u\} \quad (2.32)$$

と置く。ここで、

$$\{u\} = \{u_i \ v_i \ \theta_i \ u_j \ v_j \ \theta_j \ u_k \ v_k \ \theta_k\}^T \quad (2.33)$$

である。

つぎに、式(2.21)の第3項について説明する。辺  $\overline{12}$  に外力が作用していると仮定すれば積分の範囲は1 から2 であり、具体的に示せば、式(2.2), (2.4), (2.30)を用いて

$$\int_1^2 (U \overline{\sigma}_n + V \overline{\tau}_{ns}) ds = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \int_1^2 \overline{\sigma}_n dS \\ \int_1^2 \overline{\tau}_{ns} dS \\ -\int_1^2 S \overline{\sigma}_n dS \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

となる。したがって、これを各辺について計算し、和を求め、

$$\int_{s_e} (U \overline{\sigma}_n + V \overline{\tau}_{ns}) ds = \{u\}^T \{\overline{F}\} \quad (2.35)$$

と置く。ここで  $\{\overline{F}\}$  は荷重ベクトルである。

式(2.20)の第4項のすべり面での積分は、降伏条件としてモール・クーロンの式を仮定すれば次のようになる。

$$\int_{s_e} \Gamma (\sigma_n \pm C_1 \tau_{ns}) dS = \{\beta\}^T \int_{s_e} [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7] dS \Gamma \quad (2.36)$$

ここで  $a_1, a_2, \dots$  は次に示す式である。

$$\begin{aligned} a_1 &= \pm C_1 l^2 - lm & a_2 &= \pm C_1 (l^2 x - 2lm y) - lm x - y(l^2 - m^2) \\ a_3 &= y(\pm C_1 l^2 - lm) & a_4 &= \pm C_1 m^2 + lm & a_5 &= x(\pm C_1 m^2 + lm) \\ a_6 &= \pm C_1 (m^2 y - 2lm x) + lm x y (l^2 - m^2) \\ a_7 &= \pm 2lm C_1 + (l^2 - m^2) \end{aligned}$$

1個の三角形要素ですべり箇所が2または3箇所あるなら、式(2.36)の積分はすべり箇所の数だけ実行する。したがって、一般的に示せば、 $\Gamma$  をベクトルと考えて次式のように表す。

$$\int_{s_e} \Gamma (\tau_{ns} \pm C_1 \sigma_n) ds = \{\beta\}^T [G^s] \{\Gamma\} \quad (2.37)$$

つぎに、式(2.28), (2.32), (2.35), (2.37)を式(2.20)に代入すれば、



$$-\Pi_{cn} = \frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} - \{\beta\}^T [G] \{u\} - \{u\}^T \{\bar{F}\} + \{\beta\}^T [G^*] \{\Gamma\} \quad (2.38)$$

となる。ここで、 $\{\beta\}$ に関する停留条件より

$$\{\beta\} = [H]^{-1} ([G] \{u\} - [G^*] \{\Gamma\}) \quad (2.39)$$

となり、これを式(2.38)に代入し $\{u\}, \{\Gamma\}$ について停留条件を求めると、

$$[K_{11}]\{u\} + [K_{12}]\{\Gamma\} = \{\bar{F}\} \quad (2.40)$$

$$[K_{21}]\{u\} + [K_{22}]\{\Gamma\} = \{0\} \quad (2.41)$$

となる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} [K_{11}] &= [G]^T [H]^{-1} [G], & [K_{12}] &= [G]^T [H]^{-1} [G^*] \\ [K_{21}] &= [G^*]^T [H]^{-1} [G], & [K_{22}] &= [G^*]^T [H]^{-1} [G^*] \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

である。式(2.40), (2.41)より $\{\Gamma\}$ を消去すれば、弾塑性剛性方程式が次式のように求められる。

$$([K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}])\{u\} = \{\bar{F}\} \quad (2.43)$$

式(2.43)で $[K_{11}]$ はすべりが無いときの剛性行列で、 $[K_{12}], [K_{21}], [K_{22}]$ はすべりが生じたときに新たに必要になった項である。

## 2. 4 数値計算結果による検証

2章3節ではハイブリッドストレス要素を用いてモール・クーロンの降伏条件で表され

る材料の弾塑性剛性方程式を導いた。この弾塑性剛性方程式の適用例としてはコンクリート、土、岩等がせん断破壊する時の極限荷重の計算が考えられるが、本章では解析方法の妥当性を示すことが目的であるから、従来から良く研究されている土の支持力の問題を取り上げる<sup>30)</sup>。

極限支持力を数値計算で求めるときは荷重増分法が用いられるが、ここでは、増分法として山田の方法(R min法ともいう)<sup>31)</sup>を用いて解析を行った。

### (1) 浅い基礎の支持力

解析の対象は、図-2. 4に示すように、半無限地盤上の基礎の支持力の問題である。この問題に対する支持力の理論解はプラントルが求めているので、ハイブリッドストレス要素で解析し、プラントルの理論解と比較した。

地盤の材料特性はヤング係数 $E = 1000 \text{ kgf/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、粘着力 $C_0 = 0.1 \text{ kgf/cm}^2$ 、摩擦係数 $C_1 = \tan 30^\circ$ とし、自重を零とする。

地盤の解析領域は深さ: 11m, 幅: 36mとし、基礎の幅は1mとした。なお、解析は対称性を考慮して図-2. 5に示すように要素分割を行い平面ひずみ問題として解析をした。

境界条件は図-2. 5で、地盤側面(CD)および底面(BD)の境界条件は固定とし、基礎直下(AB)では水平方向の変位と回転を拘束した解析を行った。

図-2. 5にすべりの線の発生順位、図-2. 6に荷重-変位曲線を示した。ハイブリッドストレス要素による極限荷重はプラントルの解よりも少し高目になっている。

### (2) 斜面上の基礎の支持力

図-2. 7に示すように、斜面端部に基礎がある時の支持力問題を解析し、W.F.Chenの理論解<sup>32)</sup>と比較した。解析領域はABCDEだけを弾性体とし、残りの部分は剛体と仮定した。なお、要素はW.F.Chenのすべり線を参考にして分割した。要素分割は三角形ACBとAEDはどの要素分割でも同じであるが、扇型領域ADCだけは1から6までの範囲で分割し、極限荷重と要素分割数との関係を調べた。

図-2. 7は領域を8分割した図で、図中の数字はすべり線の発生順序を示す。表-2. 2には要素分割数と極限荷重の関係を示した。極限荷重は3要素で1.54%の誤差、8要素では0.055%の誤差で理論解に一致している。

要素数が3の場合は剛体バネモデルでも解析を行ったが、剛体バネモデルで得られた支



持力は55.406kgfであり、同じ要素分割に対するハイブリッド要素の解は極限支持力が55.41kgf、すべりの発生箇所は剛体バネモデルと同じである。すなわち、要素分割やすべりの発生箇所が同じなら、剛体バネモデルとハイブリッドストレス要素は同じ極限支持力を与えることがわかる。

### (3) 弾性接触問題

ハイブリッドストレス要素はすべりの計算に適したモデルであり、境界面での摩擦も簡単に考慮できる。ここでは、図-2.8に示すような弾性体の接触問題を解析した。図-2.9には要素分割を示した。図-2.10には摩擦係数が零の時の接触面上の鉛直応力の分布を示した。ハイブリッドストレス要素による解は大久保の理論解<sup>33)</sup>、渡辺の変分差分法による解<sup>34)</sup>と大体一致した傾向を示している。図-2.11、図-2.12にはそれぞれ $\mu = \infty$ , 0.2の時のせん断応力の分布を示した。計算結果は変分差分法による結果と同じ傾向を示している。なお、 $\mu = 0.2$ の時の滑りの範囲は $x/B_a = 0.5$ であり、変分差分法と一致している。

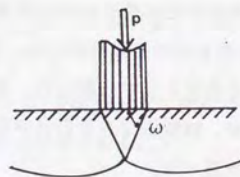


図-2.4 浅い基礎の支持力問題

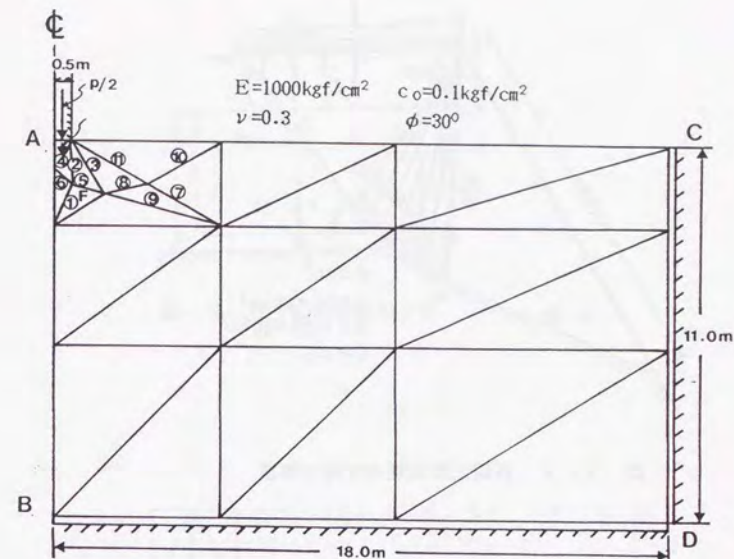


図-2.5 要素分割およびすべり線

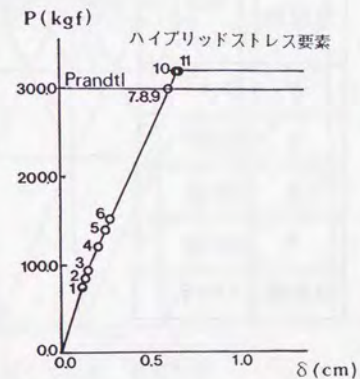


図-2.6 荷重と変位の関係



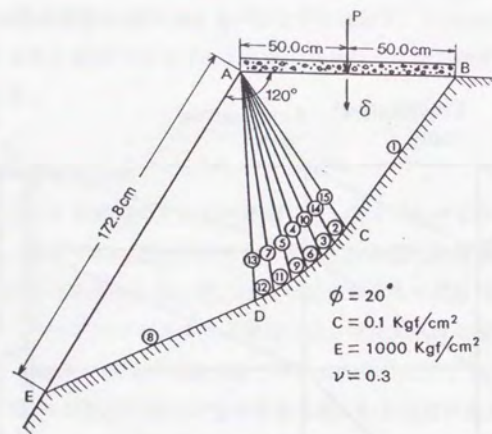


図-2.7 斜面上の基礎の支持力問題

表-2.2 要素分割による支持力の変化

分割数	荷重 P (kgf)
3	55.41
4	54.77
5	54.90
8	54.59
理論解	54.56

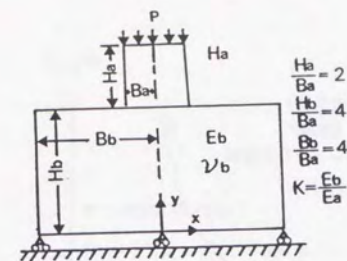


図-2.8 接触物体の寸法

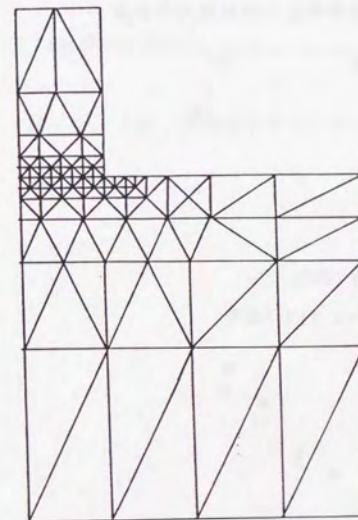


図-2.9 要素分割



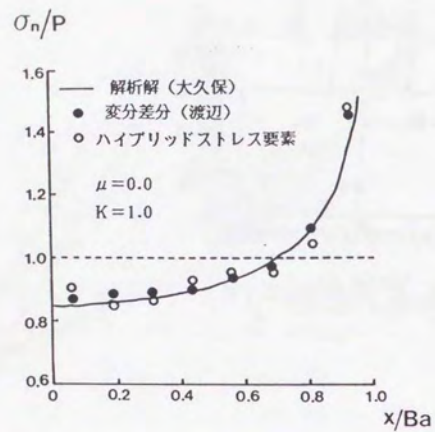


図-2. 10 接触面上の鉛直応力の分布

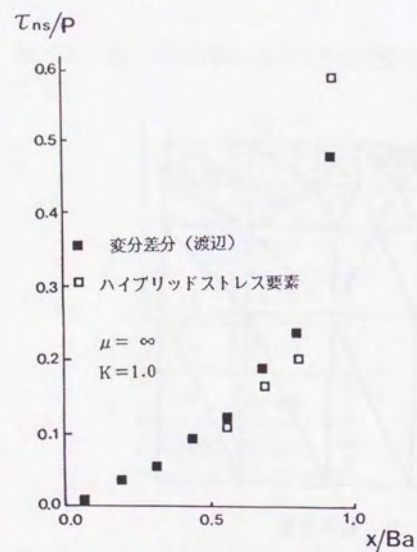


図-2. 11 接触面上のせん断応力の分布

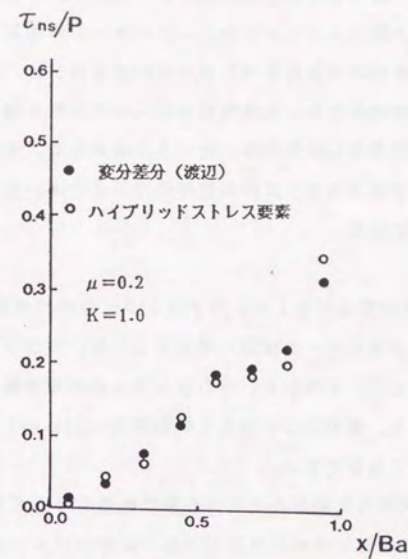


図-2. 12 接触面上のせん断応力の分布



## 2. 5 まとめ

渡辺・川井は剛体バネモデルの欠点を解決するための一連の要素モデルを提案している。これらの要素は、ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理にもとずいて導かれた要素である。渡辺らの示した解析方法はすべり面が増加するたびに、新しい節点番号が必要なのでプログラミングが複雑になり、全体剛性方程式の未知数も増加する。また、降伏条件としてはトレスカの条件だけしか使えないという欠点がある。本章では、降伏条件としてモール・クーロンの式が使えるように弾塑性剛性方程式を導いた。本章で得られた結果を要約すると、次のようになる。

- 1) モール・クーロンの式を付帯条件として、ラグランジュの未定乗数を用いてハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理に導入するとき、ラグランジュの未定乗数の物理的意味を明らかにした。すなわち、ラグランジュの未定乗数の物理的意味は要素間のずれの大きさであり、要素間のひびわれ幅は式(2.19)に示すように摩擦係数と要素間のずれから求めることができる。
- 2) モール・クーロンの降伏条件で表される材料の弾塑性剛性行列式を導いた。
- 3) 弾塑性剛性行列式は要素境界にすべりが生じても、応力パラメータとラグランジュの未定乗数を消去することにより $9 \times 9$ の大きさとなっている。このために、プログラミングの上で取扱いが簡単である。
- 4) 数値計算の結果は一般的に良好で、特に、計算例2.4の(2)の斜面上の基礎の支持力問題に於いては、要素分割を細かくすることによって、W.F.Chenの理論解に一致することが明らかになった。



### 第3章 ハイブリッド型コンプリメンタリーエネルギーの原理にもとづく 離散化モデルの構築

#### 3.1 はじめに

渡辺らのハイブリッドストレス要素は要素境界の辺中央に節点があるために、要素間のすべり破壊の処理が簡単で、極限荷重や崩壊のメカニズムを知るためには良い要素であるが、変位の精度や要素内の応力の精度は十分とはいえなかった。そこで、本章では変位や要素内の応力の精度を改善した要素を新たに提案する<sup>35), 36)</sup>。新しい要素は渡辺らと同様にハイブリッド型コンプリメンタリーエネルギーの原理を用いて導いているが、渡辺らの要素の要素内応力場が座標 $x, y$ の一次式であるのに対し新しい要素の要素内応力場は座標 $x, y$ の二次式、要素境界の変位場は渡辺らの要素が要素境界に垂直方向に一次式、平行な方向に一定としているのに対し、新しい要素では要素境界に垂直方向および平行な方向とも一次式を仮定して導いた。このために、変位の自由度は図-3.1に示すように、辺に垂直方向の変位： $u_i$ 、辺に平行な変位： $v_i$ 、辺の回転角： $\theta_i$ 、辺に平行なひずみ： $\varepsilon_i$ の4個となっており、要素ごとの境界変位の自由度は12個となる。

渡辺はハイブリッドストレス要素を用いて、要素境界で塑性を表す方法と要素内で塑性を表す方法を述べている<sup>37)</sup>。しかし、要素内で塑性を表す方法では完全弾塑性の場合だけを取り扱っている。このために、本研究では新しいハイブリッドストレス要素を用いて、要素内だけでひずみ硬化を考慮した塑性解析についても検討した。

塑性条件式をラグランジュの未定乗数法で変分原理に導入し、塑性を要素内で取り扱う方法自体は多くの研究で用いられた。C.NyssenとP.Beckers<sup>38)</sup>はReissnerの変分原理を用いて弾塑性解析を行うときにラグランジュの未定乗数法を用いている。また、近藤<sup>39)</sup>は骨組み構造の極限解析を行うとき、渡辺<sup>37)</sup>は平面問題をハイブリッドストレス要素を用いて弾塑性解析を行うときにラグランジュの未定乗数法を用いている。渡辺は平面問題を解析するとき、図-3.2に示すように要素内に6点の塑性評価点を設定し、塑性評価点が降伏条件に達すると、それ以後は、その点が塑性条件式を満たすようにラグランジュの未定乗数法を用いた。しかし、渡辺は完全弾塑性体の場合だけを取り扱っている。

本研究で提案した新しいハイブリッドストレス要素を用いて、要素内だけで塑性を考慮して塑性解析を行う場合の弾塑性剛性行列は、渡辺と同じように塑性条件式をラグランジ



ユの未定乗数法で変分原理に導入する方法で導いた。

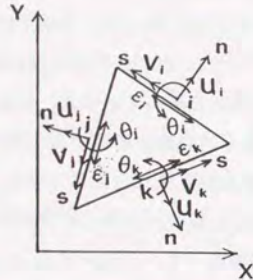


図-3.1 新しいハイブリッドストレス要素



図-3.2 塑性の判定点  
(完全弾塑性体)

### 3.2 弾塑性剛性行列の誘導

#### 3.2.1 要素境界で塑性を表すときの弾塑性剛性行列

弾塑性剛性行列を導くのに応力場、変位場、ラグランジュの未定乗数を仮定する必要がある。渡辺らはハイブリッドストレス要素の剛性方程式を導くのに応力場、変位場として、それぞれ式(3.1)、(3.2)を仮定した(以後、従来要素とする)。すべり面があるときは、著者が2章で示したように、式(3.3)のようにラグランジュの未定乗数を仮定して、塑性条件式を変分原理の中に導入した。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -y & -x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\begin{Bmatrix} U = u_i - \theta_i S \\ V = v_i \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\Gamma = \Gamma_{vi} \quad (3.3)$$

式(3.2)で  $u_i, v_i, \theta_i$  は節点  $i$  の変位である。 $S$  は局所座標系の原点からの距離である。

新しい要素(以後、新要素とする)では応力場、変位場、ラグランジュの未定乗数をそれぞれ式(3.4)、(3.5)、(3.6)のように仮定する。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y & 0 & x & 0 & y^2 & 0 & x^2 & 2xy & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & y & 0 & x^2 & y^2 & 0 & 2xy \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -y & -x & 0 & 0 & -2xy & -y^2 & -x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\begin{Bmatrix} U = u_i - \theta_i S \\ V = v_i - \epsilon_i S \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\Gamma = \Gamma_{vi} - \Gamma_{\epsilon i} S \quad (3.6)$$

式(3.5)で  $u_i, v_i, \theta_i$  は図-3.1に示すように節点  $i$  の変位であるが、 $\epsilon_i$  は  $i$  点の要素境界に平行な方向のひずみを意味している。

従来要素と新要素の大きな違いは、従来要素の応力場が座標  $x, y$  の一次式であるのに対して新要素の応力場は座標  $x, y$  の二次式であること以外に、新要素は個々の要素内で仮定された応力場が隣接する要素の要素境界で、従来要素よりも応力の連続性がより厳密になっている点にある。すなわち、式(3.2)や式(3.5)の  $V$  は2.2節の式(2.11)からわかるように、要素ごとに仮定された応力場を隣接する要素の要素境界で連続にさせるための関数(いわゆる、ラグランジュの未定乗数)であるから、従来要素の  $V$  は式(3.2)のように、要素境界で一定であるので要素境界のせん断応力  $\tau_{ns}$ 。(式(2.4)のように要素内の応力場から求められる)は単に隣接する要素の要素境界で合力  $\int \tau_{ns} ds$  が等しいことを意味している。



これに対し、新要素の $V$ は式(3.5)に示すように一次式を仮定しているので、要素境界のせん断応力 $\tau_{ns}$ は隣接する要素の要素境界で合力 $\int \tau_{ns} ds$ だけでなく $\int \tau_{ns} s ds$ も等しいことを意味している。したがって、新要素は従来要素よりも要素間の応力の連続性がより厳密になっていることがわかる。

仮定した応力場、変位場、ラグランジュの未定乗数を2章の(2.20)に代入し停留条件を求めれば弾塑性剛性方程式が得られるが、従来要素の弾塑性剛性方程式の誘導については、すでに2章に示してある。新要素については応力場、変位場、ラグランジュの未定乗数が式(3.4)、(3.5)、(3.6)に示すように、従来要素とは異なるが、弾塑性剛性方程式の誘導過程は従来要素と同じなので詳細は付録Aで述べている。

### 3. 2. 2 要素内で塑性を表すときの弾塑性剛性行列

降伏条件式 $f$ が要素内の応力のみの関数の時、平面問題では一般に次のように表される。

$$f = Y(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) - \sigma_y \quad (3.7)$$

ここで、 $Y$ は降伏関数、 $\sigma_y$ は降伏応力である。要素内の任意の点が降伏条件を満足し、荷重の増加後も塑性状態を維持しているなら、次の条件式を満たさねばならない。

$$\Delta f = \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} \Delta \sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} \Delta \sigma_y + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} \Delta \tau_{xy} = 0 \quad (3.8)$$

ここで、 $\Delta$ は増分を意味する。式(3.8)を満足させるために、渡辺はラグランジュの未定乗数 $\Delta \Gamma$ を用いて次式のように導入した<sup>37)</sup>。

$$\Delta \Pi_{CH} = \Delta \Pi_{CH} + \int_{V_p} \Delta f \Delta \Gamma dA \quad (3.9)$$

ここで、 $V_p$ は塑性に達した領域である。

また、式(3.8)を満足させる方法として、近藤がはり要素の弾塑性剛性行列を導くときに用いたように、要素内の任意の点のみで塑性条件式を満足させる方法もある<sup>39)</sup>。本研究では平面問題を取り扱っているので、次式のように要素内に降伏を判定するために配置した評価点のみで式(3.8)を満足させる。

$$\Delta \Pi_{CH} = \Delta \Pi_{CH} + \sum_{i=1}^N (\Delta f \Delta \Gamma_i)_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} \quad (3.10)$$

式(3.10)で $N$ は要素内で塑性に達した評価点の数である。

ひずみ硬化を等方硬化とするとき塑性条件式は一般に次のように表せる。

$$f = Y(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) - \sigma_0(\bar{\epsilon}^p) \quad (3.11)$$

ここで、 $\sigma_0$ は降伏曲面の大きさを表すパラメータであり、初期の降伏時には $\sigma_y$ に一致する。 $\bar{\epsilon}^p$ は相当塑性ひずみである。要素内の点が降伏条件を満足し、荷重の増加後も塑性状態を維持しているなら、次の条件式を満たさねばならない。

$$\Delta f = \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} \Delta \sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} \Delta \sigma_y + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} \Delta \tau_{xy} - H' \Delta \bar{\epsilon}^p = 0 \quad (3.12)$$

ここで、 $H'$ はひずみ硬化係数であり、 $\Delta \sigma_0 / \Delta \bar{\epsilon}^p$ である。要素内の降伏した点で式(3.12)を満足させるために、ラグランジュの未定乗数 $\Delta \Gamma$ を用いる。H. Eggers<sup>40)</sup>によれば式(3.9)のラグランジュの未定乗数の物理的意味は相当塑性ひずみ増分 $\Delta \bar{\epsilon}^p$ であるので式(3.12)は次のようになる。

$$\frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} \Delta \sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} \Delta \sigma_y + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} \Delta \tau_{xy} - H' \Delta \Gamma = 0 \quad (3.13)$$



式(3.13)をラグランジュの未定乗数 $\Delta\Gamma$ を用いて、ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理に導入する。この時、 $\Delta\Gamma$ で変分を行った時に式(3.13)に一致させることを考慮に入れば

$$\Delta\Pi_{CH} = \Delta\Pi_{CH} + \int_{V_p} \left( \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} \Delta\sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} \Delta\sigma_y + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} \Delta\tau_{xy} - \frac{H'}{2} \Delta\Gamma \right) \Delta\Gamma dA \quad (3.14)$$

となる。なお、塑性仕事の増分は $dW^p = \alpha_0 d\bar{\epsilon}^p$ であるから、

$\Delta\bar{\epsilon}^p = \Delta\Gamma > 0$  のとき 負荷

$\Delta\bar{\epsilon}^p = \Delta\Gamma < 0$  のとき 除荷

となる。

塑性を考慮に入れた変分原理として、式(3.9)、(3.10)、(3.14)を示したが、式(3.9)は式(3.14)で $H' = 0$ とする場合に一致するので、弾塑性剛性方程式の誘導方法は式(3.10)と(3.14)について説明する。

最初に完全弾塑性体の変分原理である式(3.10)を用いて、弾塑性剛性方程式を導く方法を説明する。式(3.10)の $\Pi_{CH}$ は要素境界で塑性を考慮するときと同じで、従来要素については2章3節で述べている。新要素については、パラメータの数が従来要素より多いだけであるから、2章3節と付録Aを参考にすればよい。式(3.10)の右辺第2項について示せば、式(3.4)と式(3.8)より

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta f \Delta\Gamma_i &= \sum_{i=1}^N \left[ (\Delta\sigma_x \Delta\sigma_y \Delta\tau_{xy}) \left( \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} \right)^T \Delta\Gamma_i \right]_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} \\ &= \{\Delta\beta\}^T [G^*] \{\Delta\Gamma\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

となる。ここで、 $\{\Delta\Gamma\}^T = \{\Delta\Gamma_1 \Delta\Gamma_2 \Delta\Gamma_3 \cdots \Delta\Gamma_N\}$ 、 $[G^*]$ の $j$ 行 $k$ 列を $G^*(j, k)$ とすると、

$$G^*(j, k) = \left[ B(1, j) \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} + B(2, j) \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} + B(3, j) \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} \right]_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} \quad (3.16)$$

である。ここで、 $B(1, j), B(2, j), B(3, j)$ は式(3.4)の右辺の長方形行列の係数である。式(3.16)で要素内の塑性点の数が1個であれば $k=1, i=1$ である。このときの $[G^*]$ の大きさは1行1列である。塑性点の数が $N$ 個の時は $k$ は1から $N$ 、 $i$ は1から $N$ となり $[G^*]$ の大きさは1行 $N$ 列となる。このように、塑性点の1個が $[G^*]$ の1列に対応しているので、 $k=i$ と置くことができる。

式(3.10)の $\Delta\Pi_{CH}$ は2章3節、右辺2項のラグランジュの未定乗数に関する積分は式(3.15)に示してある。したがって、式(3.10)は独立変数である $\{\beta\}, \{u\}, \{\Gamma\}$ の増分記号を省略して示せば、

$$\begin{aligned} \Pi_{CH} &= \{\beta\}^T [H] \{\beta\} / 2 - \{\beta\}^T [G] \{u\} \\ &\quad + \{u\}^T \{F\} + \{\beta\}^T [G^*] \{\Gamma\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

となる。ここで、 $\{\beta\}$ についての停留条件より

$$\{\beta\} = [H]^{-1} \{[G] \{u\} - [G^*] \{\Gamma\}\} \quad (3.18)$$

となる。式(3.18)を式(3.17)に代入し、 $\{u\}$ と $\{\Gamma\}$ について停留条件を求め、さらに $\{\Gamma\}$ を消去すれば次式が得られる。

$$[[k_{11}] - [k_{12}][k_{22}]^{-1}[k_{21}]] \{u\} = \{F\} \quad (3.19)$$

ここで、



$$\left. \begin{aligned} [k_{11}] &= [G]^T [H]^{-1} [G] \\ [k_{12}] &= [G]^T [H]^{-1} [G^*] \\ [k_{22}] &= [G^*]^T [H]^{-1} [G] \\ [k_{22}] &= [G^*]^T [H]^{-1} [G^*] \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

である。式(3.20)が完全弾塑性体の弾塑性剛性方程式である。

ひずみ硬化を考慮する場合は式(3.14)を用いる。式(3.14)は次式のように表すことができる。

$$\Delta \Pi_{ch} = \Delta \Pi_{ch} + \int_{v_p} \left( \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} \Delta \sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} \Delta \sigma_y + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} \Delta \tau_{xy} \right) \Delta \Gamma dA - \int_{v_p} \frac{H'}{2} \Delta \Gamma^2 dA \quad (3.21)$$

式(3.21)の右辺第2項、第3項は塑性が生じた領域での積分となっているが、ここでは図-3.3に示すように、1個の要素を辺中央を結ぶ線で4個の領域に分割し、降伏の判定は領域の重心で行う。また、塑性になった時、 $\Delta \Gamma$ はこの領域内では一定とする。このような仮定のもとで式(3.21)の右辺第2項の積分は、

$$\begin{aligned} & \int_{v_p} \left( \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} \Delta \sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} \Delta \sigma_y + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} \Delta \tau_{xy} \right) \Delta \Gamma dA \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{v_i} \left( \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} \Delta \sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} \Delta \sigma_y + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} \Delta \tau_{xy} \right) \Delta \Gamma_i dA \\ &= (\Delta \beta)^T [G^*] (\Delta \Gamma) \end{aligned} \quad (3.22)$$

となる。ここで、 $[G^*]$ の*j*行*k*列を $G^*(j, k)$ とすると

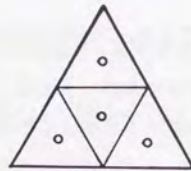


図-3.3 塑性の判定点  
(ひずみ硬化を示す弾塑性体)

$$G^*(j, k) = \int_{v_i} \left( B(1, j) \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} + B(2, j) \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} + B(3, j) \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} \right) dA \quad (3.23)$$

となる。ここでも式(3.16)と同様に、塑性点の1個が $[G^*]$ の1列に対応しているので、 $i=k$ と置ける。 $[G^*]$ の大きさは、塑性点の数を*N*とすると13行*N*列となる。式(3.21)の右辺第3項については、

$$\int_{v_p} \frac{H'}{2} \Delta \Gamma^2 dA = \frac{1}{2} (\Delta \Gamma)^T [G^{**}] (\Delta \Gamma) \quad (3.24)$$

となる。ここで、 $[G^{**}]$ は次式に示す対角項のみ、零でない係数を持つ対角行列である。

$$[G^{**}] = \begin{bmatrix} H'A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & H'A_N \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

この $[G^{**}]$ は行列の大きさが*N*行*N*列である。

式(3.21)の右辺の $\Delta \Pi_{ch}$ は2章3節、第2項、3項はそれぞれ式(3.22)、(3.24)である。したがって、式(3.21)は、独立変数 $\{\beta\}$ 、 $\{u\}$ 、 $\{\Gamma\}$ の増分記号を省略して示せば、

$$\begin{aligned} \Pi \delta n &= \{\beta\}^T [H] \{\beta\} / 2 - \{\beta\}^T [G] \{u\} + \{u\}^T [\bar{F}] \\ &+ \{\beta\}^T [G^*] \{\Gamma\} - \{\Gamma\}^T [G^{**}] \{\Gamma\} / 2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

となる。ここで $\{\beta\}$ 、 $\{u\}$ 、 $\{\lambda\}$ について停留条件を求めれば、

$$\delta \{\beta\} : [H] \{\beta\} - [G] \{u\} + [G^*] \{\Gamma\} = 0 \quad (3.27)$$

$$\delta \{u\} : -[G]^T \{\beta\} + [\bar{F}] = 0 \quad (3.28)$$

$$\delta \{\Gamma\} : [G^*]^T \{\beta\} - [G^{**}] \{\Gamma\} = 0 \quad (3.29)$$



となる。式(3.29)より  $\{\Gamma\}$  を求めると

$$\{\Gamma\} = [G^{**}]^{-1} [G^*]^T \{\beta\} \quad (3.30)$$

となる。式(3.30)を式(3.27)に代入し  $\{\beta\}$  を求めると

$$\{\beta\} = ([H] + [G^*][G^{**}]^{-1}[G^*]^T)^{-1} [G]\{u\} \quad (3.31)$$

となる。式(3.31)を式(3.28)に代入すると弾塑性剛性方程式が得られる。

$$[G]^T ([H] + [G^*][G^{**}]^{-1}[G^*]^T)^{-1} [G]\{u\} = \{\bar{F}\} \quad (3.32)$$

以上、完全弾塑性体の弾塑性剛性方程式として式(3.19)、ひずみ硬化を考慮した弾塑性剛性方程式として式(3.32)を示した。

### 3. 3 数値計算

#### 3. 3. 1 ハイブリッドストレス要素による弾性解の収束特性

渡辺らの提案したハイブリッドストレス要素（以後、従来要素とする）と本研究で新たに提案したハイブリッドストレス要素（以後、新要素とする）の収束特性を見るために、図-3. 4に示す集中荷重を受ける片持はりの解析例を示す。はりの深さ方向の分割数： $N_y$ は1~4、長手方向の分割数： $N_x$ は3~12の範囲である。要素の幾何学的形状は図-3. 5に示すように正方形を二分割するパターン（要素分割aとする）と同図に示すように正方形をクロスに分割するパターン（要素分割bとする）の二種類である。はりの深さと長さの比は1:3である。

図-3. 6には片持はり先端の鉛直変位と変位の自由度の関係を示した。従来要素を用いた解析では要素分割bよりも要素分割aの方が精度は良い。しかし、自由度が増加しても精度は向上していない。これに対し、新要素は自由度が増加するにつれて、いずれの要素分割でも、せん断変形を考慮したはり理論解<sup>41)</sup>に近づいて行き、従来要素よりも精度が良いことがわかる。また、新要素を用いた解析では、要素分割aよりも要素分割bの方が精度が良い。

次に、片持はりの先端に集中モーメントが作用するときの計算例を示す。解析に用いたはりは深さと長さの比が1:3で、要素分割は図-3. 7に示すように3タイプである。はり先端のたわみの収束状況を図-3. 8に示す。従来要素、新要素とも自由度の増加につれて、はり理論解に近づいて行くが、特に新要素は精度が良い。新要素は剛性方程式を解くことにより直接、要素境界に平行なひずみが求められるので、図-3. 7に示すように集中モーメントが作用する場合のひずみ分布の計算例を示す。図-3. 9は集中モーメントが作用したときのはり上面のひずみ分布を示している。この図より、ひずみの分布は要素分割が細くなるにつれて、はり理論解に近づいて行くが、はり先端付近では急激にひずみが減少していることがわかる。これは、角をはさむ、はり表面の力学的境界条件（外力が零）から当然の結果である。

従来要素と新要素を用いたときの要素内の応力 ( $\sigma_x$ ) の精度について検討する。解析は図-3. 7の要素分割eの片持はりが軸力（大きさが12の荷重）、集中モーメント（大きさが100）および、せん断力（大きさが1の荷重）を受ける時の3ケースについて行った。応



力の比較は、はり中央部付近の要素重心での応力を用いている。その要素番号を図-3.10に示してある。そして、解析結果は表-3.1に示した。表-3.1より軸力が作用する場合は、従来要素が棒理論解に一致しているのに対し、従来要素は要素番号1, 4, 5でかなりの誤差を生じている。集中モーメントおよびせん断力が作用する場合も従来要素よりも新要素の方が精度は良いことがわかる。従来要素を用いた時の要素番号1, 4, 5の応力の精度は特に低く、理論値の50%程度である。

定ひずみ要素を用いた解析では、要素の形状が偏平になり細長比が大きくなるにつれて解の精度が悪くなる。ここでは、新要素と従来要素が棒要素のように軸力だけを受けるときの解の精度を図-3.11の要素分割で検討を行った。図-3.12は、はりの深さ： $H$ を1.0とし、はりの長さ： $L$ を変化させた時の棒の伸びを示してある。図-3.13には要素重心点の応力： $\sigma_x$ を示す。これらの図から、従来要素は細長比が大きくなるにつれて、応力も変位も急激に精度が悪くなり、理論値の1/3程度となっている。これに対して、新要素は細長比が大きくなっても、応力も変位も理論値にほぼ一致している。これより、新要素は棒要素として使用可能である。

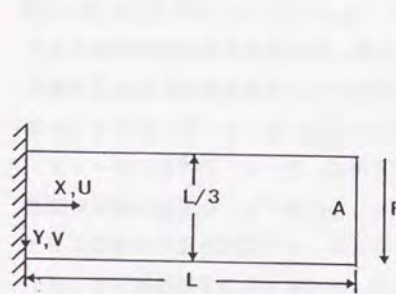


図-3.4 収束特性の比較のための片持はり

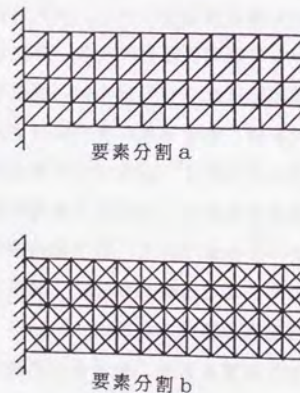


図-3.5 要素分割

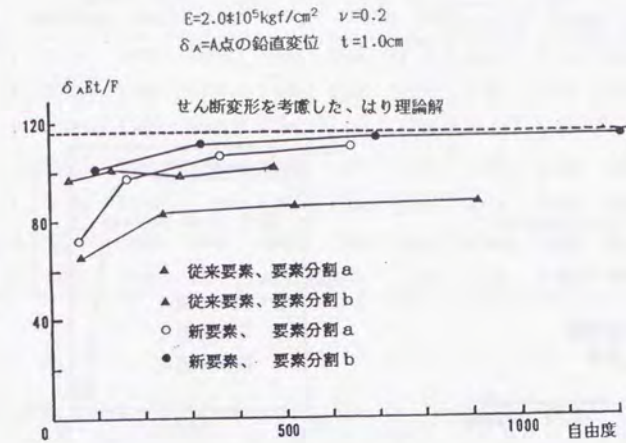


図-3.6 変位の収束特性、従来要素と新要素の比較

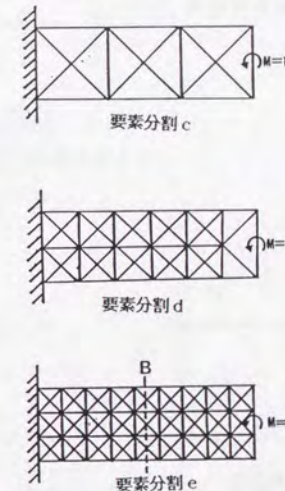


図-3.7 集中モーメントの作用する片持はりによる収束特性の比較



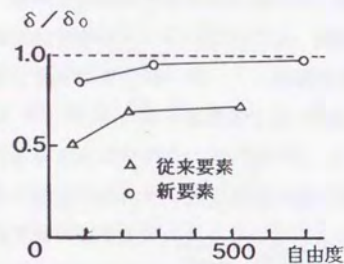


図-3.8 集中モーメントによる  
はり先端のたわみの比較

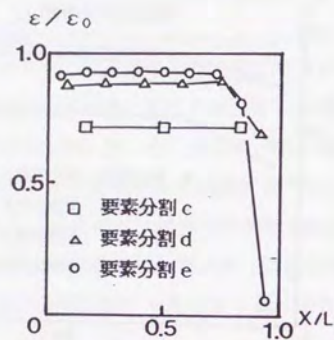


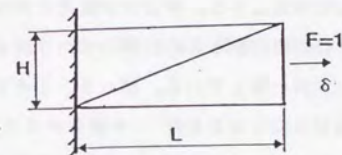
図-3.9 集中モーメントによる  
ひずみの分布 (新要素)



図-3.10 断面B付近の  
要素の番号

表-3.1 要素重心での応力の比較

	軸 力			集中モーメント			せん断力		
	従来要素	新要素	理論	従来要素	新要素	理論	従来要素	新要素	理論
1	0.533	1.000	1.000	1.880	3.815	3.704	0.339	0.687	0.667
2	0.933	1.000	1.000	2.459	2.699	2.778	0.481	0.491	0.537
3	0.933	1.000	1.000	2.462	2.699	2.778	0.404	0.481	0.463
4	0.533	1.000	1.000	0.932	1.473	1.852	0.167	0.265	0.333
5	0.533	1.000	1.000	0.484	1.254	0.926	0.086	0.226	0.167
6	0.933	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.933	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000



$$H=1.0, t=1.0 \\ \nu=0.3, E=1.0$$

図-3.11 三角形平面要素による  
棒のモデル

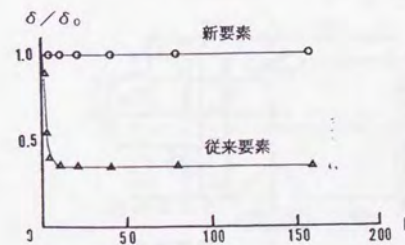


図-3.12 変位の比較

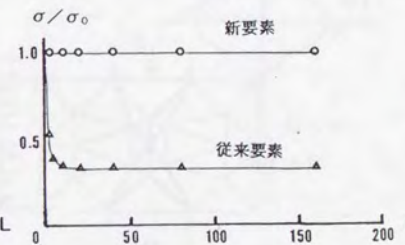


図-3.13 要素内応力の比較



### 3. 3. 2 要素境界で塑性を表すときの弾塑性問題の解析例

#### (1) ポンチの押込み問題

図-3. 14は弾塑性ブロックに剛体ポンチを押込む問題を示している。降伏条件はトレスカの降伏条件を仮定し、平面ひずみ問題として解析した。図-3. 15には荷重-変位曲線を示した。荷重-変位曲線の初期勾配を比較すると、Nayakらの有限要素解<sup>42)</sup>が一番近いのは新要素である。最初に降伏するときの荷重が新要素では高めになっているが、これは要素分割が粗いためと思われる。極限荷重を比較すると従来要素、新要素とも同じ値 ( $P/2C=1.14$ ) であり、すべり線解や剛体バネモデル<sup>3)</sup>による解析値 ( $P/2C=1.13$ ) と大体一致する。有限要素法による極限荷重は、すべり線解よりも少し高めとなっている。

#### (2) Vノッチを有する板の引張解析

新要素を用いて、図-3. 16に示すVノッチを有する薄板の弾塑性解析を行った。解析はミーゼスの降伏条件を仮定し、平面応力問題とする。荷重は供試体の両端に強制変位を与える方法で加えている。図-3. 17は要素分割と最終状態のすべり線を示しているがすべり線の発生域は、剛体バネモデルと大体一致している。図-3. 18は荷重-変位曲線を示しているが、新要素は弾性域で山田らの有限要素解<sup>31)</sup>や剛体バネモデル<sup>3)</sup>とかなり一致している。しかし、崩壊荷重については、剛体バネモデルや新要素による解が塑性解析解に一致しているのに対し、山田らの有限要素解は少し高めになっている。

$$\begin{aligned} E &= 703070 \text{ kgf/cm}^2 \\ \sigma_Y &= 914 \text{ kgf/cm}^2 \\ \nu &= 0.33 \\ c &= \sigma_Y / \sqrt{3} \end{aligned} \quad \begin{aligned} h/b &= 1.7 \\ h &= 14.0 \text{ cm} \end{aligned}$$

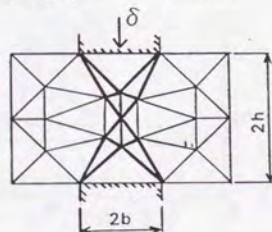


図-3. 14 ポンチの押込み問題

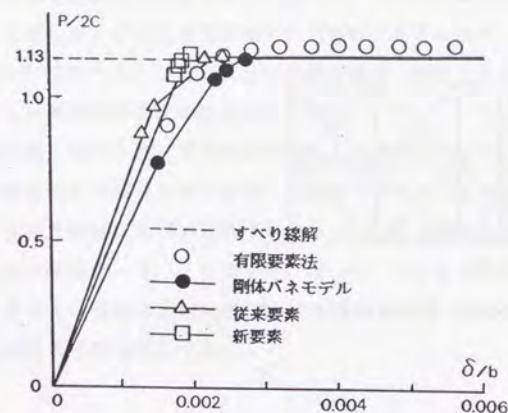
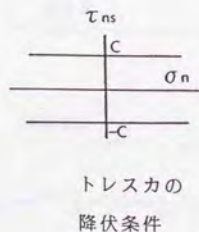


図-3. 15 荷重と変位の関係

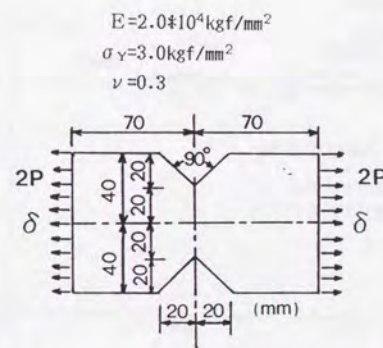
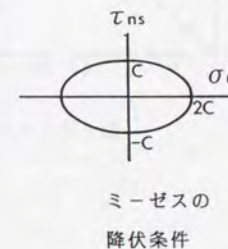


図-3. 16 Vノッチを有する板の引張問題





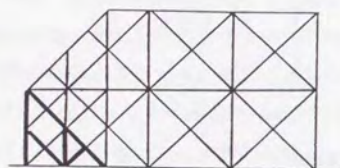


図-3.17 要素分割とすべり線

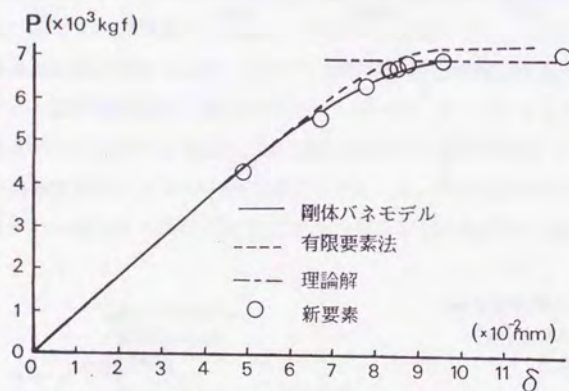


図-3.18 荷重と変位の関係

### 3.3.3 要素内で塑性を表すときの弾塑性問題の解析例

#### (1) Vノッチを有する平板の弾塑性解析

Vノッチを有する平板の弾塑性解析は図-3.16に示してあるように、すでに、要素境界で塑性を表したときの数値計算例として取り上げているが、この問題は多くの解析方法で解かれているので新しい解析方法の検証には良い例題である。今回も同じ問題を解析して提案した要素の精度を確かめることにする。

解析条件は前と同じように平面応力問題とし、降伏条件式はミーゼスの式を仮定する。解析方法は要素境界で塑性を表す方法と要素内で塑性を表す方法の2手法を用いている。なお、弾塑性剛性方程式は式(3.19)を用いている。塑性の評価点は図-3.19に示す点を用いた。要素分割は図-3.19に示す。図-3.20には荷重と変位の関係を示してあるが、新要素による解は極限解析解に大体一致していることがわかる。図-3.19には最高荷重時の塑性状態も示してある。

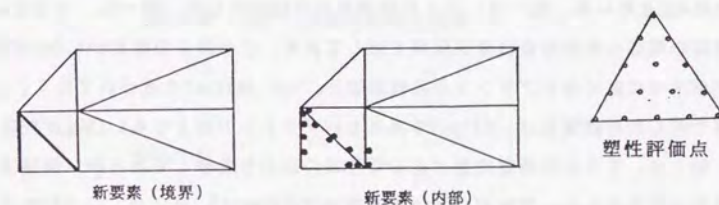


図-3.19 最大荷重時のすべり線と塑性点

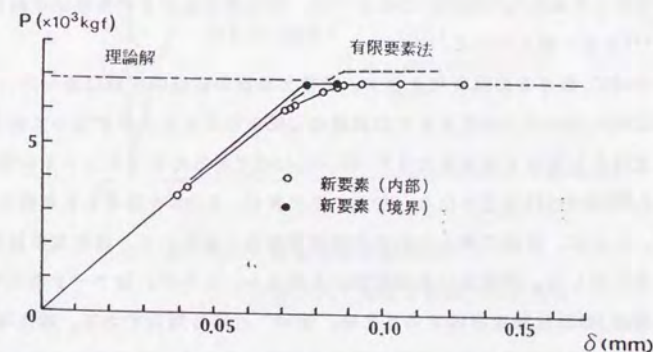


図-3.20 要素境界および要素内で塑性を表したときの荷重と変位の関係



## (2) 半無限地盤上の基礎の支持力

地盤工学への応用例として、半無限地盤上の基礎の支持力問題の解析例を示す。基礎は剛体と仮定し、基礎と地盤の間の摩擦はないものとする。土の降伏関数はDrucker-Pragerの降伏関数を仮定する。すなわち、平面ひずみ問題においては

$$f = 3\alpha \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + (1 - 3\alpha^2) \sqrt{J_2} = k$$

$$J = [(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2 / (1 - 3\alpha^2)$$

$$\alpha = c_1 / \sqrt{9 + 12c_1^2}$$

$$k = 3c_0 / \sqrt{9 + 12c_1^2}$$

$$c_1 = \tan \phi$$

である<sup>43)</sup>。ここで、 $c_0$ は粘着力、 $\phi$ は摩擦角である。この解析では土の自重は無視している。なお、弾塑性剛性方程式としては式(3.19)を用いており、要素の評価点は図-3.2に示すように6点を用いた。図-3.21には要素の分割を示した。図-3.22には摩擦角 $\phi=0^\circ$ の時の荷重と基礎の変位量の関係を示してある。この図より変位が1.0cm付近から曲線の勾配が水平に近くなりプラントルの理論値 $P_0=10.283\text{tonf}$ に近づいて行くことがわかる。計算で得られた荷重は10.165tonfであるからプラントンの解よりも1.1%程度低目となっている。図-3.23には荷重段階ごとの塑性域の広がり方を示してあるが、領域は塑性に達した点を結んで示した。塑性域は最初に基礎端部に発生し、 $P/P_0=0.587$ のときには逆アーチ型の帯状の塑性域となり、荷重が増加するにつれて、帯状の塑性域は基礎底面および外部に向かって拡大して行く。このような、塑性域の拡がりの性状は小林の有限要素法による解<sup>44)</sup>とも一致している。

次に、摩擦角 $\phi=30^\circ$ のときの解析例を示す。荷重と基礎の変位の関係は図-3.24に示してある。変位が3.5cm~6.0cm付近までの曲線の勾配がほとんど水平になっており、このときの荷重を支持力と見なせば支持力は $P=60.355\text{tonf}$ であるのでプラントルの理論解 $P_0=60.279\text{tonf}$ よりも0.13%高目となる。なお、変位量が、6.0cmを越えると荷重も徐々に増加しているが、これは、数値計算上の誤差の蓄積が原因と思われる。塑性域の拡がり状況は図-3.25に示した。塑性域は基礎端部から発生し、これが、逆アーチ型の帯状( $P/P_0=0.202$ の範囲)の塑性域を形成することは、 $\phi=0^\circ$ と同じ傾向である。塑性域の大きさは $P/P_0=0.466$ で解析領域の最も下側の要素まで達しており、摩擦角が大きくなるに

つれて要素分割を細かくし、解析領域も広くすることが必要であると思われる。

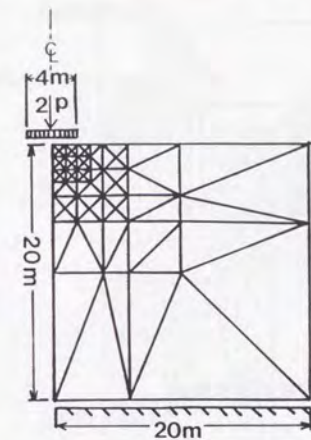


図-3.21 基礎の支持力問題

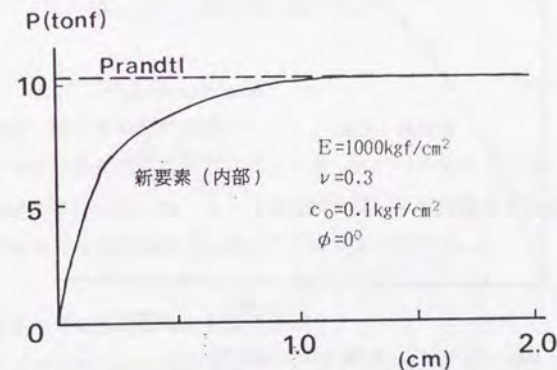


図-3.22 荷重と変位の関係  
(要素内で塑性を評価する解析法)



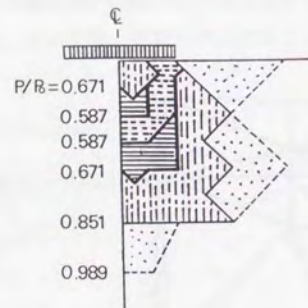


図-3.23 塑性域の拡大状況

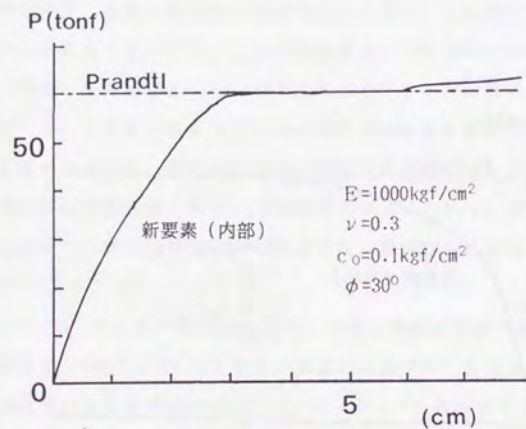


図-3.24 荷重と変位の関係

(要素内で塑性を評価する解析法)

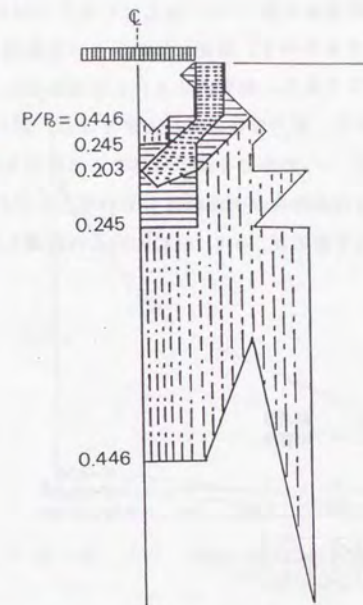


図-3.25 塑性域の拡大状況

### (3) 平板の一軸引張弾塑性解析

ひずみ硬化を考慮した弾塑性剛性方程式として、式(3.32)を示したが、精度確認のため、平板の一軸引張解析を行った。図-3.26には荷重-変位曲線を示したが弾性域および塑性域において新要素は棒理論解に一致していることがわかる。

### (4) 円孔を有する長方形板の弾塑性解析

等方硬化を示す材料の弾塑性解析例を示す。解析例は円孔を有する長方形が引張力を受ける問題で、図-3.27に要素分割を示してある。この板の材料特性は、 $\sigma_y=24.3\text{kg/mm}^2$ ,  $E=7,000\text{kg/mm}^2$ ,  $\nu=0.2$ ,  $H'/E=0.032$ ,  $L=18\text{mm}$ ,  $r=5\text{mm}$ である。ここで示している計算例はP.V.Marcialら<sup>45)</sup>, O.C.Zenkiwiczら<sup>46)</sup>多くの研究者による数値例が示されている。数値計



の分布を示しているが、ほぼHowlandの帯板の解<sup>47)</sup>に一致していることがわかる。図-3.29に荷重を増加させたときの $\sigma_x$ の分布を示す。同図には矢川らの有限要素解析<sup>48)</sup>の結果( $L=20\text{mm}$ ,その他の条件は同じ)も示してある。荷重の小さいときは両者とも大体一致している。しかし、荷重が増加するにつれて、応力分布の差は大きくなる。図-3.29で荷重段階④の時は $P=114.9\text{kgf}$ であるが、 $\sigma_x$ の合力を図より求めると矢川らの結果は104.2kgf,新要素は115.4kgfとなり新要素は力の釣合が大体成立していることがわかる。

塑性域の状況を図-3.30に示してあるが、O.C.Zenkiwiczらの結果と同様な傾向を示した。

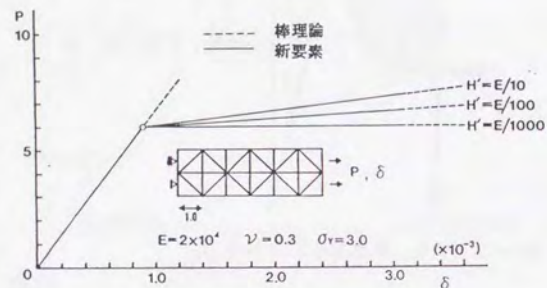


図-3.26 ひずみ硬化材料棒の弾塑性解析

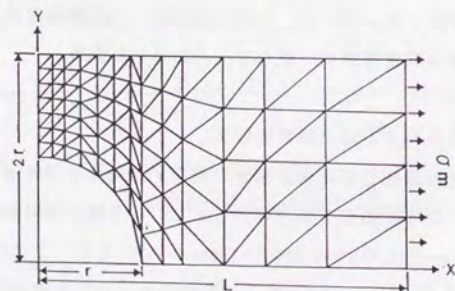


図-3.27 円孔を有する長方形板の弾塑性解析

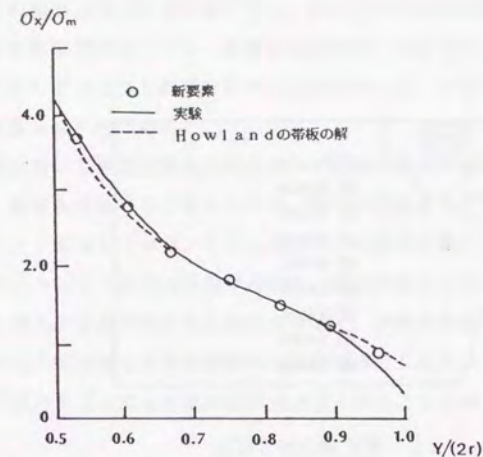


図-3.28 Y軸上の $\sigma_x$ の分布(弾性)

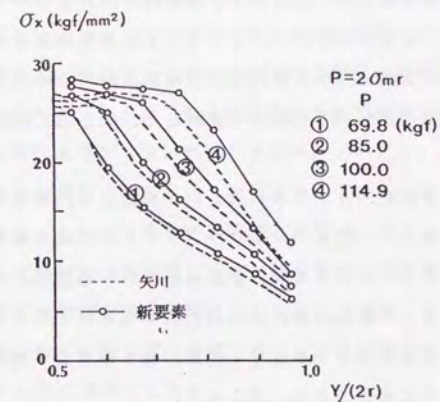


図-3.29 Y軸上の $\sigma_x$ の分布の変化(弾塑性)



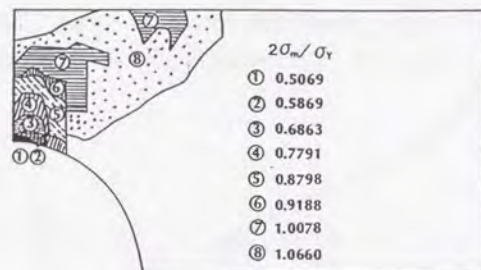


図-3.30 塑性域の拡大状況

### 3.4 まとめ

渡辺らによって提案された平面問題解析用のハイブリッドストレス要素は極限解析用の要素としては精度の高い要素であるが、変位および要素内の応力については精度が低下する。3章では渡辺らによって提案されたハイブリッドストレス要素を改善する目的で、新しい要素を提案した。新しい要素を用いた弾性解析解は要素内部の応力の精度も高いので、要素内部で塑性を考慮する方法についても新たに検討した。得られた結論を述べるとつぎのようになる。

- 1) 渡辺らによって提案されたハイブリッドストレス要素より、さらに変位および要素内応力の精度が高い新しい二次元ハイブリッドストレス要素を提案した。新しい要素は要素内の応力パラメータが12個、要素境界当たりの変位パラメータが4個で、その特徴は、自由度として要素境界の回転角と要素境界に平行なひずみを含んでいる。このために、集中モーメントを受ける構造、はり要素と平面要素でモデル化した構造物の解析にとくに有効であると思われる。
- 2) 数値計算例として、片持はりに軸力、せん断力および集中モーメントが作用する問

題を示した。数値計算結果によれば、新しい要素は変位、要素内の応力および要素境界のひずみについて良好な精度を示した。

- 3) 新しい要素の極限解析への適用例として、ボンチの押込み問題とVノッチを有する薄板の引張解析の例を示したが、極限荷重は渡辺・川井のハイブリッドストレス要素や剛体バネモデルと同じ結果を示すことがわかった。すなわち、最大耐力においては両者の差はないのである。
- 4) 新しい要素を用いた弾塑性剛性方程式として要素内部だけで塑性を表す方法の検討を行った。塑性を考慮する方法としては、塑性条件式をラグランジェの未定乗数法でハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理に導入する方法を用いた。このとき、ラグランジェの未定乗数は要素内の塑性評価点ごとに離散的に仮定した。この方法で得られた弾塑性剛性方程式を用いて、半無限地盤上の基礎の支持力問題、円孔を有する長方形板の引張強度解析の問題に適用したところ、荷重が増加する領域から最大耐力まで良好な数値解析精度が得られることが検証された。

本章で示した平面問題解析用のハイブリッドストレス要素は要素境界だけで塑性を表すことも、また、要素内だけで塑性を表すことも可能である。この二種類の解析方法の内、どの解析方法が有利かは一概には云えない。すなわち、第1章で述べたように破壊が少数のひびわれやすべり線によって破壊する場合は要素境界で破壊を表す方法も用いればよい、また、多数のひびわれやすべり線によって破壊する場合は平均的に扱い、要素内で塑性を表す方法を用いれば良い。しかし、一般的にはどの方法を用いるかは経験が必要である。

多結晶体、構造物と土、断層やジョイントを有する岩盤の有限解析は通常、平面要素とジョイント要素でモデル化される。このような問題を新要素を用いて解く場合は、要素境界と要素内で同時に塑性を考慮しなければならない。このとき、ジョイント要素に対応する部分が新要素では要素境界に対応する。新要素はこのような問題に対しても適用可能と思われるが、この点については今後の研究課題としたい。また、著者は要素内で非線形弾性応力-ひずみ関係式を仮定し要素境界ですべり破壊や引張破壊を考慮した鉄筋コンクリート構造物の破壊解析の例題を参考文献83)に示してある。これらの解析結果は、要素内で非線形弾性応力-ひずみ関係式を考慮することの重要性を示しており、この解析方法を発展させることも今後の課題としたい。



Handwritten text in a cursive script, likely a letter or a page from a manuscript. The text is written in dark ink on aged, slightly yellowed paper. The handwriting is fluid and characteristic of the 17th or 18th century. The text is arranged in several paragraphs, with some lines indented. The overall appearance is that of a historical document.

Handwritten text in a cursive script, likely a letter or a page from a manuscript. The text is written in dark ink on aged, slightly yellowed paper. The handwriting is fluid and characteristic of the 17th or 18th century. The text is arranged in several paragraphs, with some lines indented. The overall appearance is that of a historical document.



## 4.1 はじめに

コンクリートが引張破壊を起こすときは、ひびわれ先端に破壊過程領域<sup>10)</sup>ができ、この領域では応力が引張強度に達した後でひずみの増加に伴って応力の減少が起こるといわれている。このような引張破壊によるひずみ軟化を有限要素解析に取り入れる方法として、非回復性のひずみを一本の仮想ひずみで表す方法、すなわち、仮想ひびわれモデル<sup>17)</sup>がある。仮想ひびわれモデルでは図-4.1に示すようなひびわれ面に垂直な応力 $\sigma_n$ とひびわれ幅 $w$ の引張軟化の構成式を用いている。一般によく用いられているのが図に示してある二直線モデルである。引張破壊によるひずみ軟化を考慮して構造物の耐力を求めるためには、有限要素法または境界要素法を用いてひびわれ面で引張軟化構成式を満たすように解を求める必要がある。このとき、ひびわれ面に棒要素を用いる方法<sup>18)</sup>とひびわれ面の開口変位と結合力間の撓性方程式にもとづく応力法<sup>19)</sup>がある。棒要素を用いる方法は要素境界に長さが零の要素を入れるために変位の自由度が増加し、全体剛性行列の大きさの増加する。このため、あらかじめ、ひびわれの発生が予想される要素境界のみに棒要素を配置する方法が用いられる。撓性方程式を用いる方法も同様に、あらかじめ、ひびわれの発生が予想できる場合のみ有効である。しかし、任意の荷重や任意の形状の鉄筋コンクリート構造に適用するときはひびわれの発生を予想することは困難である。このために、本章では、図-4.2に示すようにひびわれの発生が要素境界のみに限定されているが、どの要素境界でも任意にひびわれの導入が可能な計算手法を、ハイブリッド型離散化モデルの延長として提案する<sup>49), 50)</sup>。

平面問題解析用のハイブリッドストレス要素を用いて、塑性条件式が要素境界に垂直な応力とせん断応力の関数のときの弾塑性剛性方程式は2章に示した。仮想ひびわれモデルを用いるときのひずみ軟化とは、降伏曲面がひびわれ幅の増加に伴って縮小すると考えることができる。したがって、塑性条件式の中に応力のみならず、ひびわれ幅も入ってくる。このために、塑性条件式をハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理にラグランジュの未定乗数法を用いて導入するときに、ひびわれ幅とラグランジュの未定乗数の関係を明らかにする必要がある。そこで、本章では、最初に、ハイブリッド型 Hellinger-Reissnerの変分原理を用いてひびわれ幅とラグランジュの未定乗数との関係を明らかにし



た。つぎに、この関係式を用いて、ひずみ軟化を考慮した弾塑性剛性方程式を導く方法を示した。

数値計算例としては、六郷らのCT試験体の実験<sup>51)</sup>、Arrea & Ingraffea<sup>20)</sup>による、切欠きを有するはりのせん断試験をシミュレートし、本章で示している解析手法の精度の検討を行った。

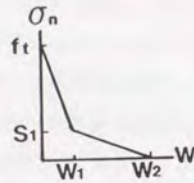


図-4.1 引張軟化曲線 (二直線モデル)

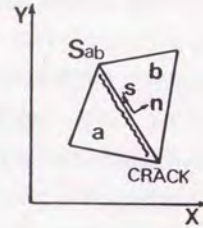


図-4.2 局所座標系

#### 4.2 ひずみ軟化を考慮した変分原理

ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理において要素境界積分を、要素境界に設定された局所座標系  $n-s$  を用いて変換し、1個の要素について示せば2章3節で示したように次式のように表される。

$$-\Pi_{CH} = \iint_{V_n} B(\sigma_{ij}) dx dy - \int_{\partial V_n} (U\sigma_n + V\tau_{ns}) dS + \int_{S_e} (U\bar{\sigma}_n + V\bar{\tau}_{ns}) dS \quad (4.1)$$

CT試験体の引張破壊においては、破壊面に作用するせん断応力の大きさは零であり、

引張応力だけが作用する。このために、引張破壊後のひびわれ面では、引張応力は引張軟化構成式を満たし、せん断応力はその大きさが零であればよい。しかし、ひびわれ面に引張応力とせん断応力が作用しているときは、ひびわれ面のずれによりせん断応力が伝達されるので、この点を考慮に入れて定式化しなければならない。このために、ひびわれ面における条件式を引張応力については式(4.2)、せん断応力については式(4.3)を仮定する。

$$\Delta\sigma_n - C_n \Delta W = 0 \quad (4.2)$$

$$\Delta\tau_{ns} - C_{ns} \Delta Z = 0 \quad (4.3)$$

ここで、 $C_n$ は引張軟化曲線の勾配(負)、 $\Delta W$ はひびわれ幅、 $C_{ns}$ はせん断剛性、 $\Delta Z$ はずれである。せん断破壊については、図-4.3に示すように初期降伏面を仮定し、降伏後はZ. Mrozら<sup>52)</sup>と同様に、ずれの増加と共に降伏面が縮小すると仮定する。すなわち、降伏後の条件式はつぎのようになる。

$$\Delta\tau_{ns} \pm C_1 \Delta\sigma_n - C_s \Delta Z = 0 \quad (4.4)$$

ここで、 $C_1$ は摩擦係数、 $C_s$ はせん断軟化曲線の勾配(負)である。

式(4.2)、(4.3)、(4.4)を式(4.1)の変分原理に導入する方法について説明する。ラグランジュの未定乗数を $\Delta\lambda, \Delta\mu, \Delta\nu$ とし、式(4.2)、(4.3)、(4.4)をラグランジュの未定乗数法で式(4.1)に導入すると弾塑性剛性方程式を求めるための変分原理はつぎのようになる。

$$-\Delta\Pi_{CH}^* = -\Delta\Pi_{CH} + \int_{S_e} ((\Delta\sigma_n - C_n \Delta W) \Delta\lambda + (\Delta\tau_{ns} - C_{ns} \Delta Z) \Delta\mu) dS + \int_{S_i} (\Delta\tau_{ns} \pm C_1 \Delta\sigma_n - C_s \Delta Z) \Delta\nu dS \quad (4.5)$$

ここで $S_e$ は引張破壊面、 $S_i$ はすべり破壊面を意味する。式(4.5)のラグランジュの未定乗数の物理的な意味は $S_e, S_i$ 上での停留条件式より求めることができる。すなわち、式(2.15)、(2.16)を参考にすれば、

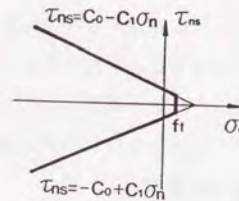


図-4.3 破壊曲面



$$\Delta W = \Delta \lambda, \Delta Z = \Delta \mu \quad S_c \text{ 上において} \quad (4.6)$$

$$\Delta W = \pm C_1 \Delta \nu, \Delta Z = \Delta \nu \quad S_i \text{ 上において} \quad (4.7)$$

となる。したがって、弾塑性剛性方程式を求めるための変分原理はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} -\Delta \Pi_{\text{ext}} = & -\Delta \Pi_{\text{ext}} + \int_{S_c} (\Delta \lambda \Delta \sigma_n + \Delta \mu \Delta \tau_{ns}) dS + \int_{S_i} \Delta \nu (\Delta \tau_{ns} \pm C_1 \Delta \sigma_n) dS \\ & - \frac{1}{2} \int_{S_c} (\Delta \lambda^2 C_n + \Delta \mu^2 C_{ns}) dS - \frac{1}{2} \int_{S_i} \Delta \nu^2 C_s dS \end{aligned} \quad (4.8)$$

#### 4.3 ひずみ軟化を考慮した弾塑性剛性行列の誘導

平面要素の弾塑性剛性行列を導くためには応力場、変位場、ラグランジュの未定乗数を仮定する必要がある。ここでは、3章で示したように、応力場についてはパラメータが12個、要素境界の変位 $U$ と $V$ は式(4.9)のように、それぞれ線形の分布を仮定する。なお、ここから後の式は増分記号を省略して示す。

$$U = u_i - \theta_i S, \quad V = v_i - \varepsilon_i S \quad (4.9)$$

ここで、 $u_i$ と $v_i$ は要素境界の辺中央の節点 $i$ の変位、 $\theta_i$ は要素境界の回転角、 $\varepsilon_i$ は要素境界に平行な方向のひずみ、 $S$ は辺中央からの距離である。ラグランジュの未定乗数は変位と同様に線形の分布を仮定する。これを、式(4.10)に示す。

$$\lambda = \lambda_{u1} - \lambda_{\theta1} S, \quad \mu = \mu_{v1} - \mu_{\varepsilon1} S, \quad \nu = \nu_{v1} - \nu_{\varepsilon1} S \quad (4.10)$$

応力場とひずみ・応力関係式については、2章で示したように、それぞれ次のように仮定する。

$$\{\sigma\} = [B]\{\beta\} \quad (4.11)$$

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} \quad (4.12)$$

式(4.11)と式(4.12)を用いれば式(4.1)の第1項の積分は次のようになる。

$$\iint_{v_n} B(\sigma_{ij}) dx dy = \{\beta\}^T [H] \{\beta\} / 2 \quad (4.13)$$

ここで、 $[H] = \int_{v_n} [B]^T [C] [B] dx dy$ 、 $\{\beta\}$ は式(4.4)の応力パラメータが12の応力場を用いるので $\{\beta\} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{12}\}^T$ である。式(4.1)の第2項の積分は2章で示したように、全体座標系と局所座標系の応力の変換式および式(4.11)を用いれば次のようになる。

$$\int_{v_n} (U \sigma_n + V \tau_{ns}) dS = \{\beta\}^T [G] \{u\} \quad (4.14)$$

式(4.1)の荷重項は $\{\bar{F}\}$ を荷重ベクトルとすればつぎのようになる。

$$\int_{S_0} (U \bar{\sigma}_n + V \bar{\tau}_{ns}) dS = \{u\}^T \{\bar{F}\} \quad (4.15)$$

式(4.8)の右辺第2項については式(4.10)、(4.11)および全体座標系と局所座標系の応力の変換式を用いて

$$\int_{S_c} (\lambda \sigma_n + \mu \tau_{ns}) dS = \{\beta\}^T [G_1] \{\Gamma_s\} \quad (4.16)$$

となる。図-4.4のように、要素境界に2箇所の引張破壊が生じている場合を示せば、 $\{\Gamma_s\} = \{\lambda_{u1}, \mu_{v1}, \lambda_{\theta1}, \mu_{\varepsilon1}, \lambda_{u2}, \mu_{v2}, \lambda_{\theta2}, \mu_{\varepsilon2}\}$ となる。式(4.8)の右辺第3項は、式(4.10)、(4.11)および応力の変換式を用いて

$$\int_{S_i} (\tau_{ns} \pm C_1 \sigma_n) \nu dS = \{\beta\}^T [G_2] \{\Gamma_s\} \quad (4.17)$$

となる。図-4.4のように、要素境界に1箇所のせん断破壊が生じている場合を示せば



$\{\Gamma_b\} = \{\nu_{v3}, \nu_{v3}\}$  となる。式(4.8)の右辺第4項については、式(4.10)より次のように求められる。

$$\frac{1}{2} \int_{S_c} (\lambda^2 C_n + \mu^2 C_{ns}) dS = \frac{1}{2} \{\Gamma_a\}^T [G_3] \{\Gamma_a\} \quad (4.18)$$

ここで、図-4.4の場合について示すと、

$[G_3]$  の  $i$  行  $j$  列を  $G_{ij}$  と定義すれば、

$$[G_3] = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & G_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{88} & 0 \end{bmatrix}$$

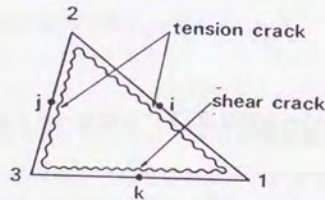


図-4.4 ハイブリッドストレス要素  
による破壊の表現

となる。ここで

$$\begin{aligned} G_{11} &= C_n l_{12}, & G_{22} &= C_n l_{12}, & G_{33} &= C_n l_{12}^3/12, & G_{44} &= C_n l_{12}^3/12, \\ G_{55} &= C_n l_{23}, & G_{66} &= C_n l_{23}, & G_{77} &= C_n l_{23}^3/12, & G_{88} &= C_n l_{23}^3/12 \end{aligned}$$

$l_{12}, l_{23}$  は図-4.4に示す三角形の節点1と2および節点2と3の辺の長さである。式(4.8)の右辺第5項についても、式(4.10)を用いて次のように表される。

$$\frac{1}{2} \int_{S_i} \nu^2 C_s dS = \frac{1}{2} \{\Gamma_b\}^T [G_4] \{\Gamma_b\} \quad (4.19)$$

ここで、図-4.4の場合について示すと、 $[G_4]$  の  $i$  行  $j$  列を  $G_{ij}$  とすると、

$$[G_4] = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix}$$

ここで、 $G_{11} = C_s l_{31}, G_{22} = C_s l_{31}^3/12$  である。

計算に便利ように、式(4.16)と式(4.17)を次のようにまとめる。

$$\{\beta\}^T [G_1] \{\Gamma_a\} + \{\beta\}^T [G_2] \{\Gamma_b\} = \{\beta\}^T [G^*] \{\Gamma\} \quad (4.20)$$

ここで、

$[G^*] = [[G_1] [G_2]]$ ,  $\{\Gamma\}^T = (\{\Gamma_a\} \{\Gamma_b\})$  である。

式(4.18)と式(4.19)も同様にまとめと

$$\{\Gamma_a\}^T [G_3] \{\Gamma_a\} / 2 + \{\Gamma_b\}^T [G_4] \{\Gamma_b\} / 2 = \{\Gamma\}^T [G^{**}] \{\Gamma\} / 2 \quad (4.21)$$

ここで、 $[G^{**}]$  は

$$[G^{**}] = \begin{bmatrix} [G_3] & [0] \\ [0] & [G_4] \end{bmatrix}$$

である。したがって、式(4.8)に式(4.13), (4.14), (4.15), (4.20), (4.21)を代入すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} -\Pi_{\delta H} &= \{\beta\}^T [H] \{\beta\} / 2 - \{\beta\}^T [G] \{u\} + \{u\}^T \{\bar{F}\} \\ &\quad + \{\beta\}^T [G^*] \{\Gamma\} - \{\Gamma\}^T [G^{**}] \{\Gamma\} / 2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

式(4.22)で $\{\beta\}, \{\Gamma\}, \{u\}$  についての停留条件をもとめれば次式が得られる。

$$\{\Gamma\} = [G^{**}]^{-1} [G^*]^T \{\beta\} \quad (4.23)$$

$$\{\beta\} = ([H] + [G^*] [G^{**}]^{-1} [G^*]^T)^{-1} [G] \{u\} \quad (4.24)$$

$$[K_{sp}] \{u\} = \{\bar{F}\} \quad (4.25)$$

$$[K_{sp}] = [G]^T ([H] + [G^*] [G^{**}]^{-1} [G^*])^{-1} [G] \quad (4.26)$$



ここで  $[K_{ss}]$  はひずみ軟化を考慮した弾塑性剛性行列である。

#### 4. 4 複合モード破壊の条件式と引張軟化<sup>53)</sup>

##### 4. 4. 1 セン断破壊および引張破壊の条件式

せん断破壊や引張破壊の判定は要素境界の応力  $\sigma_n, \tau_{ns}$  を用いる。そのとき、せん断破壊に対しては図-4. 3のようにモール・クーロンの式を仮定する。引張破壊については要素境界の応力  $\sigma_n$  が引張強度  $f_t$  に達したときを引張破壊とする。せん断破壊に対しては式(4.27)または式(4.28)を用いた。

$$\tau_{ns} = 0.14f_c' - 1.37\sigma_n \quad (N/mm^2) \quad Lim^{54)} \quad (4.27)$$

$$\tau_{ns} = 0.25f_c' - \tan 37^\circ \sigma_n \quad (N/mm^2) \quad (4.28)$$

ここで、 $f_c'$  はコンクリートの一軸圧縮強度である。要素境界がせん断破壊を起こした後の条件式は式(4.4)を用いる。

##### 4. 4. 2 複合モード破壊での引張軟化

複合モード破壊での引張軟化の実験的研究は、純引張応力のみでの引張軟化に関する研究よりも非常に少ない。ここでは、Hassanzadeh<sup>55)</sup>によって行なわれた実験をもとに、せん断応力を考慮に入れた引張軟化解析法を説明する。Hassanzadehが実験で用いた供試体は70mm\*70mmの正方形の断面でその高さは60mmである(図-4. 5)。供試体の高さの1/2の位置に切欠きがあり、破壊断面は40mm\*40mmとなっている。

本研究ではHassanzadehの行った実験の内、ひびわれ幅:Wとずれ:Zの比( $\tan \alpha$ )が一定の条件で行われた実験結果を参考にする。図-4. 6は引張力で破壊面の応力が $f_t$ に達した後、 $\tan \alpha = W/Z$ が一定になるようにせん断力を加えて破壊させたときの、ひびわれ面に垂直な応力とひびわれ幅の関係を示した実験結果である。この図からは、垂直応力・ひびわれ幅関係におよぼせん断応力の影響は、破壊の初期(垂直応力が約1.5MPa付近まで)では影響が小さく、その後は $\alpha$ が小さくなるにつれて、せん断応力の影響により、引張応力の低下が急になることがわかる。

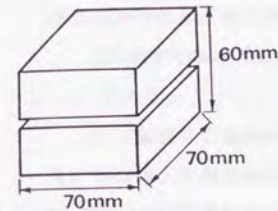


図-4. 5 供試体

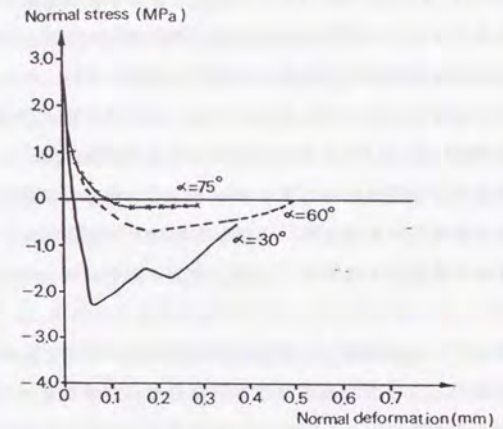


図-4. 6 複合応力のもとでの垂直応力とひびわれ幅の関係

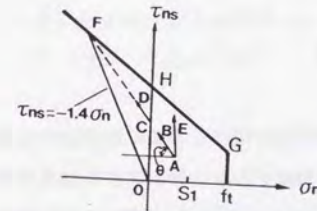


図-4. 7 引張軟化域での応力増分



本研究では引張軟化曲線として図-4. 1に示すような二直線モデルを用いているために、せん断応力の影響により引張応力が急に低下する現象は二直線モデルの第二直線部分（引張応力が $S_1$ から零の間）で考慮する。

解析では引張応力が $f_t$ から $S_1$ の間ではひびわれ面での条件式として式(4.2), (4.3)を用い、 $C_n$ =二直線モデルの第一直線の勾配、 $C_{ns}=G$ とする。 $G$ はせん断弾性係数である。引張応力が $S_1$ から零では、 $C_n$ =二直線モデルの第二直線の勾配、 $C_{ns}=G$ とする。しかし、図-4. 7に示すようにせん断応力と垂直応力の比が $AB$ よりも大きい $AE$ の場合は、せん断応力の影響による垂直応力の低下を考慮する。すなわち、応力増分を $AE$ から $AB$ の方向に変えることにする。なお、 $AB$ は直線 $AF$ に重なっており、 $F$ 点はせん断破壊の条件式（式(4.27)または式(4.28)）とひびわれ幅一定経路でのせん断試験<sup>56)</sup>から得られる直線 $OF$ の交点として求められる。応力増分の方向を $AE$ から $AB$ の方向に変えて引張応力を低下させた理由は、引張応力の低下が実験的に十分に明らかにされていないために、このような仮定を用いた。なお、用いる条件式は、式(4.4)で $C_1=\tan\theta$ とする。

#### 4. 4. 3 引張破壊により完全にひびわれが開いた時のせん断応力の伝達

完全に開口したひびわれ面にせん断応力が作用すると、ひびわれ面にはせん断応力と同時に圧縮応力が作用する。Paulayらのひびわれ幅一定経路でのせん断試験<sup>56)</sup>によれば、せん断応力と圧縮応力の関係は、図-4. 7の直線 $OF$ で表される。同図の $GF$ はせん断破壊の条件式であるが、ひびわれ面でのせん断応力と圧縮応力の関係は常に直線 $GF$ を越えることはない。すなわち、ひびわれ面ですべりが生じているときの応力は常に直線 $OF$ と $HF$ に挟まれる領域の値をとる。このために、本研究では、図-4. 7の $C$ 点のようにひびわれ面上でせん断応力が作用しているときは、 $CD$ の方向に応力が増加すると仮定する。このときに用いる条件式は、式(4.4)で $C_1=\tan\theta$ とする。

#### 4. 5 数値解析法

部材の耐力やひびわれの進展を知るためには、増分法が用いられる。増分法では各増分段階で、ひびわれの生じている要素境界では軟化則を満たすように解を求めなければならない。このために、増分法の一つである山田の方法<sup>57)</sup>（ $R_{min}$ ともいう）を用いて軟化則を満たす方法を示す。

- step1 要素境界の破壊の状況に応じて $[K_e]$ や $[K_{ep}]$ を要素ごとに計算し全体剛性行列 $[K]$ をつくる。
- step2 試験荷重を $\Delta L_0$ とし、 $[K] \{\Delta u_i\} = \{\Delta L_0\}$ を解く。
- step3  $\Delta u_i$ を用いて要素境界の平均応力 $\Delta \sigma_{ni}$ 、 $\Delta \tau_{nsi}$ やひびわれ幅 $\Delta W_i$ を求める（ $\Delta \sigma_{ni}$ 、 $\Delta \tau_{nsi}$ は節点力を要素境界の長さで割った値に等しい）。
- step4 増分段階  $i-1$  で引張強度に達した要素境界のひびわれ幅が $\Delta W_i > 0$ であるかを確認する。もし  $\Delta W_i < 0$  なら、試験荷重 $\Delta L_0$ を逆向きに作用させる。この時は、新たに剛性方程式を解く必要はない。すなわち、 $\Delta \sigma_{ni}$ 、 $\Delta \tau_{nsi}$ 、 $\Delta W_i$ の符号を逆にすればよい。（この操作が必要な理由は、図-4. 8からわかるように、引張強度に達した要素境界のひびわれ幅が $\Delta W_i > 0$ の時は引張軟化則を満たしているが（ $AB$ ）、 $\Delta W_i < 0$ なら $AC$ で示されるように引張軟化則を満たしていない。このために、引張軟化則を満たすためには試験荷重 $\Delta L_0$ を逆向きに作用させる。）
- step5 応力増分 $\Delta \sigma_{ni}$ 、 $\Delta \tau_{nsi}$ は、その要素境界が破壊していなければ図-4. 9の $P_1Q_1$ や $P_2Q_2$ で表される。要素境界がせん断破壊を起こしているなら応力増分は図-4. 9の $P_3Q_3$ で表される。要素境界が引張破壊の状態にあるなら応力増分は図-4. 10の $P_1Q_1$ や $P_2Q_2$ の鉛直成分で表される。そこで、応力増分を何倍すれば破壊曲面に達するか（例えば図-4. 9で $P_1R_1/P_1Q_1$ ）、引張軟化をおこしている境界面では応力増分を何倍すれば軟化の勾配が変わるか（例えば図-4. 10で $P_1R_1/P_1Q_1$ ）を各要素境界面について比を求める。そして、これらの内の最小の比を $R_{min}$ とする。
- step6 増分段階  $i$  での全応力、全変位、全ひびわれ幅はつぎのように求められる。

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ni-1} + R_{min} \Delta \sigma_{ni}, \quad \tau_{nsi} = \tau_{nsi-1} + R_{min} \Delta \tau_{nsi}$$

$$u_i = u_{i-1} + R_{min} \Delta u_i, \quad W_i = W_{i-1} + R_{min} \Delta W_i$$

すなわち、ひびわれの進展を考慮した解析を行うためには、step1~step6をくりかえし計算すればよい。ここに示した計算stepで完全弾塑性体の計算stepと大きく異なる点はstep4である。つまり、引張軟化則を満たすためには、引張強度に達した要素境界は次の



- 68 -

## 4. 6. 1 CT試験体のひずみ軟化解析

要素の大きさが解に与える影響を調べるために、図-4.12と図-4.13に示すようにリガメント上の要素分割を変えて解析した。

ひびわれ面上で引張軟化構成式を満足しているか否かのチェックを各荷重段階ごとにおこなったが、全て、十分満足していることがわかった。なお、このような例題として、図-4.16(a)にLarge試験体で要素分割が粗いときの計算例で、CODが0.7240mmのときの各ひびわれ面上での応力とひびわれ幅の関係を示してある。この図からひびわれ面上で引張軟化構成式を満たしていることがわかる。図-4.16(b)にはLarge試験体で要素分割が粗いときの計算例で、最初にひびわれが生じた点(C点に近い要素)の荷重段階ごとの応力とひびわれ幅の関係を示しているが、いずれも引張軟化構成式を厳密に満足していることがわかる。同様な例をSmall試験体で要素分割が細かい場合を示したのが、図-4.16(c), (d)である。Small試験体でもひびわれ面上で引張軟化構成式を満たしていることがわかる。

- 69 -



どのように変化するかを示した。図-4.17の(a)はLarge試験体の応力分布の変化を示している。同図で、①は初めてひびわれが発生したときの応力分布を示している。応力は切欠き先端で引張強度に一致し内部に行くにつれて、応力は急激に低下している。③は最大荷重時の応力分布を示している。最大荷重時には、切欠き先端の応力は低下し引張軟化曲線の第二勾配の領域に達し、最大応力は内部に進行している。④から後は荷重が低下しひびわれが進行するときの応力分布を示している。ひびわれが進行するにつれて、切欠き付近は応力が低下し最大応力は内部に進行することがわかる。

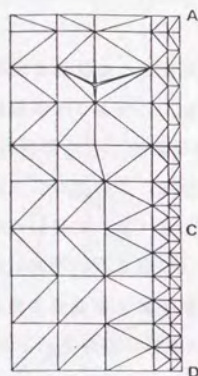


図-4.12 CT試験体の要素分割  
(粗分割)

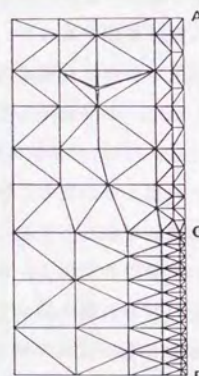


図-4.13 CT試験体の要素分割  
(細分割)

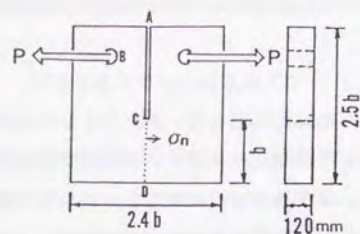


図-4.11 CT試験体

表-4.1 引張軟化曲線のデータ

	Large	Medium	Small
b (mm)	600.0	300.0	150.0
$f_t$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	44.87	44.87	44.87
$S_1$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	11.22	11.22	11.22
$w_1$ ( $\times 10^{-3}$ cm)	2.76	2.54	2.03
$w_2$ ( $\times 10^{-3}$ cm)	16.36	17.97	12.92

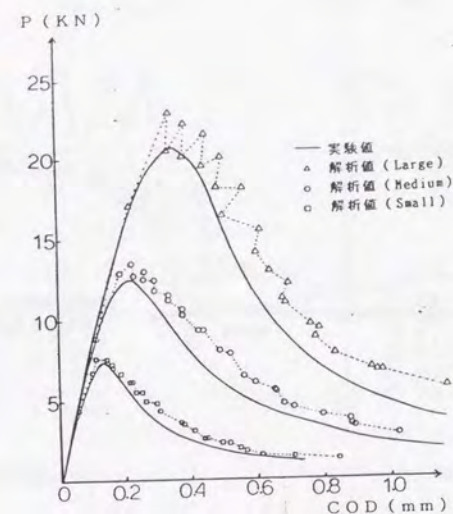


図-4.14 荷重と開口変位の関係 (粗分割)

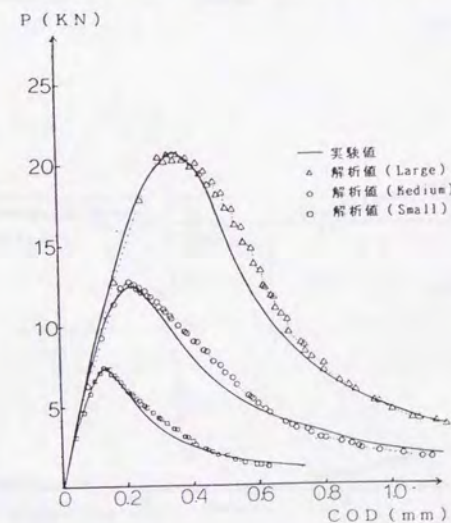


図-4.15 荷重と開口変位の関係 (細分割)



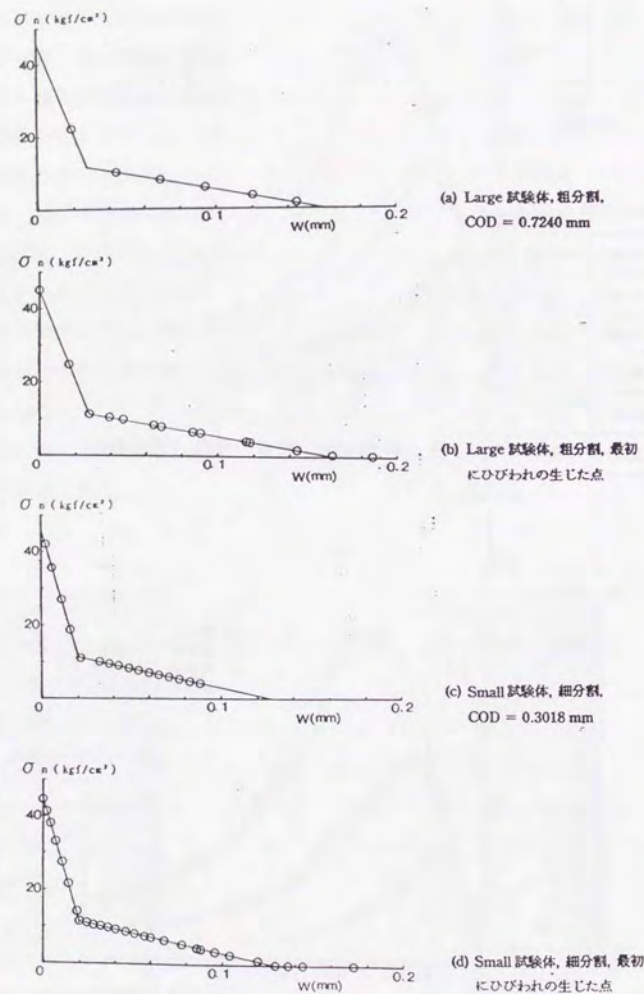


図-4.16 ひびわれ面上の応力とひびわれ幅の関係

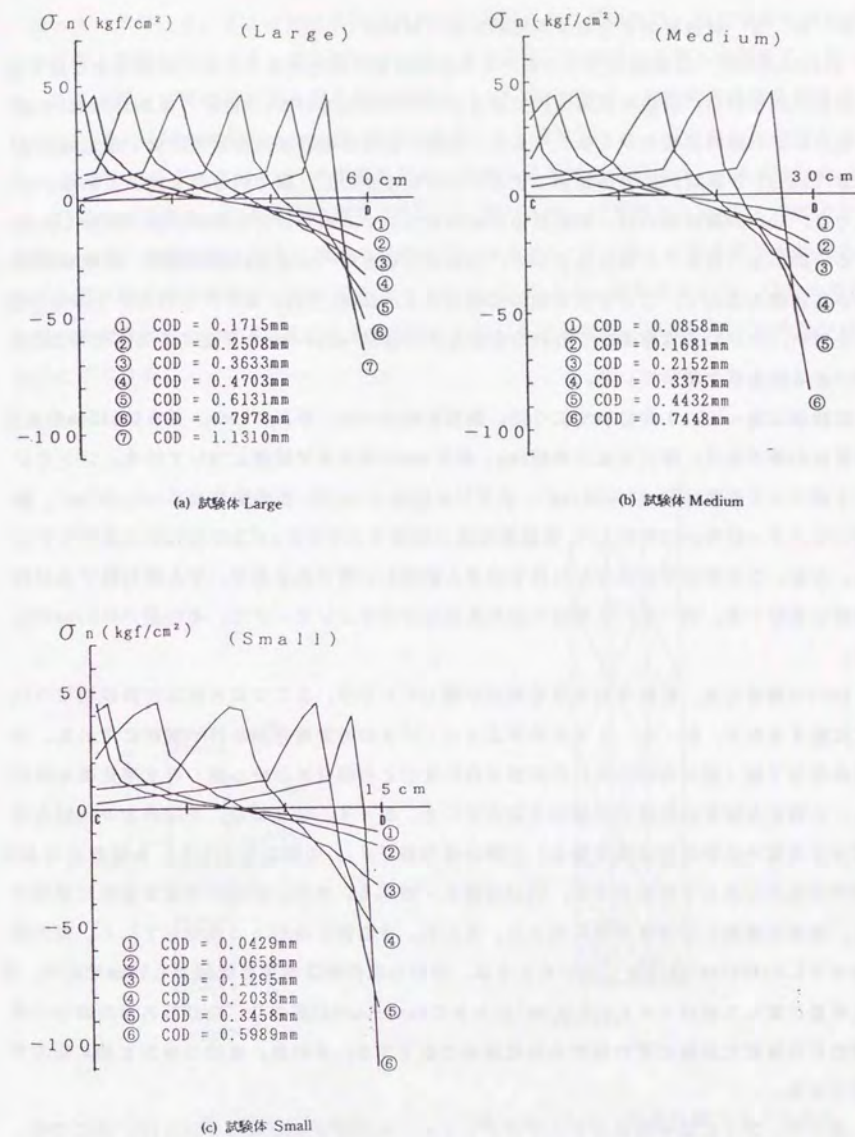


図-4.17 リガメント上の応力分布の変化



#### 4. 6. 2 両側切欠きを有する棒の直接引張試験

Reinhardtら<sup>58)</sup>は両側切欠きを有する長方形断面の棒の引張力による静的および繰返し荷重試験を行い、引張軟化構成則に関する研究を行っている。Rots<sup>12)</sup>はReinhardtらの引張力による静的試験をシミュレートし、荷重-変位曲線の最大荷重後の低下域に現れるこぶ (bump) が非対称な引張破壊によることを明らかにし、詳しい考察を加えている。ここでは、Rotsの解析例の内、対称な引張破壊について本章で示した解析方法で解析し比較する。前に述べたように増分法として、山田の方法を用いるときは変位制御、荷重制御の両手法が使えるので、ここで両手法の比較を行う。なお、Rots はアイソパラメトリック要素を用い、ひびわれは分布ひびわれを仮定し増分法は snap-back が生じて解を得ることのできる弧長法を用いている。

試験体は図-4. 18に示すように、断面は幅が60mm、厚さが50mm、長さは250mmの長方形断面の棒である。棒の中央には幅5mm、深さ5mmの切欠きが両側についている。コンクリートのヤング係数は $E=18000\text{N/mm}^2$ 、ポアソン比は $\nu=0.2$ 、引張強度は $f_t=3.4\text{N/mm}^2$ 、破壊エネルギーは $G_f=59.3\text{J/m}^2$ 、引張軟化は二直線モデルで $f_t/3$ の所に折れ曲がりがある。なお、この解析ではひびわれ面でのせん断応力は零であるので、せん断に関する材料特性は省略する。図-4. 18のAからEはエクステンソメータで、その長さは35mmである。

Rotsの解析では、試験体の全体を要素分割しているが、ここでは対称な引張破壊について比較するので、図-4. 19に示すように1/4のみ要素分割を行い解析に用いた。境界条件は下端(切欠きの中央)の鉛直方向の変位と右端(棒の中心線)の水平変位を拘束し、上端からは変位制御で引張力を加えている。図-4. 20には、平均応力 $\sigma$ (軸力を切欠き位置での棒の断面積で割る)と棒全体の伸び $\delta_{tot}$ の関係を示した。本解析法による結果は丸印で示してあるように、Rotsの解に一致する。次に、破壊の状況を簡単に説明する。破壊は最初に切欠き先端に起こり、その後、中心部に向かって進行していく。最大荷重 $\sigma=2.9179\text{N/mm}^2$ が作用しているときは、ひびわれ先端は切欠き先端から15mmである。最大荷重に達した後は $\sigma=2.9093\text{N/mm}^2$ のときにsnap-backが起こり、ひびわれ面の応力は最終的に引張軟化曲線の折れ曲がりの位置まで低下する。その後、変位の増加と共に応力が低下する。

図-4. 21には平均応力とエクステンソメータの伸び $\delta$ の関係を示した。ここでも、本章で示した解析法による結果は丸印で示してあるが、Rotsの解に一致することがわかる。

図-4. 20, 4. 21は変位制御で解析した結果を示してあるが、同じ問題を荷重制御で解析し比較したところ、荷重制御で計算した結果は変位制御で計算した結果に一致した。たとえば、荷重制御で得られた最大荷重は $\sigma=2.9179\text{N/mm}^2$ 、このときの棒全体の伸びは $\delta_{tot}=0.03557\text{mm}$ である。snap-backが生じているときは図-4. 20からわかるように $\delta_{tot}$ は減少するが、このとき、荷重制御によって得られた最小の値は $\delta_{tot}=0.02064\text{mm}$ 、 $\sigma=1.1287\text{N/mm}^2$ である。これらの値はすべて変位制御から得られる値と一致する。このように、両者が一致するのは切欠き部と載荷端が離れているために、載荷端に一樣な変位を与えた場合でも載荷端の応力がほぼ一樣になるためである。このように増分法として、山田の方法を用いるときはsnap-backが起こるような問題に対しても変位制御、荷重制御の両手法が使えることがわかる。

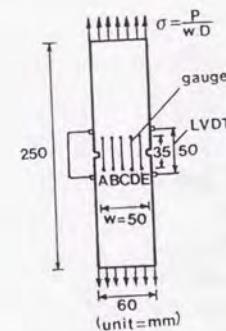


図-4. 18 直接引張試験

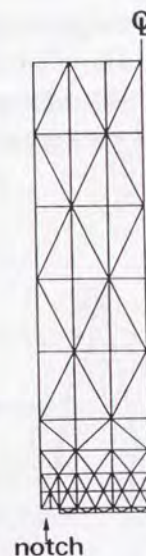


図-4. 19 要素分割 (1/4図)



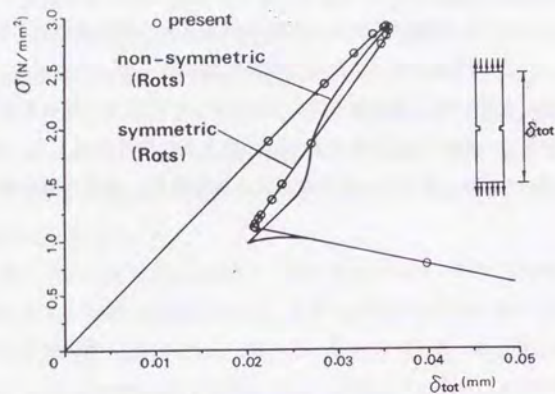


図-4.20 平均応力と棒全体の伸びの関係

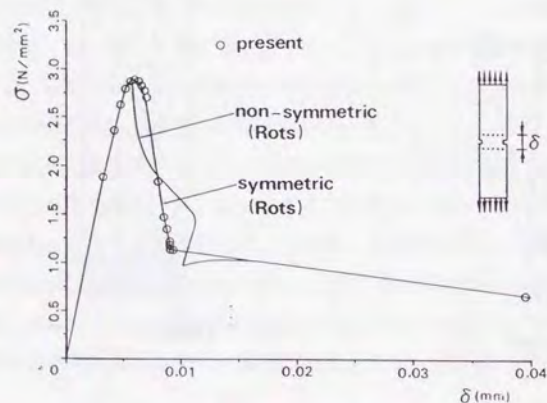


図-4.21 平均応力とエクステンメータの伸びの関係

#### 4.6.3 片側切欠きを有するはりのせん断試験

解析対象は図-4.22に示すように、切欠きを有するはりのせん断試験で、Arrea & Ingraffea<sup>20)</sup>によって実験および解析的研究が行われた。Rots<sup>12)</sup>も同じ問題を分布ひびわれモデルと離散ひびわれモデルを用いて解析しているので、Rotsの解との比較も行う。コンクリートの材料特性は $E = 24800 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0.18$ ,  $f_t = 2.8 \text{ N/mm}^2$ ,  $G_t = 100 \text{ N/m}$ , 引張軟化は二直線モデルを用いた。せん断軟化の影響は小さいと考えられるので、 $C_s = 0.001$ とする。実験では図-4.22に示すように、鉄製のはりを通してコンクリートはりに荷重を加えているが、ここでは、Rotsと同じようにA点とB点にそれぞれ $0.13F$ および $F$ の割合で荷重制御で計算した。実験によれば、図-4.22に示すように切欠き部と載荷点Bを結ぶひびわれによって破壊がおこるので、要素分割はこのひびわれパターンを含むように分割した。要素分割は図-4.23に示す。解析結果は図-4.24に、荷重 $F$ とクラック開口すべり(CMSD: crack mouth sliding displacement)の関係で表した。本解析手法による計算は、せん断破壊に対しては式(4.27), (4.28)の2式を用いて計算を行った。計算結果は最大荷重および荷重低下域で実験結果に大略一致している。解析結果は図-4.24から明らかなようにCMSD=0.07mm付近で急激な破壊(snap back)が生じている。実験でもCMSDが約0.12mmより大きい場合は測定結果が示されていないが、これは、急激な破壊が生じて測定不可能になったものと思われる。

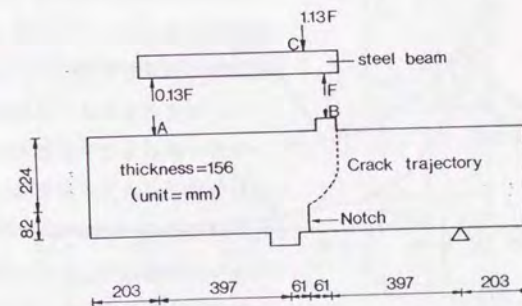


図-4.22 片側切欠きを有するはりのせん断試験



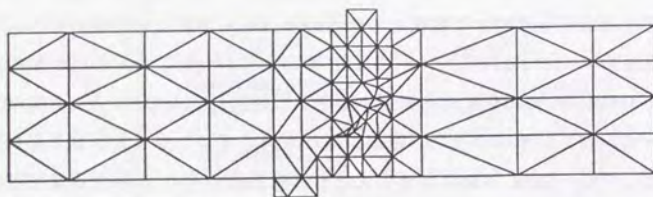


図-4. 23 要素分割

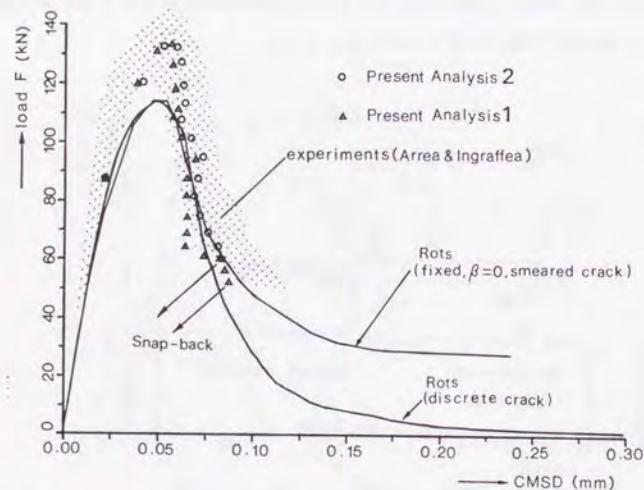


図-4. 24 荷重とCMSDの関係

#### 4. 6. 4 軸力とせん断力を受ける無筋コンクリート柱の破壊

複合破壊の解析例として次に示すのは、富井ら<sup>59)</sup>の軸力とせん断力を受ける無筋コンクリート柱の破壊のシミュレーションの例である。富井らは実験変数として、軸力比  $N/N_0$  ( $N$ : 作用軸力,  $N_0$ : 中心圧縮耐力), 柱の長さとの比  $h/D$  ( $h$ : 柱の長さ,  $D$ : 柱のせい) およびコンクリート強度をとって、かなりの数の実験を行った。

ここでは、柱の断面が  $b \times D$  ( $b = D = 10\text{cm}$ ) で長さが  $h = 20\text{cm}$  の試験体、軸力比が 0.2, 0.4, 0.6 の実験を解析する。なお、 $N_0 = b D f_c'$  で  $f_c'$  はコンクリートの一軸圧縮強度である。 $f_c'$  は  $N/N_0 = 0.2$  の時  $330\text{kgf/cm}^2$ ,  $N/N_0 = 0.4$  の時  $348\text{kgf/cm}^2$ ,  $N/N_0 = 0.6$  の時  $351\text{kgf/cm}^2$  となっている。

実験に使用している骨材の最大寸法は  $20\text{mm}$ ,  $W/C = 57\%$  となっているので、破壊エネルギー  $G_f$  は三橋ら<sup>60)</sup>の実験結果より  $140\text{N/m}$  とする。引張軟化曲線は六郷らが提案した二直線モデルを用いた。実験における載荷方法は、最初に軸力  $N_0$  を加えて、次に、図-4. 25 に示すように柱端部の回転を拘束しながらせん断力を加える方法で行っている。解析に用いる要素分割は図-4. 26 に示す。

解析結果は図-4. 27 に  $Q/b D f_c'$  と部材角  $R$  の関係で示した。図中の破線は富井らによる実験結果で analysis1 と analysis2 はそれぞれ、せん断破壊の条件式として式 (4.27) および式 (4.28) を用いたときの解析結果である。せん断破壊の条件式として式 (4.27) と式 (4.28) を用いたときに、解析結果に差があるが、いずれも実験結果に大略一致している。図-4. 28 は最大荷重時のひびわれを示した。図中の破線はせん断破壊を示し、実線はせん断以外を示している。なお、実線は大部分が引張破壊である。軸力比が 0.2 の時は柱の端部に引張ひびわれが生じて破壊するが、軸力比が 0.4, 0.6 と大きくなるにつれて、柱に斜めひびわれが顕著に現れるようになり、軸力比によって破壊の形態が変わることがわかる。

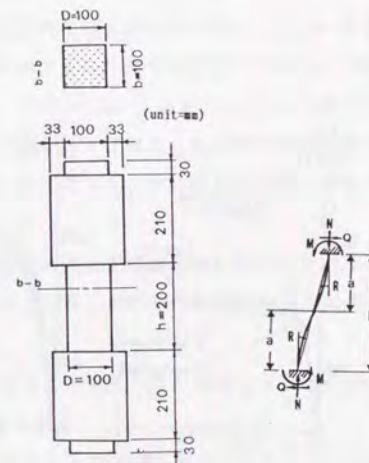


図-4. 25 試験体および荷重条件



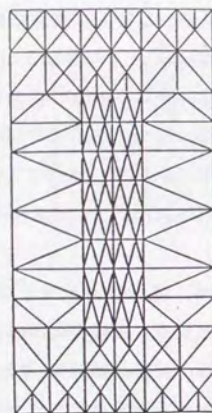


図-4.26 要素分割

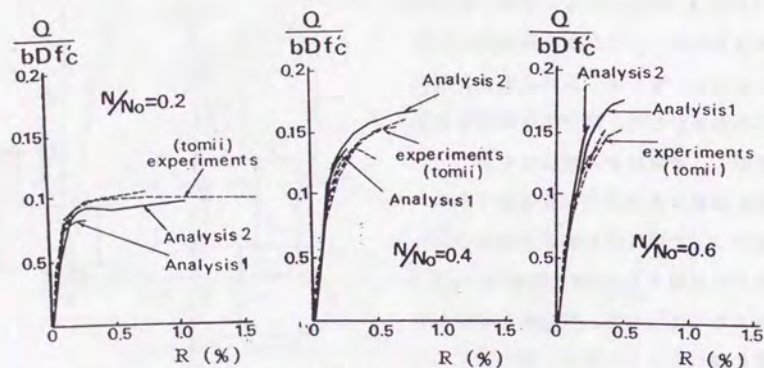


図-4.27 セン断力と部材角の関係

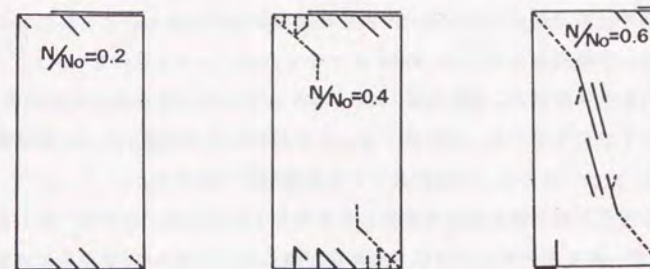


図-4.28 最大荷重時のひびわれ (Analysis 2)

#### 4.7 まとめ

引張力下でのひずみ軟化の研究は近年、活発に行われるようになった。しかし、複合モード破壊での引張軟化の実験的研究は、純引張応力のみでの引張軟化に関する研究に比較して非常に少ない。本研究ではHassanzadehによって行われた実験をもとに、せん断応力を考慮に入れた引張軟化解析法を示した。今後、実験データが増え、引張軟化領域での力学特性がより明らかになれば、本章で示した解析方法の改良も必要になると思われる。今回得られた結論を述べるとつぎのようになる。

- 1) 仮想ひびわれモデルを仮定したときの引張軟化構成式を直接にハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理に導入する方法を示し、これより弾塑性剛性方程式を導く方法を示した。
- 2) 引張軟化を解析するための増分法のアルゴリズムを提案した。提案した方法はsnap-backが生じて安定して解を求めることができる。
- 3) 提案した解析手法を六郷らによって行われたCT試験体の実験のシミュレーションに適用した。要素の大きさが解に与える影響を調べるために、リガメント上の要素分割



を変えた解析を行った。解は要素分割が粗いほど変動が激しくなったが、発散することなく安定した解を得ている。また、実験値と解析値との一致は良好であった。ひびわれ面上でひずみ軟化則を満足しているか否かのチェックを各荷重段階ごとで行ったが、すべて、十分満足していることがわかった。

- 4) 提案した解析手法を両側切欠きを有する長方形断面の棒の引張力による静的破壊の問題に適用した。この問題に対して、Rots はアイソパラメトリック要素を用い、ひびわれは分布ひびわれを仮定し、増分法は snap-back が生じて解を得ることのできる弧長法を用いて解析している。本研究で示した解析法による結果と Rots の解は最大荷重および snap-back が起こり、荷重が低下する領域でも一致する。

同じ問題を変位制御と荷重制御で解析し比較を行ったところ、両者は一致した。このように、両者が一致するのは切欠き部と載荷端が離れているために、載荷端に一樣な変位を与えた場合でも載荷端の応力がほぼ一樣になるためである。

- 6) 複合破壊の解析例として、切欠きを有するはりのせん断試験、軸力とせん断力を受ける無筋コンクリート柱の破壊のシミュレーションの例を示した。切欠きを有するはりのせん断試験は最大荷重および荷重低下域でも実験結果に大略一致した。軸力とせん断力を受ける無筋コンクリート柱の破壊のシミュレーションでは、軸力比が 0.2 の時は柱の端部に引張ひびわれが生じて破壊するが、軸力比が 0.4, 0.6 と大きくなるにつれて、柱に斜めひびわれが顕著に現れるようになり、軸力比によって破壊のモードが変わることが解析的に示された。



5.1 はじめに

内圧を受ける中空円筒の破壊問題に類似した問題は、しばしば、鉄筋コンクリート上の問題として議論されてきた。たとえば、Tepfers<sup>25)</sup>は鉄筋コンクリートにおける付着割裂強度を求めるのに、内圧を受ける円筒でモデル化し付着割裂強度を求めるための式を導いている。原田<sup>27)</sup>は静的破砕剤を用いて、コンクリートを破壊するときの破壊圧力の推定を行うのに中空円筒の供試体を用いて実験を行っている。森川ら<sup>26)</sup>は正方形断面柱の断面中央に埋められた鉄筋の腐食膨張によるかぶりコンクリートのひびわれ発生荷重を求めるのに、正方形断面に内接する厚肉円筒でモデル化している。

図-5.1には原田が行った実験の破壊圧力を示している。同図の曲線(I)，(II)は佐藤ら<sup>69)</sup>が示した円筒の破壊条件式である。曲線(I)は円筒内の平均応力が引張強度に等しくなったときに破壊が起こると仮定して導かれた。曲線(II)は円筒内壁の引張応力が引張強度の1.5倍になったときに破壊が起こると仮定して導かれた。佐藤らは大理石、鑄鉄、黒鉛を用いて実験を行っているが、実験の結果はほぼ曲線(I)，(II)の間にあることを示している。コンクリートについては原田<sup>27)</sup>が100個程度の円筒供試体を用いて実験を行っているが、同図

に示すように破壊圧力はほぼ曲線(I)，(II)の間にあることがわかる。

$P_u$  : 破壊圧力  
 $f_t$  : コンクリートの引張強度  
 $k$  :  $D/d$

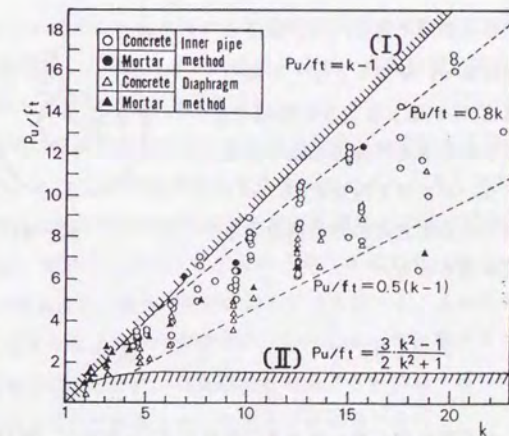
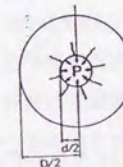


図-5.1 円筒の破壊圧力(原田)



図-5. 1で横軸： $k$ （円筒の外径と内径の比）の任意の値に対して破壊圧力が、かなりの範囲にわたってばらつきが見られる。原田の実験では、 $k$ が同じであれば寸法（円筒の内径または外径）が大きいほど破壊圧力は低下している。すなわち、寸法効果は破壊圧力のみかけのばらつきの原因の1つとなっていると考えられる。ひびわれの進展状況も $k$ の値によって異なるということが報告されている。すなわち、 $k < 5$ では瞬時にひびわれが貫通するが、 $k > 5$ ではひびわれが進展しながら破壊が生じる<sup>27)</sup>。このような問題を明らかにするためには厚肉円筒の弾性理論解ではなく、ひびわれ先端での非線形を考慮した非線形解析が不可欠であろう。

本章では内圧を受けるコンクリート中空円筒の破壊圧力の寸法効果、 $k$ の値によってひびわれの進展がどのように異なるかを明らかにするために、第4章で示した引張軟化を考慮した解析方法を適用する<sup>70), 71)</sup>。

## 5. 2 内圧を受ける中空円筒の破壊圧力および破壊性状

佐藤らによると、ぜい性材料の中空円筒が内圧を受けて破壊するとき、破壊圧力は図-5. 1の直線（I）、曲線（II）の間にあり、延性の影響が大きいときは（I）にぜい性の影響が大きいときは（II）に漸近するするといわれる。直線（I）は図-5. 2に示すように、内圧を受ける厚肉円筒の円周引張応力の平均値 $\bar{\sigma}_\theta$ がコンクリートの引張強度 $f_t$ に達したときに破壊するといういわゆる平均応力説である。図-5. 2に示す内圧 $P_i$ と $t-t$ 断面での鉛直方向の力の釣合より次式が得られる。

$$P_i d = \bar{\sigma}_\theta (D - d) \quad (5.1)$$

$\bar{\sigma}_\theta$ が引張強度に達したときの圧力を $P_u$ とすると、式(5.1)より次式が得られる。

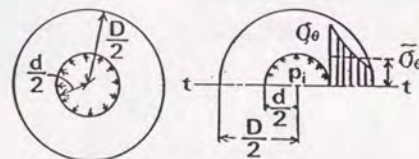


図-5. 2 内部圧力を受ける厚肉円筒

$$P_u / \sigma_t = k - 1 \quad (k = D / d) \quad (5.2)$$

すなわち、式(5.2)が直線（I）である。この式は円筒が薄肉断面または断面が完全弾塑性になったときの破壊条件式を表す式でもある。曲線（II）は内圧を受ける厚肉円筒の内側の円周引張応力の1.5倍がコンクリートの引張強度 $f_t$ に達したときに破壊するという佐藤らが示した破壊条件式である。厚肉円筒の弾性理論<sup>72)</sup>によれば円筒内側の円周引張応力 $\sigma_\theta$ は次式のようなになる。

$$\sigma_\theta = P_i (d^2 + D^2) / (D^2 - d^2) \quad (5.3)$$

ここで、破壊圧力を $P_u$ 、破壊圧力が作用しているときの円周引張応力は $\sigma_\theta = 1.5 f_t$ であるから、式(5.3)より次式が得られる。

$$P_u / \sigma_t = (3/2) (k^2 - 1) / (k^2 + 1) \quad (5.4)$$

式(5.4)が図-5. 1の曲線（II）である。

図-5. 1は原田<sup>27)</sup>がコンクリートの中空円筒を用いて円筒の破壊圧力を求めた結果である。破壊圧力は佐藤らが示した条件式（I）と（II）の間にあるが、 $k$ の任意の値に対し破壊圧力が、かなりの範囲にわたってばらつきが見られる。

原田の行った円筒の破壊実験の内、静的破砕剤を用いた場合の破壊モードの多くは図-5. 3に示すように、3方向に割れ、それぞれ120度を形成する破壊モードとなるといわれる。藤井<sup>73)</sup>はスリットのついた円柱試験体に埋め込められた異形鉄筋の引き抜き試験を行っている。この時の供試体の破壊は、鉄筋とスリットによりあらかじめ設けられたノッチ先端を結ぶ面で2~3片に分割される割裂破壊である（供試体のモデルを図-5. 4に示す）。このように、一般に円筒が内圧を受ける場合は2~3本の主ひびわれによって破壊するといえる。すなわち、円筒の破壊圧力を求めるときは、円筒内に生じるひびわれは一様に生じるのではなく、2~3本の主ひびわれによって破壊すると考えるのが妥当であろう。

原田の実験によれば、ひびわれの進展のしかたは、 $k$ の値によって異なるということが



示されている。すなわち、 $k < 5$ では瞬時にひびわれが貫通するが、 $k > 5$ ではひびわれが進展しながら破壊が生じる。

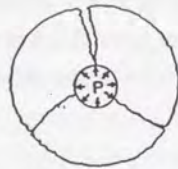


図-5.3 静的破砕剤による円筒の破壊

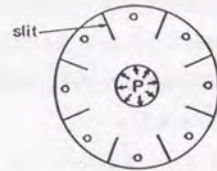


図-5.4 鉄筋の引き抜き試験（藤井）

### 5.3 解析条件

#### 5.3.1 材料特性

原田は静的破砕剤を用いて、コンクリートを破砕するときの破砕圧力の推定を行うのに中空円筒の供試体を用いて、実験および解析

的研究を行っている。円筒供試体の材料は、普通コンクリートの場合、圧縮強度が $305 \text{ kgf/cm}^2 \sim 456 \text{ kgf/cm}^2$ 、モルタルの場合は $382 \text{ kgf/cm}^2 \sim 490 \text{ kgf/cm}^2$ 、高強度コンクリートの場合は $616 \text{ kgf/cm}^2$ となっている。原田の実験では破壊エネルギーを求めてないので、六郷ら<sup>66)</sup>がCT試験体の引張破壊実験より求めた材料特性の内、圧縮強度が $438.3 \text{ kgf/cm}^2$  ( $42.95 \text{ MPa}$ )と $363.3 \text{ kgf/cm}^2$  ( $35.6 \text{ MPa}$ )の普通コンクリートを解析に用いる。材料の引張軟化特性は表-5.1に示す。なお、軟化曲線の $W_1$ 、 $W_2$ は表-5.1の値より $W_1 = C_1 G_t / f_t$ 、 $W_2 = C_2 G_t / f_t$ として求められる。同表にはヤング係数 $E$ とポアソン比 $\nu$ を示しているが、 $E$ は日本建築学会の鉄筋コンクリート構造計算基準の式

$$E = 2.1 \times 10^5 (\gamma / 2.3)^{1.5} (f_c' / 200)^{0.5}$$

表-5.1 引張軟化曲線のデータ（六郷）

$f_c'$ kgf/cm <sup>2</sup> (MPa)	$f_t$ kgf/cm <sup>2</sup> (MPa)	$S_t$ kgf/cm <sup>2</sup> (MPa)	$G_t$ kgf/cm <sup>2</sup>	$C_1$	$C_2$	$E$ kgf/cm <sup>2</sup>	$\nu$
438.3 (42.95)	44.87 (4.4)	11.22 (1.1)	11.84	0.77	4.9	310680	0.2
363.3 (35.6)	30.60 (3.0)	10.20 (1.0)	10.20	0.42	4.8	283020	0.2

より $\gamma = 2.3$ 、 $f_c'$ はコンクリートの圧縮強度を代入して求めた。

### 5.3.2 破壊モード

原田の行った円筒の破壊実験の内、静的破砕剤を用いた場合の破壊モードは多くは3方向に割れ、120度を形成する破壊モードとなると

いわれる。藤井はスリットのついた円柱試験

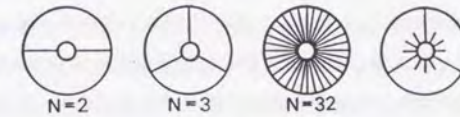


図-5.5 円筒のひびわれパターン

体に埋め込められた異形鉄筋の引き抜き試験を行っている。この時の供試体の破壊は、2～3片に分割される割裂破壊である。このように、一般に円筒が内圧を受ける場合は2～3本の主ひびわれによって破壊するといえる。本章では主ひびわれの発生数と破壊圧力の関係を調べるために、図-5.5に示すように円筒に生じる主ひびわれ数を2, 3, 32本と仮定し解析を行った。ひびわれ本数32の意味は円筒に多数のひびわれが一様に生じたときの破壊圧力を求めるためのものである。解析ではひびわれの発生位置が指定されたところのみ、引張軟化則を満たしており、指定された位置以外では、たとえ、円周応力が引張強度を越えても破壊は認めない。しかし、主ひびわれ間の円周応力による微細なひびわれも発生すると思われるので、主ひびわれが3本の場合は図-5.5に示すように、主ひびわれ間に3本のひびわれを仮定し微細ひびわれの影響を考慮した解析も行った。

### 5.3.3 円筒の寸法および要素分割

解析に用いた円筒の寸法は2グループに分ける事が出来る。

Aグループ	$d = 3.2 \text{ cm}, 4.8 \text{ cm}$ $k = 3.33, 6.25, 12.5$
Bグループ	$d = 0.6 \text{ cm}, 1.0 \text{ cm}, 1.9 \text{ cm}, 2.9 \text{ cm}, 4.1 \text{ cm}, 5.1 \text{ cm}$ $k = 3.33, 6.25, 12.5$



Aグループは主ひびわれの発生数と破壊内圧の関係、主ひびわれ間の微細ひびわれの影響、寸法効果の問題を説明することを目的とする。

Bグループは寸法効果をより詳しく説明することを目的とし、さらに、破壊圧力と円筒の膨張の関係すなわち破壊性状も明かにすることを目的とする。

第4章で述べた新しい離散化モデルによる解析は対称性を利用して行う。図-5.6には主ひびわれが、それぞれ2, 3, 32本発生しているときの要素分割を示してあるが、同図でABは主ひびわれ面、CDは割れたコンクリート片の中心線である。たとえば、主ひびわれが3本発生している場合はABDCに囲まれる部分だけを用いた。

解析では円筒の内径、外径とも種々の物を用いている。このために、図-5.6に示す要素分割図を拡大または縮小して解析に用いている。

平面要素を用いる有限要素解析では平面応力問題または平面ひずみの問題と仮定して解析を行うが、特に断らない限り、本章で示す解析例は平面応力問題として解析する。なお、平面応力問題を仮定したときの破壊挙動と平面ひずみ問題を仮定したときの破壊挙動の差は5.4.6で比較検討を行う。

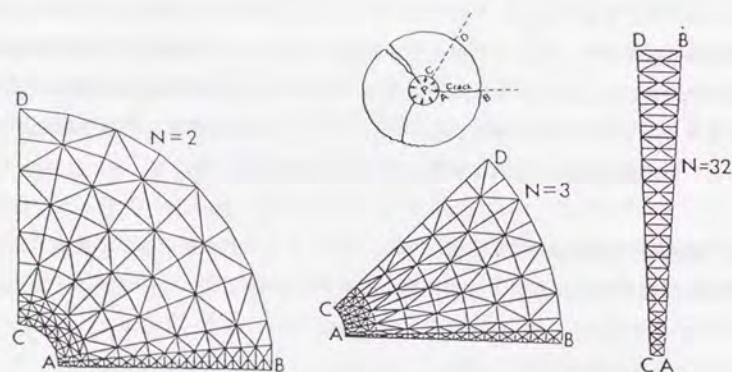


図-5.6 円筒の要素分割

## 5.4 挙動の解明

### 5.4.1 主ひびわれ本数と破壊圧力

円筒に生じるひびわれの数、破壊圧力および円筒内の引張応力の関係を見るために、コンクリートの引張強度は $f_t = 44.87 \text{ kgf/cm}^2$ 、円筒の内径 $d$ を3.2cm, 4.8cmとし、円筒の外径( $D$ )と内径( $d$ )の比 $k = D/d$ を3.33, 6.25, 12.5の3種類、主ひびわれの数 $N$ は2, 3, 32本とする解析を行った。著者の解析した結果は図-5.7に示すように、佐藤らが示した円筒の破壊条件式の曲線(I), (II)の間にあることがわかる。図-5.7から次の点が明かである。円筒の外径と内径の比 $k$ の増加と共に破壊内圧も増加する。仮定した主ひびわれの数が増えるにつれて破壊圧力も増加する。すなわち、ひびわれ数が2本と3本を比較すると、ひびわれ数2本の場合が $k = 3.33$ で約7%,  $k = 6.25$ で約13%,  $k = 12.5$ で約17%も高目となっている。

図-5.8にはひびわれ面上の円周応力の代表的な例として $k = 6.25$ で $N = 3$ の場合を示した。①は円筒の内壁がちょうど引張強度に達したときの応力分布、⑤は破壊圧力が作用しているときの応力分布である。この図は円筒内部の圧力 $P$ が増加するにつれて、内壁から徐々に引張軟化を起こしながらひびわれが進行し、破壊圧力が作用しているときは、円筒内壁付近のひびわれ面上の応力は引張軟化曲線の第二勾配まで達することを示している。

図-5.9には破壊圧力が作用しているときのひびわれ面上の円周応力の分布を示した。同図で円筒の内径 $d$ は4.8cm,  $k$ は3.33, 6.25, 12.5,  $N$ は2, 3, 32となっている。図-5.9(a)から(c)までを見ると大きな特徴がわかる。すなわち、主ひびわれの数が32本の場合はひびわれが生じてもひびわれ数2, 3本に比べて応力の低下が極めて小さい。前に述べたように、実験によるとひびわれの発生数は2または3本であるから、ひびわれの発生数を32本と仮定すること、すなわち、円筒に多数のひびわれが一様に生じる仮定するのは適切でないことがわかる。ひびわれ発生数を2または3本と仮定するとき、両者の破壊圧力時の応力分布は図-5.9(a), (b), (c)に示すように多少の差はあるものの、ひびわれ発生数32本に比較すれば両者の差は小さい。



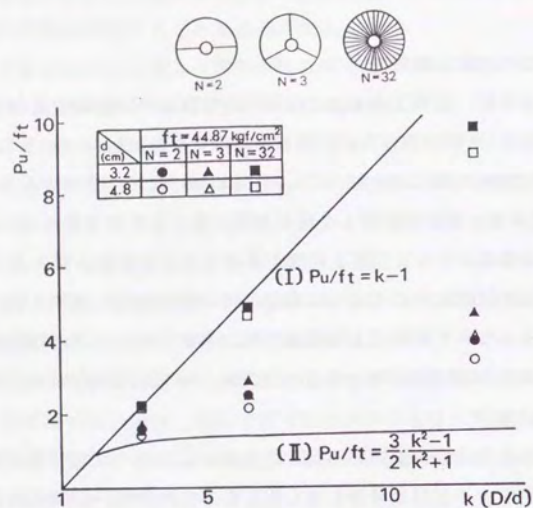


図-5.7 破壊圧力と主ひびわれ数の関係

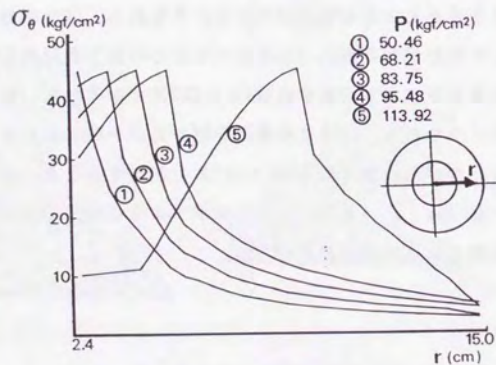


図-5.8 主ひびわれ面上の引張応力分布

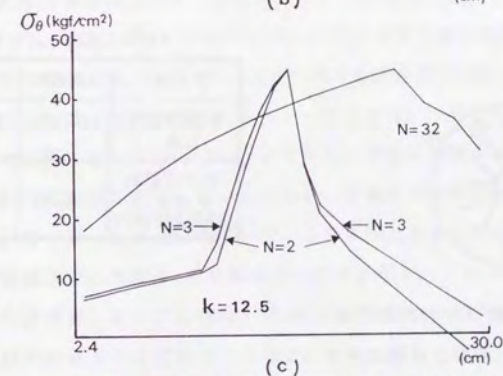
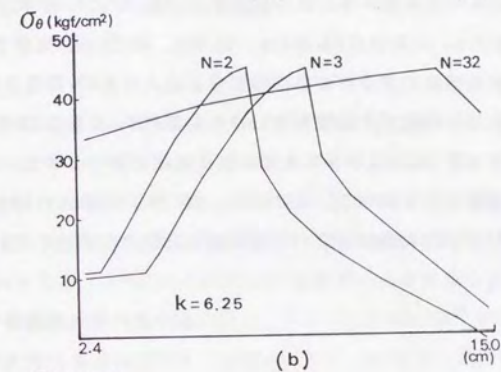
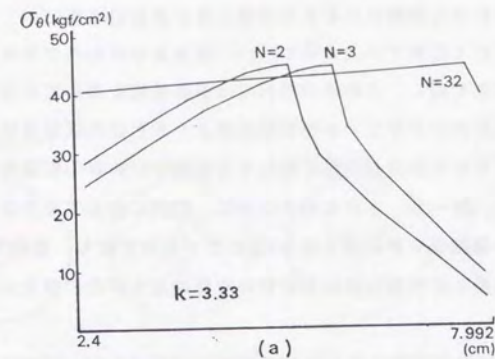


図-5.9 破壊圧力が作用しているときのひびわれ面上の引張応力の分布



#### 5. 4. 2 主ひびわれと微細ひびわれを考慮したときの破壊圧力

円筒が内部圧力を受けて破壊するときは2または3本の主ひびわれが発生するために、解析では主ひびわれのみを考慮し、その他の部分では引張破壊を認めてなかった。しかし、主ひびわれ間の引張応力がコンクリートの引張強度より大きければ引張破壊がおこるので、図-5. 10に示すように主ひびわれ間に発生する微細ひびわれの影響を検討しなければならない。このために、図-5. 10に示すように、円筒に発生する主ひびわれを3本と仮定しその間に発生する微細なひびわれを各々3本のひびわれで表し、微細なひびわれの影響を検討する。ひびわれ面上の引張強度は主ひびわれ面のほうが他の部分よりも少し小さいと仮定して解析する。

解析で用いるコンクリートは表-5. 1の引張強度が $44.87\text{kgf/cm}^2$ のコンクリートとする。円筒の内径 $d$ は $3.2\text{cm}$ 、外径 $D$ は $10.656\text{cm}$ 、 $20.0\text{cm}$ 、 $40.0\text{cm}$ の3種類である。解析では微細なひびわれ部の引張強度は主ひびわれ部の引張強度よりも5%高目に仮定した。このために、微細なひびわれ部の引張軟化曲線は主ひびわれ部の $f_t$ よりも5%高目とし、軟化曲線の折れ曲がり位置および $W_2$ は主ひびわれ部の軟化曲線と同一とする。解析によって求めた破壊圧力を表-5. 2に示す。表-5. 2によれば主ひびわれのみを仮定した場合と主ひびわれ間に微細ひびわれを仮定した場合の差は小さいといえる(両者の最大の差は1.6%)。

表-5. 2 微細ひびわれを有する

円筒の破壊圧力

$$d/2=1.6\text{cm}, f_t=44.87\text{kgf/cm}^2$$

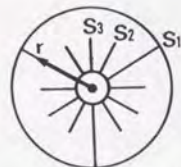


図-5. 10 微細ひびわれを考慮した  
ときのひびわれパターン

D (cm)	10.656	20.0	40.0
主ひび割れ 3本	78.66	130.83	210.09
主ひび割れ 3本と 微細ひび割れ	78.71	128.75	206.70

unit(kgf/cm<sup>2</sup>)

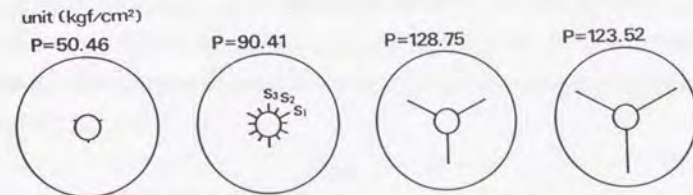


図-5. 11 圧力の増加によるひびわれの進展状況 (D=20.0cm)

つぎに、ひびわれ状況について述べる。表-5. 2で示したものの中から代表的な例として外径 $20.0\text{cm}$ の円筒のひびわれ状況を図-5. 11に示した。図-5. 11で圧力 $P=50.46\text{kgf/cm}^2$ はひびわれが最初に発生したときの圧力である。 $P=90.41\text{kgf/cm}^2$ は微細ひびわれがもっとも長く進展したときの圧力である。このときの微細ひびわれの長さは $S_3$ で $2.8\text{mm}$ 、 $S_2$ で $2.5\text{mm}$ である。 $P=128.75\text{kgf/cm}^2$ は破壊圧力が作用しているときを示す。このとき、微細ひびわれ部は除荷の状態にある。 $P=123.52\text{kgf/cm}^2$ は主ひびわれがさらに伸びて圧力が低下している状況を示す。つぎに、ひびわれ面上の応力の変化について述べる。図-5. 12(a), (b), (c)は圧力が増加するにつれて各ひびわれ面上の引張応力がどの様に変化するかを示した。横軸の $1.6\text{cm}$ は円筒の内壁を示し、 $10.0\text{cm}$ は円筒の外壁の位置である。①はひびわれが最初に発生したとき、⑤は破壊圧力時の引張応力の分布を示す。主ひびわれ面では図-5. 12(a)に示すように、円筒の内壁から発生したひびわれは圧力の増加と共に円筒内部に進展する。このとき、引張応力は軟化曲線に沿って低下していくことを示す。図-5. 12(b)は図-5. 10に示してある微細ひびわれ面 $S_2$ 、図-5. 12(c)は微細ひびわれ面 $S_3$ の引張応力の分布を示す。これらの図において、微細ひびわれ面上の応力分布が、主ひびわれ面上の応力分布とは大きく異なることがわかる。すなわち、微細ひびわれ面上では引張軟化を起こした後、除荷の状態になりながら引張応力の低下が生じている。このような破壊の特徴は円筒の外径が $10.656\text{cm}$ 、 $40.0\text{cm}$ でもほとんど同じであった。



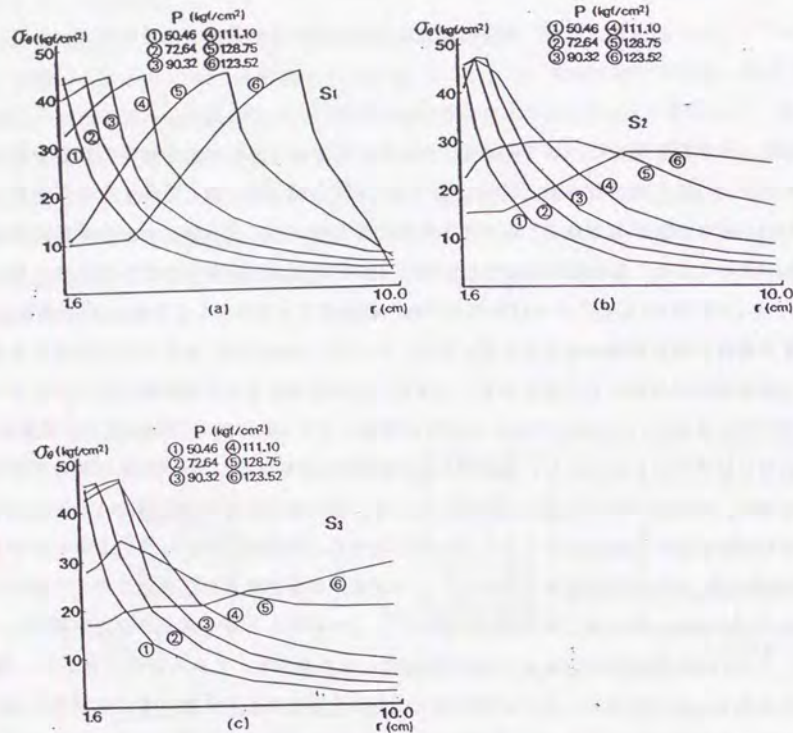


図-5. 12 微細ひびわれを考慮したときのひびわれ  
面上の引張応力の分布

以上のことを簡単にまとめると、円筒の破壊のシミュレーションで主ひびわれを3本仮定し、さらに、主ひびわれ間に微細ひびわれを仮定しても圧力が増加するにつれて、微細ひびわれ部では除荷の状態なる。このために、両者の破壊圧力差は小さい。

原田や藤井の実験によれば、円筒が内圧を受ける場合は2~3本の主ひびわれによって破壊することがわかっている。図-5. 7, 5. 9で示しているように主ひびわれが2本と3本では破壊圧力や応力分布に多少の差はあるが、これから後は3本の主ひびわれだけを仮定して解析を行う。

#### 5. 4. 3 引張軟化曲線と破壊圧力

円筒の破壊圧力  $P_u$  は一般に、引張強度  $f_t$  で割って無次元化して表示される。このような表示をしたときに、引張軟化曲線の形状によって  $P_u/f_t$  がどの程度変わるかを知るために、一つの解析例を用いて考察する。引張軟化曲線は図-5. 13に示す六郷らの実験結果を用いる。円筒の内径は3.2cmと4.8cm、外径と内径の比  $k$  は3.33, 6.25, 12.5の3種類である。ひびわれは主ひびわれのみを3本と仮定して

解析した。解析結果は図-5. 14に示してある。 $P_u/f_t$  は  $k$  が小さいときは引張軟化曲線による差は小さいが  $k$  が大きくなるにつれて差は大きくなる。  $k=12.5$  ,  $f_t$  が  $30.60 \text{ kgf/cm}^2$  と  $44.87 \text{ kgf/cm}^2$  の場合を比較すると、前者が高目となっている。すなわち、内径が3.2cmで8.7%, 4.8cmで11.5%ほど高目となっていることが

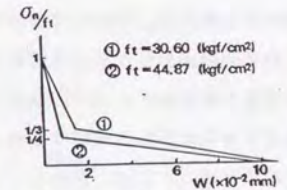


図-5. 13 引張軟化曲線

わかる。  $f_t = 30.60 \text{ kgf/cm}^2$  のコンクリートが高目になったのは、図-5. 13に示すように  $f_t = 30.60 \text{ kgf/cm}^2$  の引張軟化曲線のほうが緩やかになっているからだと思われる。このように、寸法効果は単に円筒の大きさだけではなく、引張軟化曲線の形状によって左右されるのである。

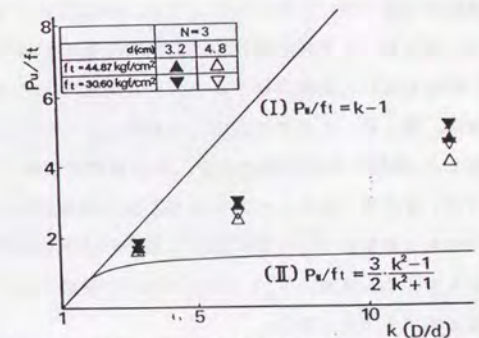


図-5. 14 引張軟化曲線の差による破壊圧力



#### 5. 4. 4 寸法効果

本節でいう、円筒の破壊圧力の寸法効果とは「外径と内径の比 $k$ が同じなら内径が大きいものほど破壊圧力は小さくなる」ことを指し示している。原田は内径が3.2cmと4.8cmの円筒供試体を用いて破壊圧力を求めている。図-5. 15には原田の実験値と5. 4. 1および5. 4. 3で求めた解析値を示した。同図で $P_{32}$ 、 $P_{48}$ はそれぞれ内径が3.2cmと4.8cmの円筒の破壊圧力を示す。解析結果は内径が3.2cmの円筒より4.8cmの円筒の破壊圧力の方が小さいことを示し( $k=12.5$ ,  $f_t=44.87\text{kgf/cm}^2$ で約14%小さい), 原田の実験の傾向とも一致する。なお, 同図の $P_{48}=P_{32}\sqrt{1.5}$ は原田が応力拡大係数を用いて導いた式である。

ここでは、円筒の破壊圧力におよぼす寸法効果をさらに詳しく明らかにするために、 $f_t=44.87\text{kgf/cm}^2$ , ひびわれの本数を3本と仮定し円筒の寸法を種々に変えて破壊圧力を求めた。円筒の内径は0.6, 1.0, 1.9, 2.9, 4.1, 5.1cm,  $k$ は3.33, 6.25, 12.5として解析を行った。解析結果は図-5. 16に示してあるが、円筒の内径が小さくなるにつれて、破壊圧力が大きくなることがわかる。このように、円筒の寸法が小さくなるにつれて破壊圧力が増加する理由は、円筒の寸法が小さいほどひびわれの幅も小さいので、ひびわれ間を伝達される引張応力も大きくなるからである。佐藤ら<sup>69)</sup>は大理石、鋳鉄、黒鉛を用いて円筒の破壊圧力を求めているが、曲線(II)はぜい性材料である大理石の破壊圧力を表し、大理石よりも延性のある黒鉛は直線(I)と曲線(II)の間に、黒鉛よりもさらに延性のある鋳鉄は直線(I)近くなるといわれる。すなわち、コンクリートのようなぜい性材料の破壊圧力は常に直線(I)よりも下側になければならない。解析によって得られた破壊圧力も図-5. 16に示すように、常に直線(I)と曲線(II)の間にあることがわかる。図-5. 17は破壊圧力と円筒の内径の関係を示した図である。この図からは $k=3.33$ のときは寸法効果は小さいが $k$ が大きくなるにつれて寸法効果が大きくなることがわかる。図-5. 18には破壊圧力が作用しているときのひびわれ面上の引張応力の分布を示した。同図でAは円筒の内壁、Bは外壁を意味する。この図から明らかなことは、内径( $d$ )が小さくなるにつれて引張破壊に伴う応力の低下が小さいことを示している。内径が小さくなるにつれて引張応力の低下が小さいのは、内径が小さいほどひびわれ幅も小さいからである。また、 $k=3.33$ と $k=12.5$ を比較すると、円筒の内壁の引張応力は $k$ の大きいほど低下も大きくなる。

図-5. 19は圧力が増加するにつれて、ひびわれ線上の引張応力( $\sigma_e$ )がどのように変化するかを示した。これらの図で④は円筒内壁が最初に引張強度に達したときの応力分布、⑤は圧力が最大のときの引張応力の分布、⑥は圧力が最大値を超えて低下したときの引張応力の分布である。図中のAは円筒の内壁、Bは円筒の外壁を意味している。図-5. 19(a)は解析した円筒の中では最も肉厚が薄く内径の小さい供試体であるが、円筒の内壁が引張強度に達した後も引張応力の低下が少ない。これは、円筒の寸法が小さいために引張破壊が生じてもひびわれ幅も小さい、この結果、引張軟化曲線から明らかなように、ひびわれ幅が小さいほど応力の低下も小さくなるからである。図-5. 19(f)は最も肉厚が厚く内径の大きい供試体である。この供試体は円筒の内壁が引張強度に達した後、急激に引張応力の低下が起こっている。円筒の寸法が大きいため円筒内壁に引張破壊が生じたときにできるひびわれ幅も大きい。このために、引張強度の低下も急激になる。

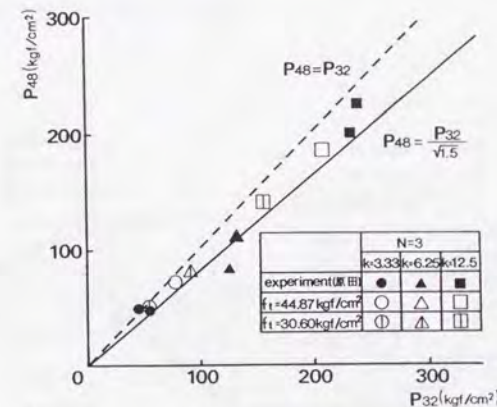


図-5. 15 円筒の内径32mmと48mmの破壊圧力の比較



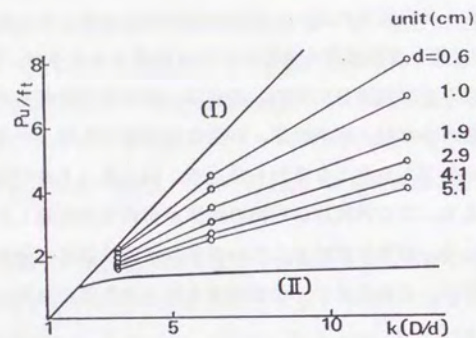


図-5.16  $P_u/f_t$  と  $k$  の関係

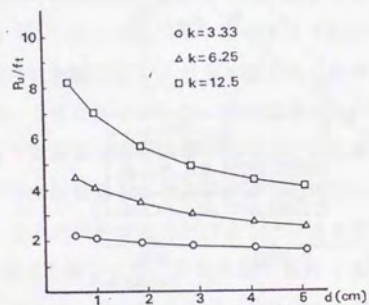


図-5.17  $P_u/f_t$  と  $d$  の関係

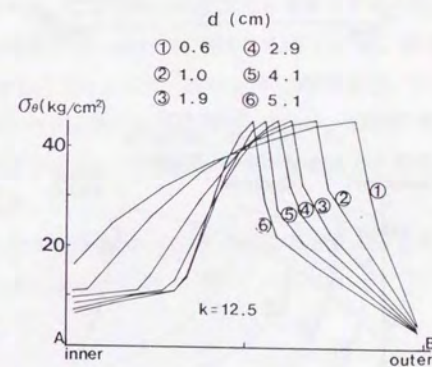
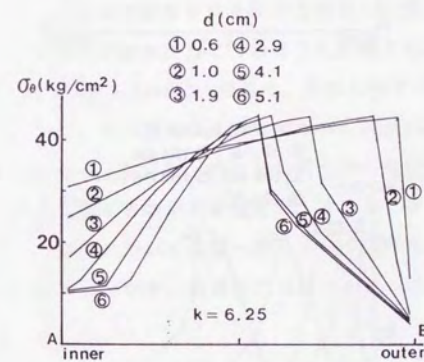
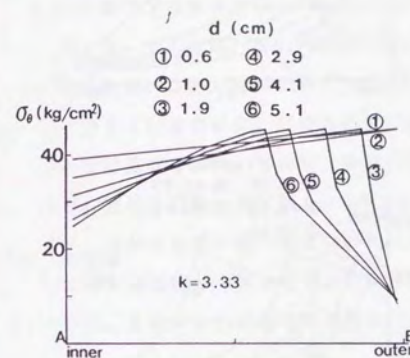


図-5.18 破壊圧力作用時のひびわれ面上の  
引張応力の分布



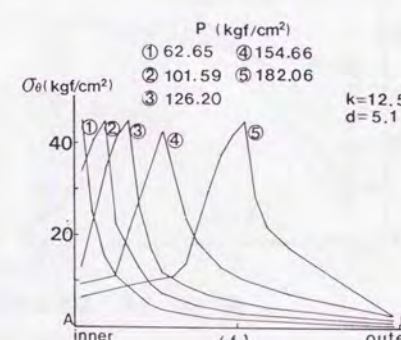
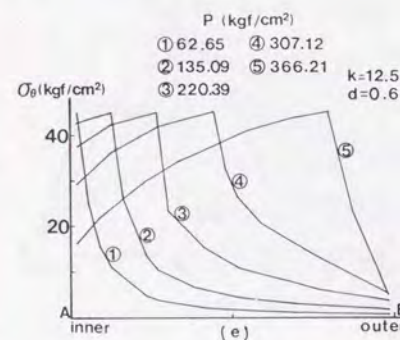
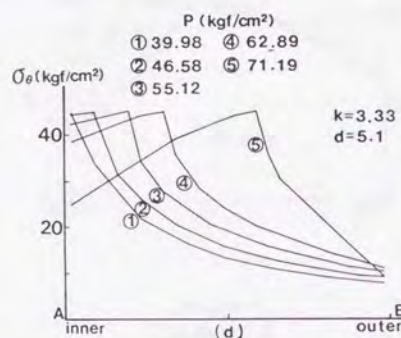
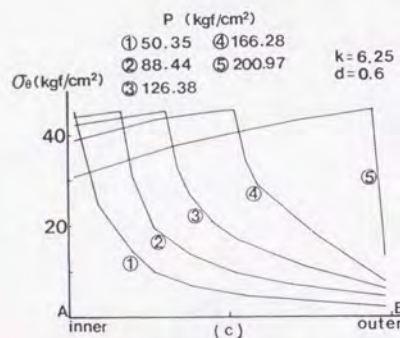
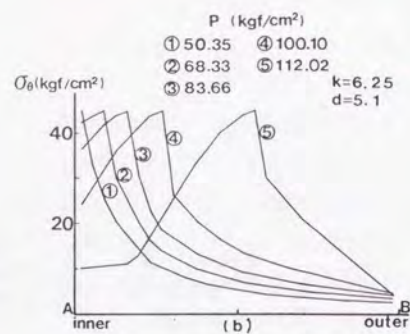
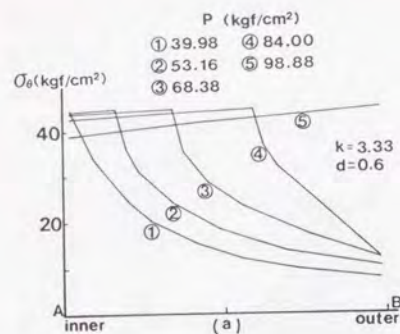


図-5.19 圧力の増加によるひびわれ面上の引張応力の変化

#### 5.4.5 円筒の破壊性状

図-5.20には円筒の内圧 $P$ を増加させたときの内圧と内壁の平均変位の関係を示した。図(a)は $k=3.33$ 、図(b)は $k=6.25$ 、図(c)は $k=12.5$ であるから、各々の図に示されている曲線は相似な円筒供試体の解析結果である。これらの図は寸法効果によって破壊圧力が変化すること以外に、破壊圧力を越えた後で圧力の低下の様子も円筒の大きさによって変わることを示している。内径が大きいほど破壊圧力時の平均変位は大きい、圧力が低下する途中でsnap-backを生じており、急激な破壊が生じていることがわかる。

図-5.21には円筒の内径が2.9cmの時の内圧と内壁の平均変位またはひずみの関係を示してある。なお、同図のひずみは内壁の平均変位から求めた。内径が一定で外径だけを変化させているために、円筒の内壁に最初にひびわれが発生するときの圧力やひずみは3者の間では差は小さい。しかし、破壊圧力が作用しているときの圧力やひずみは大きな差がある。原田の実験によれば $k<5$ のときは、瞬時に破壊が生じ、 $k>5$ のときはひびわれが進行しながら破壊が起こるといわれている。今回の解析ではこのようなことは、明かではないが、破壊時の内壁のひずみは $k=3.33$ で $476.5 \times 10^{-6}$ 、 $k=12.5$ で $1798.6 \times 10^{-6}$ であることから、 $k$ が大きいほど破壊は徐々に進行することが明かである。

#### 5.4.6 平面応力または平面ひずみを仮定したときの破壊圧力

これまでの解析は平面応力問題を仮定したが、ここでは、平面応力と平面ひずみの仮定の違いが破壊圧力にどのように影響するか検討する。解析に用いた円筒は $k=6.25$ 、内径 $d$ は0.6と5.1cmの2つである。仮定した主ひびわれはこれまでと同じように3本であり、コンクリートの強度は圧縮強度が $438.3 \text{ kgf/cm}^2$ 、引張強度が $44.87 \text{ kgf/cm}^2$ である。解析結果は図-5.22に、内圧と内壁の平均変位の関係で示し、破壊圧力の値と破壊圧力が作用しているときの平均変位を表-5.3に示した。

変位については図-5.22や表-5.3から明らかなように平面応力を仮定した方が少し大きい、破壊圧力はほとんど一致しているといえる。



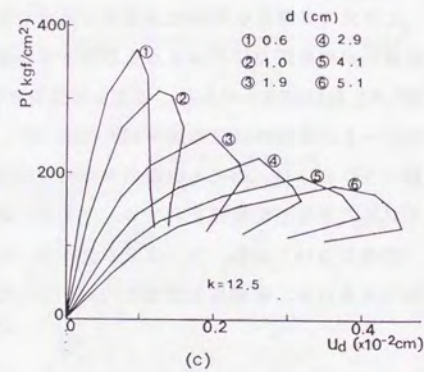
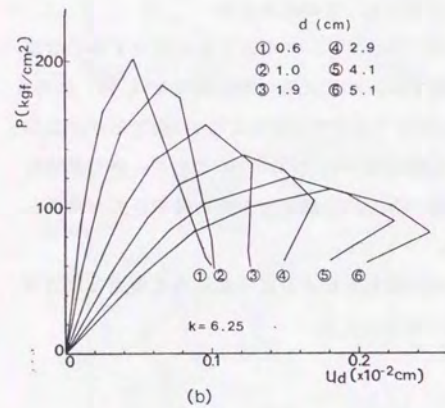
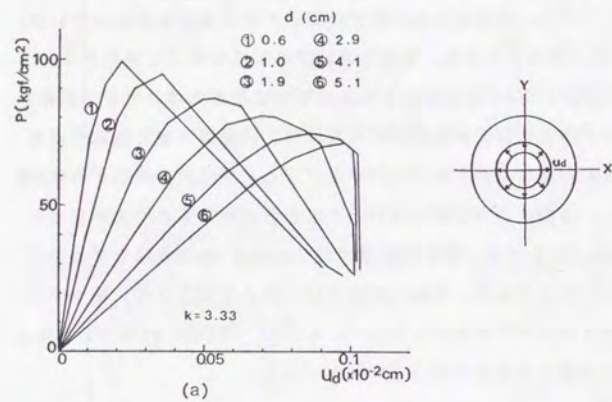


図-5.20 圧力の増加による円筒内壁の平均変位の変化

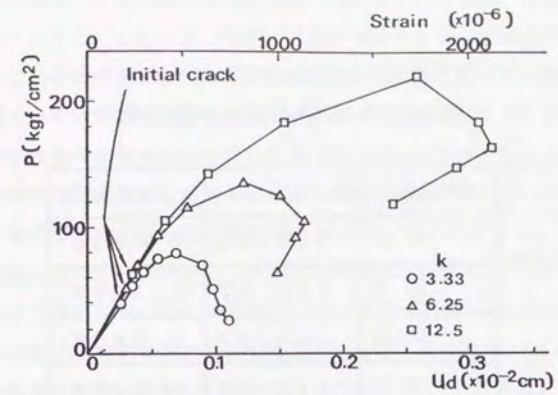


図-5.21 圧力の増加による円筒内壁の平均変位の変化  
( $k$ の変化に対して)

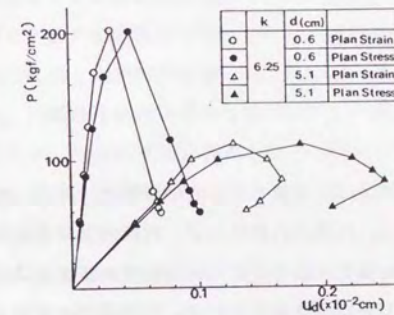


図-5.22 圧力の増加による円筒内壁の平均変位の変化  
(平面応力と平面ひずみ)



表-5. 3平面応力と平面ひずみの差による  
破壊圧力および円筒内壁の平均変位

	d (cm)	$P_u$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	$u_a$ ( $\times 10^{-2}$ cm)
平面ひずみ	0.6	202.18	0.0325
	5.1	113.57	0.1279
平面応力	0.6	200.97	0.0465
	5.1	112.02	0.1819

## 5. 5 まとめ

中空円筒が内部静水圧力によって破壊するときの問題は、従来、厚肉円筒の弾性理論解を用いて検討された。しかし、円筒の内部圧力は、円筒内壁からひびわれが進行するにつれて増加するので、その最大値を求めるためには有限要素法を用いた増分解析法が必要である。本章では第3章で示した平面要素を用いて、引張軟化を考慮した解析方法を円筒の破壊に適用した。破壊圧力のばらつきの要因は種々あるが、ここでは要因として、主ひびわれの数、引張軟化曲線の形状、円筒の寸法を想定した解析を行い、併せて、挙動の解明を試みたのである。得られた結論を述べるとつぎのようになる。

1) 円筒に発生する主ひびわれを2, 3, 32本と仮定した解析を行った。主ひびわれの数が

32本の場合はひびわれが生じてもひびわれ数2, 3本に比べて応力の低下が極めて小さい。実験によると、ひびわれの発生数は2または3本であるから、ひびわれの発生数を32本と仮定すること、すなわち、円筒に多数のひびわれが一樣に生じる仮定するのは適切でないことがわかる。ひびわれ発生数を2または3本と仮定するとき、両者の破壊圧力時の応力分布は多少の差はあるもののほぼ同じ傾向を示している。すなわち円筒の外径と内径の比 $k$ が増えるにつれて円筒内壁の応力の低下が激しく、特に $k=12.5$ のときは円筒内壁付近のひびわれ面上の応力が引張軟化曲線の第二勾配まで達している。なお、破壊圧力はひびわれの数が2本と3本では3本の方が大きい。

2) 円筒の破壊のシミュレーションで主ひびわれを3本と仮定し、さらに、主ひびわれ間に微細ひびわれを仮定しても圧力が増加するにつれて、微細ひびわれ部では除荷の状態なる。このために、微細ひびわれが破壊圧力に及ぼす影響は小さい。原田の実験によれば、静的破砕剤を用いた場合の破壊モードは多くは、3方向に割れ、120度を形成する破壊モードとなるといわれる。従って、静的破砕剤を用いた場合の円筒の破壊の問題は、3本の主ひびわれだけを仮定して解析を行えば良く、実質的に、それ以前に導入されたひびわれは全体系に対して影響を及ぼさないことがわかった。

3) 引張軟化曲線の形状そのものの変動は破壊圧力の変動に有為な影響を及ぼす。

4) 円筒の破壊圧力に及ぼす寸法効果を明らかにするために、ひびわれの本数を3本と仮定し円筒の寸法を種々と変えて破壊圧力を求めた。円筒の内径は0.6, 1.0, 1.9, 2.9, 4.1, 5.1cm, 円筒の外径と内径の比 $k$ は3.33, 6.25, 12.5として解析を行った。 $k$ が一定の場合は、円筒の内径が小さくなるにつれて、破壊圧力が大きくなることがわかった。このように、円筒の寸法が小さくなるにつれて破壊圧力が増加する理由は、円筒の寸法が小さいほど、ひびわれの幅も小さく、ひびわれ間を伝達される引張応力も大きくなるからである。

5) 原田の実験によれば $k < 5$ のときは瞬時に破壊が生じ、 $k > 5$ のときはひびわれが進行しながら破壊が起こると報告されている。今回の解析ではこのようなことは、明かではないが、図-5. 21に示すように破壊時の内壁のひずみは $k=3.33$ で $476.5 \times 10^{-6}$ 、 $k=12.5$ で $1798.6 \times 10^{-6}$ であることから、 $k$ が大きいほど破壊は徐々に進行することが明確となった。

6) 内圧を受ける円筒の破壊を解析するとき、平面応力と平面ひずみの仮定の違いが破壊圧力にどのように影響するか検討した。仮定した主ひびわれは3本として解析した結果



は、変位は平面応力を仮定した方が少し大きい、破壊圧力はほとんど一致した。

7) 本論文では破壊圧力のばらつきに及ぼす要因として、主ひびわれの数、引張軟化曲線の形状、円筒の寸法（内径は0.6cmから5.1cm、外径は2cmから63.75cm）を想定した解析を行った。解析した条件のもとでは、主ひびわれの数（2本と3本）や引張軟化曲線の形状による破壊圧力のばらつきは円筒の大きさによるばらつきよりも小さい。また、このばらつきはいずれの場合も、円筒の外径と内径の比 $k$ が増加するにつれて影響が大きくなる。見かけ上、ばらつきの大きいと思われていた、この種の無筋コンクリートの破壊耐力の実験データは、寸法効果を考慮に入れて、実験の整理や実験式の誘導を行うことにより、より精度の高い実験式が得られると思われる。



## 6.1 はじめに

有限要素法でコンクリートのひびわれを解析する際、平面要素を用いて引張軟化の解析を行う方法は厳密であるが、計算コストがかかるという問題点がある。はり部材が曲げや軸力を受ける場合は、平面要素の代わりにトラス要素やはり要素のような一元要素を用いることができれば、計算コストや入力データの作成の大きな軽減になる。そこで、本章ではトラス要素やはり要素のような一次元要素を用いて、コンクリートの引張軟化を考慮した解析を行う方法を述べる<sup>6.1), 6.2)</sup>。

4章ではハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理から引張軟化を考慮した平面要素の弾塑性剛性行列を導いた。このために、本章では最初に、4章で示した変分原理を用いてトラス要素の弾塑性剛性行列を導く。その次に、トラス要素の弾塑性剛性行列を応用して、はり要素の弾塑性剛性行列を導く方法を示す。解析例としては切欠きを有するコンクリートはりの直接引張試験、コンクリートはりの曲げ試験の解析例を示し解析方法の妥当性を検討した。

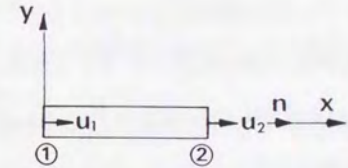


図-6.1 トラス要素

## 6.2 弾塑性剛性行列の誘導

### 6.2.1 トラス要素の弾塑性剛性行列

4章で示した変分原理の式(4.8)は平面問題に関する式であるがせん断応力 $\tau_{xz}$ に関する項を省略することでトラス要素の変分原理を次のように導く事ができる。

$$-\Delta \Pi_{CH} = -\Delta \Pi_{CH} + \int_{S_c} \Delta \lambda \Delta \sigma_n dS - \frac{1}{2} \int_{S_c} \Delta \lambda^2 C_n dS \quad (6.1)$$

$$-\Delta \Pi_{CH} = \iint_{V_n} B(\Delta \sigma_{ij}) dx dy - \int_{S_n} \Delta U \Delta \sigma_n dS + \int_{S_n} \Delta U \overline{\Delta \sigma_n} dS \quad (6.2)$$



図-6. 1に示す棒の断面積を一定とし、軸力のみ作用すると仮定する。座標軸は同図に示すように $x$ 軸を棒の図心軸にとる。このとき、局所座標系の $n$ 軸は $x$ 軸と平行になり、局所座標系で定義した $U$ も $x$ 軸に平行となる。したがって、応力は $\sigma_x$ だけであり、変位 $U$ は節点1の $u_1$ と節点2の $u_2$ だけとなる。

応力場を $\sigma_x = \Delta\beta$ 、断面積を $A$ 、要素の長さを $L$ 、ヤング率を $E$ 、応力とひずみの関係を $\Delta\sigma_x = \Delta\varepsilon_x E$ とすると、式(6.2)のコンプリメンタリエネルギー関数の積分は次のようになる。

$$\iint_{V_n} B(\Delta\sigma_x) dx dy = \iint_{V_n} \frac{1}{2} \Delta\sigma_x \Delta\varepsilon_x dx dy = \frac{1}{2} (AL/E) \Delta\beta^2$$

この式より $[H] = [AL/E]$ となる。式(6.2)の要素境界積分は図-6. 1の節点変位 $u_1, u_2$ を用いて

$$\int_{V_n} \Delta U \Delta\sigma_n dS = -\Delta u_1 \Delta\beta A + \Delta u_2 \Delta\beta A = \Delta\beta [-A \quad A] \{\Delta u\}$$

であるから、 $[G] = A[-1 \quad 1]$ となる。

式(6.1)の右辺第1項の積分は $\int_{Sc} \Delta\lambda \Delta\sigma_n dS = \Delta\lambda \Delta\beta A$ であるから、これより $[G^*] = [A]$ が得られる。

式(6.1)の右辺第2項の積分は $-\frac{1}{2} \int_{Sc} \Delta\lambda^2 C_n dS = -\frac{1}{2} \Delta\lambda^2 [C_n A]$ であるから、これより $[G^{**}] = [C_n A]$ が得られる。

これらの $[H], [G], [G^*], [G^{**}]$ を式(4.26)に代入することで弾塑性剛性行列式 $[k_{ep}]$ が得られる。

$$[k_{ep}] = \frac{C_n EA}{E + C_n L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

さらに、これらの式を式(4.24)に代入することでラグランジュの未定乗数、すなわち、ひ

びわれ幅が得られる。

$$\Delta\Gamma = E(C_n L + E) \cdot (\Delta u_2 - \Delta u_1) \quad (6.4)$$

式(4.23)からは応力が得られる。

$$\Delta\sigma_x = EC_n / (C_n L + E) \cdot (\Delta u_2 - \Delta u_1) \quad (6.5)$$

図-6. 1で節点1を固定し節点2に外力 $\overline{F}_2$ が作用しているとき、引張軟化領域での変位と外力の関係は式(6.5)より

$$\Delta u_2 = \frac{C_n L + E}{EC_n A} \overline{F}_2 \quad (6.6)$$

が得られる。この式は図-6. 2に示すように要素内に $C_n$ のバネを有するトラス要素の変位と同じである。したがって、引張軟化構成式をラグランジュの未定乗数法でハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理に導入することの物理的な意味はトラス要素においては、要素内にバネを挿入することと同じである。

式(6.5)の応力と変位の関係式はハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理を用いなくてもCarpinteri<sup>63)</sup>が示した式からも導くことができる。すなわち、棒に引張軟化が生じているとき棒全体の伸びを $\delta$ 、全ひびわれ幅 $W$ が図-6. 3に示すように0から $W_c$ の間にあるとする。このとき、棒の伸びは、ひびわれの生じてない弾性体の部分の伸びとひびわれ部分の伸びの和であるから、次式のように表すことができる。

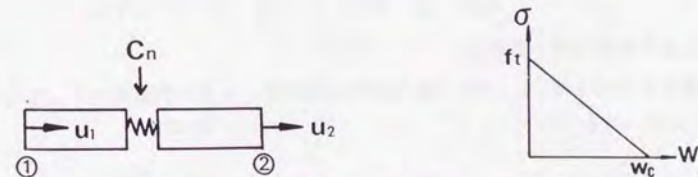


図-6. 2 弾塑性トラス要素

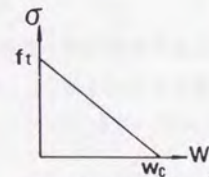


図-6. 3 引張軟化曲線(一直線モデル)



$$\delta = \sigma L / E + W_c (1 - \sigma / f_t) \quad (6.7)$$

この式で  $C_n = -f_t / W_c$  であるから、棒の伸びの増分  $\Delta \delta$  と応力の増分  $\Delta \sigma$  の関係を求めると

$$\Delta \sigma = EC_n / (C_n L + E) \cdot \Delta \delta \quad (6.8)$$

となる。式(6.8)で  $\Delta \delta = (\Delta u_2 - \Delta u_1)$  であるので、式(6.5)と式(6.8)は一致する。

式(6.3)の弾塑性剛性行列は部材座標系で示してあるので、全体座標系で表すためには座標変換行列  $[T]$  を用いて、次式のように変換する必要がある。

$$[K_{ee}] = [T]^T [k_{ee}] [T] \quad (6.9)$$

引張軟化構成式として応力とひびわれ幅の関係ではなく、図-6.4に示すように応力とひずみの関係で表す場合がある。このために、両者を換算するための関係式を求める必要がある。本研究では、次のように求めた。図-6.1で節点1を固定し節点2に強制変位を与えたときの引張軟化時の応力増分は、引張軟化構成式が応力とひびわれ幅の関係で与えられるときは、式(6.5)から次のように求められる。

$$\Delta \sigma_x = EC_n / (C_n L + E) \Delta u_2 \quad (6.10)$$

また、引張軟化則が応力とひずみの関係で与えられるときは次のようになる。

$$\Delta \sigma = \varepsilon (E \kappa) = (E \kappa / L) \cdot \Delta u_2 \quad (6.11)$$

式(6.10), (6.11)より次式が得られる。

$$C_n = \kappa / (1 - \kappa) \cdot (E / L) \quad (6.12)$$

なお、引張軟化のときは  $\kappa$  は負となる。

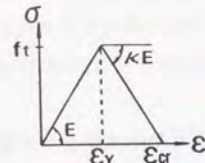


図-6.4 分布ひびわれの引張軟化モデル

## 6.2.2 はり要素の弾塑性剛性行列

本研究では、はり要素の弾塑性剛性行列を導くのに、鉄筋コンクリートの分野でよく用いられている方法、すなわち、一本のはりを高さ方向に分割して計算する方法を用いた。図-6.5に示すように、はりの軸方向にX座標、高さ方向にY座標、XY面に垂直にZ座標を仮定する。はり要素のポテンシャルエネルギーの原理は  $U_c$  をひずみエネルギー、 $V$  を外力によるポテンシャルエネルギーとすると次式のように表すことができる。

$$\Pi = U_c + V \quad (6.13)$$

$$U_c = \sum_{i=1}^n \iiint_{V_i} \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dx dy dz \quad (6.14)$$

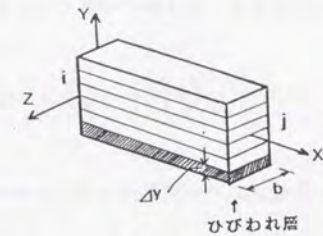


図-6.5 はり要素の座標系

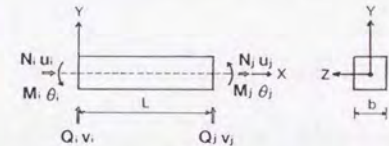


図-6.6 はり要素

ここで、 $n$  は要素の数、 $\sigma_x$  はX軸に垂直な面に作用する鉛直応力、 $\varepsilon_x$  はX方向のひずみである。外力は、はり要素の節点のみに作用していると仮定すれば  $V$  は図-6.6に示してある節点変位や外力を用いて次のように表すことができる。

$$V = \{U\}^T \{F\} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \{U\}^T &= \{u_1, v_1, \theta_1, \dots, u_m, v_m, \theta_m\} \\ \{F\}^T &= \{\bar{N}_1, \bar{Q}_1, \bar{M}_1, \dots, \bar{N}_m, \bar{Q}_m, \bar{M}_m\} \end{aligned}$$

ここで、 $m$  は節点数である。平面保持の仮定をすれば、 $\varepsilon_x$  は次のように表される。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} y \quad (6.16)$$



ここで、 $u$ 、 $v$  はそれぞれ X 方向と Y 方向の変位である。式(6.16)を式(6.14)に代入すると、ひずみエネルギーは 1 個の要素については次のように表される。

$$U_* = \frac{1}{2} \iiint_V E \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} y \right)^2 dx dy dz \quad (6.17)$$

式(6.17)の変位  $u$ 、 $v$  は次式のように  $u$  は一次式、 $v$  は三次式を仮定する。

$$\begin{aligned} u &= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 \\ v &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 \theta_1 + \alpha_3 v_2 + \alpha_4 \theta_2 \end{aligned} \quad (6.18a, b)$$

$\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  は次式に示す。

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1 - \frac{x}{L}, \quad \beta_2 = \frac{x}{L} \\ \alpha_1 &= 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3, \quad \alpha_2 = -\left[\left(\frac{x}{L}\right) - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right] \cdot L \\ \alpha_3 &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3, \quad \alpha_4 = -\left[-\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right] \cdot L \end{aligned}$$

式(6.18a, b)を式(6.17)に代入すると

$$\begin{aligned} U_* &= \frac{1}{2} \iiint_V E \left( u_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} y \right. \\ &\quad \left. + v_2 \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} y + v_3 \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial x^2} y + v_4 \frac{\partial^2 \alpha_4}{\partial x^2} y \right)^2 dx dy dz \end{aligned} \quad (6.19)$$

となる。式(6.19)をマトリックス表示すると次のようになる。

$$U_* = \frac{1}{2} \{u\}^T [K_{**}] \{u\} \quad (6.20)$$

$$\{u\}^T = (u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2)$$

$$[K_{**}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ & & & & k_{55} & k_{56} \\ \text{sym.} & & & & & k_{66} \end{bmatrix}$$

ここで、 $[K_{**}]$  は弾塑性剛性行列である。本研究では図-6.5に示すようにひびわれ層を考慮しているので、弾塑性剛性行列の中の各係数の積分は層ごとに計算を行う。はり要素の弾塑性剛性行列  $[K_{**}]$  を具体的に示すと次のようになる。

$$\begin{aligned} k_{11} &= \int_0^L \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \right)^2 dx \int_A E dA = \frac{E_a}{L} \\ k_{12} &= \int_0^L \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} \right) dx \int_A E y dA = 0 \\ k_{13} &= \int_0^L \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} \right) dx \int_A E y dA = \frac{E_a}{L} \\ k_{14} &= \int_0^L \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial x} \right) dx \int_A E dA = \frac{E_a}{L} \\ k_{15} &= \int_0^L \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial x^2} \right) dx \int_A E y dA = 0 \\ k_{16} &= \int_0^L \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 \alpha_4}{\partial x^2} \right) dx \int_A E y dA = \frac{E_b}{L} \\ k_{22} &= \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} \right)^2 dx \int_A E y^2 dA = \frac{12 E_c}{L^3} \\ k_{23} &= \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} \right) dx \int_A E y^2 dA = -\frac{6 E_c}{L^2} \\ k_{24} &= \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial x} \right) dx \int_A E y dA = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
k_{25} &= \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial x^2} \right) dx \int_A E y^2 dA = -\frac{12 E_c}{L^3} \\
k_{26} &= \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \alpha_4}{\partial x^2} \right) dx \int_A E y^2 dA = -\frac{6 E_c}{L^2} \\
k_{33} &= \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} \right)^2 dx \int_A E y^2 dA = \frac{4 E_c}{L} \\
k_{34} &= \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial x} \right) dx \int_A E y dA = \frac{E_b}{L} \\
k_{35} &= \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial x^2} \right) dx \int_A E y^2 dA = \frac{6 E_c}{L^2} \\
k_{36} &= \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \alpha_4}{\partial x^2} \right) dx \int_A E y^2 dA = \frac{2 E_c}{L} \\
k_{44} &= \int_0^L \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial x} \right)^2 dx \int_A E dA = \frac{E_a}{L} \\
k_{45} &= \int_0^L \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial x^2} \right) dx \int_A E y dA = 0 \\
k_{46} &= \int_0^L \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 \alpha_4}{\partial x^2} \right) dx \int_A E y dA = -\frac{E_b}{L} \\
k_{55} &= \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial x^2} \right)^2 dx \int_A E y^2 dA = \frac{12 E_c}{L^3} \\
k_{56} &= \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \alpha_4}{\partial x^2} \right) dx \int_A E y^2 dA = \frac{6 E_c}{L^2} \\
k_{66} &= \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \alpha_4}{\partial x^2} \right)^2 dx \int_A E y^2 dA = \frac{4 E_c}{L}
\end{aligned}$$

なお,  $k_{ij} = k_{ji}$ ,  $L$  = 要素の長さ,  $dA = dy dz$ ,

$$E_a = \int_A E dA, \quad E_b = \int_A E y dA, \quad E_c = \int_A E y^2 dA$$

である。

$k_{ij}$  の係数の中に  $E_a, E_b, E_c$  のようにヤング係数  $E$  の断面積分があるが, これらを具体的に示せば次のようになる。

$$E_a = b \sum_{j=1}^i E_j \Delta y, \quad E_b = b \sum_{j=1}^i E_j y_j \Delta y, \quad E_c = b \sum_{j=1}^i E_j y_j^2 \Delta y \quad (6.21)$$

ここで,  $b$  = はりの幅,  $i$  = 層数, はりの高さを  $H$  とすると,  $\Delta y = H/i$ ,  $y_j = j$  層の  $y$  座標である。  $E_j$  は次の値を用いる。

弾性状態  $E_j = E$  (コンクリートのヤング係数)

引張軟化  $E_j = C_{n1} E L / (E + C_{n1} L)$  (応力が引張軟化曲線の第1勾配:  $C_{n1}$  の時)

$E_j = C_{n2} E L / (E + C_{n2} L)$  (応力が引張軟化曲線の第2勾配:  $C_{n2}$  の時)

完全弾塑性の場合は降伏した層の剛性  $E_j$  を  $E_j = 0$  とする。

### 6.3 オフセットビーム要素<sup>64)</sup>

コンクリートの破壊エネルギーの試験方法として, RILEMでは切欠きはり(図-6.7)の3点曲げ試験から破壊エネルギーを求めている。切欠きはりでは切欠き部分と切欠きのない部分では図心の位置が異なる。このために, はり要素で切欠きを有するはりの曲げ試験をシミュレーションするときは図心のずれを考慮した解析が必要である。

図-6.8に示すように図心での節点変位を  $u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2$  とし, 図心から  $D_y$  離れた点の変位を  $u_{10}, v_{10}, \theta_{10}, u_{20}, v_{20}, \theta_{20}$  とすれば, 平面保持の仮定より

$$\begin{aligned}
u_{10} &= u_1 + D_y \theta_1, & u_{20} &= u_2 + D_y \theta_2 \\
v_{10} &= v_1, & v_{20} &= v_2 \\
\theta_{10} &= \theta_1, & \theta_{20} &= \theta_2
\end{aligned} \quad (6.22)$$

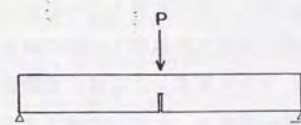


図-6.7 コンクリートはりの曲げ試験

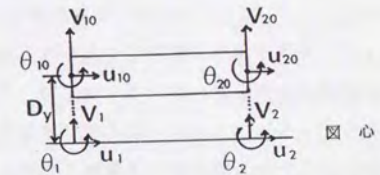


図-6.8 オフセットビーム要素



の関係が成り立つ。式 (6.22) をマトリックス表示すると

$$\begin{Bmatrix} u_{10} \\ v_{10} \\ \theta_{10} \\ u_{20} \\ v_{20} \\ \theta_{20} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [T] \{u\}$$

となる。図心がずれているときの弾塑性剛性行列を  $[k'_{ee}]$  とすると

$$[k'_{ee}] = [T]^T [k_{ee}] [T] \quad (6.23)$$

となる。

一次要素を用いて引張軟化の解析を行うときの増分法のアルゴリズムは4章5節で示した step に準じて行えばよいが、一次要素の具体的な増分法のアルゴリズムは参考文献61) に示してある。

#### 6. 4 トラス要素による数値計算結果による検証

##### 6. 4. 1 両側切欠きを有する棒の直接引張試験

Cornelissenら<sup>65)</sup>の両側切欠きを有する長方形断面の棒の引張力による実験のシミュレーションをトラス要素を用いて行う。

コンクリートのヤング係数は  $E = 39270 \text{ N/mm}^2$ 、ポアソン比は  $\nu = 0.2$ 、引張強度は  $f_t = 3.2 \text{ N/mm}^2$ 、破壊エネルギーは  $G_f = 103.1 \text{ J/m}^2$  である。引張軟化曲線としては六郷らが提案した二直線モデル ( $f_t/4$  の所に折れ曲がりがある) を用いる。

トラス要素を用いて解析するときは、図-4. 19において切欠き部とそれ以外の部分の2要素に分割した。図-6. 9には、平均応力  $\sigma$  (軸力を切欠き位置での棒の断面積で割る) とエクステンソメータの伸び  $\delta$  の関係を示した。トラス要素による解は実験値と最大荷重および最大荷重後の荷重低下領域においても大略一致する。トラス要素による、この計算例は剛性方程式の未知数が2で、増分の回数もわずか3回で手計算で求めている。

平面三角形要素で解析するときに比べればより経済的である。

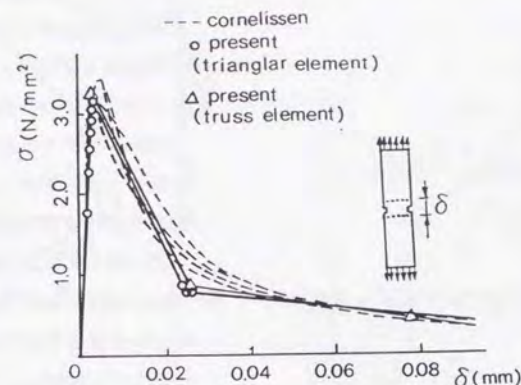


図-6. 9 平均応力とエクステンソメータの伸びの関係  
(トラス要素による解)

##### 6. 4. 2 骨組構造の解析 (2部材の場合)

Runessonら<sup>23)</sup>はポテンシャルエネルギーの原理を用いて、増分法の各増分段階で繰り返し計算で解を求める方法で引張軟化を示す材料の解析例を示している。ここでは、Runessonらが示した2部材で構成された骨組の引張軟化解析をトラス要素を用いて解析し比較してみる。解析対象は図-6. 10に示すような骨組構造である。境界条件は節点AとDの鉛直変位と水平変位が拘束されており、節点Cの鉛直方向には強制変位  $\bar{V}_2$  が作用している。

引張軟化は図-6. 4に示すように、軟化域の応力とひずみの関係が一直線モデルで与えられており、 $\kappa = -0.233$ 、引張破壊が生じるときのひずみは  $\epsilon_Y$  である。このために、式(6.12)を用いて  $C_n$  を求めた。なお、引張軟化の生じる場所は図-6. 10のAB部分のみである。トラス要素で解析するときは、同図に示すようにACとCDの2要素で解析した。

解析結果は、鉛直変位  $\bar{V}_2$  と水平変位  $U_2$  の関係で図-6. 11に示す。Runessonらの解と比較すると、部材AB部分が引張強度に達するa点は一致しているが、b点は著者の解が  $\bar{V}_2 = U_2 = 3.742 \epsilon_Y L$  に対しRunessonらは、それよりも、少し大きい値となっている。図-6. 11の線bcは部材ACが破壊したあとの剛体変位を意味しているので、 $\bar{V}_2 = U_2$  となる必要があるが、著者の解はこの条件を満たしている。



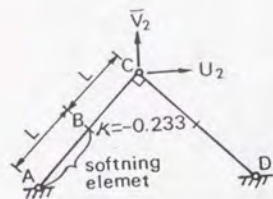


図-6.10 骨組の引張軟化解析(2部材)

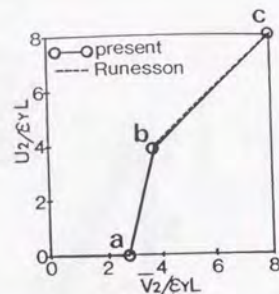


図-6.11  $\bar{V}_2 - U_2$  の関係

#### 6.4.3 骨組構造の解析(5部材の場合)

図-6.12に示す骨組の引張軟化解析の例を示す。この解析例は園田<sup>24)</sup>が全ポテンシャルエネルギー増分関数の最小化問題を非線形計画法の手法を用いて解析している。引張軟化は図-6.4に示すように応力とひずみの関係で表されており、 $\kappa$ は-1.0、-2.0、-5.0の3ケースである。引張強度は $f_t = 1.0$ 、引張破壊が生じる時のひずみは $\epsilon_y = 1.0$ 、ヤング係数は $E = 1$ 、断面積は $A = 1$ 、境界条件は図-6.12に示すように、節点1と節点4の鉛直変位と水平変位は拘束されており、節点3には強制変位 $\bar{U}_3$ が加えられている。解析結果は節点3に作用する反力 $P$ と変位 $\bar{U}_3$ の関係で、図-6.13に示した。図-6.13の(a)は $\kappa = -1.0$ の結果を示してあるが、実線はトラス要素による解、丸印は園田による解である。同図においてA点は部材④が引張強度に達したときの荷重、線ABは部材④の引張軟化の状態を示している。B点は部材④の応力がすべて解放された状態を示す。B点までは園田による解と著者の解とほぼ一致している。しかし、増分の回数が両者の解析方法で大きな差がある。著者の解析方法は $R_{min}$ 法を用いているためにわずか2回の増分でB点が求められるのに対し、園田の解析方法では10回以上の増分を必要としている。線BDは部材④を取り除いたトラスの弾性挙動を意味し、D点は部材①と部材③が同時に引張強度に達する時の荷重である。

図-6.13の(b)には $\kappa = -2.0$ の解析結果を示してあるが $\kappa = -1.0$ とほぼ同じ結果なので説明は省略する。

図-6.13の(c)には $\kappa = -5.0$ の解析結果を示してあるが、破壊順序は $\kappa = -1.0$ と同じなので反力 $P$ と変位 $\bar{U}_3$ の関係は大略同じである。 $\kappa = -5.0$ が $\kappa = -1.0$ と異なるところはA点からB点に移るところである。すなわち、園田の解はA点からB'点まで荷重は急激に低下するが、線AB'上では引張破壊を起こしている部材④は引張軟化構成式を満たしていない。これに対して、著者の解は引張軟化が生じる時には、つねに引張軟化構成式を満たすように解を求めているために(4.5節で示した増分法のstep4で示したように、軟化則を満たすために $\Delta W$ の正のチェックを行い変位増分の向きを決めている)、線ABのようにsnap-backが生じている。

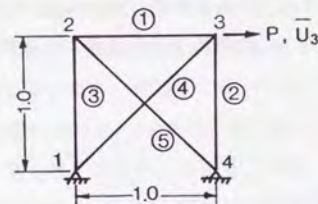


図-6.12 骨組の引張軟化解析(5部材)

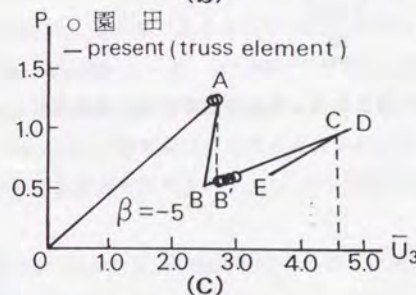
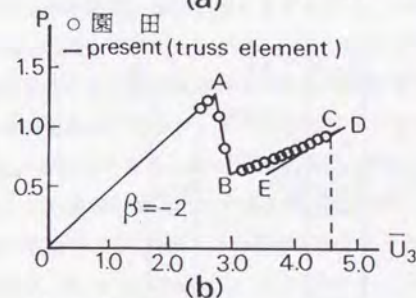
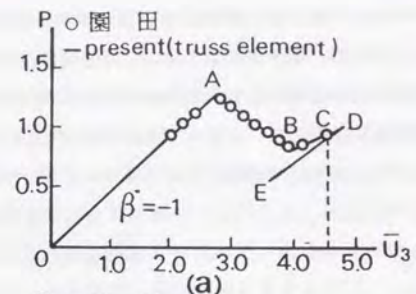


図-6.13 反力 $P$ と変位 $\bar{U}_3$ の関係



## 6. 5 はり要素による数値計算結果による検証

### 6. 5. 1 両側切欠きを有する棒の直接引張試験

Cornelissenn の直接引張試験のシミュレーションは計算例 6. 3. 1 でトラス要素による例があるが、ここでも、提案したはり要素の精度を確認するために直接引張試験のシミュレーションを示す。要素分割は図-6. 14 に示すように 5 分割し、各要素は 50 層に分割している。境界条件は下端 A の変位を拘束し上端 B に引張力を加えた。この時、引張破壊が切欠き先端から進行させるために上端に微小な水平力（引張力の 1/1000）を加えた。

解析結果は図-6. 15 に平均応力とエクステンソメータの伸びの関係で示してあるが、両者の一致は良好である。

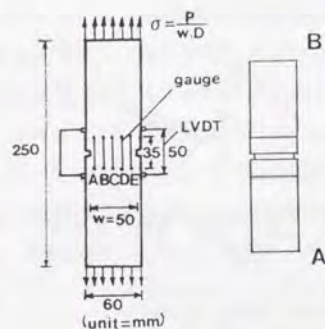
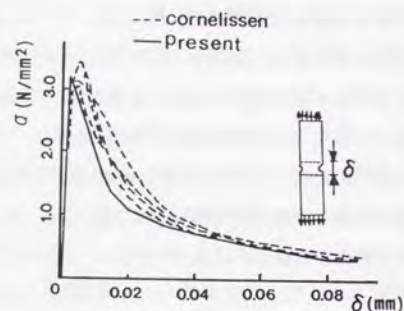


図-6. 14 直接引張試験体の要素分割



6. 15 平均応力とエクステンソメータの伸びの関係（はり要素による解）

### 6. 5. 2 コンクリートはりの曲げ解析での最適な要素の長さについて

本研究で提案しているはり要素によって引張軟化解析をする方法は計算例 6. 4. 1 で示したようにひびわれ面の応力が比較的一様な場合はひびわれを含む要素の長さが短くても解の精度は良好である。しかし、これから後に示すように、曲げひびわれのようにひびわれ面で応力勾配が大きいときは、要素の長さが長くなるにつれて解が低めになる。このために、要素の長さをどのように取るかは重要な問題となる。これまでの研究によれば無筋コンクリートはりの破壊モーメントを平面三角形要素で求めた値は十分精度が高いことがわかっている。本研究では無筋コンクリートはりの破壊モーメントを三角形要素で求め、つぎに、要素の長さをいろいろ変えてはり要素で破壊モーメントを求め、三角形要素による破壊モーメントとはり要素による解が一致する要素の長さを最適な長さとした。

最適な要素の長さを求めるために、三角形要素による破壊モーメントは、単純支持され中央に集中荷重を受ける無筋コンクリートはりの破壊解析から求めた。解析は対称性を利用して行った。この時の要素分割を図-6. 16 に示す。はり要素による破壊モーメントは、図-6. 17 に示すように対称 2 点荷重のはりから求めた。ただし、ひびわれははりの中央の A 点のみに生じるとする。はり要素で解析するときも対称性を利用して解析を行った、この時の要素分割は図-6. 17 の右半分を用いているが、その要素数は 3 である。同図で斜線を入れた要素はひびわれの発生する要素である。なお、はり要素は高さ方向（y 軸）にも 100 層の分割を行っている。はり要素の最適な要素長さを求めるために、ひびわれの発生する要素長さ（L）は、はり高の 1/20 から 2 倍までの範囲で変化させた。

コンクリートの材料特性は  $E = 30000 \text{ N/mm}^2$ ,  $f_t = 3.33 \text{ N/mm}^2$ ,  $G_f = 124 \text{ N/m}$ , 引張軟化曲線は六郷らの提案した二直線モデルを用いた。はり高（H）とスパンの比は常に 10 であり、はり高は 50 mm, 100 mm, 200 mm, 400 mm, 600 mm の 5 ケース、はり幅はいずれも 50 mm である。解析結果は図-6. 18 に示してあるが、同図で縦軸ははり要素による破壊モーメント  $M_1$  と三角形要素による破壊モーメント  $M_2$  の比、横軸ははりの高さ要素の長さの比である。なお、破壊モーメントは三角形要素では最大荷重 \* スパン / 4、はり要素では最大荷重 \* スパン / 6 で求めた値である。

図-6. 18 からいえることは、はり高さが 50 mm から 400 mm では要素の長さをはり高さの 1/2 程度、はり高が 600 mm の時は要素の長さをはり高さの 1/3 程度に取れば良いことがわかる。この結果は一種類のコンクリートに対して得られた結論であるから、さらに広範囲の材料特性のもとで確認する必要がある。



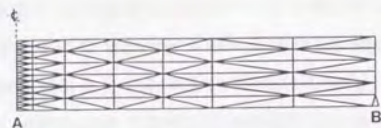


図-6.16 コンクリートはりの破壊モーメント  
を求めるための三角形要素による要素分割

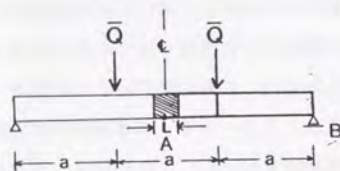


図-6.17 コンクリートはりの破壊モーメント  
を求めるためのはり要素による要素分割

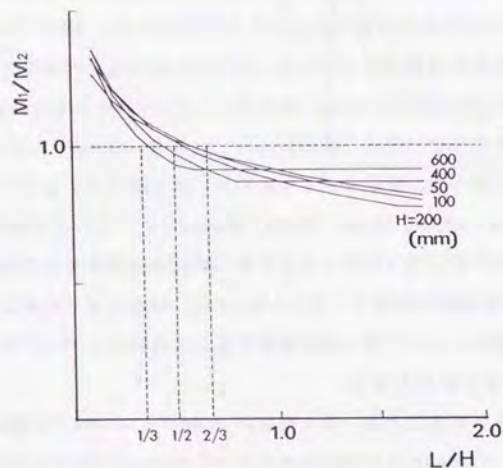


図-6.18 三角形要素とはり要素による  
破壊モーメントの比較

### 6.5.3 切欠きを有するコンクリートはりの曲げ強度解析

はり要素によるコンクリートはりの曲げ強度解析の例として、六郷らによる中央集中荷重が作用するはり（図-6.7）の実験結果<sup>66)</sup>のシミュレーションを示す。切欠きを有するはりでは、切欠き部分と切欠きのない部分では図心軸の位置が違う。このために、6章3節で述べたように、切欠き部分はオフセットビーム要素として弾塑性剛性行列を変換する必要がある。

はり要素による解析は六郷らの実験の内、断面が10cm×10cm、長さ85cmの試験体と断面が15cm×15cm、長さ113cmの試験体の内4体だけを解析した。これらの試験体の材料特性は、 $f_t = 34 \text{ kgf/cm}^2$ 、 $G_t$ は0.175から0.234kgf/cmの間である。計算に用いたヤング係数は $E = 200000 \text{ kgf/cm}^2$ を仮定する。引張軟化曲線は六郷らが提案した二直線モデルを用いた。荷重条件はRILEMで提示しているように、切欠きを有するはりを単純支持し、はり中央に鉛直に集中荷重をかける試験方法（これをvertical loadingとする）と、はりや支点、荷重を90°回転させ自重の影響を打ち消した試験法（これをhorizontal loadingとする）の2種類を用いている。

解析は対称性を利用しているので、要素分割は切欠き部とそれ以外の部分の2要素のみである。なお、ひびわれ要素の長さはいずれもはり高の1/2、層分割数は50である。

解析結果は荷重とスパン中央のたわみの関係で図-6.19に示してある。同図(a)のはりだけは最大荷重が実験値よりも少し低い、他の解析結果は最大荷重や荷重低下域でも実験値と良く一致している。この解析例では剛性行列式のサイズはわずか4個であり図-6.16の平面三角形要素による要素分割（定ひずみの三角形要素1個でもそのサイズは6である）に比べいかに少ないかわかる。また、解析データを作成する上でもはり要素はわずか2個であるから経済的である。



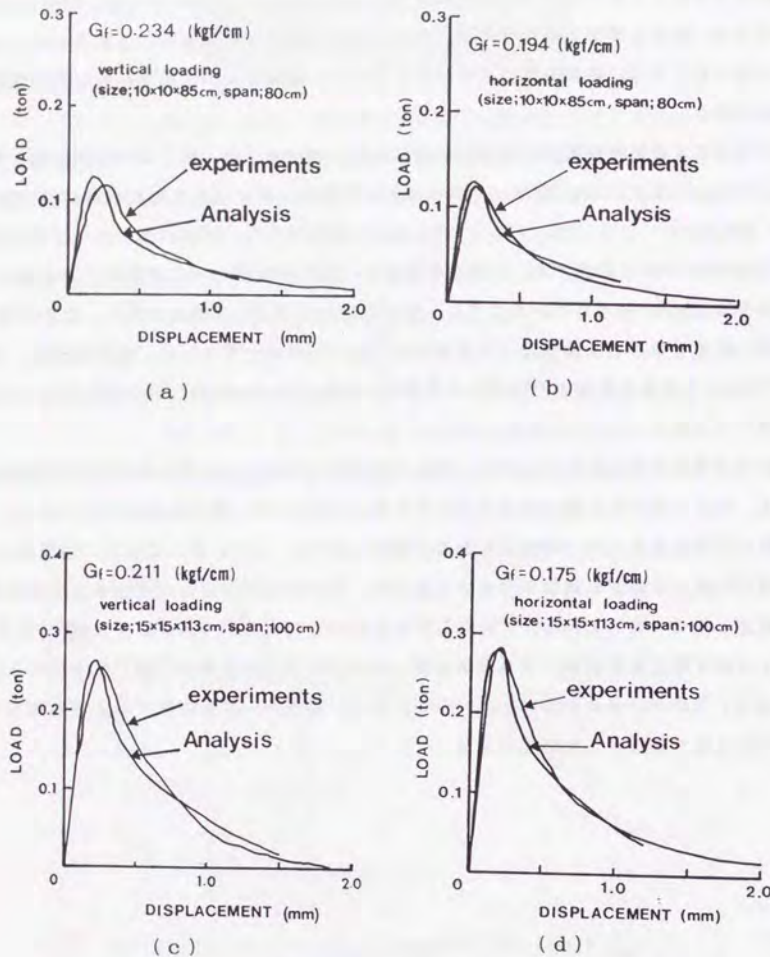


図-6.19 切欠きを有するはりの曲げ試験  
荷重とスパン中央のたわみの関係

#### 6.5.4 コンクリートの曲げ強度の寸法効果

コンクリートの曲げ強度は供試体の寸法の増加に伴って見かけの強度が低下するいわゆる寸法効果がある。寸法効果の原因は強度の確率分布、乾燥収縮や材料分離等が考えられるが、それぞれの原因が定量的にどの程度影響するかは現状では明かではない。近年、コンクリート強度の寸法効果を説明するのに破壊力学が用いられるようになった。

加藤ら<sup>67)</sup>、内田ら<sup>68)</sup>は正方形断面のコンクリートはりを用いて、曲げ強度の寸法効果について実験および平面三角形要素による解析的な研究を行い、曲げ強度の推定式を提案している。

$$f_t/f_c = 1 + 1 / (0.85 + 4.5 (h/l_{ch}))$$

ここで、 $f_t$  = 曲げ強度、 $h$  = 供試体の高さ、 $l_{ch} = E G_t / f_c^2$ である。

本研究で示しているはり要素を用いて、加藤らの提案した曲げ強度の推定式および実験結果との比較を行う。実験に用いているコンクリートの材料特性は  $E = 280000 \text{ kgf/cm}^2$ 、 $f_c = 28.5 \text{ kgf/cm}^2$ 、圧縮強度は  $336 \text{ kgf/cm}^2$  である。解析では  $G_t = 0.10 \text{ kgf/cm}$  と仮定している。供試体の高さ  $h$  は  $5 \text{ cm}$ 、 $10 \text{ cm}$ 、 $20 \text{ cm}$ 、 $30 \text{ cm}$ 、 $40 \text{ cm}$  の 5 種類である。載荷方法は図-6.17 に示すような対称 2 点載荷である。はり要素による解析を行うときの要素分割は、対称性を利用し図-6.17 の右半分を用いている。ひびわれ要素の長さはいずれもはりの  $1/2$ 、層分割数は  $100$  である。

図-6.20 には、加藤らの提案した曲げ強度の推定式および実験結果の範囲を示している。同図にははり要素による解も示しているが、加藤らの推定式および実験結果との一致は良好である。

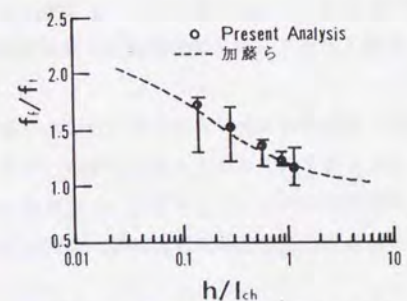


図-6.20 曲げ強度の寸法効果



本章では、引張軟化を考慮したトラス要素とはり要素を用いてコンクリートの引張軟化の解析を行う方法を示した。得られた結論を述べると次のようになる。

- 1) ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理からトラス要素の弾塑性剛性方程式を導いた。数値解析例としては、Cornelissenらの直接引張試験、Runessonらや園田の引張軟化部材で構成されるトラスの破壊問題に適用した結果、得られた解の精度は良好であることがわかった。
- 2) 引張軟化を考慮できるはり要素を提案したが、はり要素を用いるときには要素分割に注意が必要である。すなわち、ひびわれ面を含む要素の長さは、はり高さが50mmから400mmでは要素の長さをはり高さの1/2程度、はり高が600mmの時は要素の長さをはり高さの1/3程度に取る必要がある。
- 3) はり要素を用いて切欠きを有するコンクリートはりの曲げ強度解析に適用したところ、実験と良好に一致した。
- 4) コンクリートの曲げ強度の寸法効果の解析では、はり要素による解は加藤らの推定式および実験結果と良く一致した。これらの結果は解析方法の妥当性を示している。
- 5) はり要素で曲げ破壊の解析を行うときは、計算例6. 5. 3および6. 5. 4で示したように、わずか2または3個の要素で十分である。これは、平面要素を用いた解析に比べ、入力データの作成や計算コストの点で大きな利点である。

渡辺ら<sup>15)</sup>によって提案された平面問題解析用のハイブリッドストレス要素を極限解析に用いるときは、高精度の極限荷重を得ることができる。しかし、それを弾性解析に用いるときは、変位および要素内応力等の弾性解析解は精度上、十分ではなかった。この点を改善する目的で著者は新しいハイブリッドストレス要素を提案した。さらに、近年、コンクリートの引張破壊をモデル化するのによく用いられる仮想ひびわれモデルを、新しい要素に導入する方法についても述べた。内圧を受ける無筋コンクリートの中空円筒の破壊問題に類似した問題は、しばしば、コンクリート工学上の問題として議論されてきた。本研究では仮想ひびわれモデルを考慮した新しいハイブリッドストレス要素の適用例として、中空円筒の破壊問題を取り上げ検討を行った。また、本研究で平面要素を導くときに開発された変分原理や増分法のアルゴリズムは一次元要素のトラス要素とはり要素に応用され、その結果、コンクリートの引張軟化を考慮した非線形解析が容易に行えるようになった。本論文の各章の内容については第1章で概説し、得られた結論については各章末で述べている。それをまとめるとつぎのようになる。

渡辺らによって提案された平面問題解析用のハイブリッドストレス要素は要素境界ですべり破壊を表すことができるので、剛体バネモデルと同様に極限解析に用いるときは高精度の極限荷重が得られる。しかし、渡辺らの示した解析方法は、要素境界が降伏面に達したとき、その境界面に新しい節点を設けて、要素境界が自由にすべるようにしているために、降伏条件式としてはトレスカの式しか取り扱えないという欠点があった。このために、2章では要素境界の降伏条件としてモール・クーロンの式が使用可能となるように、渡辺らによって提案された平面問題解析用のハイブリッドストレス要素を用いて、要素境界ですべり破壊を表すことができる弾塑性剛性行列式を導く方法を提案した。本研究で得られた結果を要約すると、つぎのようになる。

- 1) 要素境界でモール・クーロンの式を付帯条件として、ラグランジュの未定乗数を用いてハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理に導入するとき、ラグランジュの未定乗数の物理的意味を明らかにした。すなわち、ラグランジュの未定乗数の物理的意味は要素間のずれの大きさであり、要素間のひびわれ幅は摩擦係数と要素間のずれから求めることができる。
- 2) モール・クーロンの降伏条件で表される材料の三角形要素の弾塑性剛性行列式を導い



たが、その弾塑性剛性行列式のサイズは応力パラメータとラグランジュの未定乗数を消去することにより、 $9 \times 9$ となった。このために、要素境界に破壊が生じて、弾塑性剛性行列式と弾塑性剛性行列式のサイズは変わらないので、プログラミング上の取り扱いが簡単になった。解析方法の検証例として、斜面上の基礎の支持力問題を解いたが、要素分割が細くなるにつれて、急速に理論解に近づくことが確認された。

渡辺らによって提案された平面問題解析用のハイブリッドストレス要素は極限解析法としては高精度の要素である。しかし、これを弾性解析に用いると変位および要素内応力等は精度上、十分とはいえなかった。3章ではこれを改善する目的で、新しいハイブリッドストレス要素を提案した。新しい要素を用いた弾性解析解は要素内応力の精度も高いので、要素内部で塑性を考慮する方法についても新たに検討した。得られた結論を述べるとつぎのようになる。

- 1) 渡辺らによって提案されたハイブリッドストレス要素を基礎に、変位および要素内の応力の精度が高い新しいハイブリッドストレス要素を提案した。新しい要素は要素内の応力パラメータが12個、要素境界あたりの変位パラメータが4個の三角形要素で、その特徴は、自由度として要素境界の回転角と要素境界に平行なひずみを含んでいる。
- 2) 新しいハイブリッドストレス要素による弾性解の特性を調べるために、片持はり軸力、せん断力および集中モーメントが作用するときの問題を解析した。解析結果によれば、新しい要素による弾性解（変位、要素内の応力および要素境界のひずみ）は要素分割が細くなるにつれて理論解に収束し、渡辺らの要素よりも高精度の解を得ることができた。新しい要素の極限解析への適用例として、ポンチの押込み問題とVノッチを有する薄板の引張解析を行ったが、極限荷重は渡辺らのハイブリッドストレス要素や剛体バネモデルと同じ結果を得た。
- 3) 新しい要素を用いた弾塑性剛性方程式として要素内部だけで塑性を表す方法の検討を行った。塑性を考慮する方法としては、塑性条件式をラグランジュの未定乗数法で変分原理に導入する方法を用いている。このとき、ラグランジュの未定乗数は要素内の塑性評価点ごとに離散的に仮定している。この方法で得られた弾塑性剛性方程式を用いて、半無限地盤上の基礎の支持力問題を解析したところ、解析結果はブラントルの理論解にほぼ一致した。

近年、コンクリートの引張破壊によるひずみ軟化をモデル化するのに、仮想ひびわれモデルがよく用いられる。第4章では仮想ひびわれモデルを新しいハイブリッドストレス要

素に導入する方法を述べた。得られた結論を述べるとつぎのようになる。

- 1) 仮想ひびわれモデルを仮定したときの引張軟化構成式を直接にハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理に導入する方法を示し、これより弾塑性剛性方程式を導く方法を示した。さらに、引張軟化を解析するための増分法のアルゴリズムを提案した。提案した方法はsnap-backが生じて安定して解を求めることが可能である。
- 2) 提案した解析手法をCT試験体の破壊のシミュレーションに適用した。要素の大きさが解に与える影響を調べるために、リガメント上の要素分割を変えた解析を行った。解は要素分割が粗いほど変動が激しくなったが、発散することなく安定した解を得ている。また、実験値と解析値との一致は良好であった。
- 3) 複合破壊の解析例として、切欠きを有するはりのせん断試験、軸圧縮力と曲げせん断力を受ける無筋コンクリート柱の破壊のシミュレーションの例を示した。切欠きを有するはりのせん断試験は最大荷重および荷重低下域でも実験結果に大略一致した。軸圧縮力と曲げせん断力を受ける無筋コンクリート柱の破壊のシミュレーションでは、軸力比が0.2の時は柱の端部に引張ひびわれが生じて破壊した。しかし、軸力比が0.4、0.6と大きくなるにつれて、柱に斜めひびわれが顕著に現れるようになり、軸力比によって破壊のモードが変わることが解析的にも示された。

無筋コンクリートの中空円筒が内部静水圧力によって破壊するときの問題は、従来、厚肉円筒の弾性理論解を用いて検討された。5章では新しいハイブリッドストレス要素を用いた引張軟化解析法を無筋コンクリート中空円筒の内部静水圧力による破壊問題に適用した。得られた結論を述べるとつぎのようになる。

- 1) 無筋コンクリート中空円筒に発生する主ひびわれを2, 3, 32本と仮定した解析を行った。主ひびわれの数が32本の場合はひびわれが生じてもひびわれ数2, 3本に比べて応力の低下が極めて小さい。実験によると、ひびわれの発生数は2または3本であるから、ひびわれの発生数を32本と仮定すること、すなわち、円筒に多数のひびわれが一様に生じる仮定するのは適切でないことがわかる。破壊圧力はひびわれの数が2本と3本では3本の方が大きい。
- 2) 無筋コンクリート中空円筒の破壊のシミュレーションで主ひびわれを3本と仮定し、さらに主ひびわれ間に微細ひびわれを仮定しても、圧力が増加するにつれて微細ひびわれ部では除荷の状態なる。このために、微細ひびわれが破壊圧力に及ぼす影響は小さくなる。原田の実験によれば、静的破砕剤を用いた場合の無筋コンクリート中空円筒



の破壊モードの多くは、3方向に割れ、120度を形成する破壊モードになると報告している。したがって、静的破砕剤を用いた場合の円筒の破壊の問題は、3本の主ひびわれだけを仮定して解析を行えば良く、実質的に、それ以前に導入されたひびわれは全体系に対して影響を及ぼさないことがわかった。

3) 原田の実験<sup>27)</sup>によれば無筋コンクリート中空円筒の外径と内径の比 $k < 5$ のときは瞬時に破壊が生じ、 $k > 5$ のときはひびわれが進行しながら破壊が起こると報告されている。今回の解析ではこのようなことは、明かではないが、 $k$ が大きいほど破壊は徐々に進行することが解析より明確となった。

4) 本研究では無筋コンクリート中空円筒の破壊圧力のばらつきに及ぼす要因として、主ひびわれの数、引張軟化曲線の形状、円筒の寸法を想定した解析を行った。主ひびわれの数(2本と3本)や引張軟化曲線の形状による破壊圧力のばらつきは円筒の大きさによるばらつきよりも小さい。また、このばらつきはいずれの場合も、円筒の外径と内径の比 $k$ が増加するにつれて影響が大きくなる。見かけ上、ばらつきの大きいと思われていた、この種の無筋コンクリートの破壊耐力の実験データは、寸法効果を考慮に入れて、実験の整理や実験式の誘導を行うことにより、より精度の高い実験式が得られると思われる。

第6章は引張軟化を考慮したトラス要素およびはり要素を用いて無筋コンクリートの引張軟化の解析を行う方法を示した。このような一次元要素の開発により無筋コンクリートの引張軟化を考慮した解析が手軽に行えるようになった。得られた結論を述べると次のようになる。

- 1) ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理を用いて、引張軟化を考慮したトラス要素の弾塑性剛性方程式を導いた。トラス要素を無筋コンクリートの直接引張試験、引張軟化を示す部材で構成されるトラスの破壊のシミュレーションに適用した結果、得られた解の精度は良好であることがわかった。
- 2) はり要素を用いた引張軟化解析法を提案し、切欠きを有する無筋コンクリートはりの曲げ強度解析に適用したところ、実験値と良好に一致した。また、切欠きのない無筋コンクリートの曲げ強度の寸法効果の問題では、はり要素による解は実験結果と良好に一致し、提案したはり要素は、寸法効果の問題に有効であることがわかった。

6章の数値解析例ではコンクリートに作用する応力が小さいために、コンクリートの応力-ひずみ曲線としては、非線形を仮定する必要はなかった。しかし、応力が大きいときは

応力-ひずみ曲線として非線形を仮定する必要がある。このような例として、付録Bに低鉄筋比のはりの曲げ破壊解析を示した。最近、コンクリートの破壊を対象とした数値解析の精度あるいは限界を明らかにするために、コンクリート中のアンカーボルトの引き抜きの問題が募集され<sup>77)</sup>比較検討が行われた<sup>78), 79)</sup>。付録Cには新しい要素をアンカーボルトの引き抜き問題に適用した例を示した。







## 付 録

### 付録A 新要素の弾性剛性行列や弾塑性剛性行列の計算に必要な $[H]$ , $[G]$ , $[G^*]$ の計算方法

#### 1. $[H]$ の計算方法

新要素の応力場, 変位場, ラグランジュの未定乗数は, 3章で示したように, それぞれ式(A1), (A2), (A3)のように仮定した。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y & 0 & x & 0 & y^2 & 0 & x^2 & 2xy & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & y & 0 & x^2 & y^2 & 0 & 2xy \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -y & -x & 0 & 0 & -2xy & -y^2 & -x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_{12} \end{Bmatrix} \quad (A1)$$

$$\begin{aligned} U &= u_i - \theta_i S \\ V &= v_i - \varepsilon_i S \end{aligned} \quad (A2)$$

$$\Gamma = \Gamma_{v_i} - \Gamma_{\varepsilon_i} S \quad (A3)$$

式(A1)を $\{\sigma\} = [B]\{\beta\}$ と置き, 歪と応力の関係式を $\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\}$ とする。 $[C]$ を

$$[C] = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_2 & C_3 & C_6 \\ C_3 & C_6 & C_4 \end{bmatrix}$$

と定義する。コンプリメンタリエネルギー関数の積分は式(2.28)に示したように

$$\begin{aligned} \int_{v_n} B(\sigma_{ij}) dx dy &= \frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} \\ [H] &= \int_{v_n} [B]^T [C] [B] dx dy \end{aligned} \quad (A4)$$

である。 $[H]$ の  $i$  行  $j$  列を  $H(i, j)$  とすると,  $[H]$  は(A4)より次のようになる。



$$\begin{aligned}
H(1,1) &= C_1 I_0 & H(1,2) &= C_2 I_0 \\
H(1,3) &= C_5 I_0 & H(1,4) &= C_1 I_y \\
H(1,5) &= C_2 I_x & H(1,6) &= C_1 I_x - C_5 I_y \\
H(1,7) &= C_2 I_y - C_5 I_x & H(1,8) &= C_1 I_{yy} \\
H(1,9) &= C_2 I_{xx} & H(1,10) &= C_1 I_{xx} + C_2 I_{yy} - 2C_5 I_{xy} \\
H(1,11) &= 2C_1 I_{xy} - C_5 I_{yy} & H(1,12) &= 2C_2 I_{xy} - C_5 I_{xx} \\
H(2,2) &= C_3 I_0 & H(2,3) &= C_6 I_0 \\
H(2,4) &= C_2 I_y & H(2,5) &= C_3 I_x \\
H(2,6) &= C_2 I_x - C_6 I_y & H(2,7) &= C_3 I_y - C_6 I_x \\
H(2,8) &= C_2 I_{yy} & H(2,9) &= C_3 I_{xx} \\
H(2,10) &= C_2 I_{xx} + C_3 I_{yy} - 2C_6 I_{xy} & H(2,11) &= 2C_2 I_{xy} - C_6 I_{yy} \\
H(2,12) &= 2C_3 I_{xy} - C_6 I_{xx} \\
H(3,3) &= C_4 I_0 & H(3,4) &= C_5 I_y \\
H(3,5) &= C_6 I_x & H(3,6) &= -C_4 I_y + C_5 I_x \\
H(3,7) &= -C_4 I_x + C_6 I_y & H(3,8) &= C_5 I_{yy} \\
H(3,9) &= C_6 I_{xx} & H(3,10) &= -2C_4 I_{xy} + C_5 I_{xx} + C_6 I_{yy} \\
H(3,11) &= -C_4 I_{yy} + 2C_5 I_{xy} & H(3,12) &= -C_4 I_{xx} + 2C_6 I_{xy} \\
H(4,4) &= C_1 I_{yy} & H(4,5) &= C_2 I_{xy} \\
H(4,6) &= C_1 I_{xy} - C_5 I_{yy} & H(4,7) &= C_2 I_{yy} - C_5 I_{xy} \\
H(4,8) &= C_1 I_{yyy} & H(4,9) &= C_2 I_{xxy} \\
H(4,10) &= C_1 I_{xxy} + C_2 I_{yyy} - 2C_5 I_{xyy} & H(4,11) &= 2C_1 I_{xyy} - C_5 I_{yyy} \\
H(4,12) &= 2C_2 I_{xyy} - C_5 I_{xxy} \\
H(5,5) &= C_3 I_{xx} & H(5,6) &= C_2 I_{xx} - C_6 I_{xy} \\
H(5,7) &= C_3 I_{xy} - C_6 I_{xx} & H(5,8) &= C_2 I_{xyy} \\
H(5,9) &= C_3 I_{xxx} & H(5,10) &= C_2 I_{xxx} + C_3 I_{xyy} - 2C_6 I_{xxy} \\
H(5,11) &= 2C_2 I_{xxy} - C_6 I_{xyy} & H(5,12) &= 2C_3 I_{xxy} - C_6 I_{xxx}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(6,6) &= C_1 I_{xx} + C_4 I_{yy} - 2C_5 I_{xy} \\
H(6,7) &= (C_2 + C_4) I_{xy} - C_5 I_{xx} - C_6 I_{yy} \\
H(6,8) &= C_1 I_{xxy} - C_5 I_{yyy} \\
H(6,9) &= C_2 I_{xxx} - C_6 I_{xxy} \\
H(6,10) &= C_1 I_{xxx} + (C_2 + 2C_4) I_{xyy} - 3C_5 I_{xxy} - C_6 I_{yyy} \\
H(6,11) &= 2C_1 I_{xxy} + C_4 I_{yyy} - 3C_5 I_{xyy} \\
H(6,12) &= (2C_2 + C_4) I_{xxy} - C_5 I_{xxx} - 2C_6 I_{xyy} \\
H(7,7) &= C_3 I_{yy} + C_4 I_{xx} - 2C_6 I_{xy} \\
H(7,8) &= C_2 I_{yyy} - C_5 I_{xyy} \\
H(7,9) &= C_3 I_{xxy} - C_6 I_{xxx} \\
H(7,10) &= (C_2 + 2C_4) I_{xxy} + C_3 I_{yyy} - 3C_6 I_{xyy} - C_5 I_{xxx} \\
H(7,11) &= 2C_2 I_{xyy} + C_4 I_{yyy} - C_6 I_{yyy} - 2C_5 I_{xxy} \\
H(7,12) &= 2C_3 I_{xyy} + C_4 I_{xxx} - 3C_6 I_{xxy} \\
H(8,8) &= C_1 I_{yyyy} \\
H(8,9) &= C_2 I_{xxyy} \\
H(8,10) &= C_1 I_{xxyy} + C_2 I_{yyyx} - 2C_5 I_{xyyy} \\
H(8,11) &= 2C_1 I_{xyyy} - C_5 I_{yyyy} \\
H(8,12) &= 2C_2 I_{xyyy} - C_5 I_{xxyy} \\
H(9,9) &= C_3 I_{xxxx} \\
H(9,10) &= C_2 I_{xxxx} + C_3 I_{xxyy} - 2C_6 I_{xxyy} \\
H(9,11) &= 2C_2 I_{xxyy} - C_6 I_{xxyy} \\
H(9,12) &= 2C_3 I_{xxyy} - C_6 I_{xxxx} \\
H(10,10) &= C_1 I_{xxxx} + (2C_2 + 4C_4) I_{xxyy} + C_3 I_{yyyy} - 4C_5 I_{xxyy} - 4C_6 I_{xyyy} \\
H(10,11) &= 2C_1 I_{xxyy} + 2(C_2 + C_4) I_{xyyy} - 5C_5 I_{xxyy} - C_6 I_{yyyy} \\
H(10,12) &= 2(C_2 + C_4) I_{xxyy} + 2C_3 I_{xyyy} - C_5 I_{xxxx} - 5C_6 I_{xxyy} \\
H(11,11) &= 4C_1 I_{xxyy} + C_4 I_{yyyy} - 4C_5 I_{xyyy} \\
H(11,12) &= (4C_2 + C_4) I_{xxyy} - 2C_5 I_{xxyy} - 2C_6 I_{xyyy} \\
H(12,12) &= 4C_3 I_{xxyy} + C_4 I_{xxxx} - 4C_6 I_{xxyy}
\end{aligned}$$



ここで

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_A dx dy & I_{xy} &= \int_A x y dx dy & I_{xxx} &= \int_A x^3 dx dy \\ I_x &= \int_A x dx dy & I_{xx} &= \int_A x^2 dx dy & I_{xyy} &= \int_A y^3 dx dy \\ I_y &= \int_A y dx dy & I_{yy} &= \int_A y^2 dx dy & I_{xxy} &= \int_A x^2 y dx dy \\ I_{xyy} &= \int_A x y^2 dx dy & I_{yyy} &= \int_A y^4 dx dy & I_{xxx} &= \int_A x^3 y dx dy \\ I_{xxxx} &= \int_A x^4 dx dy & I_{xxyy} &= \int_A x^2 y^2 dx dy & I_{xyyy} &= \int_A x y^3 dx dy \end{aligned}$$

である。本研究ではこれらの要素内積分を行うのに、図-A 1 に示すように三角形を4分割し、各々の3角形に対して数値積分<sup>74)</sup>を用いた。積分点は図-A 1 に示してある7点である。なお、 $[H]$ は対称行列であるので $H(i, j)$ はその半分だけを示してある。

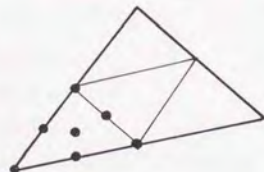


図-A 1 積分点

## 2. $[G]$ の計算方法

式(2.21)の第2項の要素境界上の積分は

$$\int_{\Gamma_n} (U \sigma_n + V \tau_n) dS = \{\beta\}^T [G] \{u\} \quad (A5)$$

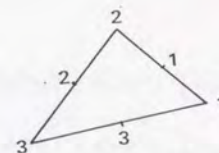


図-A 2 節点番号

である。 $[G]$ の計算方法は従来要素については式(2.31)に示してある。新要素の $[G]$ の計算方法は、式(A1), (A2)に示してあるように、応力や変位等のパラメータの数が増えていだけで、計算方法そのものは従来要素と同じなので、最終的な $[G]$ の結果だけを示す。

要素境界ですべりを表す要素は図-A 2 に示すように、三角形の頂点の節点番号と要素境界の番号を、それぞれ独立に番号を割り付ける必要がある。頂点の節点番号は要素剛性行列を計算するのに用い、要素境界の番号は、図-2. 1 に示したように要素境界の変位を表すのに用いる。

$[G]$ は要素境界の3辺で積分する必要があるが、ここでは、要素境界1の成分だけを具体的に示す。最初に $[G]$ を計算するのに必要な座標、方向余弦等を以下のように定義する。

$x_1$ =節点1のx座標,  $y_1$ =節点1のy座標,  $x_2$ =節点2のx座標,  $y_2$ =節点2のy座標

$d$ =要素境界1の長さとする。 $l, m$ を要素境界1に設定された局所座標系での $n$ 軸の方向余弦とすると

$$l = (y_2 - y_1) / d \quad m = (x_1 - x_2) / d$$

となる。 $x_c$ と $y_c$ を次式のように定義する。

$$x_c = (x_1 + x_2) \quad y_c = (y_1 + y_2)$$

$x, y, s$ の要素境界に関する積分はそれぞれ次式のようにになる。

$$J_{xx} = \int_1^2 x s ds = -d^3 m / 12$$

$$J_{yy} = \int_1^2 y s ds = d^3 l / 12$$



$$J_{xx} = \int_1^2 x^2 ds = l (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) / 3$$

$$J_{yy} = \int_1^2 y^2 ds = l (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) / 3$$

$$J_{xy} = \int_1^2 x y ds = l ((2x_1 + x_2) y_1 + (x_1 + 2x_2) y_2) / 6$$

$$J_{xxs} = \int_1^2 x^2 s ds = l^2 (x_2^2 - x_1^2) / 12$$

$$J_{yys} = \int_1^2 y^2 s ds = l^2 (y_2^2 - y_1^2) / 12$$

$$J_{xys} = \int_1^2 x y s ds = l^2 (x_2 y_2 - x_1 y_1) / 12$$

[G] の  $i$  行  $j$  列を  $G(i, j)$  とすると

$$G(1,1) = l^2 d$$

$$G(1,3) = 0$$

$$G(2,1) = m^2 d$$

$$G(2,3) = 0$$

$$G(3,1) = 2lm d$$

$$G(3,3) = 0$$

$$G(4,1) = y_c d l^2 / 2$$

$$G(4,3) = -d^3 l^3 / 12$$

$$G(5,1) = x_c d m^2 / 2$$

$$G(5,3) = m^3 d^3 / 12$$

$$G(6,1) = x_c d l^2 / 2 - y_c d l m$$

$$G(6,3) = l^2 m d^3 / 4$$

$$G(1,2) = -l m d$$

$$G(1,4) = 0$$

$$G(2,2) = l m d$$

$$G(2,4) = 0$$

$$G(3,2) = (l^2 - m^2) d$$

$$G(3,4) = 0$$

$$G(4,2) = -y_c d l m / 2$$

$$G(4,4) = l m J_{ys}$$

$$G(5,2) = x_c d m l / 2$$

$$G(5,4) = -l m J_{xs}$$

$$G(6,2) = -x_c d l m / 2 - y_c d (l^2 - m^2) / 2$$

$$G(6,4) = l m J_{xs} + (l^2 - m^2) J_{ys}$$

$$G(7,1) = m^2 y_c d / 2 - m l x_c d$$

$$G(7,2) = l m y_c d / 2 - (l^2 - m^2) x_c d / 2$$

$$G(7,3) = -l m^2 d^3 / 4$$

$$G(7,4) = -l m J_{ys} + (l^2 - m^2) J_{xs}$$

$$G(8,1) = l^2 J_{yy}$$

$$G(8,2) = -l m J_{yy}$$

$$G(8,3) = -l^2 J_{yys}$$

$$G(8,4) = l m J_{yys}$$

$$G(9,1) = m^2 J_{xx}$$

$$G(9,2) = m l J_{xx}$$

$$G(9,3) = -m^2 J_{xss}$$

$$G(9,4) = -l m J_{xss}$$

$$G(10,1) = l^2 J_{xx} + m^2 J_{yy} - 4 l m J_{xy}$$

$$G(10,2) = -l m J_{xx} + l m J_{yy} - 2 (l^2 - m^2) J_{xy}$$

$$G(10,3) = -l^2 J_{xss} - m^2 J_{yys} + 4 l m J_{xys}$$

$$G(10,4) = l m J_{xss} - l m J_{yys} + 2 (l^2 - m^2) J_{xys}$$

$$G(11,1) = 2 l^2 J_{xy} - 2 l m J_{yy}$$

$$G(11,2) = -2 l m J_{xy} - (l^2 - m^2) J_{yy}$$

$$G(11,3) = -2 l^2 J_{xys} + 2 l m J_{yys}$$

$$G(11,4) = 2 l m J_{xys} + (l^2 - m^2) J_{yys}$$

$$G(12,1) = 2 m^2 J_{xy} - 2 l m J_{xx}$$

$$G(12,2) = 2 l m J_{xy} - (l^2 - m^2) J_{xx}$$

$$G(12,3) = -2 m^2 J_{xys} + 2 l m J_{xss}$$

$$G(12,4) = -2 l m J_{xys} + (l^2 - m^2) J_{xss}$$

となる。以上の  $G(1,1)$  から  $G(12,4)$  までは要素境界1についての計算であるから, [G]

を求めるには, 要素境界2と3についても同様な計算をする必要がある。なお, 要素境界2については  $G(i, j)$  で  $i$  は1から12,  $j$  は5から8, 要素境界3については  $G(i, j)$  で  $i$  は1から12,  $j$  は9から12となり最終的に12行12列の行列が得られる。



### 3. $[G^*]$ の計算方法

式(2.20)の第4項のすべり面での積分は従来要素を用いたとき、降伏条件としてモール・クローンの式を仮定すれば2章の式(2.36)に示すように、

$$\int_{s_1} \Gamma (\sigma_n \pm C_1 \tau_{ns}) dS = \{\beta\} \int_{s_1} [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7] dS \Gamma \quad (A6)$$

となる。ここで  $C_1$  は摩擦係数、 $a_1, a_2 \dots$  は次に示す式である。

$$\begin{aligned} a_1 &= \pm C_1 l^2 - l m & a_2 &= \pm C_1 (l^2 x - 2 l m y) - l m x - y (l^2 - m^2) \\ a_3 &= y (\pm C_1 l^2 - l m) & a_4 &= \pm C_1 m^2 + l m & a_5 &= x (\pm C_1 m^2 + l m) \\ a_6 &= \pm C_1 (m^2 y - 2 l m x) + l m x y (l^2 - m^2) \\ a_7 &= \pm 2 l m C_1 + (l^2 - m^2) \end{aligned}$$

この  $a_1, a_2 \dots$  は式(2.31)の  $[G]$  の  $i$  行  $j$  列を  $G(i, j)$  とすると、次式のように表すことができる。

$$a_1 = \pm C_1 G(1, 1) + G(1, 2), \quad a_2 = \pm C_1 G(2, 1) + G(2, 2) \quad \dots$$

従って、これらの式を参考にすれば、図-A2の要素境界の番号1にすべりが生じているときの新要素の  $[G^*]$  の  $i$  行  $j$  列の係数  $G^*(i, j)$  は、新要素の  $[G]$  を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} G^*(1, 1) &= \pm C_1 G(1, 1) + G(1, 2) & G^*(1, 2) &= \pm C_1 G(2, 1) + G(2, 2) \\ G^*(1, 3) &= \pm C_1 G(3, 1) + G(3, 2) & G^*(1, 4) &= \pm C_1 G(4, 1) + G(4, 2) \\ G^*(1, 5) &= \pm C_1 G(5, 1) + G(5, 2) & G^*(1, 6) &= \pm C_1 G(6, 1) + G(6, 2) \\ G^*(1, 7) &= \pm C_1 G(7, 1) + G(7, 2) & G^*(1, 8) &= \pm C_1 G(8, 1) + G(8, 2) \\ G^*(1, 9) &= \pm C_1 G(9, 1) + G(9, 2) & G^*(1, 10) &= \pm C_1 G(10, 1) + G(10, 2) \\ G^*(1, 11) &= \pm C_1 G(11, 1) + G(11, 2) & G^*(1, 12) &= \pm C_1 G(12, 1) + G(12, 2) \end{aligned}$$

なお、要素境界の番号1と2に同時にすべりが生じているときは、さらに、つぎの係数が追加される。

$$\begin{aligned} G^*(2, 1) &= \pm C_1 G(1, 5) + G(1, 6) & G^*(2, 2) &= \pm C_1 G(2, 5) + G(2, 6) \\ G^*(2, 3) &= \pm C_1 G(3, 5) + G(3, 6) & G^*(2, 4) &= \pm C_1 G(4, 5) + G(4, 6) \\ G^*(2, 5) &= \pm C_1 G(5, 5) + G(5, 6) & G^*(2, 6) &= \pm C_1 G(6, 5) + G(6, 6) \\ G^*(2, 7) &= \pm C_1 G(7, 5) + G(7, 6) & G^*(2, 8) &= \pm C_1 G(8, 5) + G(8, 6) \\ G^*(2, 9) &= \pm C_1 G(9, 5) + G(9, 6) & G^*(2, 10) &= \pm C_1 G(10, 5) + G(10, 6) \\ G^*(2, 11) &= \pm C_1 G(11, 5) + G(11, 6) & G^*(2, 12) &= \pm C_1 G(12, 5) + G(12, 6) \end{aligned}$$

すなわち、 $[G^*]$  は要素境界1にすべりが生じているときは新要素  $[G]$  の1列と2列、要素境界2にすべりが生じているときは  $[G]$  の5列と6列、要素境界3にすべりが生じているときは  $[G]$  の9列と10列を用いて計算する。



近年、構造物の大型化に伴い、鉄筋コンクリート部材断面もますます大きくなっている。このため、曲げモーメントの小さい部分では必要とされる軸方向引張鉄筋がきわめて小さくなる場合がある。しかし、引張鉄筋を極端に小さくすると破壊が脆性的なものとなる。

島ら<sup>75)</sup>は、鉄筋比が0.050-0.20%という低鉄筋比のはりを製作して、それらの破壊挙動を詳細に観察し、引張鉄筋の最小量について実験的に考察を行っている。

ここでは、引張軟化を考慮したはり要素を用いて、島らの実験結果を解析し、解析結果と実験を比較検討する。

6章の数値解析例では、コンクリートに生じる圧縮応力が小さいために、圧縮側での応力-ひずみ関係の非線形性は考慮する必要はなかった。しかし、これから示す解析例は鉄筋コンクリートはりの曲げ破壊解析であるから、図-B 1に示すように、コンクリートの圧縮側での非線形な応力-ひずみ関係、図-B 2に示すように鉄筋の降伏やひずみ硬化を考慮する必要がある。このために、最初に、非線形な応力-ひずみ関係を仮定したときの剛性行列の計算方法を説明する。

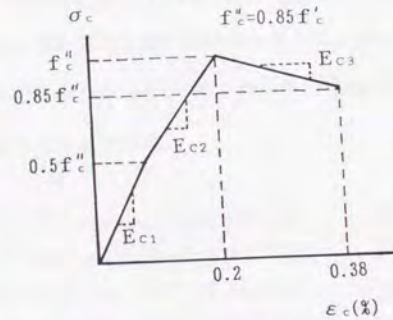


図-B 1 コンクリートの応力-ひずみ曲線

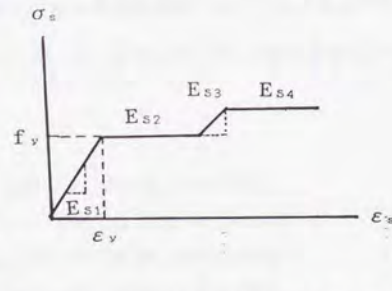


図-B 2 鉄筋の応力-ひずみ曲線

6章で示したように、剛性行列の係数 $k_{ij}$ の中に $E_s, E_s, E_s$ のようにヤング係数 $E$ の断面積分があるが、これらは、式(6.21)で示したように、数値積分で次のように求めればよい。

$$E_s = b \sum_{j=1}^l E_j \Delta y, \quad E_s = b \sum_{j=1}^l E_j y_j \Delta y, \quad E_s = b \sum_{j=1}^l E_j y_j^2 \Delta y$$

ここで、 $b$ =はりの幅、 $l$ =層数、はりの高さを $H$ とすると、 $\Delta y = H/l$ 、

$y_j = j$  層の $y$ 座標である。 $E_j$ はコンクリートの場合は図-B 1の $E_{c1}, E_{c2}, E_{c3}$ 等のように、鉄筋の場合は図-B 2の $E_{s1}, E_{s2}, E_{s3}$ 等のように、各応力状態での接線の勾配である。

なお、コンクリートに引張軟化を生じているときの取扱いは6章に示している。

解析では鉄筋コンクリートはりを、単純に、鉄筋層とコンクリート層で層状に分割し、鉄筋とコンクリートの付着は完全付着を仮定する。

島らの実験に用いられた供試体の鉄筋比、配筋およびコンクリート強度を表-B 1、はりの諸元を表-B 2、使用した鉄筋の特性は表-B 3に示す。

表-B 1 供試体の鉄筋比、配筋および

コンクリート強度

供試体 番号	鉄筋比 P (%)	配 筋	コンクリート強度 $f'_c$ (MPa)
1	0.05	1D10	24.5
2	0.10	2D10	31.4
3	0.10	2D10	20.1
4	0.15	3D10	20.1
5	0.20	1D19	20.1

表-B 2 供試体の諸元

全 長 (cm)	スパン長 (cm)	はり高 H(cm)	有効高さ d (cm)	はり幅 b (cm)
240	220	60	56	25

表-B 3 鉄筋の特性

呼び径	ヤング係数 $E_s$ (GPa)	降伏点 $f_y$ (MPa)	引張強さ $f_u$ (MPa)	ひずみ硬化開始ひずみ $\epsilon_{sh}$
D10	200	379	566	0.016
D19	200	358	545	0.016



数値解析は対称性を利用して図-B 3に示すように、はりの右半分だけを用いて解析した。要素分割は同図に示すように、はりの長手方向に3分割し、はり高方向の層分割数を100とした。なお、ひびわれ要素の長さははり高の1/3とした。

解析では、コンクリートの引張軟化曲線を六郷らが提案した二直線モデル、コンクリートの圧縮領域での応力-ひずみ曲線を図-B 1、鉄筋の応力-ひずみ曲線は図-B 2のようにひずみ硬化を仮定する。また、破壊エネルギー  $G_f$  は三橋らの実験<sup>60)</sup>を参考に  $G_f = 120\text{N/m}$ と $160\text{N/m}$ の2ケースについて解析した。

解析結果は表-B 4に曲げひびわれ発生荷重、鉄筋の降伏荷重、最大荷重について、はり要素を用いた解析値と島らの実験結果および島らの計算値の比較を示した。解析結果に対する考察および結論を述べると次のようになる。

#### 1) 曲げひびわれ発生荷重

表-B 4に示してある曲げひびわれ発生荷重は、島らの計算値の内でも良い結果を示した塩屋らの式<sup>76)</sup>を用いて計算した値である。供試体の番号1と2については、両者の計算値に優劣はつけがたいが、供試体番号3, 4, 5では、明らかにはり要素の値が精度は高い。はり理論解は $\pm 10\%$ の誤差で実験値を算定することができる。

#### 2) 降伏荷重

鉄筋の降伏荷重は実験では4と5番の供試体だけで求められているが、はり要素の解析値と実験との一致は良好である。

#### 3) 最大荷重

供試体1, 2, 3の最大荷重については、はり要素による解と島らの計算値は近い値を示しているが、実験値はそれよりも少し高い値を示している。供試体4の場合は、はり要素による解が実験値と一致し島らの計算値は少し低めとなった。いずれの解析方法も実験値より $\pm 10\%$ 以上の誤差がある。

#### 4) はりのたわみと荷重の関係

はりのたわみと荷重の関係の解析例を図-B 4に示した。今回の解析では、単純に、鉄筋とコンクリートの完全付着を仮定し、コンクリートのひびわれや応力-ひずみ関係の非線形性、鉄筋の降伏等の非線形現象は全て、はり中央のひびわれ要素に集中させているため、解析で得られる、はりのたわみと荷重の関係も精度の低いものとなっている。このような問題点を解決することは次の課題としたい。

島ら<sup>75)</sup>らは、低鉄筋比はりの曲げモーメントによる脆性破壊を防ぐためには、ひびわれ

発生荷重が最大荷重より小さくなるように設計すればよいと述べている。したがって、設計の第一段階としては、ひびわれ発生荷重を正確に算定することであると報告している。今回のコンクリートの引張軟化を考慮したはり要素による解析によれば、曲げひびわれ発生荷重を $\pm 10\%$ 以内の誤差で実験値を推定することができたので、設計の第一段階は終了したことになる。最大荷重は島らの計算値とほぼ同じ結果であるが、 $\pm 10\%$ 以上の誤差があり、今後の課題である。

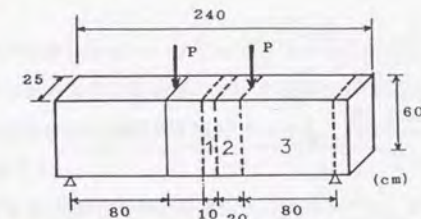


図-B 3 鉄筋コンクリートはりの曲げ試験

表-B 4 曲げひびわれ発生荷重、降伏荷重および最大荷重

供試体番号	$G_f$	曲げひびわれ発生荷重 (KN)			降伏荷重 (KN)		最大荷重 (KN)		
		はり理論	実験(島)	計算(島)	はり理論	実験(島)	はり理論	実験(島)	計算(島)
1	120	110	114	107 (1.03) (1.06)	49	—	55	60	56 (1.09) (1.07)
	160	118	—	—	57	—	55	—	— (1.09)
2	120	125	120	126 (0.96) (0.95)	83	—	110	122	112 (1.09) (1.08)
	160	133	—	—	90	—	110	—	— (1.09)
3	120	103	110	93 (1.06) (1.18)	85	—	110	130	108 (1.18) (1.20)
	160	110	—	—	94	—	110	—	— (1.18)
4	120	105	113	93 (1.07) (1.21)	120	116	163	163	150 (1.0) (1.08)
	160	113	—	—	128	—	163	—	— (0.90)
5	120	108	113	93 (1.04) (1.21)	149	147	195	—	184 (0.98)
	160	116	—	—	157	—	195	—	— (0.93)

( )の中は実験値/計算値



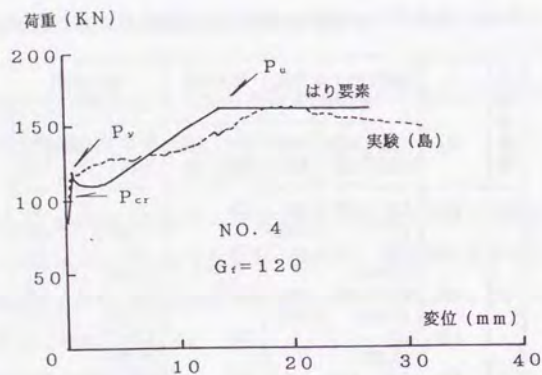
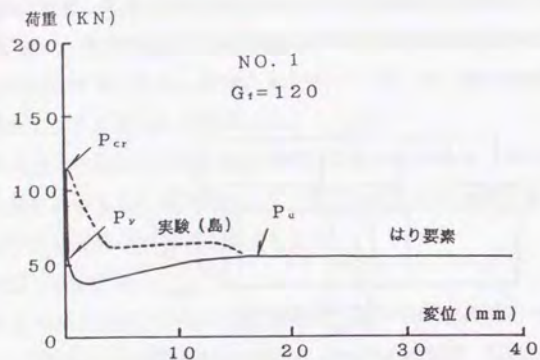


図-B 4 荷重と変位の関係

# 付録C コンクリート中に埋め込まれたアンカーボルトの破壊挙動

RILEMの90-FMA(Fracture Mechanics of Concrete - Applications)委員会は、コンクリート中に埋め込まれたアンカーボルトの破壊挙動の解析を募集した<sup>77)</sup>。これは、コンクリートの破壊を対象とした数値解析の精度あるいは限界を明らかにすることを目的としており、解析方法、構成則あるいはプログラムが異なる場合の解析結果を比較しようとするものである。

ここでは、4章で提案した新ハイブリッドストレス要素を図-C 1のアンカーボルトの引き抜き破壊の解析に適用する。コンクリートの材料定数は図中に与えられており、解析のパラメータは反力点位置と側方の境界条件である。ここでは、 $a = d = 150 \text{ mm}$ 、バネ定数  $k = 0$  の場合を解析する。

解析に用いる引張軟化は六郷らが提案した二直線モデル、せん断破壊の条件式は式(4.28)、せん断軟化は無視して解析した。アンカーとコンクリート境界面での摩擦係数は0.75とする。要素分割は図-C 2に示した。今回の解析では図-C 1のアンカーボルト突起先端から反力点を結ぶ線上だけで破壊が生じると仮定した。

解析結果は図-C 3にアンカーの引き抜き荷重とA点での変位の関係で示した。同図には内田ら<sup>78)</sup>の解析結果も示しているが、著者の解(最大荷重は460.21N/mm)は内田らの解(最大荷重は389N/mm)より最大荷重が高目となっており、実験値<sup>79)</sup>(参考文献79の図-12より約335.N/mmと395.N/mm)よりも少し高い。

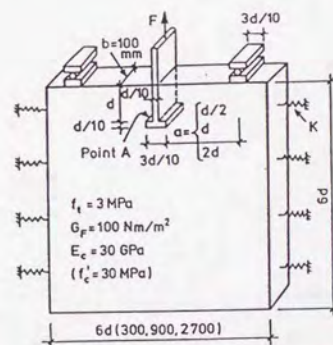


図-C 1 平面応力状態での課題

d=	K=0			K=∞
	50	150	450	d=150
a=d/2		x		
a=d		x		x
a=2d	x	⊗	x	x



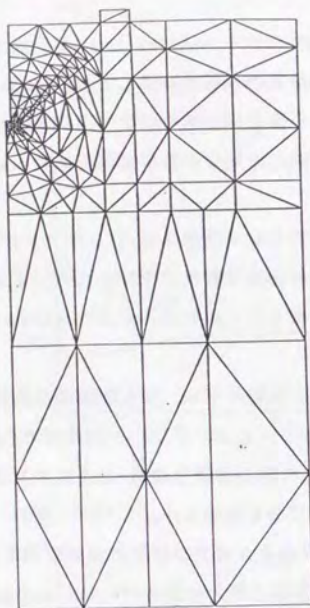


図-C 2 要素分割

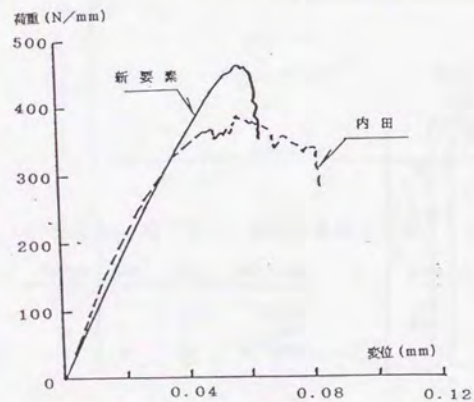


図-C 3 荷重-変位曲線

## 謝 辞

本論文は、筆者が琉球大学において永年にわたり実施してきた研究の成果を、東京大学工学部 前川宏一助教授の御指導のもとにまとめたものである。前川助教授には論文の構成・まとめから、細部に至るまで、御検討くだされ、御指導を賜りました。心より感謝申し上げます。

東京大学工学部岡村甫教授、堀井秀之助教授、野村卓史助教授、および東京大学生産技術研究所都井裕助教授には論文を御検討いただき、内容について貴重な御教示をいただきました。深く感謝申し上げます。

本研究の遂行にあたり、多くの有益な御助言、激励を賜った東京大学名誉教授 川井忠彦先生（現在、東京理科大学教授）、渡辺正明博士、広島大学工学部の近藤一夫助教授に深く感謝の意を表します。

本論文中の数値計算は、琉球大学土木工学科の構造研究室の学生諸氏に多大の労をお願いした。ここに、関係各位に厚くお礼を申し上げます。

最後に、多くの暖かい励ましの言葉を始終賜りました琉球大学工学部具志幸昌教授、和仁屋晴謹助教授、玉那覇宜雄技官、大城武教授、上原方成教授に深く感謝の意を表します。



第 一 章 緒 論

一、研究の目的と意義

本研究は、日本の経済成長と社会変革の背景を明らかにし、そのメカニズムを解明することを目的とする。特に、戦後復興期における産業構造の転換と労働力の移動に焦点を当てる。この研究は、現代日本の経済政策や社会政策の立案に重要な示唆を与えることが期待される。

二、研究の範囲と対象

本研究は、戦後（1945年）から昭和末期（1970年代）までの日本を対象とする。主要な産業として、製造業、サービス業、および農業の発展と衰退の過程を分析する。また、都市部と農村部の経済格差の拡大と縮小についても検討する。

三、研究方法

本研究は、定量的なデータ分析と定性的な文献調査を併用する。統計データは、国勢調査、産業統計、労働統計などから収集する。また、当時の新聞記事、政府文書、学術論文などを参考に、社会情勢や政策決定の背景を明らかにする。

四、研究の構成

本書は、第一章（緒論）から第五章（結論）まで構成されている。第一章では研究の目的と意義を述べ、第二章では研究の範囲と対象を明確にする。第三章では研究方法を説明し、第四章では主要な産業と労働力の動向を分析する。第五章では研究の結論をまとめ、今後の研究課題を提示する。



第 二 章 戦後の日本経済

一、戦後復興と経済成長

第二次世界大戦の終結後、日本は壊滅的な被害を受けた。戦後復興は、政府の指導と民間企業の努力によって進められた。戦後復興期には、基礎産業の復興と高度成長期への移行が特徴的であった。この時期には、高度成長期と呼ばれる経済成長の黄金時代があった。

二、高度成長期の背景

高度成長期の背景には、いくつかの要因がある。まず、アメリカからの技術援助と資金援助が大きな役割を果たした。また、政府の産業政策による重点的な産業への投資も重要な要因であった。さらに、労働力の高度化と技術革新の促進も成長の原動力となった。

三、産業構造の転換

高度成長期には、産業構造が大きく変化した。農業と工業の比重が逆転し、サービス業の比重が増加した。特に、製造業の発展が目覚ましいものであった。また、都市部への人口集中も顕著であり、都市化が進んだ。

四、労働力の移動

高度成長期には、労働力が大規模に移動した。農村部から都市部へ、低賃金労働者から高賃金労働者へと移動した。この労働力の移動は、高度成長を支える重要な要因となった。また、労働者の意識の変化もこの時期に顕著であった。

五、経済格差の拡大

高度成長期には、経済格差が拡大した。都市部と農村部の格差、高所得者と低所得者の格差が拡大した。この格差の拡大は、社会問題として浮上り、政府による社会政策の立案を促した。



参 考 文 献

- 1) 鷺津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦: 有限要素法ハンドブック  
I 基礎編, 培風館(1981年)
- 2) Ngo.D, Scordelis.A.C: Finite Element Analysis of Reinforced Concrete  
Beams, ACI Journal, pp.152-163, March 1967
- 3) コンクリート構造物の設計にFEM解析を適用するためのガイドライン, 日本コン  
クリート工学協会, 1989.3
- 4) 岡村甫, 前川宏一: 鉄筋コンクリートにおける非線形有限要素解析, 土木学会論文  
集, 第60号, V-3, pp.1-10, 1985.8
- 5) 野口博, 井上範夫: 有限要素法による鉄筋コンクリート構造のせん断解析手法,  
RC構造の有限要素解析に関するコロキウム集, 日本コンクリート工学協会,  
pp.77-98, 1982.6
- 6) 岡村甫, 前川宏一: 鉄筋コンクリートの非線形解析と構成則, 技報堂出版, 1991.5
- 7) 川井忠彦: 生研セミナーテキスト(物理モデルによる連続体力学諸問題の解析), 生  
産技術研究奨励会, 第1回 (1978年)
- 8) 川井忠彦: 離散化極限解析法概論, 培風館, 1991.7
- 9) コンクリートの破壊力学研究委員会: コンクリート構造の破壊力学に関するコロキ  
ウム, 日本コンクリート工学協会, 1990.3
- 10) 三橋博三: コンクリートの破壊力学の現状と展望, コンクリート工学, Vol.25, No.2,  
pp.14-25, 1987.2
- 11) Mihashi, H., Takahashi, H., Wittmann, F.H; Fracture Toughness and Fracture  
Energy Test Methods for Concrete and Rock, A.A.Balkema Publishers, 1989
- 12) Rots, J.G: Computational Modeling of Concrete Fracture, Dissertation, Delft  
Univ of Techn, 1988
- 13) R. E. グッドマン: 不連続性岩盤の地質工学, 森北出版株式会社, 1984.8
- 14) 三島徹也, 山田一字, 前川宏一: 交番荷重及び温度荷重を受けるRC構造の離散ひ  
びわれ有限要素解析, 土木学会論文集, 第442号, V-16, pp.201-210, 1992
- 15) 渡辺正明, 川井忠彦: ハイブリッドストレスモデルによるすべり線, 塑性関節, 塑



- 性関節線の表現, 日本造船学会論文集 (昭和55年5月), pp.297-305
- 16) R.L.Spilker, S.M.Maskeri, E.Kania: Plane Isoparametric Hybrid-Stress Elements : invariance and optimal sampling, Int.J.num.Meth.Engng, Vol.17, pp.1469-1496, 1981
- 17) A.Hillerborg: The Theoretical Basis of a Method to Determine the Fracture Energy  $G_f$  of Concrete, Materials and Structures, Vol.18, No.106, pp.25-30, RILEM 1985, 7-8
- 18) P.E.Petersson: Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plane Concrete and Similar Materials. Report TVBM-1006, Lund Univ, Sweden. 1984
- 19) 野村希晶・和泉正哲: コンクリートの引張軟化構成則の推定問題に関する基礎的検討, コンクリート工学年次論文報告集, 9-2, pp.97-102, 1987
- 20) Arrea, M., Ingraffea, A.R.: Mixed-mode Crack Propagation in Mortar and Concrete, Report 81-13, Dept. Struct. Engng, Cornell Univ, Ithaca, New York, 1982
- 21) 堀井秀之: コンクリート・岩石・セラミックスに対する破壊力学の適用: フラクチャープロセスゾーン問題, 第38回応用力学連合講演会講演予稿集, pp.29-38, 1988.12
- 22) 大津正康, 福永靖雄: 境界要素法によるコンクリートのひびわれ進展の解析, コンクリート工学年次論文報告集, 9-2, pp.669-674, 1987
- 23) Runesson, K., Larsson, R., Sture, S.: Characteristics and Computational Procedure in Softening Plasticity, J. Engng. Mech., ASCE, Vol.115, NO8, pp.1628-1646, 1989
- 24) 園田恵一郎: ひずみ軟化構造の非線形解析に対する最小エネルギー探索法, 土木学会第35回年次講演概要集 第1部, pp.73-74, 1980
- 25) Tepfers, R.: Cracking of Concrete Cover along Anchored Deformed Reinforcing Bars, Magazine of Concrete Research, Vol.31, No.106, pp.3-12, May. 1979
- 26) 森川雅行, 関 博, 奥村隆: 鉄筋の膨張によるひびわれの発生機構に関する基礎的研究, 土木学会論文集, 第378号, V-6, pp.97-105, 1987
- 27) 原田哲夫: 静的破砕剤を用いたコンクリート構造物の解体に関する基礎的研究, 東京大学学位論文, 1988
- 28) 上田真稔, 毛井嵩博, 川井忠彦: 離散化極限解析法による鉄筋コンクリート構造物の非線形解析, RC構造の有限要素解析に関するコロキウム論文集, 日本コンクリ-

- ト工学協会, pp.179-186, 1984
- 29) 鷺津久一郎: 弾性学の変分原理概論, コンピューターによる構造工学講座II-3-A, 培風館(1972年)
- 30) 伊良波繁雄: 2次元ハイブリッドストレスモデルによる非線形構造解析, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第9回, pp.133-138, 1985.7
- 31) Y.Yamada, N.Yoshimura, T.Sakurai: Plastic Stress-Strain Matrix and its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problem by the Finite Element Method, Int.J.Mech.Sci. Vol.10, pp.23, 1968
- 32) W.F.Chen: Soil Mechanics and Theorems of Limit Analysis, Proceedings of the ASCE, EM2 (March, 1969), pp.493-518
- 33) 大久保肇: 弾性平面にて圧縮された半無限体の二次元問題について, 日本機械学会論文集, 65号, 1952, pp.58-71
- 34) 渡辺政明: 接触問題の解析法, 生研セミナーテキスト(物理モデルによる連続体力学の諸問題解析, 第2回, 川井編), 生産技術研究奨励会, pp.241-274, 1979.
- 35) 伊良波繁雄: 自由度として, 回転及びひずみを有する三角形平面要素について, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, pp.134-139, 1986.7
- 36) 伊良波繁雄: 修正されたハイブリッドストレスモデルによる非線形構造解析, 構造工学論文集, Vol.32A, pp.249-254, 1986
- 37) 渡辺政明: 崩壊メカニズムを表現できるハイブリッドストレスモデルを用いた要素内を降伏させる弾塑性解析, 生研セミナーテキスト(固体力学諸問題の離散化極限解析, 川井編), 生産技術研究奨励会, pp.291-316, 1982.
- 38) C.Nyssenn, P.Beckers: Dual analysis in Elasto-Plasticity, Finit Elements in Non-linear Mechnics, Tapir, pp.42-61, 1977.8
- 39) 近藤一夫: 骨組みの弾塑性崩壊に於ける一離散化手法, 日本鋼構造協会第13回大会マトリックス解析法研究発表論文集, pp.231-236, 1979.
- 40) H.Eggers: Variational Principles for Elasto-Plastic continua, J.Struct.Mech., 3(4), pp.345-358, (1974-1975)
- 41) S.Timoshenko (鶴戸口英善, 国尾武共訳): 材料力学, 東京図書株式会社, 1957
- 42) G.C.Nayak, O.C.Zienkiewicz: Elasto-Plastic Stress Analysis. A Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Softening



,Int.J.Num.Meth.Engng,Vol.5,pp.113-135,1972

- 4 3) W.F.Chen (色部, 河角, 安達共訳): コンクリート構造物の弾塑性解析, 丸善株式会社, 1985
- 4 4) 小林正樹: 有限要素法による支持力解析, 第19土質工学研究発表会, pp.945-946, 1980
- 4 5) P.V.Marcial,I.P.King:Elastic-Plastic analysis of two dimensional stress systems by the finite element method,Int.J.Mech.Sci.Vol.9,pp.143-155,1967
- 4 6) O.C.Zienkiewicz,S.Valliappan,I.P.King:Elastic-Plastic solutions of Engineering Problems 'Initial stress',Finite Element Approach, Int.J.Mech.Sci. Vol.1,pp.75-100,1969
- 4 7) R.C.J.Howland:Phil.Trans.Roy.Soc.Lond.,Ser.A,Vol.229,pp.49- ,1930
- 4 8) 矢川元基, 西岡俊久, 安藤良夫: 重ね合わせ法を用いた弾塑性問題の有限要素解析, 日本機械学会論文集(第1部), 52巻358号, pp.1644-1651,1976.6
- 4 9) 伊良波繁雄: 有限要素法によるコンクリートのひずみ軟化解析, コンクリート工学年次論文報告集,11-2,pp.387-392,1989
- 5 0) 伊良波繁雄: ハイブリッドストレスモデルによるひずみ軟化解析法, コンクリート構造の破壊力学に関するコロキウム, JCI, pp.119-26,1990.3
- 5 1) K.Rokugo,F.H.Wittmann,P.E.Roelfstra,E.Brunwiler:Different Methods to Determine Fracture Energy and Strain Softening of Concrete,コンクリート工学年次論文報告集, 9-2,pp.663-668,1987
- 5 2) Pietruszczak.S,Mroz.Z:Finite Element Analysis of Deformation of Strain-Softening Material,Int.J.Num.Meth.Engng,Vol17,pp327-334,1981
- 5 3) 伊良波繁雄: ハイブリッドストレスモデルによる複合破壊解析, コンクリート工学年次論文報告集, 13-2, pp.73-78,1991.6
- 5 4) Lim.T.B,Li.B,Maekawa.K:Shear Fracture and Deformation of Concrete Subjected to Combined Effect of In-plan Shear and Normal Compression,41st Annual Conference of JSCE,5,Kyushu,1986,pp.241
- 5 5) Hassanzadeh.M:Determination of Fracture Zone Properties in Mixed Mode I and II,Engineering Fracture Mechanics,Vol.35,No.4/5,pp.846-853,1990)
- 5 6) T.Paulay,P.T.Lieber,Shear Transfer by Aggregate Interlock,ACI,SP-42,Vol.1,

pp.1-15,1974

- 5 7) 山田嘉昭: 塑性・粘弾性,コンピュータによる構造工学講座II-2-A,培風館,1972年
- 5 8) Reinhardt.H.W,Cornelissen.H.A.W,Hordijk.D.A:Tensile Tests and Failure Analysis of Concrete, J.Struct.Engng,ASCE,Vol112,N011,pp.2464-2477,1986
- 5 9) Tomii.M,Sakino.K,Kiyohara.K:Experimental Studies on Plain Concrete Columns Subjected to Monotonic Shearing Force and Constant Axial Force,日本建築学会論文報告集, 第307号, pp.46-55,昭和56年9月,
- 6 0) Mihashi.H,Wittmann.F.H,Simonin.P,Rokugo.K:Fracture Energy Evaluation of Concrete with Compact Tension Test,コンクリート工学年次論文報告集, 19-2 pp.657-662,1987.6
- 6 1) 伊良波繁雄: ハイブリッドストレスモデルによるコンクリートの引張軟化解析, コンクリート工学年次論文報告集, 12-2, pp.753-758,1990.6
- 6 2) 伊良波繁雄: はり要素による引張軟化の解析的研究, コンクリート工学年次論文報告集, 14-2, pp.897-902,1992.6
- 6 3) Carpinteri.A:Decrease of Apparent Tensile and Bending Strength with Specimen size: Two Different Explanations based on Fracture Mechanics, Int.J.Solids Structures,Vol25,N04,1989
- 6 4) 川井忠彦, 三本木茂夫: 薄板構造解析, 培風館, pp48
- 6 5) Cornelissen.H.A.W,Hordijk.D.A,Reinhardt.H.W:Experiments and Theory for the Application of Fracture Mechanics to Normal and Lightweight Concrete, Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete ,edited by F.H.Wittmann,Elsevier,pp.565-575,1986
- 6 6) Rokugo.K,Iwasa.M,Suzuki.T,Koyanagi.W:Testing Methods to Determine Tensile Softening Curve and Fracture Energy of Concrete,International Workshop on "Fracture Toughness and Fracture Energy Test for Concrete and Rock",pp.128-138,oct,1988,Sendai
- 6 7) 加藤英徳, 内田裕市, 六郷恵哲, 小柳治 : コンクリートの曲げ強度の寸法効果に関する破壊力学的研究, 土木学会第46回年次学術講演会概要集, 第5部, pp.684-685,1991.9
- 6 8) 内田裕市, 六郷恵哲, 小柳治: コンクリートの曲げ強度の寸法効果に関する破壊力



- 学的検討, 土木学会論文集, 第442号, V-16, pp.101-107, 1992.2
- 69) 佐藤和郎, 茂村達也, 永井文雄: ぜい性材料からなる円筒の内圧破壊に及ぼす延性の影響, 日本機械学会論文集(A編), 45巻, 391号, pp.220-226, 1979
- 70) 伊良波繁雄: 内圧を受けるコンクリートの中空円筒の破壊, コンクリート構造の破壊力学に関するコロキウム, JCI, pp.II 67-74, 1990.3
- 71) 伊良波繁雄: 内圧を受ける中空円筒の破壊解析, セメント・コンクリート論文集, NO.45, pp.358-362, 1991
- 72) S.P.Timoshenko, J.N.Goodier (金多潔監訳): 弾性論, コロナ社, 1973
- 73) 藤井 学: コンクリートのひびわれ間引張応力伝達特性のモデル化とその応用, 鉄筋コンクリート構造のFEM解析の精度向上に必要な基礎実験と解析モデルの開発, 昭和63年度科学研究費補助金研究成果報告書, 研究代表者森田司郎, pp.36-64, 平成元年
- 74) O.C.Zienkiewicz: マトリックス有限要素法, 培風館, 1975
- 75) 島 弘, 二羽淳一郎, 岡村甫: 曲げを受ける低鉄筋比はりにおける脆性破壊の防止に関する検討, 土木学会論文集, 第378号, V-6, pp.231-237, 1987.2
- 76) 塩屋俊幸, 川崎廣貴田: 鉄筋コンクリートはりのせん断強度の寸法効果に関する検討, RC構造の有限要素解析に関するコロキウム論文集, 日本コンクリート工学協会, pp.151-158, 1984
- 77) RILEM TC 90-FMA: Round-Robin Analysis of Anchor Bolts - Invitation, Materials and Structures, Vol.23, No.133, 1990
- 78) 内田裕市, 六郷恵哲, 小柳治: コンクリート中に埋め込まれたアンカーボルトの破壊挙動の解析, 土木学会第46回年次学術講演会概要集, 第5部, pp.508-509, 1991.9
- 79) 三橋博三, 白井伸明, 六郷恵哲: コンクリート構造への破壊力学の応用, コンクリート工学, Vol.30, No.6, pp.5-17, 1992.6
- 80) 川本暁万, 吉中龍之助, 日比野敏: 岩盤力学, 技報堂, 1985
- 81) R.G.Wan, D.H.Chen, N.R.Morgenstern: A Finite Element Method for the Analysis of Shear Bands in Geomaterials, Finite Elements Analysis and Design, Elsevier, pp.120-143, 1990

- 82) E.Schlengen, J.G.M.Van Mier: Shear Fracture in Cementitious Composites part 2: Numerical Simulations, Fracture Mechanics of Concrete Structures, edited by Zdeněk Bažant, Elsevier, pp.671-676, 1992
- 83) 伊良波繁雄: 修正されたハイブリッドストレスモデルによる鉄筋コンクリート構造物の非線形解析, コンクリート工学年次講演会論文集, 第8回, pp.541-544, 1986.



