

複数投影を用いた逆問題解法による
放射源分布計測

伊藤直史

①

目次

複数投影を用いた逆問題解法による
放射源分布計測

1. 概要	1
2. 問題の定式化	3
3. 逆問題の解法	5
4. 数値計算結果の検討	10
5. 結論	15
参考文献	16
謝辞	17
著者略歴	18
1.1 逆問題の定式化	10
1.2 逆問題の解法	11
1.3 数値計算結果の検討	12
1.4 結論	14
2.1 逆問題の定式化	3
2.2 逆問題の解法	5
2.3 数値計算結果の検討	10
2.4 結論	15
3.1 逆問題の定式化	5
3.2 逆問題の解法	7
3.3 数値計算結果の検討	10
3.4 結論	14
4.1 逆問題の定式化	10
4.2 逆問題の解法	11
4.3 数値計算結果の検討	12
4.4 結論	14
5.1 逆問題の定式化	15
5.2 逆問題の解法	16
5.3 数値計算結果の検討	17
5.4 結論	18
6.1 逆問題の定式化	16
6.2 逆問題の解法	17
6.3 数値計算結果の検討	18
6.4 結論	20
7.1 逆問題の定式化	17
7.2 逆問題の解法	18
7.3 数値計算結果の検討	19
7.4 結論	21
8.1 逆問題の定式化	18
8.2 逆問題の解法	19
8.3 数値計算結果の検討	20
8.4 結論	22
9.1 逆問題の定式化	19
9.2 逆問題の解法	20
9.3 数値計算結果の検討	21
9.4 結論	23
10.1 逆問題の定式化	20
10.2 逆問題の解法	21
10.3 数値計算結果の検討	22
10.4 結論	24
11.1 逆問題の定式化	21
11.2 逆問題の解法	22
11.3 数値計算結果の検討	23
11.4 結論	25
12.1 逆問題の定式化	22
12.2 逆問題の解法	23
12.3 数値計算結果の検討	24
12.4 結論	26
13.1 逆問題の定式化	23
13.2 逆問題の解法	24
13.3 数値計算結果の検討	25
13.4 結論	27
14.1 逆問題の定式化	24
14.2 逆問題の解法	25
14.3 数値計算結果の検討	26
14.4 結論	28
15.1 逆問題の定式化	25
15.2 逆問題の解法	26
15.3 数値計算結果の検討	27
15.4 結論	29
16.1 逆問題の定式化	26
16.2 逆問題の解法	27
16.3 数値計算結果の検討	28
16.4 結論	30
17.1 逆問題の定式化	27
17.2 逆問題の解法	28
17.3 数値計算結果の検討	29
17.4 結論	31
18.1 逆問題の定式化	28
18.2 逆問題の解法	29
18.3 数値計算結果の検討	30
18.4 結論	32
19.1 逆問題の定式化	29
19.2 逆問題の解法	30
19.3 数値計算結果の検討	31
19.4 結論	33
20.1 逆問題の定式化	30
20.2 逆問題の解法	31
20.3 数値計算結果の検討	32
20.4 結論	34
21.1 逆問題の定式化	31
21.2 逆問題の解法	32
21.3 数値計算結果の検討	33
21.4 結論	35
22.1 逆問題の定式化	32
22.2 逆問題の解法	33
22.3 数値計算結果の検討	34
22.4 結論	36
23.1 逆問題の定式化	33
23.2 逆問題の解法	34
23.3 数値計算結果の検討	35
23.4 結論	37
24.1 逆問題の定式化	34
24.2 逆問題の解法	35
24.3 数値計算結果の検討	36
24.4 結論	38
25.1 逆問題の定式化	35
25.2 逆問題の解法	36
25.3 数値計算結果の検討	37
25.4 結論	39
26.1 逆問題の定式化	36
26.2 逆問題の解法	37
26.3 数値計算結果の検討	38
26.4 結論	40
27.1 逆問題の定式化	37
27.2 逆問題の解法	38
27.3 数値計算結果の検討	39
27.4 結論	41
28.1 逆問題の定式化	38
28.2 逆問題の解法	39
28.3 数値計算結果の検討	40
28.4 結論	42
29.1 逆問題の定式化	39
29.2 逆問題の解法	40
29.3 数値計算結果の検討	41
29.4 結論	43
30.1 逆問題の定式化	40
30.2 逆問題の解法	41
30.3 数値計算結果の検討	42
30.4 結論	44
31.1 逆問題の定式化	41
31.2 逆問題の解法	42
31.3 数値計算結果の検討	43
31.4 結論	45
32.1 逆問題の定式化	42
32.2 逆問題の解法	43
32.3 数値計算結果の検討	44
32.4 結論	46
33.1 逆問題の定式化	43
33.2 逆問題の解法	44
33.3 数値計算結果の検討	45
33.4 結論	47
34.1 逆問題の定式化	44
34.2 逆問題の解法	45
34.3 数値計算結果の検討	46
34.4 結論	48
35.1 逆問題の定式化	45
35.2 逆問題の解法	46
35.3 数値計算結果の検討	47
35.4 結論	49
36.1 逆問題の定式化	46
36.2 逆問題の解法	47
36.3 数値計算結果の検討	48
36.4 結論	50
37.1 逆問題の定式化	47
37.2 逆問題の解法	48
37.3 数値計算結果の検討	49
37.4 結論	51
38.1 逆問題の定式化	48
38.2 逆問題の解法	49
38.3 数値計算結果の検討	50
38.4 結論	52
39.1 逆問題の定式化	49
39.2 逆問題の解法	50
39.3 数値計算結果の検討	51
39.4 結論	53
40.1 逆問題の定式化	50
40.2 逆問題の解法	51
40.3 数値計算結果の検討	52
40.4 結論	54
41.1 逆問題の定式化	51
41.2 逆問題の解法	52
41.3 数値計算結果の検討	53
41.4 結論	55
42.1 逆問題の定式化	52
42.2 逆問題の解法	53
42.3 数値計算結果の検討	54
42.4 結論	56
43.1 逆問題の定式化	53
43.2 逆問題の解法	54
43.3 数値計算結果の検討	55
43.4 結論	57
44.1 逆問題の定式化	54
44.2 逆問題の解法	55
44.3 数値計算結果の検討	56
44.4 結論	58
45.1 逆問題の定式化	55
45.2 逆問題の解法	56
45.3 数値計算結果の検討	57
45.4 結論	59
46.1 逆問題の定式化	56
46.2 逆問題の解法	57
46.3 数値計算結果の検討	58
46.4 結論	60
47.1 逆問題の定式化	57
47.2 逆問題の解法	58
47.3 数値計算結果の検討	59
47.4 結論	61
48.1 逆問題の定式化	58
48.2 逆問題の解法	59
48.3 数値計算結果の検討	60
48.4 結論	62
49.1 逆問題の定式化	59
49.2 逆問題の解法	60
49.3 数値計算結果の検討	61
49.4 結論	63
50.1 逆問題の定式化	60
50.2 逆問題の解法	61
50.3 数値計算結果の検討	62
50.4 結論	64
51.1 逆問題の定式化	61
51.2 逆問題の解法	62
51.3 数値計算結果の検討	63
51.4 結論	65
52.1 逆問題の定式化	62
52.2 逆問題の解法	63
52.3 数値計算結果の検討	64
52.4 結論	66
53.1 逆問題の定式化	63
53.2 逆問題の解法	64
53.3 数値計算結果の検討	65
53.4 結論	67
54.1 逆問題の定式化	64
54.2 逆問題の解法	65
54.3 数値計算結果の検討	66
54.4 結論	68
55.1 逆問題の定式化	65
55.2 逆問題の解法	66
55.3 数値計算結果の検討	67
55.4 結論	69
56.1 逆問題の定式化	66
56.2 逆問題の解法	67
56.3 数値計算結果の検討	68
56.4 結論	70
57.1 逆問題の定式化	67
57.2 逆問題の解法	68
57.3 数値計算結果の検討	69
57.4 結論	71
58.1 逆問題の定式化	68
58.2 逆問題の解法	69
58.3 数値計算結果の検討	70
58.4 結論	72
59.1 逆問題の定式化	69
59.2 逆問題の解法	70
59.3 数値計算結果の検討	71
59.4 結論	73
60.1 逆問題の定式化	70
60.2 逆問題の解法	71
60.3 数値計算結果の検討	72
60.4 結論	74
61.1 逆問題の定式化	71
61.2 逆問題の解法	72
61.3 数値計算結果の検討	73
61.4 結論	75
62.1 逆問題の定式化	72
62.2 逆問題の解法	73
62.3 数値計算結果の検討	74
62.4 結論	76
63.1 逆問題の定式化	73
63.2 逆問題の解法	74
63.3 数値計算結果の検討	75
63.4 結論	77
64.1 逆問題の定式化	74
64.2 逆問題の解法	75
64.3 数値計算結果の検討	76
64.4 結論	78
65.1 逆問題の定式化	75
65.2 逆問題の解法	76
65.3 数値計算結果の検討	77
65.4 結論	79
66.1 逆問題の定式化	76
66.2 逆問題の解法	77
66.3 数値計算結果の検討	78
66.4 結論	80
67.1 逆問題の定式化	77
67.2 逆問題の解法	78
67.3 数値計算結果の検討	79
67.4 結論	81
68.1 逆問題の定式化	78
68.2 逆問題の解法	79
68.3 数値計算結果の検討	80
68.4 結論	82
69.1 逆問題の定式化	79
69.2 逆問題の解法	80
69.3 数値計算結果の検討	81
69.4 結論	83
70.1 逆問題の定式化	80
70.2 逆問題の解法	81
70.3 数値計算結果の検討	82
70.4 結論	84
71.1 逆問題の定式化	81
71.2 逆問題の解法	82
71.3 数値計算結果の検討	83
71.4 結論	85
72.1 逆問題の定式化	82
72.2 逆問題の解法	83
72.3 数値計算結果の検討	84
72.4 結論	86
73.1 逆問題の定式化	83
73.2 逆問題の解法	84
73.3 数値計算結果の検討	85
73.4 結論	87
74.1 逆問題の定式化	84
74.2 逆問題の解法	85
74.3 数値計算結果の検討	86
74.4 結論	88
75.1 逆問題の定式化	85
75.2 逆問題の解法	86
75.3 数値計算結果の検討	87
75.4 結論	89
76.1 逆問題の定式化	86
76.2 逆問題の解法	87
76.3 数値計算結果の検討	88
76.4 結論	90
77.1 逆問題の定式化	87
77.2 逆問題の解法	88
77.3 数値計算結果の検討	89
77.4 結論	91
78.1 逆問題の定式化	88
78.2 逆問題の解法	89
78.3 数値計算結果の検討	90
78.4 結論	92
79.1 逆問題の定式化	89
79.2 逆問題の解法	90
79.3 数値計算結果の検討	91
79.4 結論	93
80.1 逆問題の定式化	90
80.2 逆問題の解法	91
80.3 数値計算結果の検討	92
80.4 結論	94
81.1 逆問題の定式化	91
81.2 逆問題の解法	92
81.3 数値計算結果の検討	93
81.4 結論	95
82.1 逆問題の定式化	92
82.2 逆問題の解法	93
82.3 数値計算結果の検討	94
82.4 結論	96
83.1 逆問題の定式化	93
83.2 逆問題の解法	94
83.3 数値計算結果の検討	95
83.4 結論	97
84.1 逆問題の定式化	94
84.2 逆問題の解法	95
84.3 数値計算結果の検討	96
84.4 結論	98
85.1 逆問題の定式化	95
85.2 逆問題の解法	96
85.3 数値計算結果の検討	97
85.4 結論	99
86.1 逆問題の定式化	96
86.2 逆問題の解法	97
86.3 数値計算結果の検討	98
86.4 結論	100
87.1 逆問題の定式化	97
87.2 逆問題の解法	98
87.3 数値計算結果の検討	99
87.4 結論	101
88.1 逆問題の定式化	98
88.2 逆問題の解法	99
88.3 数値計算結果の検討	100
88.4 結論	102
89.1 逆問題の定式化	99
89.2 逆問題の解法	100
89.3 数値計算結果の検討	101
89.4 結論	103
90.1 逆問題の定式化	100
90.2 逆問題の解法	101
90.3 数値計算結果の検討	102
90.4 結論	104
91.1 逆問題の定式化	101
91.2 逆問題の解法	102
91.3 数値計算結果の検討	103
91.4 結論	105
92.1 逆問題の定式化	102
92.2 逆問題の解法	103
92.3 数値計算結果の検討	104
92.4 結論	106
93.1 逆問題の定式化	103
93.2 逆問題の解法	104
93.3 数値計算結果の検討	105
93.4 結論	107
94.1 逆問題の定式化	104
94.2 逆問題の解法	105
94.3 数値計算結果の検討	106
94.4 結論	108
95.1 逆問題の定式化	105
95.2 逆問題の解法	106
95.3 数値計算結果の検討	107
95.4 結論	109
96.1 逆問題の定式化	106
96.2 逆問題の解法	107
96.3 数値計算結果の検討	108
96.4 結論	110
97.1 逆問題の定式化	107
97.2 逆問題の解法	108
97.3 数値計算結果の検討	109
97.4 結論	111
98.1 逆問題の定式化	108
98.2 逆問題の解法	109
98.3 数値計算結果の検討	110
98.4 結論	112
99.1 逆問題の定式化	109
99.2 逆問題の解法	110
99.3 数値計算結果の検討	111
99.4 結論	113
100.1 逆問題の定式化	110
100.2 逆問題の解法	111
100.3 数値計算結果の検討	112
100.4 結論	114

伊藤 直史

目次

序	2
I 符号化開口放射型 CT	7
1 はじめに	8
2 符号化開口放射型 CT の原理	11
2.1 投影のモデル化	11
2.2 逆投影による再構成	14
3 M 配列符号化開口放射型 CT	17
3.1 M 配列の性質	17
3.2 測定系の設計	18
3.3 実験	22
3.3.1 実験装置と方法	22
3.3.2 実験結果	24
3.4 考察と結論	27
4 最適フィルタを用いた符号化開口放射型 CT	32
4.1 複数投影のモデル化	34
4.2 最適フィルタの導出	35
4.3 シミュレーション	39
4.4 実験	51
4.5 考察と結論	56
5 おわりに	58
II 熱赤外線放射型 CT	60
1 はじめに	61

2	測定原理とシミュレーション	63
2.1	順問題の定式化	63
2.2	再構成アルゴリズム	65
2.3	シミュレーション	67
3	実験装置の構成	69
4	実験方法	72
5	実験結果と熱電対との比較	76
6	考察	81
6.1	観測波長の推定誤差	81
6.2	観測波長の選択の問題	85
6.3	屈折の影響	88
7	おわりに	90
	結	92
	謝辞	94
	参考文献	95
	付録	99

本研究は、それ自体がなんらかの放射を出す放射源の3次元分布を測定対象とし、放射によって生じる投影を観測して得たデータから、対象の分布を測定・可視化する手法を開発することを目的とするものである。具体的な測定対象として、 γ 線を放射する放射性同位元素の分布と、熱赤外線を放射する燃焼火炎内の高温ガスの温度分布の二つを取り扱う。

研究の背景

対象の空間的な分布や形状についての情報を得る方法のなかで、最も基本的なものは我々の視覚やカメラを用いる方法であろう。

人間の視覚やカメラでは、光を情報のキャリアとして対象を遠隔から観測することにより、非接触・非破壊で対象の状態に影響を与えないという優れた特徴をもつ計測を実現している。この場合には、測定対象（色や明るさの2次元分布）とセンサ（網膜やフィルム）によって観測されるデータはレンズの結像作用によって空間内の点ごとに一対一に対応し、対象の空間的な分布を得るために特別な情報処理を必要としない。

また、気象観測や船舶で用いられるレーダーでは、パルスの伝搬時間が対象までの距離に比例することを利用し、簡単な情報処理で対象の分布を得ている。

これらの例では、測定対象の情報を簡単な変換を介して入手可能な観測データにうまく伝える物理過程が存在し、これを利用して計測を実現している。

このような物理的プロセスをいかに見出し、それを用いた観測方法を設計するかが、計測の重要な課題の一つであることは言うまでもないが、一方で、非接触・非破壊の制約の下で計測を行おうとすると、情報を簡単な変換で観測データに伝える「都合の良い」物理プロセスがないことも少なくない。その場合には、測定対象から観測データが得られる物理過程をモデル化した上でこのモデルを逆に解き、観測データから測定対象を求めるアルゴリズムが必要となる。このアルゴリズムを見出す問題、すなわち「観測データ（結果）から目的とする対象の情報（原因）を求める問題」は一般に逆問題とよばれている [1]。

近年、医療における生体計測 [2, 3] や産業における製品検査 [4, 5] など、非接触・非破壊の計測を必要とする分野が広がってきたこと、一点のみの計測から多点計測、分布計測へと測定対象が多次元化してきたこと [6]、さらに、計算機の進歩でより複雑なアルゴリズムや大規模な問題を実用的に計算できるようになってきたこと、などの要因から、様々な対象に対して逆問題を応用した計測手法が開発されつつある [7, 8]。

逆問題解法に基づく非接触・非破壊の計測手法の一つに、 γ 線などの放射線を出す放射性同位元素 (RI: Radioactive Isotopes) の分布を測定対象とする放射型 CT (Computed Tomography) がある。これは主に核医学の分野で用いられ、人体内に投与した RI から放出される γ 線によって生じる投影像を観測し、そのデータから元の RI 分布を再構成するものである。

RIを放射源とする放射型 CT には、ポジトロン CT (PET: Positron Emission computed Tomography) やシングルフォトン CT (SPECT: Single Photon Emission Computed Tomography) がある [9]。PET と SPECT では、通常、対象の周囲 180 度から観測した投影データを用い、X 線 CT で用いられるフィルタ補正逆投影法 [10] と同様の再構成アルゴリズムで RI 分布を求めている。

これらに対して、SPECTと同種のRIを放射源とするが、ごく少数に限られた方向の投影データからRIの3次元分布を一度に求める手法が符号化開口放射型CT¹として知られている[11]。この型のCTは、観測の方向が少数であることから、測定装置が簡単になり、観測に要する時間も短くなる点が特色である。

しかし、従来の符号化開口CTでは、深さ（開口から対象を見た奥行き）方向の空間分解能が十分でなく、実際に3次元分布の再構成結果を示した報告はほとんどない。

本研究では、まず、M配列を符号化開口に用いて実際に3次元RI分布を再構成した結果を示し、次に、少数の方向から得た複数の投影像を用いて深さ方向の分解能の向上を図った符号化開口CTの手法を開発する（第I部）。

ところで、放射源を遠隔から計測する場合、一般に観測データは途中での吸収や散乱の影響を受ける。γ線源を対象とする符号化開口CTでは、これらの効果は小さいものとして無視しているが、より精度の高い測定が必要な場合や、散乱や吸収が無視できない対象の場合には、これらを考慮した計測手法が要求される。

後者に相当するものとして、測定対象を燃焼火炎中の高温ガスの温度分布とし、対象から放射される熱赤外線線の投影像から元の温度分布を遠隔から求める放射型CTの手法がある。この場合、放射源は同時に吸収体でもあり、吸収の影響を考慮することが不可欠である。

本研究では、外部放射源を用いて得た複数の投影像から温度分布と吸収分布を同時に計測することにより、吸収の影響を考慮した放射型CT手法の開発を目標とする（第II部）。

本研究の着目点

計測の目的については第I部、第II部の序論でそれぞれ述べることとし、ここでは本研究で解決しようとした計測システムを開発する上での問題点について、計測システムの一般論の立場から述べる。

赤塚ら[12]は、逆問題の立場から計測システムを整理して図1のように表し、対象の情報計測によって獲得する過程は①対象のモデル化②順プロセスのモデル化③逆プロセスのモデル化、の3つの段階に分けて考えられるとしている。

①では、計測の目的にしたがって、対象の情報を表現する量 s を測定量として定める。3次元分布計測であれば、関数 $s(x, y, z)$ などで表現できるであろう。

②では、センサや観測方法を選択・設計し、対象から観測データ p が得られる物理過程をモデル化して

$$p = F(s)$$

の形に記述する。

そして、得られた観測データ p を入力とし、 s の推定値 \hat{s} を出力する情報処理のプロセス

$$\hat{s} = G(p)$$

を確立する過程が③である。

¹符号化開口撮像法 (coded aperture imaging) ともいう。

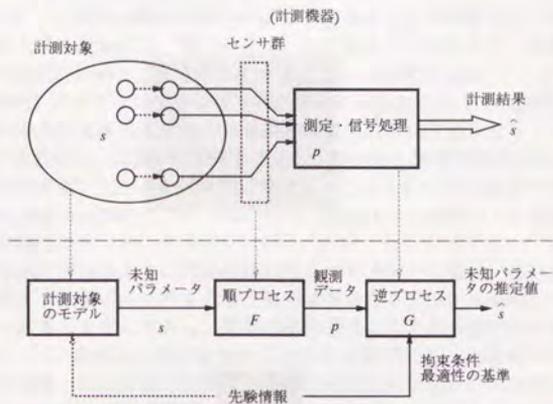


図1 計測システムのモデル
(文献 [12] から一部変更して引用)

これらのプロセスは、計測対象や観測方法によって様々な形があり得るが、一旦、順プロセスの数理的な構造が $p = F(s)$ の形に抽出されれば、これを出発点として、観測データ p から、ある拘束条件や最適化の基準の下に推定値 \hat{s} を求める最適化問題として逆問題を定式化することができ、体系的に取り扱うことが可能である。

一方、計測システムを開発・設計する立場から考えると、順プロセスは問題設定として与えられるものではなく、原理的には解けない、あるいは十分な精度が得られない逆問題を、観測方法の設計・選択によって解ける問題に帰着させることは、定式化された逆問題を解くこと以上に重要である。

多様な観測方法に対して、体系的に設計手法を構築することは困難であるが、その指針としては、多くの計測系で共通な、乗算/除算構造、加算構造、減算構造などの有用な構造があることが指摘されている [13]。

しかし、複雑な逆問題を含む計測で、このような観測の構造をうまく利用して計測の性能を向上させる方法や、そのときの逆問題解法についての議論は、従来ほとんどなされていない。

計測システムを構築する際の一般的な問題として、物理的な制約のために望ましい順プロセスを直接に実現できないことがある。このような場合、実現可能な異なる順プロセスを複数個用意し、それらの出力を処理することで、望ましい順プロセスを等価的に実現できることがある。

第I部の符号化開口CTでは、このような考え方にに基づき、複数の投影像を用いること

によって空間分解能を向上させる方法を示す。

符号化開口 CT では深さ方向の空間分解能がよくないことが問題点の一つである。深さ方向の分解能を上げるためには、開口の孔を小さくする方法があるが、実際には製作上の問題や SN 比の問題のために、孔を小さくすることには限界がある。

本研究の方法は、エリアセンサを深さ方向に僅かに移動させて二つの投影像を得ると、その差画像が開口の孔を小さくして得られる投影像に近似的に等価になることに基づく。この効果を利用するために、複数の投影像を入力し、推定の 2 乗平均誤差が最小となる意味で最適な推定を行う最適フィルタを解析的に導出し、これを用いて再構成を行う方法を示す。

第 II 部では、放射と吸収の二つの未知の分布で記述される対象を CT 手法を用いて計測する場合を取り扱う。

燃焼火炎中の高温ガスのように熱赤外線に対して半透明な物質は、赤外線の放射体であると同時に吸収体でもある。このような対象の温度分布を遠隔から観測して得た赤外線の投影データから計測しようとする時、対象自体の吸収による赤外線の減衰を考慮する必要がある。したがって、吸収の分布が未知ならばこれも計測によって求めなければならない。

しかし、温度分布、吸収分布と投影データの関係は放射伝達方程式と呼ばれる非線形の複雑な式で表されるため（第 II 部第 2 章参照）、吸収分布も未知として逆問題を解くアルゴリズムは確立されていないのが現状である。そのため、CT 手法を用いて温度分布を求める従来の方法では、吸収を全く考慮していないか、一様な吸収分布を仮定していた。

本研究では、対象と共に、対象の外部に置いた輝度が既知の放射源を同時に観測し、外部放射源の輝度を変えて観測した二種類の投影データを用いることにより、温度と吸収の分布を計測する手法について述べる。この手法は、二つの投影データの差をとると、吸収分布のみを未知の分布として含む方程式系が得られることを利用し、これを解いて得た吸収分布を元の方程式系に代入して残りの未知の分布、すなわち温度分布を求める方法である。

本研究の二つの手法は、それ自身が放射を出す放射源を計測対象とし、放射によって生ずる投影像から元の分布を再構成する点と、観測パラメータを変えて複数の投影像を得たときの投影データの差に注目し、分解能や測定精度の向上を図っている点で共通の特徴をもつ。その意味で、これらの手法を差動構造を有する放射型 CT とよぶこともできるであろう。

論文の構成

第 I 部では、符号化開口を用いた放射型 CT により、 γ 線を放射する放射性同位元素の 3 次元分布を計測する手法について述べる。

第 1 章では、本研究の位置付けと目的を述べる。第 2 章「符号化開口放射型 CT の原理」では、符号化開口 CT の観測系と得られる投影像のモデル化、基本的な再構成アルゴリズムである逆投影について述べる。

符号化開口 CT では、開口パターンとして自己相関関数が δ 関数となるようなパターンを用いる必要がある。従来は、フレネル・ゾーン・プレート [14] やランダムなパターン [15] が用いられてきたが、これらのパターンの自己相関関数は、原点のピークがあまり鋭くなく、またピーク以外で値がゼロでないために、再構成の精度や空間分解能が十分でなかった。

第3章「M配列符号化開口放射型CT」ではM配列を開口パターンとして用いる方法[16]について述べ、放射性同位元素を測定対象とする観測系を設計・製作して行った実験の結果を示す。

M配列はM系列を2次元に配列したもので、その自己相関関数が δ 関数に近い上に、ピーク以外では相関関数値が一定になるという著しい特徴をもつ。M配列を開口パターンに用いることにより、放射源が一つの断層内だけにのみ存在する場合には、その断層内の放射源分布を精度良く再構成できることを示す。また、放射源が複数の断層内に分布する場合も、それらの断層がある程度離れていれば分離して再構成できることをシミュレーションと実験により示す。

しかし、これらの結果では、実際には放射源が存在しない断層においても、再構成した分布の値がゼロにならない。これは逆投影の深さ方向の分解能が良くないためである。

本研究では、深さ方向の分解能を改善させる方法の一つとして、第4章「最適フィルタを用いた符号化開口放射型」で複数投影を用いる方法[17, 18]について述べる。センサを深さ方向に動かして得た複数の投影から、推定の2乗平均誤差が最小となる意味で最適な再構成アルゴリズムを導出し、これを用いる方法を示す。

第5章で第I部のまとめを行う。

第II部では、燃焼火炎内の温度分布計測を目的とする熱赤外線放射を用いた放射型CTの手法について述べる。

対象物からの熱赤外線の放射を利用する温度測定（放射測温）は、温度を非接触・非破壊で測定できる特色がある。

しかし、燃焼火炎内の高温ガスのように熱赤外線を透過させる媒質の温度分布を放射測温によって求める場合には、媒質内で熱赤外線の放射とともに吸収も同時に起こるため、媒質内での熱赤外線の減衰を考慮する必要がある。

本研究では、異なる温度の外部放射源を用いて得た熱放射の投影データから、温度分布と吸収分布を同時に再構成することによって減衰の影響を取り除く方法[19, 20, 21]を示す。

第1章で本研究の目的と位置付けを述べる。第2章「測定原理」では、吸収を考慮した投影データの定式化（放射伝達方程式）から出発し、再構成アルゴリズムを導き出す。さらに、温度分布と吸収分布を仮定して計算した投影データから元の温度分布と吸収分布を再構成する数値シミュレーションを行い、再構成アルゴリズムの妥当性を検討する。

第3章以降では、メタン空気予混合炎を測定対象とし、HgCdTeを検出器とする熱赤外線スキャナを用いて行った測定実験について述べ、結果を示す。まず第3章で「実験装置の構成」について述べ、第4章「実験方法」では測定系の校正方法や具体的なデータ処理について述べる。第5章では実験結果を示し、熱電対との比較により定量的な評価を行う。第6章では、本手法の測定誤差について考察を加える。第7章で第II部のまとめを行う。

目次

はじめに

第 I 部

符号化開口放射型 CT

1 章

はじめに

逆問題解法に基づく非接触・非破壊の計測手法の一つに、 γ 線などの放射線を出す放射性同位元素 (RI: Radioactive Isotopes) の分布を測定対象とする放射型 CT (Computed Tomography) がある。

これは主に核医学の分野で用いられているもので、人体内に投与した RI から放出される γ 線によって生じる投影像の観測データから元の RI 分布を再構成し、特定の臓器や病変部への RI の集積や排出の様子から、体内の物質循環や新陳代謝の情報を得るために利用されている。

X線 CT では X線の吸収の分布の計測結果から組織の形状の情報が得られるのに対して、RI を対象とする放射型 CT では組織の機能の情報が得られる点が特徴であり、医療診断の上での有用性が注目されている。

RI を放射源とする放射型 CT は放射の機構の違いに応じて次のように大別される [9]。

ポジトロン CT (PET: Positron Emission computed Tomography) は陽電子 (positron) を放出する RI を放射源とする。RI から放出された陽電子は直ちに近傍の電子と衝突し、二つの γ 線 (511KeV の光子) を互いに正反対の方向に放出して消滅する。この γ 線を対象の周囲にリング状に配置した多数の小さなセンサで観測し、二つのセンサで γ 線が同時に検出される事象の計数値を投影データとして得て、それから RI 分布を再構成する。

シングルフォトン CT (SPECT: Single Photon Emission Computed Tomography) は一つの γ 線を放出する RI を放射源とする。平行多孔コリメータを用いたガンマカメラをエリアセンサとして使い、これを回転させて対象の周囲から γ 線の放射による投影像を観測し、そのデータから RI 分布を再構成する。

PET では良好な再構成結果が得られるが、使用する RI の半減期が数十秒から数分と短いため、自家用のサイクロトロンが必要なことと、PET 装置自体が高価なことが普及を妨げている [22]。

一方 SPECT では、使用する RI の入手は容易であり、装置自体も PET に較べれば操作性が良いと言われている。しかし、ガンマカメラとコリメータを合わせて数百 kg の重量物を回転させるため、投影データの収集にかかったり、回転の中心がずれて再構成結果に偽像 (アーチファクト) が生じやすい問題がある。

PET と SPECT では、通常、対象の周囲 180 度から観測した投影データを用い、X線

CTと同様の再構成アルゴリズムでRI分布を求めている。

これらに対して、SPECTと同種のRIを放射源とするが、ごく少数の限られた方向の投影データから一度にRIの3次元分布を求める手法が符号化開口放射型CTとして知られている[11]。この型のCTは観測の方向や投影像の数が少なく済むため、測定装置が簡単になり、観測に要する時間も短くなる点が特色である。また、大型建造物内のRI分布など、対象の周囲からの観測ができない場合にも適用できる可能性がある。

符号化開口CTは、平行多孔コリメータの代わりに、自己相関関数が近似的に δ 関数で表されるようなパターンで符号化した開口とガンマカメラを用いて得た投影データからRI分布を再構成する(図1.1)。再構成においては第2章で述べるように、開口パターンの自己相関関数が近似的に δ 関数で表されるという性質を利用している。また、異なる深さの放射源は異なる倍率で投影されることと、倍率が異なる開口パターン同士の相関がゼロに近いことを利用して、深さ方向の分解能を得ている。

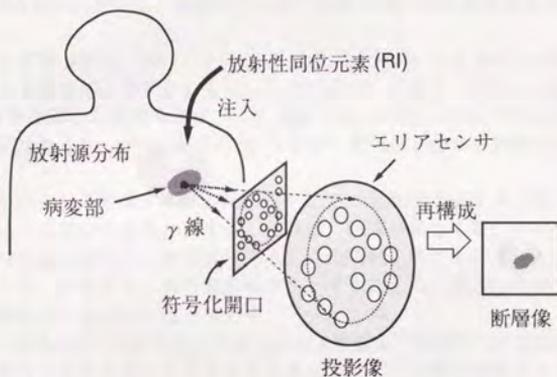


図1.1 符号化開口CTの概略

このような性質を持つ開口パターンとして、はじめはフレネル・ゾーン・プレート[14]やランダム・パターン[15]などが使用された。しかし、これらの開口パターンは自己相関関数が原点のピーク以外で値が十分小さくならないため、再構成した断層像の画質や分解能が十分でない問題点があった。

また、開口として少数のピンホールを使ったものもあるが[23, 24]、 γ 線の検出効率は良くない[25]。

その他、自己相関関数が近似的に δ 関数となるような様々なパターンが提案されている[26]が、いずれも3次元分布の再構成の可能性は述べているものの、実際の結果は示していない。

開口パターンについては、Fenimore ら [27] は自己相関関数が δ 関数で良く近似できる 2 値のパターンとして M 配列に着目し、これを使用するアイデアを示している。M 配列 [28, 29, 30] は疑似ランダム系列である M 系列を 2 次的に配列したもので、自己相関関数が δ 関数に近い他に、ピーク以外では相関関数値が一定になるといふ著しい特徴をもち、したがって、断層像内では分解能が良いという利点がある。

しかし、M 配列を用いた場合についても、実際に 3 次元分布の再構成結果を示した報告は、深さの異なる二つの点放射源を再構成したもの [32] があるにすぎない。

その他に 3 次元分布を再構成した結果としては、レーザー核融合によるプラズマのコアの形状を対象とし、直交する二方向から観測した 2 枚の投影像を用いたもの [33, 34] や、同様の観測方法で 3 次元 RI 分布を計測したもの [35, 36, 37] があるが、符号化開口 CT の大きな特色である一方向の投影像から 3 次元分布を再構成する場合については述べていない。

また、寺嶋らは、ピンホール位置を変えながら撮像した 3 枚の投影像から RI の 3 次元分布を再構成する実験を行っている [38, 39]。しかし、この方法は 3 次元分布を少数の 2 次元断層の積み重ねと想定し、原理的に 2 次元断層の数だけ投影枚数を必要とするので、効率がよくない。

本研究ではまず第 3 章で、開口パターンに M 配列を使用し、3 次元 RI 分布の任意の断層像を得る方法を具体的に示すとともに、これに基づいて設計・試作した観測系を用いて 3 次元 RI 分布を計測した結果を示す。この実験では、2 次元の RI 分布を異なる深さにおいたものを測定対象とし、2 つの深さの RI 分布が 1 枚の投影像から同時に再構成できることを示す。

また、3 次元分布を再構成する際の問題点として、逆投影では深さ方向の分解能が十分でないこともこの実験から明らかにする。これは、倍率が異なる開口パターン同士の相関が現実にはゼロにならないことが原因である。この問題を解決する方法として、開口の孔の大きさやピッチ、エリアセンサの画素を小さくすることで、深さ方向の分解能が向上できることを考察とシミュレーションで示す。

しかし、開口の孔やピッチを小さくすることは、製作上の困難のため限界があるほか、実際の開口には厚みがあるため、孔を小さくするにしたがって開口が平行コリメータに近付き、かえって深さ方向の分解能が悪くなる問題がある。また、エリアセンサの高分解能化も現実には限界がある。

本研究では、深さ方向の分解能を改善する方法として、エリアセンサを深さ方向に少しずつ動かして得た少数の複数投影を用いる再構成アルゴリズムを第 4 章で示す。これは、二つの投影データの差画像が等価的に開口の孔を小さくした投影像になることを利用するものである。

ただし、二つの投影像の差をとると、孔を小さくする効果の他に、像を空間的に微分した効果が生ずるので、差画像に逆投影を適用するとエッジを強調した断層像が得られる問題がある。本研究では、複数の投影像を入力とする最適フィルタを導出し、これを用いることでエッジ強調の度合を低減しつつ、深さ方向の分解能を向上させる方法を開発する。

2 章

符号化開口放射型 CT の原理

2.1 投影のモデル化

符号化開口 CT の測定系は符号化開口、エリアセンサ、データ処理系から構成される。以下では符号化開口の面を開口面、エリアセンサの面を検出面、開口面に平行にとった測定対象の任意の断面を対象面、開口面から対象面までの距離をその対象面の深さと呼ぶことにする。

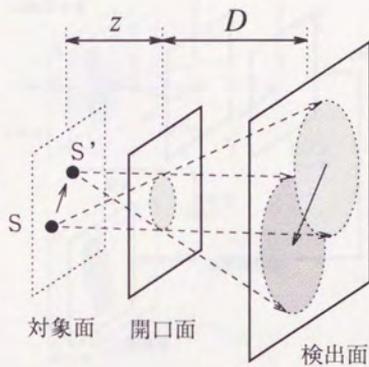
いま、深さ z の対象面上にある点放射源 S を考える (図 2.1(a))。途中での吸収・散乱、開口での回折を無視すれば、 S からの放射によって開口パターンを倍率 $\alpha = (D+z)/z$ で拡大した投影像が検出面上に生ずる。ここで D は開口面と検出面の間の距離である。投影像の強度は放射源の強度に比例する。

同じ対象面上の別の位置に点放射源 S' を置くと、 S' の投影像は S の投影像を検出面上で平行移動したものになる。また S' が S と異なる深さ z' の対象面上にある場合は、倍率 $\alpha' = (D+z')/z' (\neq \alpha)$ の投影像が生ずる (図 2.1(b))。つまり、検出面から得られる出力は、放射源の対象面内の位置の情報を投影像の平行移動量、深さの情報を投影像の倍率として含んでいることになる。このことは次のように定式化できる [40]。

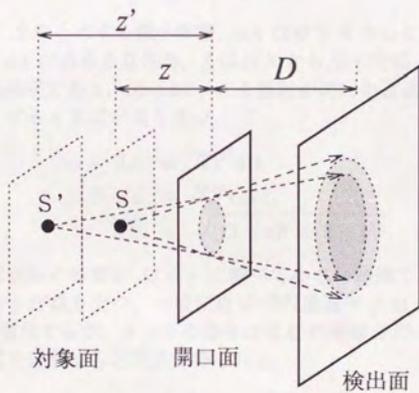
図 2.2 に示すように開口面上に原点を置く x_1-x_2-z 座標系を設定し、対象面、開口面、検出面内の位置をそれぞれベクトル $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$ で表す。測定対象内の位置は対象面内の位置 \vec{x} と深さ z の組 (\vec{x}, z) で表す。

RI の放射の強さは単位時間・単位体積・単位立体角当りに放出される放射線のカウント数で表される。RI のカウント数はポアソン分布にしたがって統計的に変動する離散的な値であるが、以下では放射源を可視光を放射する通常の光源と同様に考え、カウント数を放射の強度に置き換えて取り扱う (雑音に関する考察は次章で行う)。また、 γ 線の吸収や散乱、開口による回折の影響は無視できるものと仮定する。

対象内の点 X (座標 (\vec{x}, z)) に単位時間・単位体積・単位立体角当りの放射の強度が s の放射源を置いたとき、センサ上の点 Y (座標 \vec{y}) で検出される放射の強度 (単位時間・単位面積当りのカウント数) p は図 2.3 より次式で与えられる。



(a) 深さが同じ点放射源の場合



(b) 深さが異なる点放射源の場合

図 2.1 点放射源の位置と投影像の関係

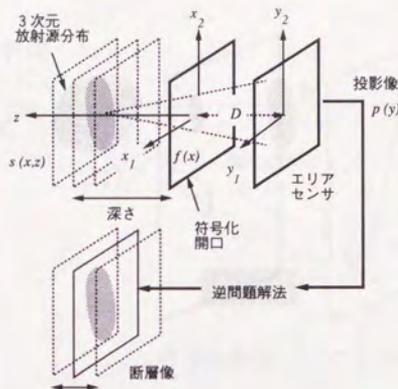


図 2.2 座標系の定義

$$p \cdot dA = f \cdot s \cdot dv d\Omega. \quad (2.1)$$

ここで、 dv は点 X を中心とする微小体積、 dA は点 Y を中心とする微小面積、 $d\Omega$ は点 X を中心として面積 dA が占める立体角、 f は点 X から点 Y を結ぶ伝播路が開口を通過する点 U での開口の透過率である。図 2.3 で、 θ を放射が開口を通過するときの入射角、 \overline{XY} を点 X, Y 間の距離とすると次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \cos \theta \cdot dA &= \overline{XY}^2 d\Omega, \\ D+z &= \overline{XY} \cos \theta, \\ \overline{XY} &= \sqrt{(D+z)^2 + |\vec{x} - \vec{y}|^2}. \end{aligned}$$

点 X と点 Y の z 軸からの距離が $D+z$ に比べて小さい範囲では $\theta \approx 0$ 、したがって $\cos \theta \approx 1$ 、 $\overline{XY} \approx D+z$ が成り立つ。一般に点 U での透過率 f は、開口の厚みのため、入射角 θ にも依存して変化するが、 $\theta \approx 0$ の場合は点 U の座標 \vec{u} のみの関数 $f(\vec{u})$ で表せる。

以上より、(2.1) 式を近似すると次式が得られる。

$$p(\vec{y}) = \frac{sdv}{(D+z)^2} f\left(\frac{D\vec{x} + z\vec{y}}{D+z}\right). \quad (2.2)$$

ここで、

$$\vec{u} = \frac{D\vec{x} + z\vec{y}}{D+z} = \frac{z}{D+z} \left(\vec{y} + \frac{D}{z}\vec{x}\right) \quad (2.3)$$

は点 U の座標である。

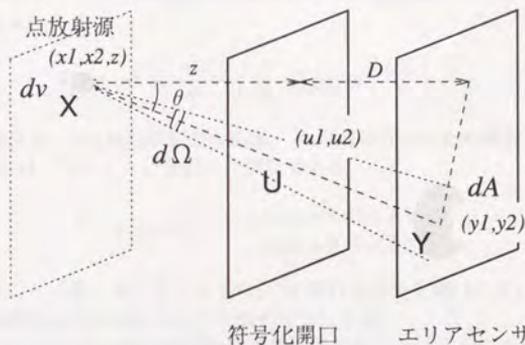


図 2.3 点放射源による投影像の強度

透過率分布 $f(\vec{u})$ には物理的な制約があり、0 から 1 の間の値をもつ。以下では、実際に開口を製作する場合に容易に実現できるようにさらに制限を加え、孔の有無によって $f(\vec{u})$ に 0 と 1 の 2 値を与えた場合を考える。

(2.2) 式の投影像 $p(\vec{y})$ は、(2.3) 式の右辺の形から理解できるように、開口パターンを $(D+z)/z$ 倍に拡大し、さらに $-(D/z)\vec{x}$ だけ平行移動したものとなっている。

放射源が分布する一般の場合、その投影像は (2.2) 式の重ね合わせとなる。すなわち、放射源の分布を $s(\vec{x}, z)$ とすると、投影像 $p(\vec{y})$ は次式で与えられる。

$$p(\vec{y}) = \int dz \iint_{\text{obj}} d^2x \frac{s(\vec{x}, z)}{(D+z)^2} f\left(\frac{D\vec{x} + z\vec{y}}{D+z}\right). \quad (2.4)$$

ここで $dx_1 dx_2$ を省略して d^2x と書いた。また、積分範囲 obj は放射源が存在する範囲を表す。

2.2 逆投影による再構成

投影像を (2.4) 式のようにモデル化すると、放射源分布の断層像を得ることは、観測した投影像 $p(\vec{y})$ を用いて (2.4) 式の形の積分方程式を $s(\vec{x}, z)$ について解くことに帰着する。

このような問題を解く一般的な方法としては、積分を離散的な点での値の有限和で近似し、得られる連立一次方程式を解く方法がある。しかし、符号化開口 CT の場合には、3 次元分布を扱うために行列の規模が非常に大きくなることや、積分核 f が不連続な関数であるため安定な解を得ることが難しいこと、などの理由で有効な方法ではない。

(2.4) 式を解析的に解くことは難しいが、開口パターンがランダムで自己相関関数が近似的に δ 関数であれば、次に示す逆投影と呼ばれる簡単な演算で $s(\vec{x}, z)$ の推定値 $\hat{s}(\vec{x}, z)$ を得ることができる。

$$\hat{s}(\vec{x}, z) = \frac{(D+z)^2}{A} \iint_{\text{prj}} d^2y p(\vec{y}) g\left(\frac{D\vec{x} + z\vec{y}}{D+z}\right). \quad (2.5)$$

ここで、積分範囲 prj は有効な投影像の範囲、 A は規格化のための係数で prj の面積である。また、 $g(\vec{u})$ は、次のように定義した関数である。

$$g(\vec{u}) = \begin{cases} +1 & (f(\vec{u}) = 1 \text{ のとき}), \\ -1 & (f(\vec{u}) = 0 \text{ のとき}). \end{cases} \quad (2.6)$$

このように定めると、第3章で述べるように M 配列を符号化開口に用いたとき、 $f(\vec{u})$ と $g(\vec{u})$ の相互相関関数の値が原点のピーク以外で 0 になる。

(2.5) 式で元の放射源分布が近似的に再構成されることは次のように示すことができる。(2.5) 式に (2.4) 式を代入すると次式が導かれる。

$$\hat{s}(\vec{x}, z) = \int d\zeta \iint_{\text{obj}} d^2\xi s(\vec{\xi}, \zeta) Q(\vec{x}, z; \vec{\xi}, \zeta). \quad (2.7)$$

ここで、 $Q(\vec{x}, z; \vec{\xi}, \zeta)$ は次式で定義したものである。

$$Q(\vec{x}, z; \vec{\xi}, \zeta) = \frac{1}{A} \left(\frac{D+z}{D+\zeta}\right)^2 \iint_{\text{prj}} d^2y f\left(\frac{D\vec{\xi} + \zeta\vec{y}}{D+\zeta}\right) g\left(\frac{D\vec{x} + z\vec{y}}{D+z}\right). \quad (2.8)$$

$Q(\vec{x}, z; \vec{\xi}, \zeta)$ は $(\vec{\xi}, \zeta)$ に点放射源を置いたときの 3次元分布の再構成結果を表し、点広がり関数 (PSF: Point Spread Function) に他ならない。これは再構成アルゴリズムの空間分解能を評価する指標として使用することができる。

(2.8) 式で変数 \vec{y} を $\vec{u} = (D\vec{x} + z\vec{y})/(D+z)$ に置き換えると次式が得られる。

$$Q(\vec{x}, z; \vec{\xi}, \zeta) = \frac{1}{A_u} \left(\frac{D+z}{D+\zeta}\right)^2 \iint_{\text{prj}_u} d^2u f(\vec{r} + \vec{u}/\beta) g(\vec{u}). \quad (2.9)$$

ここで、

$$\vec{r} = \frac{D}{D+\zeta} \left(\vec{\xi} - \frac{\zeta}{z} \vec{x} \right), \\ \beta = \frac{(D+\zeta)/\zeta}{(D+z)/z}.$$

また、変数変換に対応して積分範囲を prj から prj_u に書き直し、積分範囲 prj_u の面積を A_u とした。なお、 β は深さ z と ζ にそれぞれ対応する投影像の拡大率の比である。(2.9) 式より、 $Q(\vec{x}, z; \vec{\xi}, \zeta)$ は、 $f(\vec{u})$ と、 $g(\vec{u})$ を β 倍したパターンとの相互相関関数であるこ

とがわかる。ここで $Q(\vec{x}, z; \vec{\xi}, \zeta)$ が $(\vec{x}, z) = (\vec{\xi}, \zeta)$ にピークをもつ δ 関数になるようなパターンを開口に用いると (2.7) 式より $\hat{s} \simeq s$ となることがわかる。

したがって、 Q が δ 関数となるようなパターン f と g が見出せれば、逆投影により 3 次元分布の再構成が実現できる。

このようなパターンは数学的には存在する。その例を簡単のため 1 次元開口について示すと、 $f(u)$ を高さ b 、幅 $1/b$ の単位矩形パルスがランダムに配置されたもの (パルス発生の間隔の確率分布がポアソン分布) の場合、 $b \rightarrow +\infty$ 、 $A \rightarrow +\infty$ の極限では Q が δ 関数となる。

しかし、このようなパターンでは透過率が 1 以下という物理的な制約を満たさない。また、実際の開口では透過率の値は孔の有無に対応して 1 または 0 の 2 値をとるものが製作が容易である。さらに、エリアセンサの大きさが限られるため、有限の範囲の相関計算で相関関数が δ 関数となることが望ましい。

したがって、符号化開口 CT を実現するためには 2 値の有限なパターンで、なおかつ有限の範囲で計算した相関関数が δ 関数となるものを見出す必要がある。次章ではこのような性質をもつパターンとして M 配列を用いた符号化開口 CT を示す。

3 章

M 配列符号化開口放射型 CT

3.1 M 配列の性質

M 配列は 0 と 1 を値にもつ 2 値の疑似ランダム系列のひとつである M 系列を次の方法で 2 次元に配置したものである [28, 30].

次数 n の M 系列は周期 $2^n - 1$ を持つことが知られている. M 系列の周期が互いに素な整数 n_1, n_2 の積で表され, かつ k_1 を整数として $n_1 = 2^{k_1} - 1$ と書ける場合, $n_1 \times n_2$ を 1 周期分のパターンとする M 配列を図 3.1 のように作成することができる.

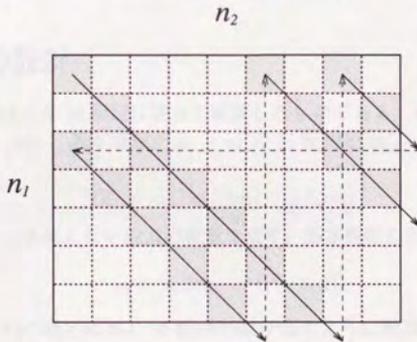


図 3.1 M 配列の作成手順
($n_1=7, n_2=9$ の場合)

このように作成したパターンを周期的に配置したものが M 配列である. M 配列には自己相関関数が δ 関数になるという著しい特徴がある. すなわち, M 配列を $m(i_1, i_2), m(i_1, i_2)$

の値 0 と 1 に値 -1 と 1 をそれぞれ対応させた M 配列を $\tilde{m}(i_1, i_2)$ とすると、後者について

$$\tilde{R}(k_1, k_2) = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2=0}^{n_2-1} \tilde{m}(i_1, i_2) \tilde{m}(i_1 + k_1, i_2 + k_2)$$

で定義される自己相関関数が次のように計算できる。

$$\tilde{R}(k_1, k_2) = \begin{cases} 1 & (k_1 \equiv 0 \pmod{n_1} \text{ かつ } k_2 \equiv 0 \pmod{n_2}) \\ \frac{1}{n_1 n_2} & (\text{その他}). \end{cases} \quad (3.1)$$

また、(3.1) 式から、 m と \tilde{m} の相互相関関数 R が次式で与えられる。

$$\tilde{R}(k_1, k_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n_1 n_2} \right) & (k_1 \equiv 0 \pmod{n_1} \text{ かつ } k_2 \equiv 0 \pmod{n_2}) \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases} \quad (3.2)$$

このことから、実際に開口を製作するときに、 $m(i_1, i_2)$ の値が 1 の場所に孔を開け（透過率 1）、逆投影で用いるパターンには \tilde{m} を対応させることにより、相関関数のピークのまわりで値を 0 にできることがわかる。これは M 系列に著しい性質である。

また、任意の次数 n について M 系列を作成することができ、特に次数が偶数で $n = 2n'$ の場合には、 $n_1 = 2^{n'} - 1$, $n_2 = 2^{n'} + 1$ の正方形に近い M 配列を作成することができる。この性質も符号化開口のパターンとして都合の良い性質である。

3.2 測定系の設計

M 配列符号化開口は孔を M 配列に従って配置したものである。その透過率分布 $f(\vec{u})$ は、パターンのピッチを Δm 、基本周期が $n_1 \times n_2$ の M 配列を $m(i_1, i_2)$ として、次のように書くことができる。

$$f(\vec{u}) = m(\lfloor u_1/\Delta m \rfloor, \lfloor u_2/\Delta m \rfloor) \quad (3.3)$$

ここで、記号 $\lfloor x \rfloor$ は x を越えない最大の整数を表す。基本周期の実際の大きさ $w_1 \times w_2$ は、

$$w_i = n_i \Delta m \quad (i = 1, 2) \quad (3.4)$$

となる。また、M 配列の端では同じ M 配列が繰り返すように配置する。なお、(3.3) 式はそれぞれの孔の大きさがパターンのピッチに等しい、一辺が $\Delta m \times \Delta m$ の正方形の場合の表式である。実際に製作する場合には開口自身を支える部分が必要なので、孔の大きさはピッチより小さくなる。また、孔の形も円形が製作が比較的容易であるが、以下では簡単のため (3.3) 式で透過率分布を記述して考える。

M 配列符号化開口の場合、 $f(\vec{u})$ と $g(\vec{u})$ の相互相関関数、

$$R(\vec{\tau}) = \frac{1}{A_u} \iint_{\text{prj}_u} d^2 u f(\vec{u} + \vec{\tau}) g(\vec{u}) \quad (3.5)$$

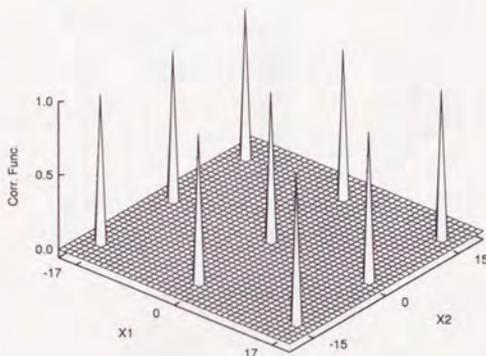


図 3.2 17×15 M 配列の自己相関関数 R

は, (3.2) 式や図 3.2 に示すように元の M 配列と同じ周期をもつ周期的な δ 関数となる. 基本周期内では半値幅 Δm のピークを一つもち, それ以外では値がゼロとなる. ここで, 相関を計算する積分範囲は M 配列の周期の整数倍の範囲で A_m はその面積である.

周期的な開口の効果

M 配列は周期的な配列である. したがって, M 配列の基本周期を複数配置して開口を作成し, (2.5) 式の逆投影において積分範囲を大きさが $w_1(D+z)/z \times w_2(D+z)/z$ となる矩形領域に定めると, 対象面内の位置 \vec{x} に依らず, 常に開口パターンの基本周期の整数倍の範囲についての相関関数が計算できる. これはフレネル・ゾーン・プレートやランダム・パターンにはない長所である.

周期的開口では再構成される断層像も周期的となる. 図 3.3 において T, T' をそれぞれ基本周期とすると, 2つの放射源 S, S' は同じ投影像 p を生ずるため, 投影像からは区別できない. したがって, 放射源の広がり, S-S' の間隔より狭い範囲に限定する必要がある. この範囲を M 配列符号化開口の視野とよぶと, その大きさ $v_1 \times v_2$ は,

$$v_i = w_i \frac{D+z}{D} = n_i \Delta m \frac{D+z}{D} \quad (i = 1, 2) \quad (3.6)$$

で与えられる.

横方向の分解能

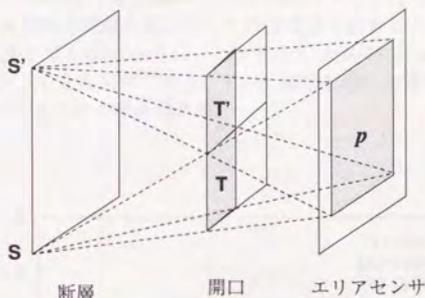


図 3.3 周期的開口の効果

符号化開口による再構成像の分解能は、点広がり関数 Q のピークの半値幅 (FWHM : Full Width Halfway Maximum) で評価できる。まず、横方向 (x_1, x_2 軸方向) の分解能については、(2.9) 式で $z = \zeta$ とおくと次式を得る。

$$\begin{aligned}
 Q(\vec{x}, \zeta; \vec{\xi}, \zeta) &= \frac{1}{A_u} \iint_{\text{prj}_u} d^2 u f \left(\frac{D}{D+\zeta} (\vec{\xi} - \vec{x}) + \vec{u} \right) g(\vec{u}) \\
 &= R \left(\frac{D}{D+\zeta} (\vec{\xi} - \vec{x}) \right). \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

積分範囲 prj_u を M 配列の周期の整数倍となるように定めると、図 3.2 に示すように、 $R(\vec{\tau})$ のピークの半値幅は Δm となる。したがって、分解能は (3.7) 式より、

$$\Delta x = \frac{D+z}{D} \Delta m \quad (3.8)$$

で表され、横方向の分解能は開口のピッチで定まることがわかる。

深さ方向の分解能

深さ方向 (z 軸方向) の分解能についても、PSF のピークの z 方向の半値幅で評価できる。

(2.9) 式で $\vec{x} = \vec{\xi}$ とおき、さらに、簡単のため $\vec{\xi} = (0, 0)$ とすると、次式が得られる。

$$Q(\vec{0}, z; \vec{0}, \zeta) = \frac{1}{A_u} \left(\frac{D+z}{D+\zeta} \right)^2 \iint_{\text{prj}_u} d^2 u f(\vec{u}/\beta) g(\vec{u}) \quad (3.9)$$

(3.9) 式は、 $z = \zeta$ すなわち $\beta = 1$ にピークをもつ。

次節で述べるように、実験では 17×15 の M 配列を符号化開口に用いた。この M 配列について、(3.9) 式を数値計算した結果を図 3.4 に示す。計算は $D=45\text{cm}$ 、 $z=35\text{cm}$ とし、積

分範囲を M 配列の 1×1 周期, 2×2 周期, 3×3 周期分として行った。ピークの半値幅は相関関数を計算する M 配列の周期の数多くすれば改善できることがわかる。これは積分範囲を広くすると \bar{u}/β と \bar{u} の差が小さい (したがって $f(\bar{u}/\beta)$ と $g(\bar{u})$ に相関がある) 部分の寄与が相対的に小さくなるためである。 3×3 周期を用いた場合の深さ方向の分解能は図 3.4 より約 4cm であることが読み取れる。

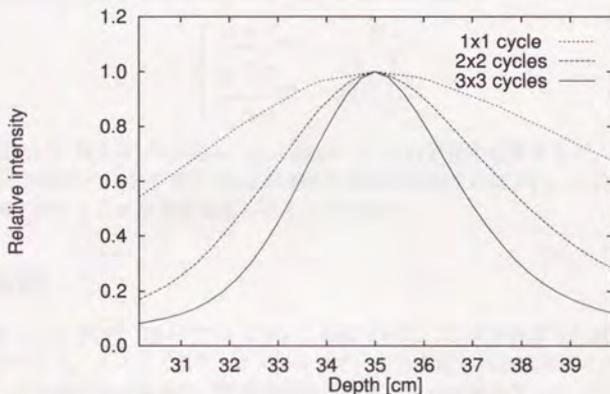


図 3.4 M 配列符号化開口 CT の深さ方向の点広がり関数

ゴーストの問題

既に述べたように、周期的なパターンを配置した開口を用いる場合には再構成される断層像も開口パターンの周期に対応した周期をもっている。

M 配列符号化開口の場合には、深さ方向の再構成に対しても周期的な構造があり、ある特定の条件下で実際には放射源の存在しない断層の再構成像に、別の断層に存在する放射源の像 (ゴーストと呼ぶ) が現れることが実験的に見い出され、ゴーストが生ずる条件や性質、原因も理論的に明らかになっている [31]。

これは、M 配列を一つおきにサンプリングして得られる配列が元の M 配列をシフトしたものになるという、M 配列に固有の性質が原因となっている。このような性質をもつパターンに対しては、倍率が 1:2 となるパターン同士の相互相関関数も大きなピークを示すため、放射源が存在する深さ z に対して、投影像の倍率が 1:2 の関係になる深さの断層像 z' を再構成すると、深さ z の断層像の分布が重畳して再構成される。このことから、ゴ-

ストが発生する条件を解析すると、

$$\frac{D+z'}{z'} : \frac{D+z}{z} = 2^n : 1 \quad (n = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots) \quad (3.10)$$

であることが示される。

したがって、放射源が存在し得る範囲の深さについて、(3.10)式が成立しないように観測系を設定すれば、ゴーストの出現は避けられる。具体的には放射源の中心の深さ z_c に対して、放射源が存在し得る深さの最大値 z_{\max} と最小値 z_{\min} が

$$\begin{cases} \frac{D+z_{\max}}{z_{\max}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{D+z_c}{z_c}, \\ \frac{D+z_{\min}}{z_{\min}} < \sqrt{2} \frac{D+z_c}{z_c} \end{cases} \quad (3.11)$$

を満たせば良い。例えば $D=45\text{cm}$ 、 $z_c = 35\text{cm}$ で (3.11) 式を計算すると、 $z_{\max} < 73\text{cm}$ 、 $z_{\min} > 20\text{cm}$ が得られ、深さ 20~73cm の範囲に放射源が収まればよい。このように、ゴーストの問題を避けることは通常は難しいことではない。

3.3 実験

測定対象として RI の一種の $^{99\text{m}}\text{Tc}$ を使い、鉛板で作成した M 配列符号化開口とアンガー型シンチレーションカメラ（以下、ガンマカメラ）から構成される観測系で RI から放射される γ 線による投影像を観測し、放射源分布を再構成する実験を行った。 $^{99\text{m}}\text{Tc}$ は核医学の分野で最も広く用いられている RI である [42]。

今回の実験では、3次元分布の再構成を行う第一段階として、二つの2次元放射源を深さの異なる対象面上に置いたものを観測対象とした。この実験で、放射源が深さ方向に離散的に分布する場合について実際に深さの異なる対象面の再構成ができることを示す。

3.3.1 実験装置と方法

符号化開口

実験に用いた符号化開口は3mm厚の鉛板に径2mmの孔を3mmピッチであけて製作したものである。用いたM配列は8次の原始多項式 $x^8 + x^6 + x^5 + x + 1$ （周期 $2^8 - 1 = 255$ ）から生成されるM系列を 17×15 に配置したものである。このM配列を 4×4 周期分（1周期は $51\text{mm} \times 45\text{mm}$ の大きさに相当）配置して開口パターンとした。既に述べたように、M配列を周期的に配置することにより、放射源の位置に依らず、常に開口パターンの基本周期の整数倍の大きさをもつ投影を得ることができる。作成した開口パターンを図3.5に示す。

ガンマカメラ

ガンマカメラは島津製作所の ZLC-7500 を用いた。ガンマカメラは、放射源からの γ 線が NaI (TI) 検出器に入射する際に生じるシンチレーションを 2 次元アレイ状に配置した光電子増倍管によって検知し、光電子増倍管の出力を比例配分して計算した γ 線の入射位置を、 128×128 の格子点に丸めて入射個数をカウントするものである。散乱 γ 線の影響を低減するために、 γ 線の入射位置を検出すると同時に、全発光量に比例する信号を取りだし、これを波高分析器によって特定のエネルギー (^{99m}Tc の場合は 149KeV) の γ 線のみを選別してカウントする。このガンマカメラの有効視野の直径は 387mm である。

通常、ガンマカメラを使用する際には、ピンホール・コリメータや平行多孔コリメータを用いて 2 次元のイメージングを行うが、この実験ではこれらのコリメータを取り外して用いている。

ファントム

ファントム (計測対象の放射源) には、文字 C と T の形に切り抜いた吸い取り紙に ^{99m}Tc 溶液を染み込ませたものを用いた。 ^{99m}Tc の半減期は 6.0h である。ファントムの形状と寸法を図 3.6 に示す。

文字 C を深さ 29cm 、文字 T を深さ 43cm の位置に開口からみて重なるように置いて放射源分布とした。エリアセンサと開口の距離は 24cm 、データ収集時間は 60s とした。

データ処理

実験で得たデータから再構成を行うには、観測した投影像を画像データとして計算機に取り込み、(2.5) 式の逆投影を計算して放射源分布の断層像を得るので、投影像、断層像とも離散的データとなる。そこで計算のために (2.5) 式の積分を次のように有限和で置き換えた形で用いた。

$$\hat{s}(\vec{x}, z) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} p(\vec{y}_{ij}) g(\vec{u}_{ij}) \quad (3.12)$$

ここで $\vec{y}_{ij}, \vec{u}_{ij}$ は、

$$\frac{D\vec{x} + z\vec{y}_{ij}}{D+z} = \vec{u}_{ij}$$

の関係があり、

$$\begin{aligned} \vec{u}_{ij} &= (i\Delta m, j\Delta m), \\ \vec{y}_{ij} &= \frac{(D+z)\vec{u}_{ij} - D\vec{x}}{z} \end{aligned}$$

である。また、 N_1, N_2 は M 配列の基本周期 n_1, n_2 の整数倍となるように定めた。前節で考察したように、 N_1, N_2 は大きいほど深さ方向の分解能は向上するので、ここでは検出器の大きさの制約の中で N_1, N_2 を最大にし、 3×3 周期分の範囲で計算を行った。逆投影の計算は (3.8) 式で示した横方向の分解能 Δx の $1/4$ の間隔で行い、得られた結果の 2×2 画素の平均をとって平滑化し、最終的に $\Delta x/2$ (約 3.5mm) の分解能の画像を得た。画素数は 34×30 である。

3.3.2 実験結果

図 3.7 にいくつかの深さについて再構成した断層像を示す。再構成する深さがファントム (文字 T) を置いた深さに位置に一致するときには、その文字 T の大きさと形がほぼ正確な断層像が得られた (図 3.7(e))。また、図 3.7(b) はファントム (文字 C) を置いた深さの再構成で、やはり文字 C の像が得られた。これらの結果から、深さの異なる対象面での再構成が可能であることが確認された。

ただし、この実験で二つのファントムが分離して再構成できたのは、他方のファントムとの距離が深さ方向の分解能 ($z=29\text{cm}$ で約 4cm) より大きく、互いに再構成像に及ぼす影響が小さいためである。

その他の深さでは、実際にはファントムが存在していないのに、ファントムのはけた像やランダムなパターンが現れ、誤った再構成像が得られた (図 3.7(a), (c), (d), (f))。このように、深さ方向の分解能については十分な性能が得られていない。その原因は、既に述べたように、倍率のわずかに異なる M 配列同士の相関関数の値が 0 でないためである。また、ランダムなパターンが現れる原因としては、深さの異なる断層に存在する放射源分布の影響の他に、投影データの変動の影響が考えられる。

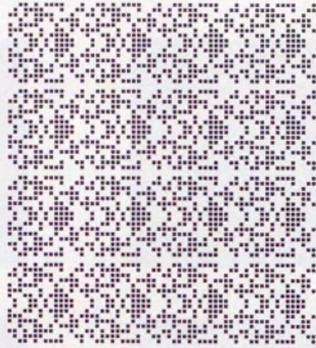


図 3.5 17×15 M 配列を基本周期とし、
 4×4 周期からなる開口パターン

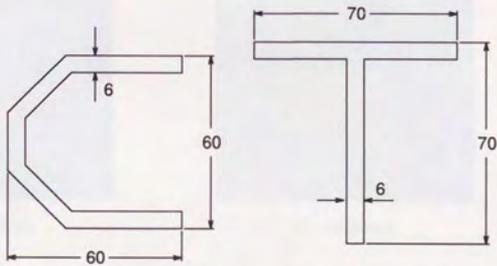
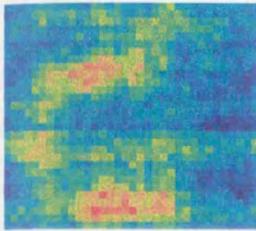
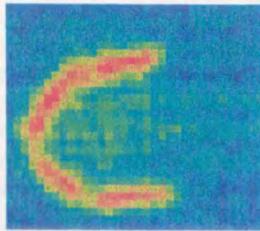


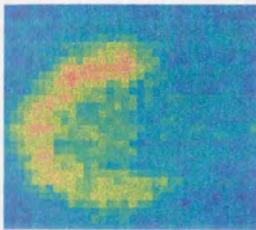
図 3.6 放射源の形状と寸法 (単位 mm)



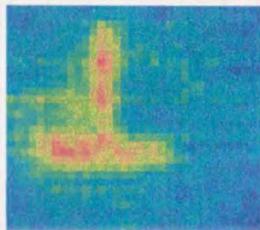
(a) $z=23\text{cm}$



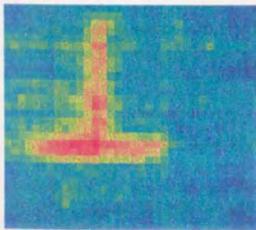
(b) $z=29\text{cm}$



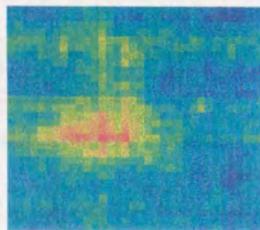
(c) $z=32\text{cm}$



(d) $z=38\text{cm}$



(e) $z=43\text{cm}$



(f) $z=56\text{cm}$

図 3.7 文字 C (深さ 29cm) と文字 T (深さ 43cm) の再構成結果

3.4 考察と結論

3.2節で述べたように、今回の実験の設定では、深さ29cmの距離における横方向（開口に平行な方向）の分解能が約7mmであるのに比較して、深さ方向の分解能は約4cmと大きく、充分でない。

実験からも、実際には放射源が存在しない深さに放射源があるかのような再構成結果が得られており、3次元分布を再構成する上で深さ方向の分解能の改善が課題であることを示している。以下では、深さ方向の分解能の改善について考察する。

まず、深さ方向の分解能を近似的に与える式を導き出す。田沼は、倍率が僅かに異なるパターンの相互相関関数が、図3.8に示すように、孔同士が重なり合う部分（図中影の部分）の面積の総和として計算できることを示し、各孔の重なり面積が拡大縮小の中心図の左上頂点）からの距離に対して一次の減少をすることから、(3.9)式について次のような近似式を導出している[43]。

$$Q(\vec{0}, z; \vec{0}, \zeta) = \frac{1}{A_u} \left\{ \frac{\beta + 1}{2} - \frac{|\beta - 1|(n - 1)}{4a} \right\}^2 \quad (3.13)$$

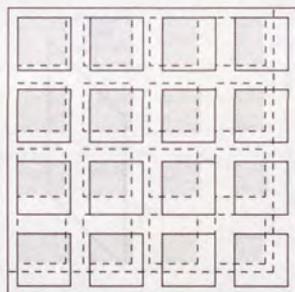


図3.8 倍率が僅かに異なる開口パターンの重なり

ここで n は相関関数を計算する範囲に含まれる開口パターンのピッチ数、 a は開口のピッチに対する孔の一辺の長さの比（孔は正方形を仮定）、 β は投影像の倍率の比で、

$$\beta = \frac{(D+z)/z}{(D+\zeta)/\zeta}$$

である。(3.13)式は $\beta = 1$ にピークをもち、このピークの幅が深さ方向の分解能を表している。(3.13)式より、深さ方向の分解能を向上するためには、 $\{\dots\}$ 内の第2項の絶対値が大きくなればよく、

1. 相関関数の積分範囲 $n \Rightarrow$ 大

2. 開口の孔の相対的な大きさ $a \Rightarrow$ 小

の二つの方法があり得る。前者を実現するには、さらに二つの方法が考えられる。一つはエリアセンサを大きくすること、もう一つは、エリアセンサの大きさはそのままに開口パターンのピッチを小さくすることである。

次に、これらの方法の効果をシミュレーションで確認する。シミュレーションの設定を図 3.9 に示す。

シミュレーションでは、逆投影をサンプリング点における値の和で近似した (3.12) 式の形で計算するのではなく、開口の孔の形を正方形として (2.5) 式の積分を区分的に実行することで近似をせずに計算した。これは、(3.12) 式の形では孔を小さくするとサンプリング点の間隔も細かくする必要がある、かえって計算量が增大するためである。

また、実際の計測ではエリアセンサの画素の大きさが問題になる。実験で用いたガンマカメラでは 1 画素の大きさが $3\text{mm} \times 3\text{mm}$ 程度であり、したがってこれより細かい投影像の構造は検出することができない。シミュレーションでは、エリアセンサの全体の大きさは固定とし、エリアセンサの画素の大きさを変えたときの再構成結果も計算した。

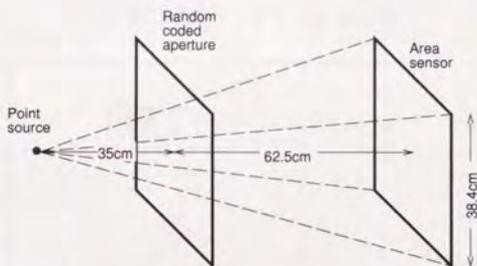
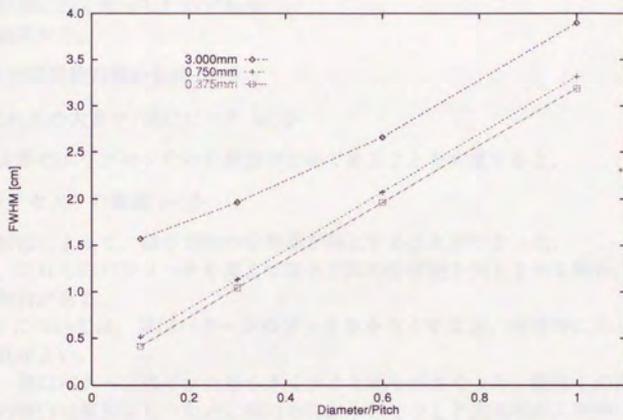


図 3.9 シミュレーションで想定した観測系

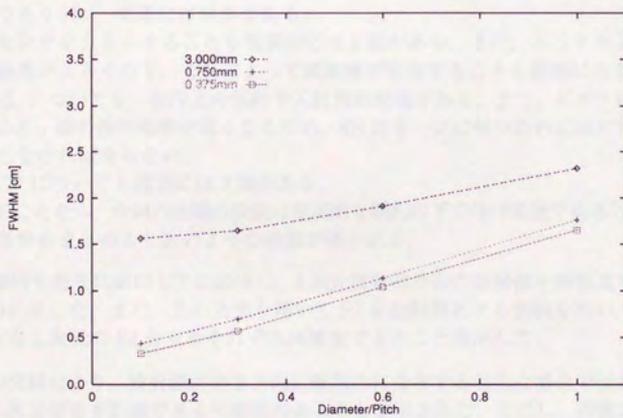
いくつかのエリアセンサの画素の大きさについて、横軸に開口パターンのピッチに対する孔の大きさ（一辺の長さ）の比、縦軸に半値幅で計算した深さ方向の分解能をプロットした結果を図 3.10 に示す。

実験では、直径が 2mm の円形の孔を開口に用いている。同じ面積をもつ正方形に換算すると一辺が 1.77mm となり、ピッチとの比 0.6 になる。

図 3.10 より開口の孔の大きさが小さくなれば深さ方向の分解能がよくなることが確かめられた。また、エリアセンサの画素を小さくしても深さ方向の分解能が上がる。これは、投影像の平滑化の効果が低減されるためである。したがって、エリアセンサの画素が十分小さくなり、 $0.75\text{mm} \times 0.75\text{mm}$ 以下になると深さ方向の分解能の向上はほぼ収束する。



(a) 開口パターンのピッチ 3.0mm



(b) 開口パターンのピッチ 1.5mm

図 3.10 開口パターンのピッチ・孔の大きさと深さ方向分解能の関係 (シミュレーション)

また、開口パターンを細かくした場合にも深さ方向の分解能が向上する。これはエリアセンサの大きさを固定しているため、相関関数を計算する範囲が(M配列の基本周期に対して)相対的に広がったためである。

以上の結果から、

- ① 相互相関関数の積分範囲 \Rightarrow 大
- ② 開口の孔の大きさ/開口ピッチ \Rightarrow 小

および、実際のエリアセンサの分解能が有限であることを考慮すると、

- ③ エリアセンサの画素 \Rightarrow 小

の3つの要因によって、深さ方向の分解能が向上することがわかった。

ただし、これらのパラメータを変えて深さ方向の分解能を向上させる場合、次のような現実的な制約がある。

まず①については、開口パターンのピッチを小さくするか、相対的にエリアセンサを大きくすればよい。

しかし、開口パターンのピッチを小さくすると孔も小さくなり、製作上の困難があるほか、実際の開口は厚さをもつために開口の孔が小さくなると透過率が入射角に依存し、斜めに入射した γ 線の透過率が小さくなる問題がある。これを解決するためには開口の厚さを薄くすればよいが、 γ 線を透過率1%以下に遮蔽するためには3mm程度の厚さをもつ鉛板が必要であり[44]、実際には限界がある。

エリアセンサを大きくすることも現実的には上限がある。また、エリアセンサの周辺で γ 線の入射角が大きくなり、それによって減衰量が変化することも問題になる。

一方、②についても、製作上の制約や入射角の問題がある。また、ピッチに対して孔を小さくすると γ 線の検出効率が悪くなるため、SN比を一定に保つためにはそれだけ観測時間を長くしなければならない。

最後に③についても現実には下限がある。

これらのことから、今回の実験の設定は現実的な制約の下ではほぼ最適であると考えられる。以上の考察をまとめると次のような結論が得られる。

- M配列を符号化開口CTに応用し、3次元放射源分布の断層像を再構成する方法を具体的に示した。また、この方法を用いてRIを放射源とする実験を行い、異なる深さにある2次元のRI分布をそれぞれ再構成できることを示した。
- この実験により、放射源が深さ方向に離散的に分布する特別な場合ではあるが、確かに3次元分布を計測できる可能性のあることが示された。ただし、再構成の性能において、深さ方向の分解能が不足しているという問題点が明らかとなった。一般の3次元分布を扱うためには、深さ方向の分解能の改善が必要である。
- 深さ方向の分解能を向上させるためには、①相互相関関数の積分範囲を大きくする、②開口の孔の面積比を小さくする、③エリアセンサの画素を小さくする、などの方法がある。

4章

最適フィルタを用いた符号化開口放射型CT

投影像から断層像を再構成するアルゴリズムとして、第3章では逆投影を用いた、符号開口パターンとしてM配列を用いることにより、放射源が少数の互いに離れた断層内に分布する場合には、再構成が可能であることを実験的に確認した。しかし、実験結果からは、深さ方向の分解能が十分でないことも同時に明らかになった。

逆投影は、異なる深さの放射源は異なる倍率で投影されることを利用し、倍率が異なる開口パターン同士の相関がゼロに近いことに基づいて深さ方向の分解能を得ようとしている。

しかし、現実の開口では倍率の僅かに異なる開口パターン同士は相関がゼロにならないため、逆投影の深さ方向の分解能は十分ではなかった。

これに対して、田沼ら[45]は開口を深さ方向に僅かに動かして得た2枚の投影像を用いることにより、深さ方向の分解能が改善されることを示した。これは2枚の投影像の差画像を計算すると、等価的に開口の孔を小さくした投影像が得られることに着目した方法である。

図4.1に田沼らの用いた観測方法を示す。図中の影を付けた部分は、開口の孔の一つおよび点放射源による投影像である。開口を対象の方向へ僅かに移動すると、僅かに拡大された孔の投影像が得られる。この二つの投影像の差画像を計算すると、一つの孔についてはその差分の投影像が得られ、等価的に開口の孔を小さくしたことになる。

しかし、田沼らが用いた再構成アルゴリズム(差動型逆投影)では元の放射源分布のエッジを強調した断層像が得られる問題点があった。これは二つの投影像の差画像を用いると、図4.1(a)に示すように過剰に引かれる部分が存在するために、元の投影像を空間的に微分した効果が現れるためである。

この章では、田沼らの方法を発展させ、エリアセンサを深さ方向に少しずつ動かして得た複数投影像を用いて再構成の性能向上を試みる(図4.2)。

すぐにはわかるように、複数の投影像にそれぞれ逆投影法を適用して得られた再構成結果を単純に加え合わせるだけでは、深さ方向の分解能は向上できないので、複数投影像を用いる場合には新たに再構成アルゴリズムを開発する必要がある。

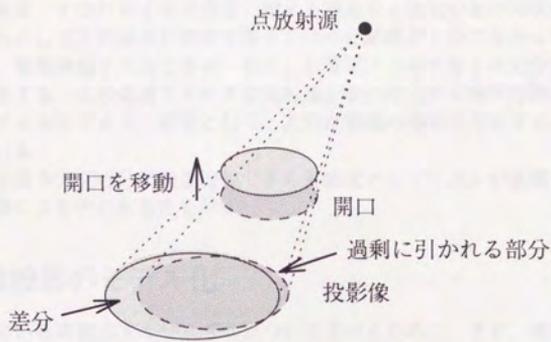


図 4.1 差動型逆投影で用いる複数投影像

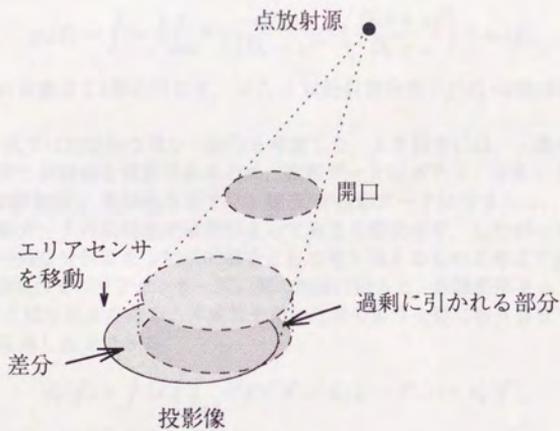


図 4.2 最適フィルタで用いる複数投影像

逆投影以外の再構成アルゴリズムとしては、Woods[46]は開口パターンにランダムピンホールを用い、再構成にHelstromの画像復元フィルタ[47]を用いる方法を示している。しかし、元々は画像、すなわち2次元分布に対する理論を3次元分布の再構成に適用しているため、いずれにしても再構成の精度や深さ方向の分解能が十分でなかった。

本研究では、複数投影を入力とする一般化した最適フィルタを3次元分布の投影モデルに基づいて導出する。この最適フィルタは放射源分布の推定の2乗平均誤差が最小となる意味で最適なフィルタであり、結果として、入力が複数の場合に対応するウィナー・フィルタとなっている。

これを用いて深さ方向の分解能を改善できる再構成アルゴリズムが実現できることを示す。さらに実験によりその有効性を示す。

4.1 複数投影のモデル化

複数投影を用いる再構成アルゴリズムについて述べるために、まず、複数投影の場合の順問題の定式化を行なう。

投影像が1枚の場合については2.1節で述べたとおりである。m枚の複数の投影像を観測するとき、観測条件の変え方はいろいろな方法がありうるが、ここでは図4.2に示した、エリアセンサと開口間の距離を変える方法を考える。この距離を D_k ($k=1, \dots, m$)としたとき観測で得られる投影像を $p_k(\vec{y})$ とおく(図4.3)。加法的なガウス雑音を $v_k(\vec{y})$ で表すと次式が成り立つ。

$$p_k(\vec{y}) = \int dz \int \int_{\text{obj}} d^2x \frac{s(\vec{x}, z)}{(D_k + z)^2} f\left(\frac{D_k \vec{x} + z \vec{y}}{D_k + z}\right) + v_k(\vec{y}). \quad (4.1)$$

その他の記号の定義は2.1節と同じで、 $s(\vec{x}, z)$ は放射源分布、 $f(\vec{x})$ は開口の透過率分布である。

また、(4.1)式では加法的なガウス雑音を考慮した。より厳密には、 γ 線の放出はポアソン過程にしたがう統計的な現象であるため、投影データはポアソン分布にしたがって統計的に変動し(付録参照)、乗法的なポアソン雑音¹が投影データに含まれる。

ここでは投影データの期待値が場所によってあまり変化せず、したがって投影データの統計的変動は一律な分散をもつ加法的雑音として取り扱えるものと考えて議論を進める。

変更する観測条件をエリアセンサ-開口間の距離に限ると、座標変換 $\vec{x} = -z\vec{x}'$, $\vec{y} = D_k\vec{y}'$ により、(4.1)式は2次元たたみこみ演算を用いた次のような形に書き直して、以下の数式の取り扱いが見通し良くできる。

$$p'_k(\vec{y}') = \int dz \int \int_{\text{obj}'} d^2x' s'(\vec{x}', z) f'_k(\vec{y}' - \vec{x}', z) + v'_k(\vec{y}'). \quad (4.2)$$

ここで s' , f'_k , p'_k , v'_k はそれぞれ次式で定義する。

$$s'(\vec{x}', z) \stackrel{\text{def}}{=} s(-z\vec{x}', z),$$

¹ポアソン分布の分散と期待値の大きさは等しい

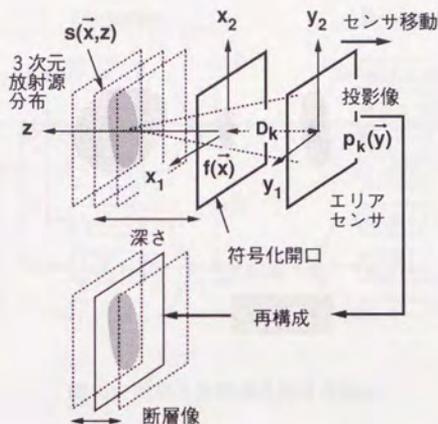


図 4.3 座標系と記号の定義

$$\begin{aligned}
 f'_k(\vec{y}', z) &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{z}{D_k + z} \right)^2 f \left(\frac{z D_k}{D_k + z} \vec{y}' \right), \\
 p'_k(\vec{y}') &\stackrel{\text{def}}{=} p_k(D_k \vec{y}'), \\
 v'_k(\vec{y}') &\stackrel{\text{def}}{=} v_k(D_k \vec{y}').
 \end{aligned}$$

以下では変換した座標系と (4.2) 式の投影モデルを用いるが、簡単のためプライム'を省略して表記する。また、記法 $f(\vec{x}) \leftrightarrow F(\vec{\omega})$ は f と F が 2 次元フーリエ変換対であること、すなわち、

$$\begin{aligned}
 F(\vec{\omega}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 x f(\vec{x}) e^{-j\vec{\omega} \cdot \vec{x}}, \\
 f(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \omega F(\vec{\omega}) e^{j\vec{\omega} \cdot \vec{x}}
 \end{aligned}$$

を表すものとする。

4.2 最適フィルタの導出

(4.2) 式の投影モデルに基づいて、観測した m 枚の投影像 p_k から s を推定することがここでの問題である。 m 枚の投影像 p_k を入力すると、任意に定めたある深さ c の断層像の推定値 $\hat{s}(\vec{x}, c)$ を出力する線形システムを考え、インパルス応答を $g_k(\vec{x}, c)$ ($k = 1, \dots, m$)

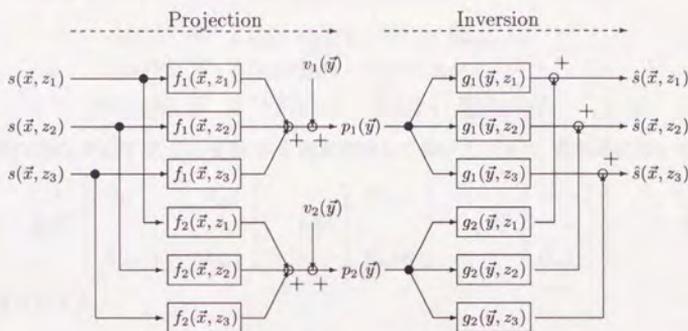


図 4.4 投影と再構成の信号の流れ

とするフィルタを用いて、この線形システムを

$$\hat{s}(\vec{x}, c) = \sum_{k=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 y p_k(\vec{x} - \vec{y}) g_k(\vec{y}, c), \quad (4.3)$$

あるいは g_k に対応する伝達関数 $G_k (g_k \leftrightarrow G_k)$ を用いて (4.3) 式をフーリエ変換した

$$\hat{S}(\vec{\omega}, c) = \sum_{k=1}^m P_k(\vec{\omega}) G_k(\vec{\omega}, c) \quad (4.4)$$

の形に書き表す (図 4.4). ここで $\hat{s} \leftrightarrow \hat{S}, p_k \leftrightarrow P_k$ である. 元の分布 s の推定は推定値 \hat{s} が s にできるだけ近くなるように行う. ここでは推定の 2 乗平均誤差が最小, すなわち

$$e = \mathcal{E} \left\{ (\hat{s}(\vec{x}, c) - s(\vec{x}, c))^2 \right\} \rightarrow \text{最小} \quad (4.5)$$

を規範とし, これにしたがう g_k を定める. ここで s と v_k は定常な確率過程で, $\mathcal{E}\{\dots\}$ は期待値演算を表すものとし, さらに, 任意の z, k について $s(\vec{x}, z)$ と $v_k(\vec{x})$ は無相関で,

$$\mathcal{E}\{s(\vec{x}, z) v_k(\vec{x} - \vec{\tau})\} = 0 \quad (4.6)$$

と仮定する. この解は $m=1$ の場合はウィナー・フィルタに他ならず, 以下で示すように $m > 1$ の場合はその一般化になっている.

$m \geq 1$ の一般の場合, 解 G_k は次のようにして求まる. (4.5) 式に (4.3) 式を代入して展開し, パーシバルの等式を用いると次式が得られる.

$$e = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \omega \left(\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m A_{kl} G_k(c) G_l(c)^* - \sum_{k=1}^m B_k(c) G_k(c)^* - \sum_{k=1}^m B_k(c)^* G_k(c) + \Phi(c, c) \right) \quad (4.7)$$

ここで、* は複素共役転置を表し、 A_{kl}, B_k, Φ は次式で定義したものである。

$$b_k(\vec{\tau}, z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E} \{s(\vec{x}, z)p_k(\vec{x} - \vec{\tau})\} \leftrightarrow B_k(\vec{\omega}, z), \quad (4.8)$$

$$a_{kl}(\vec{\tau}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E} \{p_k(\vec{x})p_l(\vec{x} - \vec{\tau})\} \leftrightarrow A_{kl}(\vec{\omega}), \quad (4.9)$$

$$\phi(\vec{\tau}, \mu, \nu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E} \{s(\vec{x}, \mu)s(\vec{x} - \vec{\tau}, \nu)\} \leftrightarrow \Phi(\vec{\omega}, \mu, \nu). \quad (4.10)$$

ただし簡単のため、(4.7) 式では変数 $\vec{\omega}$ を適宜省略して書いた。(4.7) 式右辺について、

$$\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1m} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} B_1(c) \\ \vdots \\ B_m(c) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} G_1(c) \\ \vdots \\ G_m(c) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

と書いて書き直すと

$$e = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\omega (\mathbf{g}^* \mathbf{A} \mathbf{g} - \mathbf{g}^* \mathbf{b} - \mathbf{b}^* \mathbf{g} + \Phi(c, c)) \quad (4.12)$$

が得られる。 \mathbf{A} は定義よりエルミート行列であるから、その固有値 λ_i ($i = 1, \dots, m$) はすべて実数で、ある m 次ユニタリ行列 \mathbf{U} が存在し、次のように対角化できる [41]。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \\ \mathbf{A} &= \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}^*. \end{aligned}$$

次に、 $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{U}^* \mathbf{g}$, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{U}^* \mathbf{b}$ において (4.12) 式を書き直すと

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\omega (\boldsymbol{\gamma}^* \mathbf{A} \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}^* \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^* \boldsymbol{\gamma} + \Phi(c, c)) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\omega \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \left| \gamma_k - \frac{\beta_k}{\lambda_k} \right|^2 + \Phi(c, c) - \sum_{k=1}^m \frac{|\beta_k|^2}{\lambda_k} \right) \end{aligned}$$

となる。よって e は $\gamma_k = \beta_k / \lambda_k$ ($k = 1, \dots, m$) のとき最小である。これを書き直すと $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\beta}$, したがって $\mathbf{g} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$ が得られる。ここまでの計算で、解 G_k は行列を使った次のような形で求まる。

$$\begin{bmatrix} G_1(c) \\ \vdots \\ G_m(c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1m} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1(c) \\ \vdots \\ B_m(c) \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

次に、(4.8) 式、(4.9) 式に (4.2) 式の投影モデルを代入し、(4.6) 式の仮定を用いて整理すると、(4.13) 式右辺の各要素は次式のように書ける。

$$B_k(\vec{\omega}, z) = \int d\mu \Phi(\vec{\omega}, z, \mu) F_k(\vec{\omega}, \mu)^*, \quad (4.14)$$

$$A_{kl}(\vec{\omega}) = \int dz B_l(\vec{\omega}, z) F_k(\vec{\omega}, z) + \Psi_{kl}(\vec{\omega}). \quad (4.15)$$

表 4.1 各再構成アルゴリズムの表式 (γ : SN 比)

アルゴリズム	表式
逆投影	$G_1(\vec{\omega}, c) = F_1(\vec{\omega}, c)^*$
Helstrom フィルタ	$G_1(\vec{\omega}, c) = \frac{\gamma F_1(\vec{\omega}, c)^*}{1 + \gamma F_1(\vec{\omega}, c) ^2}$
最適フィルタ (投影像 1 枚)	$G_1(\vec{\omega}, c) = \frac{\gamma F_1(\vec{\omega}, c)^*}{1 + \gamma \int dz F_1(\vec{\omega}, z) ^2}$

ここで、 F_k は開口パターンのフーリエ変換 ($f_k \leftrightarrow F_k$)、 Ψ は雑音の統計的情報を表し、

$$\psi_{kl}(\vec{\tau}) = \mathcal{E} \{v_k(\vec{x})v_l(\vec{x} - \vec{\tau})\} \leftrightarrow \Psi_{kl}(\vec{\omega}) \quad (4.16)$$

である。

以上で F_k 、 Φ 、 Ψ から、(4.13) 式、(4.14) 式、(4.15) 式により複数投影を入力とする最適フィルタ G_k が定まった。

実際には Φ 、 Ψ が未知の場合が多い。その場合でも s と v_k をそれぞれ平均パワーが σ_s^2 、 σ_v^2 の白色雑音とみなし、

$$\Phi(\vec{\omega}, \mu, \nu) = \sigma_s^2 \delta(\mu - \nu), \quad (4.17)$$

$$\Psi_{kl}(\vec{\omega}) = \sigma_v^2 \delta_{kl} \quad (4.18)$$

と置いて得られる簡略化した最適フィルタを用いることができる。

投影像が 1 枚の場合について、逆投影、Helstrom フィルタ、最適フィルタの具体的な表式を表 4.1 に示す。表中の γ は SN 比 ($= \sigma_s^2 / \sigma_v^2$) である。最適フィルタでは、3 次元の投影モデルを考慮した結果、分母に奥行き方向の積分が導入されている。

次に投影像が 2 枚の場合の再構成の表式を差動型逆投影と最適フィルタについて示す。差動型逆投影では、二つの投影像の差画像 $p_2 - p_1$ に対して、伝達関数が $F_2^* - F_1^*$ で表される逆投影を用いて再構成する。したがって、その表式は次のように書ける。

$$\begin{cases} G_1(c) = F_1(c)^* - F_2(c)^*, \\ G_2(c) = F_2(c)^* - F_1(c)^*. \end{cases} \quad (4.19)$$

一方、投影像を 2 枚用いた最適フィルタは

$$\begin{cases} G_1(c) = \left\{ F_1(c)^* \left(1 + \gamma \int dz |F_2(z)|^2 \right) - F_2(c)^* \left(\gamma \int dz F_1(z)^* F_2(z) \right) \right\} \frac{\gamma}{\Delta}, \\ G_2(c) = \left\{ F_2(c)^* \left(1 + \gamma \int dz |F_1(z)|^2 \right) - F_1(c)^* \left(\gamma \int dz F_1(z) F_2(z)^* \right) \right\} \frac{\gamma}{\Delta} \end{cases} \quad (4.20)$$

ここで

$$\Delta = \left(1 + \gamma \int dz |F_1(z)|^2\right) \left(1 + \gamma \int dz |F_2(z)|^2\right) - \left|\gamma \int dz F_1(z)^* F_2(z)\right|^2$$

と表される。いずれも二つの投影像をそれぞれ逆投影するフィルタ $F_1(c)^*$, $F_2(c)^*$ の差を計算しているが、最適フィルタでは、各フィルタの重みを調節することによって、横方向の微分効果を低減している。

なお、SN 比がゼロに近付いた極限では、最適フィルタは定数倍の違いを除いて逆投影法に一致することを指摘しておく。これは、投影枚数が 1 枚と 2 枚の場合には表 4.1 と (4.20) 式から明らかである。

また、投影枚数が 3 枚以上の場合は次のように示される。(4.14) 式, (4.15) 式, (4.17) 式, (4.18) 式より、 \mathbf{I} を単位行列として、 \mathbf{A} と \mathbf{b} は次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1m} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix} = \sigma_s^2 \begin{bmatrix} \int dz F_1(z) F_1(z)^* & \cdots & \int dz F_m(z) F_1(z)^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int dz F_1(z) F_m(z)^* & \cdots & \int dz F_m(z) F_m(z)^* \end{bmatrix} + \sigma_v^2 \mathbf{I},$$

$$\begin{bmatrix} B_1(c) \\ \vdots \\ B_m(c) \end{bmatrix} = \sigma_s^2 \begin{bmatrix} F_1(c)^* \\ \vdots \\ F_m(c)^* \end{bmatrix}.$$

SN 比が小さな場合、すなわち $\sigma_s^2 \rightarrow 0$ のとき、 $\mathbf{A} \rightarrow \sigma_v^2 \mathbf{I}$ となり、(4.13) 式から

$$\begin{bmatrix} G_1(c) \\ \vdots \\ G_m(c) \end{bmatrix} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_v^2} \begin{bmatrix} F_1(c)^* \\ \vdots \\ F_m(c)^* \end{bmatrix}$$

が得られる。これは、この場合の最適フィルタが逆投影の和に一致することを示している。

4.3 シミュレーション

逆投影および差動型逆投影と比較した最適フィルタの効果、雑音の影響、および、深さ方向の分解能改善に対する複数投影の寄与を調べるために、シミュレーションを行った。

シミュレーションで用いた元の分布は、文字 C (深さ 33.4cm) と文字 T (深さ 36.6cm) のパターンである。開口の孔のピッチを 6mm, エリアセンサの画素数を 256×256, 画素ピッチを 1.5mm とした。17×15 の M 配列を開口パターンに用いた。投影像はエリアセンサを動かして開口からの距離を 29cm, 36cm, 45cm と変えて得た。

逆投影および差動型逆投影との比較

投影データの平均カウント数が十分大きく、雑音の影響が無視できる場合について、各手法の再構成結果を比較した。投影データの画素当りの平均カウント数は80とし、ポアソン分布にしたがって変動するものとした。

図4.5は $D=45\text{cm}$ の投影像を用いた逆投影の再構成結果である。また、差動型逆投影(図4.6)では $D=45\text{cm}$ と、開口を移動して $D=46\text{cm}$ とした投影像、最適フィルタ(図4.8)では $D=45\text{cm}$, 36cm の2枚の投影像を用いた。

逆投影法では実際に放射源がない深さの再構成結果(図4.5(c))に文字Cや文字Tのボケた像が現れた。差動型逆投影ではボケは低減されているが、エッジが強調された画像が得られている。これらに対して、最適フィルタでは、投影が1枚の場合(図4.7)はあまり大きな改善は得られないが、投影像が2枚の場合(図4.8)ではボケが低減され、かつ、差動型逆投影と比較してエッジ強調の度も少ない結果が得られた。

図4.9は3枚の投影像を使って最適フィルタで再構成した結果である。枚数を増やすことで深さ方向のボケがさらに低減されていることがわかる。

なお、これらの再構成結果は、投影データに雑音を全く加えなかった場合の再構成結果と画質の上でほとんど差がなく、したがって、カウント数が十分に大きい場合には雑音の影響が無視できることが確かめられた。

ポアソン雑音の影響

ポアソン分布にしたがって変動する投影データのSN比は

$$\text{SN比} = (\text{平均カウント数})^2 / \text{分散} = \text{平均カウント数}$$

と計算される。このため、平均カウント数が小さい場合にSN比が非常に悪くなることや、乗法的な性質のために雑音成分と信号成分が相関をもつことが問題になる。そこで、平均カウント数が小さい場合について、ポアソン雑音が再構成画像に与える影響を調べた。

図4.10は平均カウント数が10の場合の逆投影法の再構成結果、図4.11は投影像を2枚用いた最適フィルタの再構成結果である。カウント数が小さい場合の、最適フィルタは逆投影法に近く、差動構造による深さ方向の分解能改善の効果は小さい。したがって、シミュレーションの結果でも深さ方向の分解能の改善の効果はほとんど得られていない。

また、カウント数が多い場合に比べてスペckル状の雑音が多く残っている。これは、乗法的雑音では信号と雑音の間に相関があるため、信号成分と相関のある雑音成分が完全に除去されていないためである。

深さ方向の分解能改善に対する複数投影の寄与

複数投影を用いることによる深さ方向の分解能の改善は、投影データの総カウント数が投影枚数の分だけ増加してSN比が上がったことによる効果と、差動構造による効果の二つの要因が寄与している。

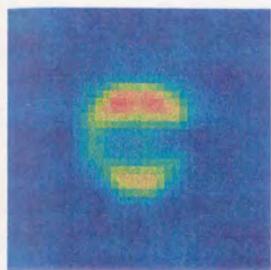
もし、分解能改善に差動構造の効果があるならば、センサを移動せずにカウント数だけを2倍に増やして得た1枚の投影像から再構成した結果よりも、センサを移動して得た投影データを用いるほうが、分解能が向上するはずである。

投影像を2枚用いて平均カウント数が160の1枚の投影像を用いた最適フィルタの再構成結果(図4.12)と、各投影像の平均カウント数が80の2枚の投影像を用いた最適フィルタの再構成結果(図4.8)を比較し、差動構造の寄与の大きさを調べた。投影データの変動はポアソン分布を仮定した。

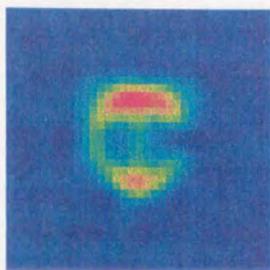
図4.13は複数投影の効果を比較によって示すため、これらの再構成像のプロファイルを最大ピークの値で規格化して表示したものである。図4.13(a)は、文字Cを置いた断層の再構成結果である。大きな三つのピークがあり、左のピークは文字Cの像、中央のピークは文字Tのボケた像である。投影像が1枚の場合よりも、2枚の場合の方が文字Tのピークが小さくなっている。

同様に、文字Tの断層の再構成結果を示した図4.13(b)でも、文字Tによる中央のピークに対して、文字Cによるピークが左側に現れているが、その大きさは投影像が2枚の方が小さくなっている。

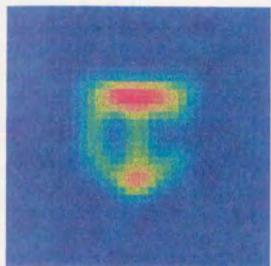
これらの結果は、総カウント数は同じでも、2枚の投影像に分けて差動型にして観測した方が、深さ方向の分解能が改善されていることを示している。したがって、SN比が同じであっても、複数投影の効果として、分解能が改善されることが示された。



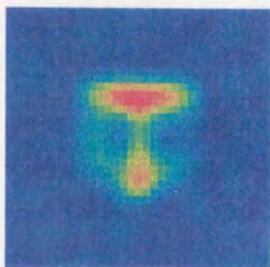
(a) $z=31.8\text{cm}$



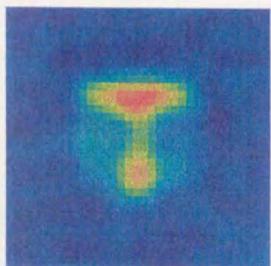
(b) $z=33.4\text{cm}$



(c) $z=35.0\text{cm}$



(d) $z=36.6\text{cm}$

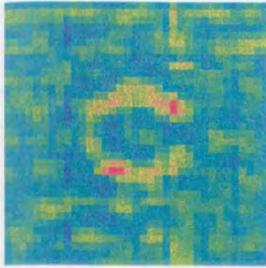


(e) $z=38.2\text{cm}$

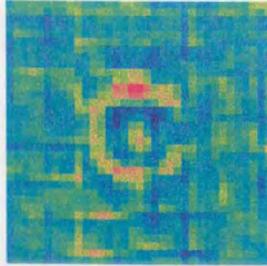


図 4.5 逆投影法

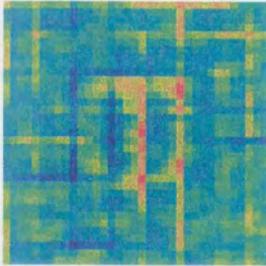
文字 C (深さ 33.4cm) と文字 T (深さ 36.6cm) を再構成
平均カウント数 80



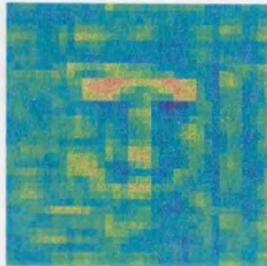
(a) $z=31.8\text{cm}$



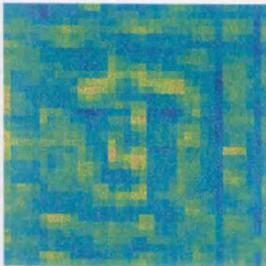
(b) $z=33.4\text{cm}$



(c) $z=35.0\text{cm}$



(d) $z=36.6\text{cm}$

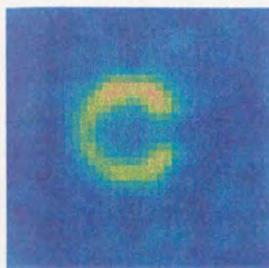


(e) $z=38.2\text{cm}$



図 4.6 差動型逆投影

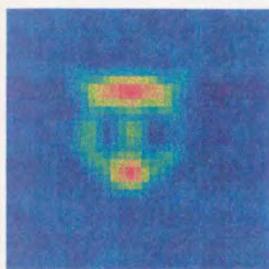
文字 C (深さ 33.4cm) と文字 T (深さ 36.6cm) を再構成
平均カウント数 80



(a) $z=31.8\text{cm}$



(b) $z=33.4\text{cm}$



(c) $z=35.0\text{cm}$



(d) $z=36.6\text{cm}$



(e) $z=38.2\text{cm}$

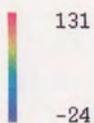
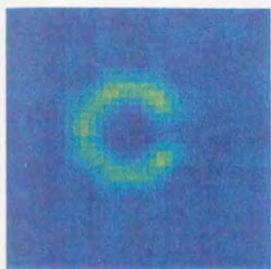


図 4.7 最適フィルタ (投影枚数 1)

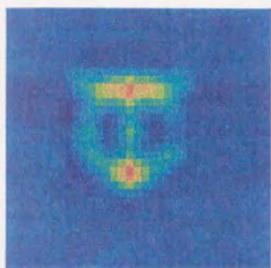
文字 C (深さ 33.4cm) と文字 T (深さ 36.6cm) を再構成
平均カウント数 80



(a) $z=31.8\text{cm}$



(b) $z=33.4\text{cm}$



(c) $z=35.0\text{cm}$



(d) $z=36.6\text{cm}$

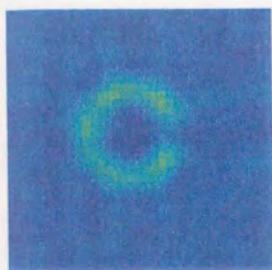


(e) $z=38.2\text{cm}$

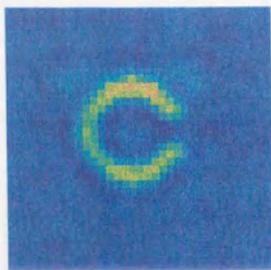


図 4.8 最適フィルタ (投影枚数 2)

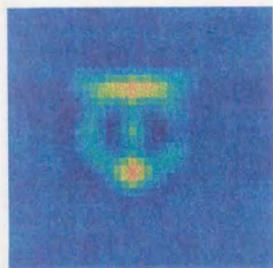
文字 C (深さ 33.4cm) と文字 T (深さ 36.6cm) を再構成
平均カウント数 80



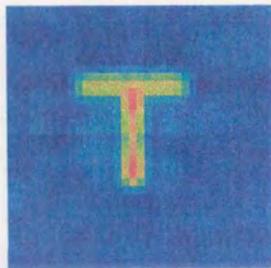
(a) $z=31.8\text{cm}$



(b) $z=33.4\text{cm}$



(c) $z=35.0\text{cm}$



(d) $z=36.6\text{cm}$

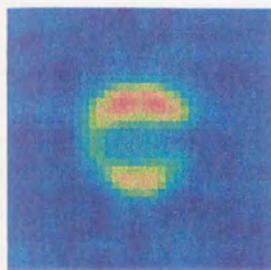


(e) $z=38.2\text{cm}$

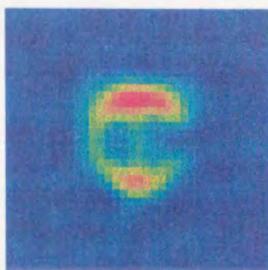


図 4.9 最適フィルタ (投影枚数 3)

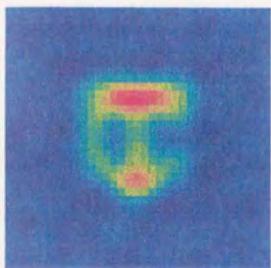
文字 C (深さ 33.4cm) と文字 T (深さ 36.6cm) を再構成
平均カウント数 80



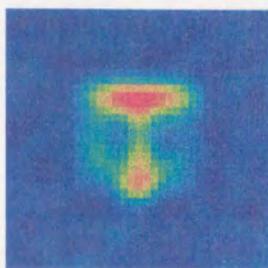
(a) $z=31.8\text{cm}$



(b) $z=33.4\text{cm}$



(c) $z=35.0\text{cm}$



(d) $z=36.6\text{cm}$

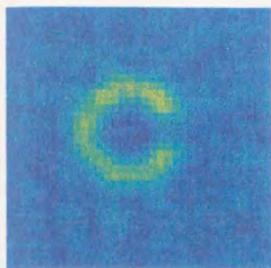


(e) $z=38.2\text{cm}$

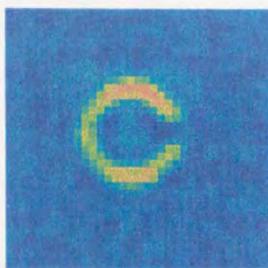


図 4.10 逆投影法

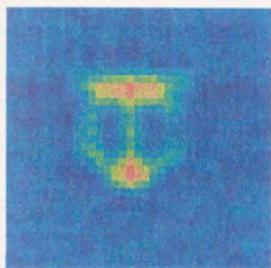
文字 C (深さ 33.4cm) と文字 T (深さ 36.6cm) を再構成
平均カウント数 10



(a) $z=31.8\text{cm}$



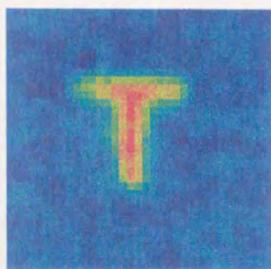
(b) $z=33.4\text{cm}$



(c) $z=35.0\text{cm}$



(d) $z=36.6\text{cm}$

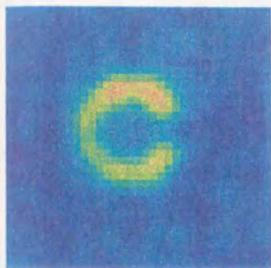


(e) $z=38.2\text{cm}$

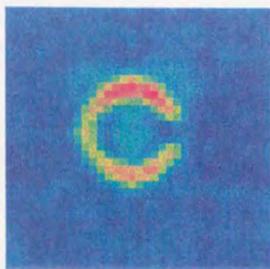


図 4.11 最適フィルタ (投影枚数 2)

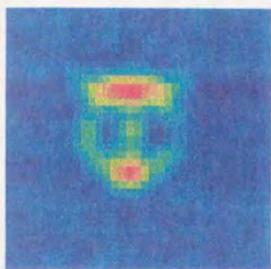
文字 C (深さ 33.4cm) と文字 T (深さ 36.6cm) を再構成
平均カウント数 10



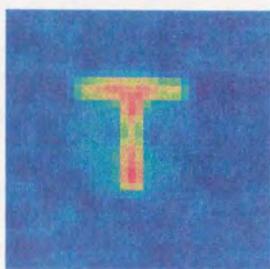
(a) $z=31.8\text{cm}$



(b) $z=33.4\text{cm}$



(c) $z=35.0\text{cm}$



(d) $z=36.6\text{cm}$

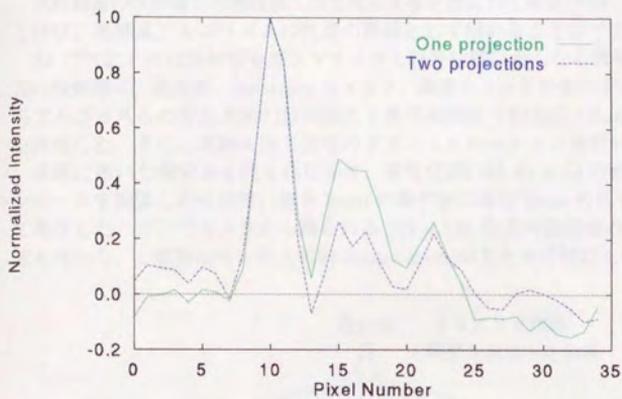


(e) $z=38.2\text{cm}$

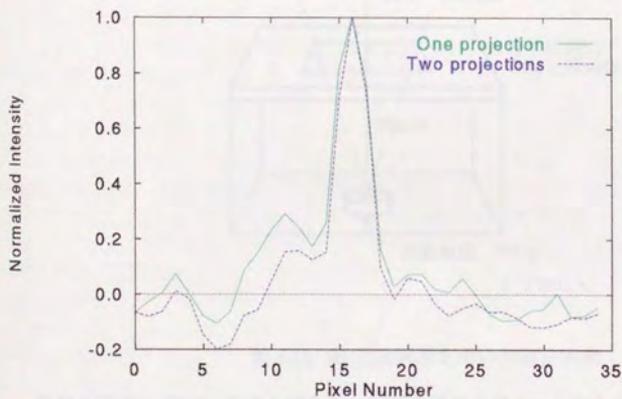


図 4.12 最適フィルタ (投影枚数 1)

文字 C (深さ 33.4cm) と文字 T (深さ 36.6cm) を再構成
平均カウント数 160 の投影像を 1 枚用いたの場合



(a) 文字 C (深さ 33.4cm) のプロファイル



(a) 文字 T (深さ 36.6cm) のプロファイル

図 4.13 複数投影の効果

4.4 実験

点放射源の投影像から再構成した3次元分布を点広がり関数(PSF: Point Spread Function)と呼び、再構成アルゴリズムの性能の指標として用いることができる。

RI (^{99m}Tc) の点放射源をガンマカメラと符号化開口からなる簡単な測定装置で観測して得た投影像に、逆投影、Helstrom フィルタ、最適フィルタをそれぞれ適用してPSFを求め、各アルゴリズムの深さ方向の分解能と2乗平均誤差(RMSE: Root Mean Squares Error)を評価した。また、実験と同じ設定の下でシミュレーションを行い、結果を比較した。

実験に用いた測定系を図4.14に示す。符号化開口は 64×64 の格子点上にランダムにピンホールを配置したもので、厚さ3mmの鉛の板に直径2mmの孔を3mmピッチで配置して製作した。ガンマカメラから得られる 128×128 画素の投影像のうち、中央の 90×90 画素を用いた。1画素はセンサ上の約 $3\text{mm} \times 3\text{mm}$ の大きさに対応している。

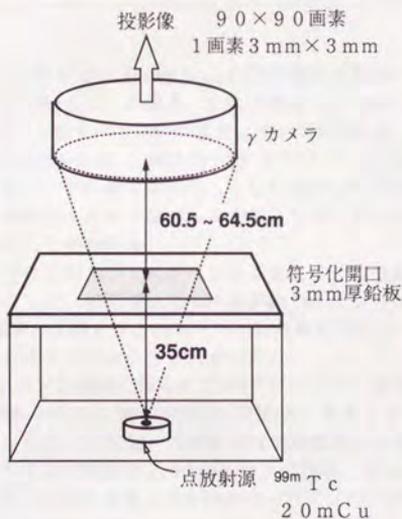


図4.14 RI点放射源を用いた測定実験

鉛製の容器に ^{99m}Tc 溶液を満し、容器上部に直径1mmの孔を開けたものを点放射源とした。これを開口から約35cmの距離に置き、ガンマカメラと開口の距離 D を58.5cm, 60.5cm, 62.5cm, 64.5cm, 66.5cmと変えて5枚の投影像を得た。投影像の総カウント数はそれぞれ 2×10^5 である。

再構成では放射源分布を 35×35 画素の断層像35枚に離散化して求めた。

表 4.2 再構成アルゴリズムの性能比較 (%は逆投影を 100%とした値)

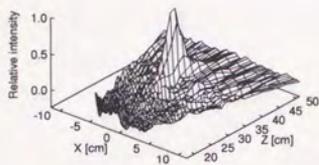
アルゴリズム	FWHM (cm)		RMSE ($\times 10^{-2}$)	
	計算値	実験値	計算値	実験値
逆投影	4.0	4.2	3.9	5.3
Helstrom フィルタ	3.0	4.2	3.1	5.1
最適フィルタ	2.9	4.0	2.0	3.6
最適フィルタ (2枚)	2.5 (63%)	3.2 (76%)	1.3 (33%)	3.2 (60%)
最適フィルタ (3枚)	2.3 (58%)	2.9 (69%)	1.1 (28%)	2.7 (51%)
最適フィルタ (5枚)	2.1 (53%)	2.7 (64%)	1.0 (26%)	3.4 (64%)

逆投影と Helstrom フィルタでは $D=62.5\text{cm}$ の投影像を 1枚用いた。また、最適フィルタでは投影像が 1枚 ($D=62.5\text{cm}$) の場合、2枚の場合 ($D=60.5, 64.5\text{cm}$)、3枚の場合 ($D=60.5, 62.5, 64.5\text{cm}$)、5枚すべて用いた場合について計算した。 x_1-z 平面上の PSF を 3次元プロットしたものを図 4.15に、 z 軸上の PSF をプロットしたものを図 4.17に示す。なお、比較のため、PSF をピークの値で規格化したものを示している。逆投影法や Helstrom フィルタと比較して、最適フィルタではピークが鋭くなり、またピーク以外の場所での値がゼロに近くなっていることがわかる。

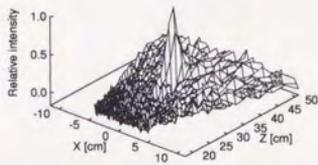
また、実験と同じ設定の下でのシミュレーションとして、点放射源を仮定して計算した投影像から再構成を行なった。投影像には SN 比が約 100 のガウス性雑音を加えた。計算した PSF を図 4.16に示す。実験とシミュレーションの結果はほぼ一致しており、用いた投影モデルが妥当であると考えてよいことがわかった。

表 4.2はシミュレーションと実験で得られた PSF について、深さ方向のピークの半値幅 (FWHM) と、理想 PSF からの 2乗平均誤差 (RMSE) をそれぞれ算出した結果である。表中でシミュレーション結果は計算値、実験結果は実験値として表してある。シミュレーションでは、最適フィルタの FWHM と RMSE は、逆投影、Helstrom フィルタと比較して小さく、再構成の性能が改善されることが確かめられた。特に投影像を 3枚用いた場合、逆投影法に対して FWHM が約 60%、RMSE が約 30%に改善された。実験でも、FWHM が約 70%、RMSE が約 50%に改善された。

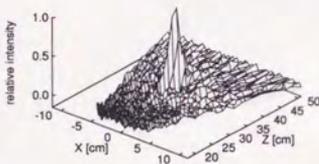
投影像の数と深さ方向の分解能の関係については、表 4.2あるいはこれを図示した図 4.18より、投影像の数の増加と共に FWHM が小さくなっていることがわかる。ただし、枚数が増えるにしたがって、改善の度合は小さくなっている。



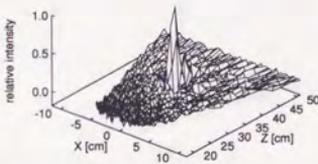
(a) 逆投影法



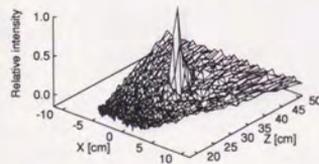
(b) Helstrom フィルタ



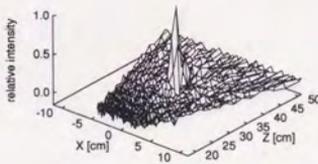
(c) 最適フィルタ (投影1枚)



(d) 最適フィルタ (投影2枚)

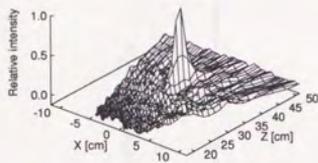


(e) 最適フィルタ (投影3枚)

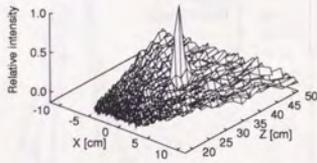


(f) 最適フィルタ (投影5枚)

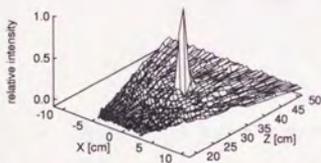
図 4.15 実験で求めた PSF



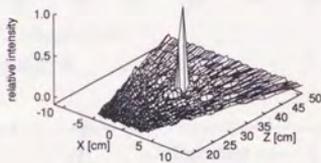
(a) 逆投影法



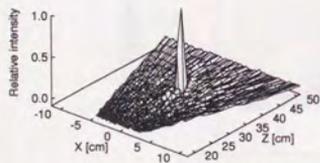
(b) Helstrom フィルタ



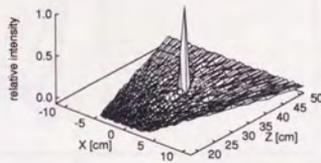
(c) 最適フィルタ (投影1枚)



(d) 最適フィルタ (投影2枚)

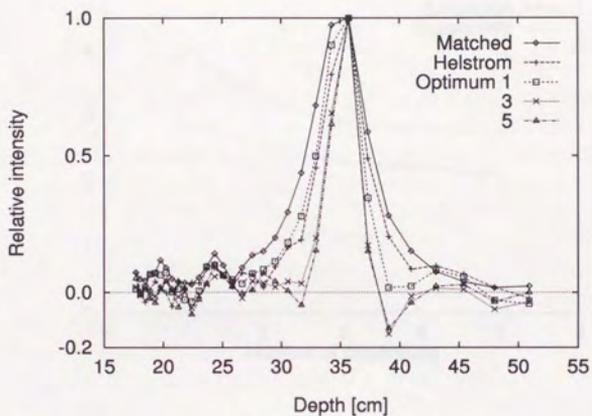


(e) 最適フィルタ (投影3枚)

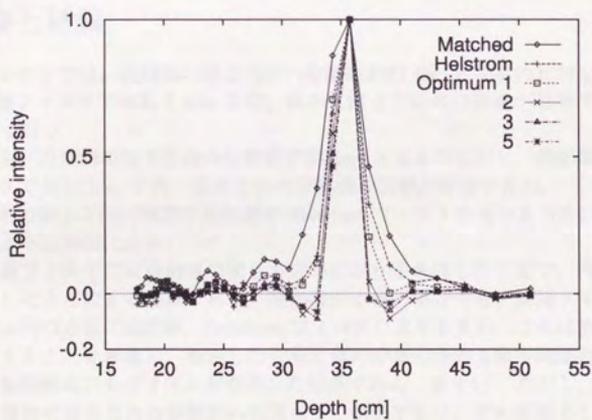


(f) 最適フィルタ (投影5枚)

図 4.16 シミュレーションで求めた PSF



(a) 実験結果



(b) シミュレーション結果

図 4.17 Z 軸方向の PSF

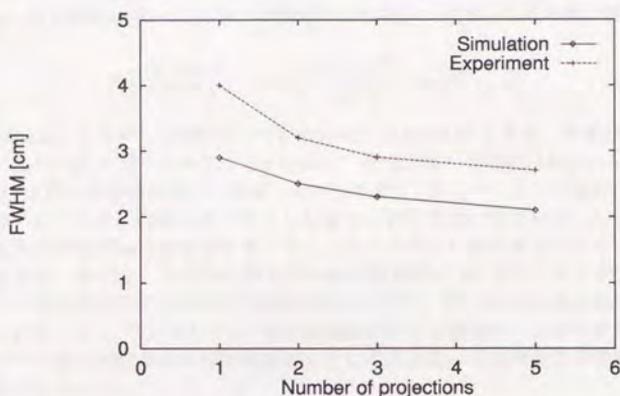


図 4.18 投影像の数と深さ方向分解能の関係

4.5 考察と結論

シミュレーションでは、逆投影の深さ方向の分解能が約 4cm となるのに対し、投影像を 2 枚用いた最適フィルタでは約 2.5cm を得、確かに深さ方向の分解能が改善できることが示された (表 4.2)。

また実験でも、逆投影の深さ方向の分解能が約 4cm となるのに対し、投影像を 2 枚用いた最適フィルタでは約 3cm を得、深さ方向の分解能の改善が確認できた。

最適フィルタの深さ方向分解能が逆投影や Helstrom フィルタを用いる方法に比較して良いのは、次のような要因による。

第 1 は、最適フィルタでは放射源の深さ方向の広がりを考慮したうえで、再構成アルゴリズムを導出したことによる効果である。投影像が 1 枚の場合でも、最適フィルタの深さ方向の分解能は他の方法 (逆投影, Helstrom フィルタ) よりも良い。これは放射源が深さ方向にも分布することを考慮し、推定した分布と真の分布の差の 2 乗平均誤差が最小となる意味で最適な再構成アルゴリズムを導出した効果である (表 4.1)。ただし、実験では投影像が 1 枚の場合の深さ方向の分解能の改善はごく僅かである。その原因としては、再構成に用いる投影モデルのパラメータと実際の観測系のパラメータのずれが考えられる。

第 2 は、2 枚の投影像を差動的に用いる効果である。前章で示したように、開口のピッチに対して孔を小さくすることにより、深さ方向の分解能が改善される。実験の設定で差動型の構成を用いることにより、孔をどの程度小さくしたと相当するかは次のように計

算できる。

元の孔の半径を $r=1\text{mm}$ 、点放射源の深さを $z=35\text{cm}$ とし、2枚の投影像 ($D'=64.5\text{cm}$, $D=60.5\text{cm}$) を差動的に用いたときの等価な孔の面積を一边が ℓ の正方形で置き換えると、等式

$$\ell^2 \left(\frac{D_2 + z}{z} \right)^2 = \pi r^2 \left(\frac{D' + z}{z} \right)^2 - \pi r^2 \left(\frac{D + z}{z} \right)^2$$

より $\ell=0.52\text{mm}$ 、したがって開口ピッチとの比は $0.52/3=0.17$ となる。前章の考察の図 3.9 によると、開口の孔とピッチの比が 0.2 の場合、深さ方向の分解能は約 1.8cm が得られている。一方、2枚の投影像を用いた最適フィルタではシミュレーションの場合には 2.5cm の分解能が得られており、直接孔を小さくした場合にかなり近い効果を示している。

また、実際の計測では投影枚数を多くすることでカウント数が増えていることによる寄与も考えられる。ただし、今回の実験では 1枚の投影像が 20万カウントで充分大きいため、カウント数の増加は深さ方向の分解能の向上よりも、主に RMSE の改善に寄与していると考えられる。また、RI のカウント数の変動はポアソン分布にしたがう乗法的雑音であるが、カウント数が充分多ければ加法的雑音として取り扱っても再構成が可能であることも実験結果で示された。

次に実験とシミュレーションの結果の比較を行う。いずれの手法についても、実験とシミュレーションで得られた再構成像は良く一致しており、したがってここで用いた投影モデルが妥当であることが確かめられた。

ただし、深さ方向の分解能や 2乗平均誤差を定量的に比較すると、いずれの手法でも実験で得られた深さ方向の分解能はシミュレーションで得られている性能に達していない。その原因としては、観測系をモデル化した際の誤差が考えられる。これらには、開口の孔の形が実際には円形であるのに対して、再構成では方形としていること、開口とエアセンサの配置の精度の問題（相対的に僅かに回転している）、投影像の幾何的な歪みなどの要因があり得る。また、開口が厚さをもつために、開口の透過率は入射角に依存して変化し、このために投影像のカウント数は中心部から周辺に向かうにしたがって減少している。

最適フィルタで投影像を増やす効果については、図 4.18 に示すように、枚数を増やすと深さ方向の分解能がさらに向上し、5枚の場合で、実験では 2.7cm、シミュレーションでは 2.1cm の分解能が得られている。しかし、改善の度合は、枚数が増えるにしたがって減少し、投影像を 3枚から 5枚に増やしてもその効果は僅かである。

このことから、複数投影による深さ方向分解能の改善は、投影像を差動的に用いて等価的に開口の孔を小さくした効果が主な寄与をしていると考えられる。

5 章

おわりに

第2章では、開口パターンにM配列を使用し、逆投影を用いて3次元RI分布の任意の断層像を得る方法を具体的に示すとともに、これに基づいて設計・試作した観測系を用いて3次元RI分布を計測した結果を示した。この実験では、2次元のRI分布を異なる深さ($z=29\text{cm}$, 43cm)においた3次元分布を測定対象とし、2つの深さの断層内の分布が1枚の投影像から同時に再構成できることを示した。

しかし、逆投影では深さ方向の分解能が約4cmであり、3次元分布の再構成には十分でないこともこの実験から明らかにした。これは、倍率が異なる開口パターン同士の相関が実際にはゼロにならないことが原因である。

深さ方向の分解能を向上させるためには、①相互相関関数の積分範囲を大きく、②開口の孔の面積比を小さく、③エリアセンサの画素を小さくする方法がある。しかし、しかし、開口の孔やピッチを小さくすることは、製作上の困難があるほか、孔を小さくすると斜めに入射する γ 線の透過率が減少する問題をもつ。また、エリアセンサの分解能も現在一般に使われているものは充分でなく、やはり限界がある。

したがって、深さ方向の分解能を向上させるためには、観測方法を変えるほか、再構成アルゴリズムについても検討する必要がある。

第3章では複数の投影像を用いることによって②と等価な効果をもつ符号化開口CTの手法を示した。

この方法はエリアセンサを深さ方向に少しずつ動かして得た複数の投影像の差画像が、等価的に開口の孔を小さくして得た投影像となることを用いている。差画像を直接用いるとエッジが強調された再構成画像が得られることを避けるために、複数投影像を入力とする一般化した最適フィルタを3次元分布の投影モデルに基づいて導出し、これを用いて再構成を行った。このフィルタは推定の2乗平均誤差が最小の意味で最適である。

シミュレーションにより、確かに深さ方向の分解能が向上し、エッジを強調する効果も低減されていることが確かめられた。

また、実験により、深さ方向の分解能が投影像を3枚用いた場合で3.2cmとなり、改善の効果が実際に確認できた。さらに投影像を5枚用いることで2.7cmまで深さ方向の分解能を向上できる。ただし、改善の度合は、枚数が増えるにしたがって減少する。これは、複数投影像による深さ方向分解能の改善が、主に、投影像を差動的に用いて等価的に開口の孔

を小さくした効果によることを示している。

ここで開発した方法は、開口を変えることなく、エリアセンサをごく僅かに動かすのみで複数の投影像を得ている。したがって簡便な測定装置で分解能を向上させる場合に有効な方法であると考えられる。

今回は、複数投影を用いるという観測方法の上での工夫はしているが、その際、どのような間隔でエリアセンサを動かせばよいか、どのような開口パターンが最適化か、などの観測パラメータは与えられたものとしている。

特に、エリアセンサの動かし方については、移動量を小さくしたほうが、等価的に開口の孔の大きさが小さくなり、深さ方向の分解能は向上すると考えられるが、実際に用いられるエリアセンサの空間分解能には、エリアセンサの画素の大きさを下限として限界があるため、微小な投影像の倍率の変化は検出できない。したがって、エリアセンサの移動量にも最適な値があると考えられる。その他の観測系の設定についても最適化の手法を確立し、3次元に分布する対象の測定に適用することが今後の課題である。

1章

はじめに

第 II 部

熱赤外線放射型 CT

1 章

はじめに

対象物からの熱放射を利用する温度測定（放射测温）は、温度を非接触・非破壊で測定できる特色があり、リモートセンシングや工業計測の分野で様々な形で用いられている。

一般に、対象物の熱放射を遠隔から観測したとき、途中の光路中に放射・吸収を行う媒質が存在すると、直接得られる熱放射の観測データは、対象物からの熱放射が途中で減衰したものと媒質自らの熱放射を合わせたものになる。この場合、対象物の温度を正しく推定するためには、途中の媒質による減衰と放射の効果を補正する必要がある。例えば、衛星熱赤外画像から海面温度を推定する場合には、大気中の水蒸気や二酸化炭素による放射・吸収が問題となる [49]。

一方、このとき得られる観測データには、途中の媒質からの熱放射の情報も含まれており、これを積極的に利用すれば媒質自体を対象物として、その分布や温度分布の情報が得られる可能性がある。例えば、Twomey[50] は、大気分光特性が高度に依存して変化するモデルを利用し、複数の波長域による観測データから大気高度方向の温度分布を求める方法を示している。

このように、熱放射の途中光路による減衰の影響を取り除く手法を開発し、発展させれば、リモートセンシングにおける大気効果の補正や大気環境の評価への応用の他に、燃焼プロセスにおける火炎の温度分布の監視 [51] に応用できる可能性がある。

燃焼火炎の温度分布を計測する方法の一つとしては、まず、レーザーを用いて光学的に温度、濃度を計測する手法があげられる。主な手法としては

- ・ 吸収法
- ・ レーザ誘起蛍光法 (LIF)
- ・ 自然放出ラマン分光法
- ・ コヒーレント反ストークスラマン分光法 (CARS)

等がある [57, 58]。

これらの方法は、火炎内に存在する特定の気体原子や分子に注目すると、それらに固有のエネルギー準位間の遷移に伴い、特定波長の光の放射・吸収がおこる [59, 60] ことを利用している。そのため光源として特殊な波長域や高出力のレーザーを必要とし、実験室内で

高精度の測定を行うのには適しているが、工場でオンラインで計測するなどの用途には必ずしも向いていない。

このような用途での温度の測定で実用化されているものは、燃焼場の局所的な温度を逐次的に計測するものが主であり、温度分布を簡便な装置で遠隔・非接触に計測する方法が求められている。

このような要求を満たし得る手法として、熱赤外線投影データを用いる放射型 CT による温度分布計測がある。これは、CT アルゴリズムと放射測温の原理を組み合わせ、燃焼場の温度測定に応用し、火炎を周囲から観測して得られる熱放射の投影データから、火炎内の温度分布を遠隔・非接触に測定する方法で、特殊なレーザを必要としない分、測定装置が簡便である。

内山ら [52, 53] は CT アルゴリズムを応用し、媒質内部からの熱放射による投影データを単一波長域で複数の方向から観測し、それから温度分布を求める方法を開発している。しかし、そこで用いたアルゴリズムは、媒質の吸収分布を求める際に、外部放射源として計測対象の火炎と同じ組成の火炎を必要とするため、未知の計測対象については適用出来ない。

若井ら [54] は、水蒸気の二つの吸収帯（波長 $1.2\mu\text{m}$ と $1.8\mu\text{m}$ ）における吸収係数の比が温度の関数になっていることを利用し、透過型 CT のアルゴリズムを適用して得た 2 波長における吸収の分布から温度分布を得る方法を提案している。しかし、この方法では観測の際に火炎自体からの熱放射を全く無視している。

Hall ら [55] は、外部光源（タングステンランプ）を用いて計測した対象の透過率から透過型 CT アルゴリズムによって吸収の分布を求め、これを放射率として見かけの放射を補正して温度分布を得ている。しかし、温度分布を再構成する際に、火炎からの放射が火炎自体に吸収されることを考慮していない。

その他、吸収を考慮した放射型 CT アルゴリズムには、逆 Abel 変換 [56] が知られているが、これは媒質の分布が軸対称であることを仮定している。

これらの研究では、温度分布を求める際に減衰を全く考慮していないか、吸収分布が一様であることや火炎が軸対称であることなどの仮定を必要としていたり、あるいは対象それ自身からの放射・吸収を無視している。このように、任意の温度分布と吸収分布をもつ対象について、対象の放射と吸収を同時に考慮し、温度分布を正しく測定する方法は確立されていないのが実状である。

そこで、本研究では、異なる温度の二つの外部放射源を用い、それぞれの外部放射源を背景として観測した投影データから温度分布と吸収分布を同時に計測する方法を提案する [19, 20, 21]。吸収分布も観測データから求め、これに基づいて減衰の影響を補正することで、従来の方法に較べて温度分布の推定精度が向上すると期待できる。

ここでは、まず実験室内の小規模な燃焼火炎内の吸収分布と温度分布を同時に求めることを目的とし、任意の分布の媒質の吸収を考慮した放射型 CT アルゴリズムを提案する。さらに、このアルゴリズムの有効性を数値シミュレーションとブンゼンバーナの炎を計測対象とする実験で示す。

2 章

測定原理とシミュレーション

2.1 順問題の定式化

媒質の温度と吸収の3次元分布の任意の断面を投影データから再構成するアルゴリズムについて述べる。

断面内に点Oを原点とする x - y 座標系を定義し、点Oを中心に半径 R の円内のみに吸収を行う媒質が存在すると仮定する (図 2.1)。

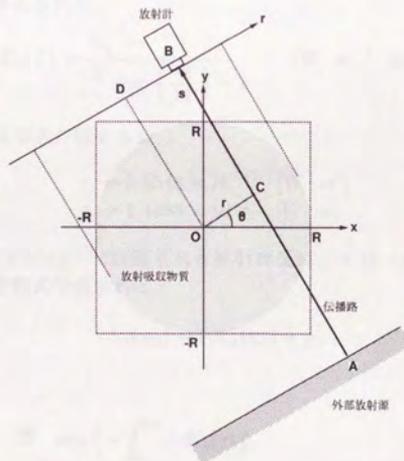


図 2.1 観測系の概略

視野の十分小さな放射計(点B)を用い、媒質を通して外部放射源の点Aを観測したとする。伝播路(線分AB)にs座標(原点:点C)を設定し、その上の温度分布をT(s)で表す。

媒質が黒体で(放射率=1)、途中の媒質による減衰がないと仮定できれば(吸収率=0)、放射計の出力 L_B は伝播路上の黒体放射 $B(T(s))$ の線積分となり、次式で表される。

$$L_B = \int ds B(T(s)) \quad (2.1)$$

伝播路を $|r| \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で変えて投影データ L_B を収集し、これに透過型CTのアルゴリズムを適用すると $B(T(s))$ 、したがって $T(s)$ が求まる(方法①)。

しかし、実際には、放射がある場所では同時に吸収も生じており、精度良く温度を求めるには以下に述べるように吸収を考慮する必要がある。

伝播路上の点sで点Aを観測したときの波長を λ 、分光放射輝度を $L_\lambda(s)$ とする。観測点を $s+ds$ に進めたときの分光放射輝度を $L_\lambda(s)+dL_\lambda$ とおく。媒質が非散乱媒質で、かつ、局所的に熱力学的平衡が保たれている場合には次式が成り立つ[59, 61]。

$$dL_\lambda = -K_\lambda(s)L_\lambda(s)ds + K_\lambda(s)B_\lambda(T(s))ds \quad (2.2)$$

ここで、 $K_\lambda(s)$ は分光吸収係数(単位 $[m^{-1}]$)で、媒質の種類や密度に依存する量である。また、 $B_\lambda(T)$ は温度Tの黒体の放射の分光放射輝度(単位 $[W \cdot sr^{-1} \cdot m^{-3}]$)で、次のプランクの法則で与えられる。

$$B_\lambda(T) = \frac{2c_1}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1} \quad [W \cdot sr^{-1} \cdot m^{-3}]$$

ここで c_1 と c_2 は定数で次の値をもつ。

$$c_1 = 5.9548 \times 10^{-17} \quad [W \cdot m^2]$$

$$c_2 = 1.4388 \times 10^{-2} \quad [K \cdot m]$$

(2.2)式より、B点($s=s_B$)で観測される放射輝度は、A点($s=s_A$)の放射輝度を用いて、次の放射伝達方程式で表される。

$$L_\lambda(s_B) = t_\lambda L_\lambda(s_A) + p_\lambda \quad (2.3)$$

ここで、

$$t_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(-\int_{s_A}^{s_B} ds K_\lambda(s)\right), \quad (2.4)$$

$$p_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \int_{s_A}^{s_B} ds K_\lambda(s) B_\lambda(T(s)) \exp\left(-\int_s^{s_B} d\xi K_\lambda(\xi)\right) \quad (2.5)$$

である。

実際の放射計の出力 L_B は、放射計の分光感度特性を F_λ とすると、

$$L_B = \int_0^\infty d\lambda F_\lambda L_\lambda(s_B) \quad (2.6)$$

で表される。放射計の測定波長域が十分狭く、その範囲内で媒質の分光吸収係数が一定で $K_\lambda \approx K$ と見なせれば、(2.6) 式に (2.3) 式を代入して、次式が得られる。

$$L_B = tL_A + p. \quad (2.7)$$

ここで、 t, p, L_A は次のように定義した値である。

$$t \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(-\int_{s_A}^{s_B} ds K(s)\right), \quad (2.8)$$

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \int_{s_A}^{s_B} ds K(s) B(T(s)) \exp\left(-\int_s^{s_B} d\xi K(\xi)\right), \quad (2.9)$$

$$L_A \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty d\lambda F_\lambda L_\lambda(s_A), \quad (2.10)$$

$$B(T) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty d\lambda F_\lambda B_\lambda(T). \quad (2.11)$$

(2.8) 式の t は観測の光路に沿った媒質の透過率に他ならない。一方、 p は媒質からの放射を表す項である。(2.8) 式の右辺の積分は、伝播路上の吸収係数の線積分を表している。したがって、観測した放射輝度 L_B から、何らかの方法で透過率 t を分離できれば、透過型 CT のアルゴリズムで吸収係数 K の分布が再構成できることになる。

2.2 再構成アルゴリズム

本手法では、外部放射源の輝度を变化させたときの投影データの変化分が放射項に依らないことに着目し、計測システムに次のような差動構造を導入して、観測値 L_B から透過率 t と放射項 p を分離する。

外部放射源の放射輝度を変えて、 L_{A1}, L_{A2} としたときの放射計による観測値を L_{B1}, L_{B2} とし、この間に対象の温度と吸収の分布に変化がないとすれば、

$$\begin{cases} L_{B1} = tL_{A1} + p, \\ L_{B2} = tL_{A2} + p \end{cases} \quad (2.12)$$

が成り立つ。(2.12) 式から、外部放射源の輝度 L_{A1}, L_{A2} を既知とし、二種類の観測データ L_{B1}, L_{B2} から p と t を次式で求めることができる。

$$t = \frac{L_{B2} - L_{B1}}{L_{A2} - L_{A1}}, \quad (2.13)$$

$$p = \frac{L_{B1}L_{A2} - L_{B2}L_{A1}}{L_{A2} - L_{A1}}. \quad (2.14)$$

(2.14) 式の t に透過型 CT のアルゴリズムを適用すると、吸収分布 K が得られる。

次に温度分布を求める方法について述べる。一つの方法は、Hall[55]が行ったように、(2.9)式において吸収の効果を無視して近似した式

$$p \simeq \int_{s_A}^{s_B} ds [K(s)B(T(s))] \quad (2.15)$$

において、 $K(s)B(T(s))$ を一つの量とみなして再構成し、別の方法で求めた吸収係数 K で割って $B(T)$ を求め、それから温度を計算する方法である (方法②)。しかし、この方法では吸収の効果が大きくなると再構成の誤差が増大する問題がある。

そこで、本研究では次の方法③を提案する。まず、媒質の存在し得る $[-R, R] \times [-R, R]$ の領域を $N \times N$ の微小なセルに分割し、各セル内で温度と吸収が一定と見なせるものとする (図 2.2)。

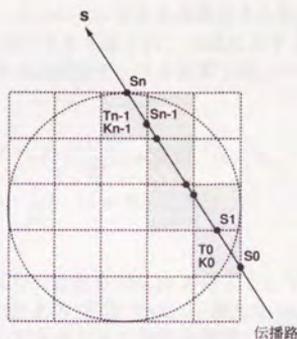


図 2.2 セルと一つの伝播路

一つの伝播路を考えたとき、この伝播路とセルの境界の交点の s 座標を順に s_i ($i = 0, \dots, n$) とし、この伝播路が横切るセル内の温度と吸収係数を T_i, K_i とする。(2.9) 式をこれらの交点で区間に分けて書き直すと、

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} ds K_i B(T_i) \exp \left(- \int_s^{s_{i+1}} d\xi K_i - \sum_{j=i+1}^{n-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} d\xi K_j \right) \quad (2.16)$$

となり、各区間の積分を計算して次式が得られる。

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} B_i \left[(1 - \tau_i) \prod_{j=i+1}^{n-1} \tau_j \right] \quad (2.17)$$

ここで、

$$B_i \stackrel{\text{def}}{=} B(T_i),$$

$$\tau_i \stackrel{\text{def}}{=} \exp(-(s_{i+1} - s_i)K_i)$$

である。(2.17) 式の $[\dots]$ を先に求めた吸収係数分布を用いて計算すると、伝播路一つについて B_i を未知数とする方程式が一つ得られる。したがって、複数の伝播路による観測結果を集めると連立一次方程式が立ち、これを各セルの B_i を未知数として解いて、 $T_i = B^{-1}(B_i)$ を計算することにより温度分布が求まる。

ただし、実際にこの方程式を解く際には、係数行列のランクが落ち、解が不安定になる可能性がある。後述のシミュレーションでは特異値分解 [62] を用いて連立一次方程式を解いた。

2.3 シミュレーション

室温 (300K) の環境の中に高温の媒質を置いた場合を想定し、仮定した媒質の温度と吸収の分布から計算した投影データから元の分布を再構成する数値シミュレーションを行った。

媒質の分布は 32×32 のセルで与え (図 2.3)、次式に示すように、観測方向を $180/32$ 度刻みで回転させて、32 方向からの投影データを計算した。一方向からの観測につき、32 点での線積分を計算した。

$$r = -R + \frac{2R}{32}(i+0.5) \quad (i = 0, \dots, 31),$$

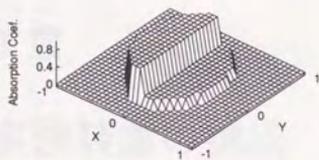
$$\theta = \frac{\pi}{32}j \quad (j = 0, \dots, 31).$$

観測波長は $5\mu\text{m}$ を仮定した。

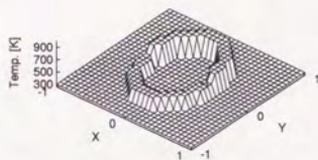
これから、媒質の温度と吸収の分布を 16×16 の画像として再構成した。比較のため、方法 ① ~ ③ を用いた。方法 ② と方法 ③ では、一般的な Shepp-Logan のフィルタを用いたフィルタード・バックプロジェクション [63] を適用して吸収分布を再構成した。

吸収分布の再構成結果を図 2.4(a) に、温度分布の再構成結果を図 2.4(b)~(c) に示す。なお、温度の再構成結果が 300K 以下のときは、300K として表示してある。

方法 ① では、吸収を無視し、見かけの温度を求めているために、全体に温度が低めに再構成されている。方法 ② では、逆に高めに再構成されている。これらに対して、方法 ③ では、元の温度分布と良く一致した結果が得られている。

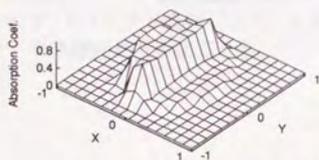


(a) 吸収分布

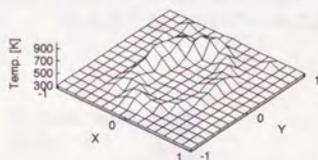


(b) 温度分布

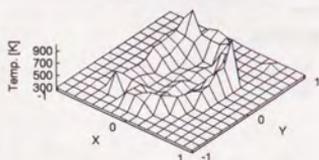
図 2.3 シミュレーションで仮定した元の分布



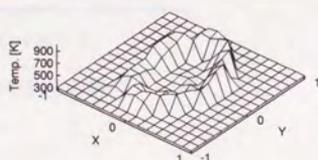
(a) 吸収分布



(b) 温度分布 (方法 ①)



(c) 温度分布 (方法 ②)



(d) 温度分布 (方法 ③)

図 2.4 再構成結果

3 章

実験装置の構成

燃焼テスト用ブンゼンバーナにより形成されるメタンと空気の定常予混炎を計測対象とし、炎を任意の高さで切った2次元断面内の温度分布および吸収係数の分布を求める実験を行った。さらに、熱電対による温度の測定値と比較を行った。

実験装置の構成を図3.1に示す。

実験装置は、外部放射源、バーナ、放射計から構成される観測系と、放射計の出力をアナログ/デジタル変換（以下、A/D変換）して計算機に取り込むデータ収集部、およびデータ処理部から構成される。

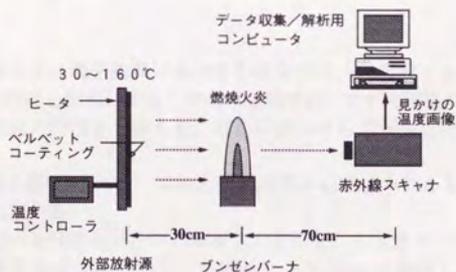


図 3.1 実験装置の構成

外部放射源

銅板（面積 30cm×30cm、厚さ 5mm）にリボン状のヒータを密着させたものを製作し、外部放射源として用いた。銅板の観測される側の表面に黒体塗料（3M 製ベルベットコーティング）を一様に塗付し、黒体とみなせるようにした。この黒体塗料の放射率は 0.98（公称値）である。

ヒータの温度を専用の温度コントローラで制御し、外部放射源の輝度を変える。外部放射源の温度は、低温の場合が室温（約 25℃）、高温の場合が約 160℃である。後者の場合の温度安定度は±1℃程度である。

放射計

熱放射の観測には、観測波長域が 8~14 μm の HgCdTe を検出器とする赤外線スキャナ（日本電子製 JTG-IBL）を放射計として用いた。

この放射計は、測定対象から放射された赤外線をまず走査鏡で反射し、次に凹面鏡で集光し、透過波長域 8~14 μm のフィルタを通したのちに HgCdTe 検出器に導いて検出するものである。検出器の信号出力は増幅されたあと、放射温度計内部の基準温度源からの出力と逐次比較され、さらに補償回路を経て見かけの温度に変換された後に出力される。走査鏡を機械的に振動・回転させることにより、見かけの温度分布の画像を得ている。

水平方向の視野の角度は約 16 度であり、その間で 261 点のデータをサンプリングして 1 ラインのデータを得ている。したがって、1 画素当たりの視野角は約 0.06 度となる。正確な値は後述の予備実験により求めた。

火炎を側面から観測したとき、放射計からは 2 次元の投影データが見かけの温度画像として得られる。ある高さで切った火炎断面内における吸収係数および温度の分布を再構成する際には、得られた見かけの温度画像から高さに応じた 1 ラインのデータを取り出して用いた。

バーナ

観測中の火炎のゆらぎは測定結果に大きな影響を与え、再構成アルゴリズムの原理的な測定精度についての検討を困難にする。今回の実験では、まず再構成アルゴリズムの有効性の確認と原理的な性能の評価を目標とし、特別に炎のゆらぎが少ない構造のブンゼンバーナを用いた。

このバーナの構造を図 3.2 に示す。これは燃焼テストに用いられるもので、メタンと空気の混合ガスを燃料に用いる。

燃焼ガスとして用いる空気とメタンの流量を、それぞれの流量コントローラで制御した。実験では空気の流量を 6.0 ℓ/min 、メタンの流量を 1.3 ℓ/min に設定した。コントローラの仕様では、流量制御の精度は±0.3 ℓ/min 、再現性は±0.04 ℓ/min である。

バーナのガスポートで形成される火炎は、その外周から噴出する空気によって押し付けられる構造になっている。このバーナによって形成される火炎の形状のゆらぎは肉眼でほとんど観測できず、1mm 以下に抑えられている。

データ収集部

放射計からの出力電圧（-10~10V）を A/D 変換で 12 bit のデジタル値（範囲 0~4095）に変換し、計算機に取り込んでいる。

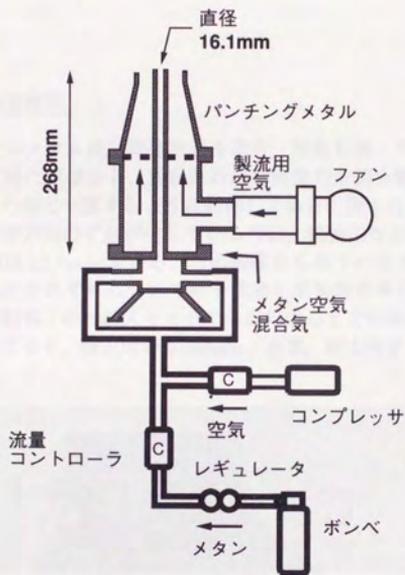


図 3.2 燃焼テスト用ブンゼンバーナの構造

4 章

実験方法

放射計出力画像の空間分解能

格子上に張り渡したニクロム線に黒体塗料を塗り、電流を流して僅かに温度を上げたものを放射計で観測して得た画像から、放射計の出力画像の空間分解能を計算で求めた。格子の中央線は、バーナの軸と一致するように製作してある。図 4.1 に観測した格子の画像を示す。ラインによって横方向のずれが生じているのは、機械的な走査のガタのためである。

製作した格子の間隔は 12.5mm である。この画像から格子の交点のピクセル座標を読み取り、縦方向と横方向のそれぞれについて格子間隔を画素数を単位として求めた。これらの値から、今回の観測（赤外線スキャナから炎の中心までの距離 55cm）における放射計の空間分解能を計算すると、横方向が 0.593mm/画素、縦方向が 1.59mm/画素となった。

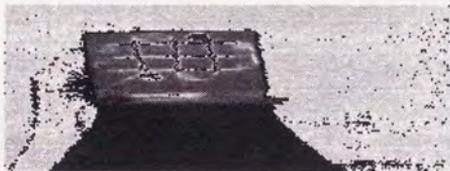


図 4.1 空間分解能校正用格子の撮影像

コーンビームからパラレルビームへの変換

用いた放射計は回転軸をもつ走査方式を使っているため、得られる投影データは放射状に並ぶ光路上を観測したもの（コーンビーム）となる。再構成を行う際には、平行に並ぶ光路上を観測した場合に得られる投影データ（パラレルビーム）に変換して用いた。

ここでは、水平方向の走査が約 0.06 度と十分に細かいので、コーンビームを 1 次補間を用いて再サンプリングし、パラレルビームの投影データを得た。

A/D 変換値から見かけ温度への変換

A/D 変換値から見かけの温度への変換を行うため、次のような方法で校正を行った。

外部放射源の温度を温度コントローラで制御しながら変化させ、そのときの温度を外部放射源に取り付けた白金測温抵抗体で測定する。同時に、放射計で外部放射源を観測し、出力の A/D 変換値を記録する。

外部放射源を黒体とみなすと、放射計で観測して得られた出力の A/D 変換値は、背景の真温度に相当し、白金測温抵抗体の示す外部放射源の温度に対応すると考えられる。

このときの A/D 変換後の出力値と温度の対応を調べると、図 4.2 の様になった。横軸が放射計の出力の A/D 変換値、縦軸が白金測温抵抗体で測定した外部放射源の温度である。

図 4.2 より、放射温度計の出力の A/D 変換値と温度は一次式で表せる関係にあり、このデータから求められる回帰直線は、(見かけの) 温度を y °C、A/D 変換値を x とすると、

$$y = 0.0443x + 4.8 \quad (4.1)$$

となる。また、あてはめの 2 乗平均誤差は 1.4 °C であった。(4.1) 式を校正式として用い、A/D 変換値を温度に変換した。

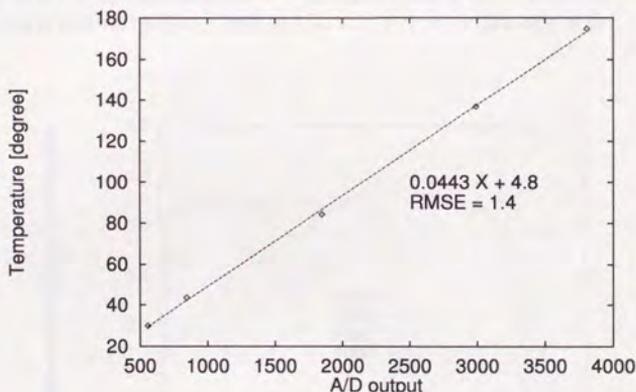


図 4.2 A/D 変換された放射温度計の出力と実際の温度の関係

見かけ温度から放射輝度への変換

見かけ温度から放射輝度への変換では、放射計の分光感度特性が問題になる。

実験で用いた放射計では、入射光は防塵用フィルム（ワンラップ）、近赤外カットフィルタを通った後に HgCdTe 検出器で検出される。したがって放射計の総合的な分光感度特性はこれらの分光感度特性の積で表される。図 4.3 はこれらの分光感度特性の公称値と、それから計算される放射計の分光感度特性をプロットしたものである。このように、この放射計は $8\mu\text{m}$ から $14\mu\text{m}$ に感度をもち、 $11\mu\text{m}$ 付近にピークをもつ。

この分光感度特性を F_λ とおくと、温度 T の黒体を観測したときの実効的な放射輝度 \bar{L} は、

$$\bar{L} = \int d\lambda F_\lambda B(\lambda, T) \quad (4.2)$$

で与えられる。

(4.2) 式の積分を数値的に計算し、温度—実効放射輝度の関係をプロットしたものを図 4.4 に示す。

図中、縦軸は各プロットを比較するために、それぞれを温度が 300K のときの放射輝度で規格化した値を示す。また、プランクの放射則を単一波長で計算し (F_λ が δ 関数の場合に相当する)、同様に規格化したものを同時にプロットした。

図より、単一波長の $10.5\mu\text{m}$ でプランクの放射則を計算したグラフと、波長域を数値的に積分して計算した実効放射輝度のグラフはほぼ同じ特性を示している。そこで、見かけの温度から放射輝度への変換は、波長 $10.5\mu\text{m}$ にてプランクの放射則を計算して行った。

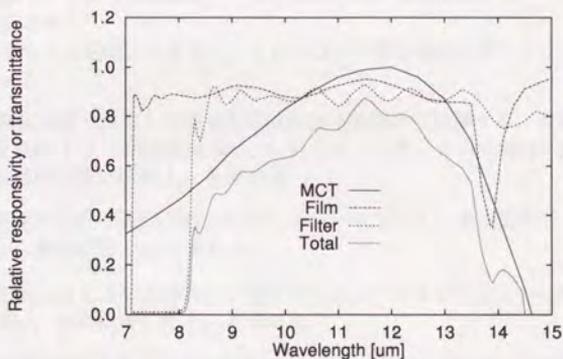


図 4.3 放射計の分光感度特性（公称データ）

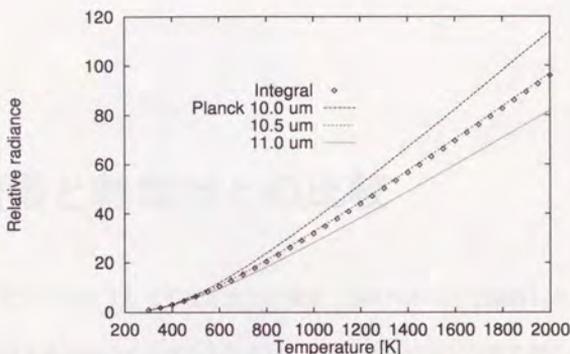


図 4.4 黒体温度-実効放射輝度特性
(放射輝度は 300K の値で正規化)

実験の手順

実験では、バーナの筒が軸対称であることと、火炎のゆらぎが小さいことから、火炎を多方向から観測しても得られる投影データは変化しないものとみなし、一方向における投影データで代表させた。

再構成に必要な炎の観測データ L_{B1} , L_{B2} および外部放射源のデータ L_{A1} , L_{A2} は、以下の手順で求めた。

1. 温度が常温付近 (30 °C) の時の外部放射源を放射計で観測する。放射計が出力する見かけの温度 T と、観測波長 $\lambda=10.5\mu\text{m}$ から、プランクの放射則を計算して外部放射源の実効的な放射輝度 L_{A1} を求める。
2. 外部放射源を上記の温度に保ったまま、バーナに点火し、炎を観測して同様に見かけの温度から放射輝度 L_{B1} を求める。
3. 予め温度を 160 °C まで上昇させて温度が安定しているもうひとつの外部放射源を交替して用い、炎を観測して L_{B2} を求める。
4. 外部放射源はそのままでバーナを消火し、外部放射源 (160 °C) を観測して L_{A2} を求める。

この手順のうち、長時間の間に炎の状態が変化する影響を考慮して、2 から 3 へかかる時間はできるだけ短くした。

5 章

実験結果と熱電対との比較

実験に用いたバーナによって形成される火炎を、通常のカメラで撮影したものを図 5.1 に示す。

放射計の出力する見かけの温度分布画像から、バーナの口からの高さがそれぞれ 8.0mm, 14.3mm, 20.7mm, 27.1mm の断面に相当するデータを 1 ラインづつ取り出し、投影データとした。

火炎の各断面についての見かけの温度のプロファイルを図 5.2 に示す。

これらをプランクの放射則にしたがって放射輝度 L_{B1} , L_{B2} に変換し、外部放射源の輝度 L_{A1} , L_{A2} と (2.14) 式, (2.14) 式を用いて透過率 t (図 5.3), 放射項 p (図 5.4) を求めた。

これらの計算を投影データ毎に行い、一方向から対象を観測したときの投影データとして炎の一面における吸収係数および温度の二次元分布を再構成した。

図 5.5 に各断面の再構成結果を示す。一般にブンゼンバーナの炎は内錐で温度が低く、外錐で温度が高いことが知られており、再構成結果でもそのような温度分布が得られた。また、炎の内側の温度の低い部分は炎の上部へ行くほど狭くなっている。再構成された領域の形状および範囲についても、妥当な結果が得られた。

次に、再構成された温度分布を定量的に評価するために、熱電対による温度の測定値と比較した。直径 0.1mm の B 熱電対 (Pt 30%Rh-Pt 6%Rh) の表面に、ヘキサメチルジシクロキサン ($(\text{CH}_3)_6\text{Si}_2$) を用いてシリコンの皮膜を付け、この熱電対を X-Y-Z 軸マイクロメータ上に固定されたアームに取り付けて、熱電対の接点を炎の中で動かしながら、熱起電力を記録した。この熱起電力を温度に変換し、火炎の温度プロファイルを得た。

シリコン皮膜は、熱電対が火炎の中で触媒として働くことを防ぐために用いている [64]。これがないと、触媒作用のために燃焼反応が促進され、特に内炎の部分の温度が高めに測定される。

温度分布の再構成結果と熱電対による測定値との比較を図 5.6 に示す。

熱電対による測定自体、熱伝導等による測定誤差があり、必ずしも正しい温度が得られているわけではないが、これを真温度と考えると、温度分布の再構成結果については、熱電対による測定値に比べおよそ 800K 低い値が得られている。この誤差の原因について、次章で考察する。

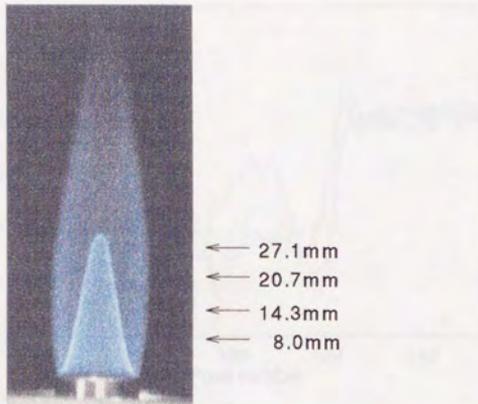


図 5.1 通常のカメラによる撮影像

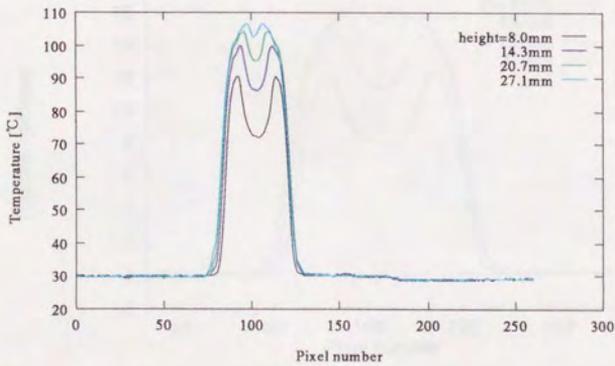


図 5.2 みかけの温度プロファイル

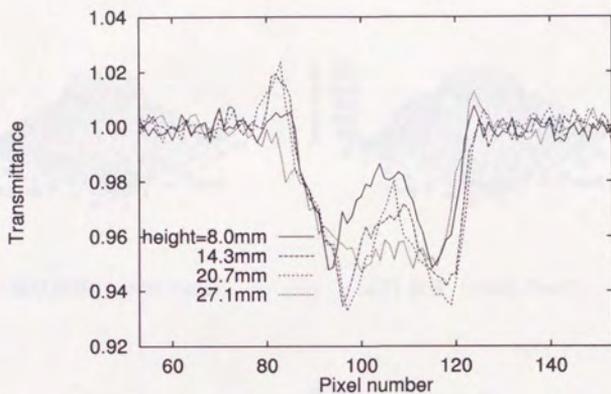


图 5.3 透過率 (t)

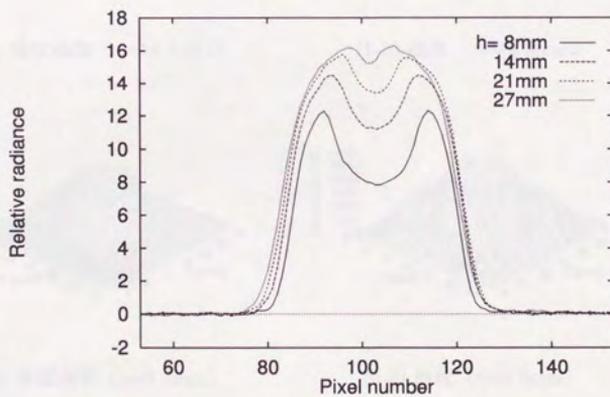
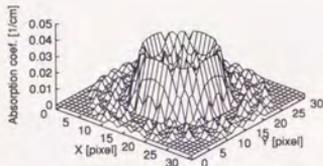
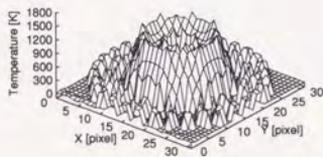


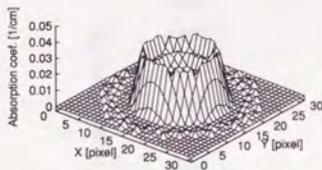
图 5.4 放射項 (p)



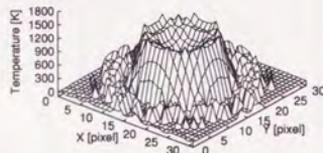
(a-1) 吸収係数 ($z=20.7\text{mm}$)



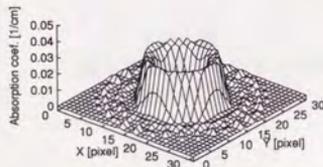
(a-2) 温度 ($z=20.7\text{mm}$)



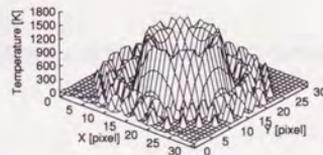
(b-1) 吸収係数 ($z=14.3\text{mm}$)



(b-2) 温度 ($z=14.3\text{mm}$)



(c-1) 吸収係数 ($z=8.0\text{mm}$)



(c-2) 温度 ($z=8.0\text{mm}$)

図 5.5 メタン空気予混炎の横断面の再構成結果
 z はガスバーナの口からの高さ

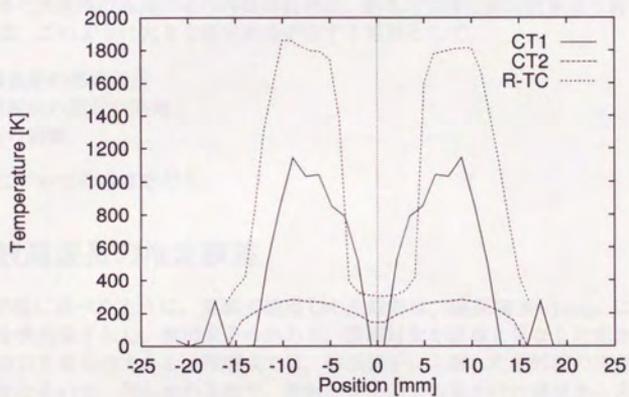


図 5.6 温度プロファイルの再構成結果と熱電対による測定結果の比較

6 章

考察

実験で得た火炎内の温度分布の再構成結果は、熱電対で得た測定結果より約 800K 低い。この章では、このように大きな推定誤差が生ずる原因として、

- ・ 観測波長の推定誤差
- ・ 観測波長の選択の問題
- ・ 屈折の影響

の各要因についての考察を行う。

6.1 観測波長の推定誤差

第 4 章で既に述べたように、実験で使用した放射計は、波長域 8~14 μm に感度をもつ HgCdTe を検出素子とし、検出素子の出力を、観測対象を黒体と見なした見かけの温度に変換して出力するものである。再構成では、検出素子に入射した赤外線の実効放射輝度の値が必要となるので、何らかの方法で、放射計が出力する見かけの温度から入射光の実効放射輝度を推定する必要がある。

今回の実験では、検出素子の出力から見かけの温度への変換が放射計の内部で行われ、入射光の実効放射輝度と出力される見かけの温度との関係を定めることが困難であったため、検出素子の分光感度特性の公称データから中心観測波長を推定し、この観測波長でプランクの放射則を用いて実効放射輝度を計算した。

しかし、HgCdTe は組成によって中心観測波長が変化するので、分光感度特性の公称データから求めた観測波長が実際の検出素子の特性と一致していない可能性がある。

一方、見かけの温度自体の観測誤差については、黒体放射源と白金測温抵抗体を用いて校正しており、温度範囲 300~450K における 2 乗平均誤差は 1.4 $^{\circ}\text{C}$ で、十分に小さい。

そこで、温度の推定誤差が観測波長の「ずれ」によって生ずるモデルを考え、具体的な数値例を示すことで、どの程度の観測波長のずれがあれば、温度推定において実験で現れたような大きな誤差が生じ得るかを明らかにする。

解析を容易にするために、対象の温度と吸収の分布が一様で、波長 λ で観測した場合を想定する。二つの外部放射源の温度を T_{Ai} ($i = 1, 2$)、対象の真の温度を T 、真の透過率を t とし、次のような値をもつとする。

$$\begin{aligned} T_{A1} &= 300 \text{ [K]} \\ T_{A2} &= 430 \text{ [K]} \\ \lambda &= 10.2 \text{ [\mu m]} \\ t &= 0.97 \\ T &= 1800 \text{ [K]} \end{aligned}$$

これらは、実験で得られた値に基づいて設定した。ただし、真の観測波長 λ は、温度推定誤差を解析するため、実験で推定した値 ($10.5 \mu\text{m}$) よりも僅かに短い値にした。

このときの見かけの温度 T_{Bi} は、放射伝達方程式を簡略化した次式の形で表される。

$$B_{\lambda}(T_{Bi}) = tB_{\lambda}(T_{Ai}) + (1-t)B_{\lambda}(T) \quad (i = 1, 2) \quad (6.1)$$

(6.1) 式から見かけの温度が $T_{B1} = 416 \text{ [K]}$ 、 $T_{B2} = 501 \text{ [K]}$ と計算される。

再構成のプロセスは、(6.1) 式を用いて見かけの温度 T_{Bi} から t と T を解くことに他ならない。このとき、観測波長の値に推定値 $\hat{\lambda}$ を用いると、(6.1) 式で λ を $\hat{\lambda}$ に置き換えて解くことになり、次式が得られる。

$$\hat{t} = \frac{B_{\hat{\lambda}}(T_{B2}) - B_{\hat{\lambda}}(T_{B1})}{B_{\hat{\lambda}}(T_{A2}) - B_{\hat{\lambda}}(T_{A1})} \quad (6.2)$$

$$\hat{p} = B_{\hat{\lambda}}(T_{B1}) - \hat{t}B_{\hat{\lambda}}(T_{A1}) \quad (6.3)$$

$$\hat{T} = B_{\hat{\lambda}}^{-1} \left(\frac{\hat{p}}{1 - \hat{t}} \right) \quad (6.4)$$

$\hat{\lambda} = \lambda$ であれば、当然、 $\hat{t} = t$ 、 $\hat{T} = T$ が得られ、誤差は生じない。しかし $\hat{\lambda}$ が変動するにつれて \hat{t} 、 \hat{T} に誤差が生ずる。

図 6.1 は (6.2) 式の \hat{t} と (6.4) 式の \hat{T} を $\hat{\lambda}$ の関数としてそれぞれプロットしたものである。縦軸は真値を 1 とし推定値を相対値で表した。

図 6.1 より、推定透過率 \hat{t} は観測波長のずれにたいして数% しか変化しないことがわかる。これに対して、推定温度 \hat{T} は非常に大きく変動する。例えば、観測波長が $10.5 \mu\text{m}$ では、推定温度は真値よりも約 360 K 低い。

温度の推定についてこのような大きな誤差が生ずるのは、(6.4) 式右辺の分母が 0 に非常に近く、透過率のごく僅かな推定誤差が増幅されて温度の推定誤差に現れるためと考えられる。

最後に、実験データに対して、観測波長を $10.2 \mu\text{m}$ と仮定して再構成を行った結果を図 6.3 と図 6.2 に示す。ピークの温度は約 1400 K となり、観測波長を $10.5 \mu\text{m}$ として計算した場合の値 (約 1000 K) に較べて、推定誤差が $1/2$ となっている。

以上の結果から、観測波長のずれが、温度推定の大きな誤差のひとつの原因であることが確かめられた。

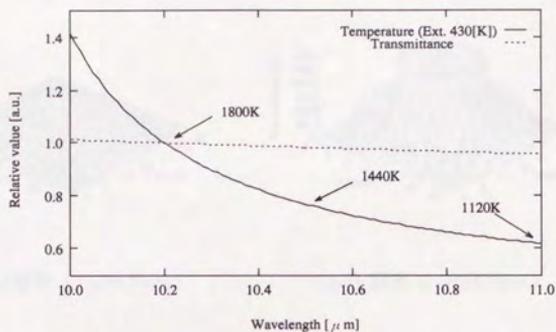


図 6.1 観測波長-透過率/温度推定誤差特性
(縦軸は真値を1とする相対値)

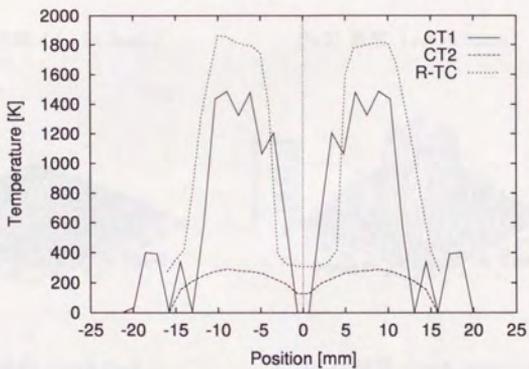
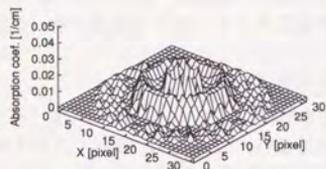
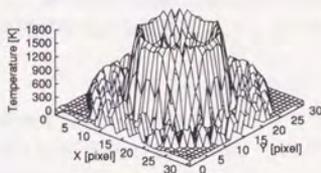


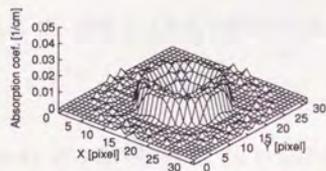
図 6.2 温度プロファイルの再構成結果と熱電対による測定結果の比較



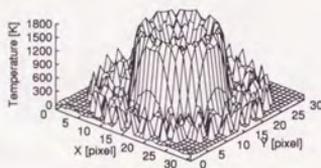
(a-1) 吸収係数 ($z=20.7\text{mm}$)



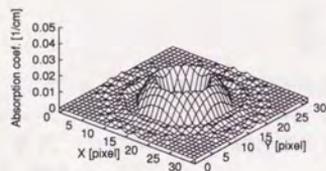
(a-2) 温度 ($z=20.7\text{mm}$)



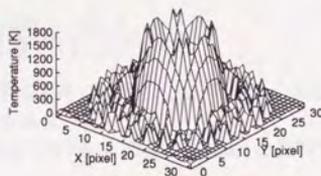
(b-1) 吸収係数 ($z=14.3\text{mm}$)



(b-2) 温度 ($z=14.3\text{mm}$)



(c-1) 吸収係数 ($z=8.0\text{mm}$)



(c-2) 温度 ($z=8.0\text{mm}$)

図 6.3 メタン空気予混炎の横断面の再構成結果
(z : バーナの口からの高さ)

6.2 観測波長の選択の問題

実験で用いた放射計の観測波長域は $8 \sim 14 \mu\text{m}$ で、これを中心観測波長 $10.5 \mu\text{m}$ で代表させて用いた。一方、熱電対での測定によると、炎の実際の温度は最も高い所で約 1800K であり、炎を黒体と見なしたときに炎からの放射が最大となる波長 λ_m は、ウィーンの変位則 [65]

$$\lambda_m T = 2.8978 \times 10^{-3} \quad [\text{m} \cdot \text{K}] \quad (6.5)$$

より、 $\lambda_m = 1.6 \mu\text{m}$ となる。炎は実際には黒体ではないが、黒体として分光放射輝度を比較すると、波長 $10.5 \mu\text{m}$ における放射は波長 $1.6 \mu\text{m}$ の約 $1/90$ である。したがって、SN 比の点で、用いた放射計の観測波長は適切ではない。

また、温度の変化に対する黒体の放射輝度の変化の大きさは波長によって異なり、温度変化に対して放射輝度の変化が大きい波長で観測すれば、温度推定の誤差は小さくなる。

温度変化に対する放射輝度の変化は、プランクの法則を指数 n を用いて次式のように近似して調べることができる [65]。

$$B_\lambda(T) \simeq kT^n. \quad (6.6)$$

ここで、指数 n は次式で計算される。

$$n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T \frac{d}{dT} B_\lambda(T)}{B_\lambda(T)}.$$

(6.6) 式の近似を用いて (6.4) 式を書き直すと

$$\hat{T} \simeq \left(\frac{\hat{p}}{(1-\hat{t})k} \right)^{\frac{1}{n}},$$

したがって、温度の推定誤差 ΔT は、透過率 \hat{t} と放射項 \hat{p} の微小な誤差をそれぞれ Δt 、 Δp として、次式で近似的に表される。

$$\frac{\Delta T}{\hat{T}} \simeq \frac{1}{n} \left(\frac{\Delta p}{\hat{p}} + \frac{\Delta t}{1-\hat{t}} \right). \quad (6.7)$$

(6.7) 式より、温度の推定誤差を小さくするためには、 Δt 、 Δp を小さくするほかに、① $n \rightarrow$ 大、② $\hat{t} \rightarrow$ 小、③ $\hat{p} \rightarrow$ 大、の方法がありうる。

まず、①については、観測波長 $10.5 \mu\text{m}$ における n の値を $1.6 \mu\text{m}$ と比較すると約 $1/3$ で、小さい。

次に、②と③については、今回の実験では \hat{t} が 1 に近い (約 0.95) ため、③の寄与が大きい。Gaydon [60] によると、メタン空気予混炎の場合、主な吸収を示す物質としては、水蒸気 (H_2O) や二酸化炭素 (CO_2) がある。Ludwig [66] は 300K から 3000K まで温度 T を変化させたときの水蒸気の分光吸収係数 $K_\lambda(T)$ を実測している。この結果から、ランベルト・ベールの法則 [67] とプランクの法則を用いて水蒸気の分光放射輝度 $p_\lambda(T)$ を

$$p_\lambda(T) = (1 - e^{-K_\lambda(T)}) B_\lambda(T) \quad (6.8)$$

で計算した結果を図 6.4 に示す。ここで l は光路長で 15mm とした。

これによると水蒸気の放射は $2.8\mu\text{m}$, $1.8\mu\text{m}$, $1.5\mu\text{m}$ の付近で大きく、 $8\sim 14\mu\text{m}$ の付近では大きな放射は存在しない。これらの波長域での炎の放射のスペクトルは、フーリエ変換赤外分光光度計（富士電機製 FIRIS 100）を用いて測定した結果（図 6.5(b)）とよく一致している。

ただし、分光光度計での測定結果は用いたセンサ（HgCdTe および PbS）の分光感度特性と、炎からセンサまでの途中光路での吸収（主に H_2O と CO_2 ）を含んだ結果となっている。HgCdTe の有効な波長域は $8\mu\text{m}\sim 14\mu\text{m}$, PbS は $1.5\mu\text{m}\sim 2.5\mu\text{m}$ である。

以上のように、実験で用いた観測波長は、(1) 波長が長いために熱放射が小さく、指数 n も小さい、(2) 水蒸気に関して、吸収の大きな波長域からはずれており、 i が大きい、という点で適切ではない。実際に観測を行う場合には、入手可能な赤外線センサの波長域や感度を考慮したうえで、観測波長域を定める必要があるが、観測波長を $1.5\mu\text{m}$ 付近とすることで、温度の推定誤差を小さくできると考えられる。

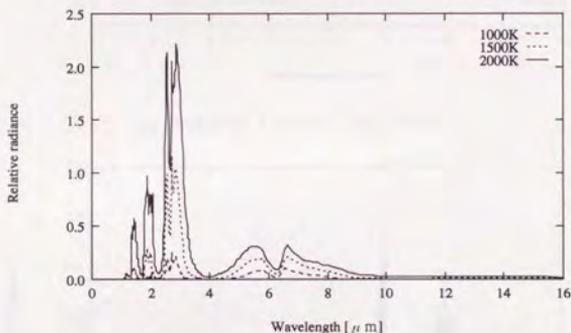
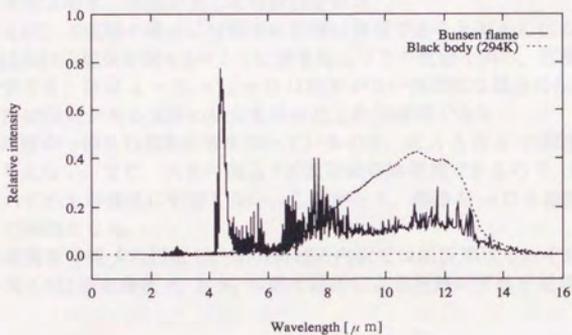
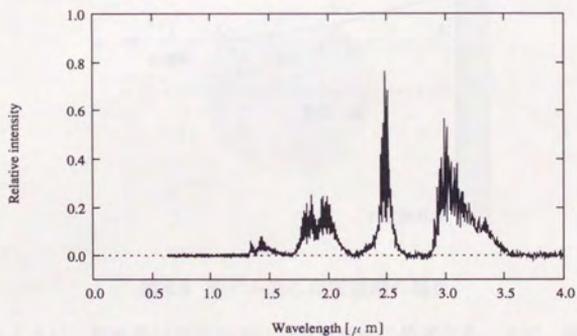


図 6.4 水蒸気からの熱放射の分光特性



(a) 長波長側 (センサ: HgCdTe)



(b) 短波長側 (センサ: PbS)

図 6.5 炎 ($\text{CH}_4 + \text{Air}$) のスペクトル

6.3 屈折の影響

本手法では放射の伝播路を直線と仮定した再構成アルゴリズムを用いている。一般に気体の屈折率は組成や温度によって変化する。したがって、燃焼火炎内部と外部では屈折率が異なるほか、火炎内部の屈折率の分布も一様ではなく、そのために伝播路が屈折によって曲げられ、再構成結果に誤差が生じる可能性がある。

結論から言えば、本実験の場合には屈折の影響は無視できると考えられる。ここでは実際の燃焼火炎における屈折を図 6.6 のように単純化してその度合を調べ、再構成における屈折の影響を評価する。経路 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ は屈折がない理想的な場合の伝播路、経路 $A' \rightarrow B' \rightarrow C \rightarrow D$ は屈折がある実際の場合を単純化した伝播路である。

本手法では輝度が一様な外部放射源を用いているので、点 A と点 A' の輝度は等しく、再構成に影響を与えない。また、火炎の周辺での放射吸収は無視できるので、経路 $A \rightarrow B$ と経路 $A' \rightarrow B'$ のずれも再構成に影響しない。したがって、経路 $B \rightarrow C$ と経路 $B' \rightarrow C$ のずれの程度だけが問題となる。

燃焼火炎の断面を半径 R の円とし、その外側と内側では屈折率はそれぞれ n_1 、 n_2 で一様とすると、図 6.6 に示す角度 θ_1 と θ_2 の差で屈折による経路のずれを見積もることができる。

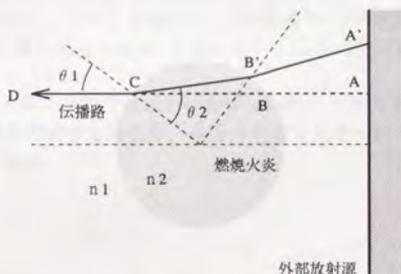


図 6.6 モデル化した伝播路の屈折

既に述べたように、気体の屈折率は主に組成や温度に依存する。まず、組成による屈折率の差については、火炎中に存在し得る気体の屈折率は表 6.1 に示すように非常に 1 に近く、その差は 10^{-3} 以下である。

次に温度による屈折率の変化について考察する。屈折率の温度変化は主に密度に変化によるものである。空気の屈折率 n と密度 ρ には、次の関係式が成り立つ [69]。

$$n - 1 = k_{GD}\rho \quad (6.9)$$

ここで、 k_{GD} は Gladstone-Dale 定数とよばれる波長に依存する係数であるが、赤外波長域 ($> 1\mu\text{m}$) ではその値は $k_{GD}=221 (\text{m}^3\text{kg}^{-1})$ でほぼ一定である。

表 6.1 気体の屈折率
(0 °C, 1 気圧, 波長 589.3nm)

気体の種類	屈折率
一酸化炭素	1.000334
空気	1.000292
水蒸気	1.000252
二酸化炭素	1.000450

表 6.2 空気の温度-屈折率特性
(1 気圧)

温度 [K]	屈折率
300	1.00026
400	1.00020
1800	1.00004

一方, 温度 T における空気の密度 ρ は, 気体の状態方程式と標準状態 ($T_0=0\text{ }^\circ\text{C}$, 1 気圧) における空気の密度 $\rho_0=1.293\times 10^{-12}(\text{kg m}^{-3})$ を用いて,

$$\rho = \rho_0 \frac{T_0}{T} \quad (6.10)$$

と表される。(6.9) 式と (6.10) 式を用いて, 温度 300K, 400K, 1800K における屈折率を計算した結果を表 6.2 に示す.

そこで, 屈折率の変化を多めに見積もって $n_1 = 1.01$, $n_2 = 1.00$ とし, $\theta_1 = 45[\text{deg}]$ のときの θ_2 を Snell の法則から計算すると $\theta_2 = 45.6[\text{deg}]$ となる. したがって, 伝播路の曲がる角度は $\theta_2 - \theta_1 = 0.6[\text{deg}]$, このときの点 B' と経路 B → C の距離は, 炎の直径を 30mm として $30 \sin 0.6$ より計算すると 0.3mm を越えない, これは放射計の空間分解能 0.6mm/画素と比較して十分に小さい.

以上の考察により, 今回の実験では屈折の影響は無視できる大きさであると結論できる. ただし, より大きな炎を計測する場合や, 空間分解能を上げて計測する場合には, 屈折の影響も考慮する必要がある.

7章

おわりに

燃焼火炎中の高温ガスのように熱放射に対して半透明な物質は、放射体であると同時に吸収体でもある。このような対象の温度分布を遠隔から観測して得た熱放射の投影データから計測しようとする時、対象自体の吸収による熱放射の減衰を考慮する必要がある。したがって、吸収の分布が未知ならばこれも計測によって求めなければならない。

本研究では、異なる温度の二つの外部放射源を用い、それぞれの外部放射源を背景として観測した二つの投影データの差が吸収分布のみに依存することを利用し、これらの投影データから同時に温度分布と吸収分布を再構成する放射型CTのアルゴリズムを開発した。

この方法の有効性を数値シミュレーションと実験により確認した。

まず、シミュレーションでは、吸収を考慮しない方法では、見かけの放射を黒体放射とみなして計算するために、実際の温度に対して低い温度が再構成される。これに対して、本手法では温度分布と吸収の分布が共に精度よく再構成できた。

次に、燃焼テスト用ガスバーナを用いたメタン空気予混合炎を計測対象として温度分布の再構成を試みた。得られた結果は、炎の内炎部分が温度が低く、外炎部分が高い温度に推定されており、炎についての定性的な知見とは良く一致している。

しかし、定量的な評価では、熱電対を用いて温度分布を逐次計測した結果を真の温度とみなすと、本手法で得られた結果は800K程低い。その原因としては次の要因が考えられる。

第1は、観測波長の推定誤差によるものである。熱赤外放射型CTでは、放射輝度の投影データから温度分布を再構成する。実験では、放射計の出力を温度が既知の黒体を用いて校正し、さらに放射計の分光感度特性を考慮して代表させた観測波長(10.5 μm)を用い、放射計が出力する見かけの温度を実効放射輝度に変換して投影データを得た。しかし、計算に用いる放射計の観測波長が0.3 μm ほどわずかにずれると、推定温度が約400Kと大きく変動し得ることを示した。

第2は、観測波長域の選択の問題である。今回用いた炎の温度は熱電対を用いた計測によると約1800Kである。このような高温では1 μm から2 μm を中心波長とする放射を出し、用いた赤外線センサの観測波長域(8 μm から14 μm)では非常に小さな放射しか得られない。したがって、この問題は短い波長域に感度をもつセンサを用いることにより解決できる。

短い観測波長域を用いる場合、外部放射源も同じ波長域で放射を出すものが必要になるが、熱放射を用いると外部放射源の温度を現在用いているものよりも高くしなければなら

ない。これは実際には難しいし、簡便な測定装置を構築するという目的にも反する。近赤外の半導体レーザーなどを光源として用いる方法を開発することが必要になろう。

今回は、計測対象はバーナの軸の回りで対称であると仮定し、1方向からの観測データで全ての方向からの観測データを代表させて再構成を行った。また、再構成アルゴリズムの評価を目的としたため、計測対象として特殊な構造のバーナによる揺らがない炎を選んだ。

一般の火炎に対して本手法を適用するためには、対象の周囲から高速に投影データを収集することが必要である。そのためには、対象の回りに赤外線アレイセンサを配置し、小型で簡便な外部放射源を背景として投影データを短時間で得るような観測系が望ましい。

このような観測系を設計・製作し、さらに温度分布の測定精度を向上させることが今後の課題である。

本研究では、それ自体がなんらかの放射を出す放射源の3次元分布を測定対象とし、放射によって生じる投影を観測して得たデータから、対象の分布を測定・可視化する放射型CTの手法を開発した。

第1部では、符号化開口放射型CTを用いたRIの3次元分布の計測を行い、複数の投影像を用いることによって空間分解能を向上させる手法を示した。符号化された開口とエリアセンサから構成される一種の撮像系を用い、これを視線方向に僅かに移動させることにより、倍率が異なる複数の投影像を得る。これらの複数投影を入力とし、推定の2乗平均誤差が最小となる意味で最適の解(元の放射源分布)を出力する再構成アルゴリズムを解析的に導出した。

第2部では、熱赤外線放射型CTを用いて燃焼火炎内の温度分布の計測を行った。対象が複数の未知の分布で記述される場合を取り扱い、温度が既知の2種類の熱源を対象外部に置き、それぞれの熱源を用いたときに観測した2枚の投影データを用いることにより、温度と吸収の分布を同時に計測する手法を開発した。

これらの手法は、それ自身が放射を出す放射源を計測対象とし、放射によって生ずる投影像から元の分布を再構成する点と、複数の投影像を差動的に用いることによって、分解能や測定精度の向上を図っている点で共通の特徴をもっている。このような意味で、これらを差動構造を有する放射型CTとよぶことができる。

今後、非接触・非破壊の計測を必要とする分野はますます広がり、一点のみの計測だけではなく、多点、分布へと多次元化した測定対象の計測が求められるようになるであろう。計算機の進歩でより複雑なアルゴリズムや大規模な問題を実用的に計算できるようになり、様々な対象に対して逆問題を応用した計測が開発されると考えられる。

これから逆問題を用いたより高度な計測を実現するためには、順プロセスは問題設定として与えられるものではなく、どのような観測方法を用いるかを設計・選択することが、定式化された逆問題を解くこと以上に重要になるであろう。

本研究では、複雑な逆問題を含む計測で、このような観測の構造をうまく利用して計測の性能を向上させる方法や、そのときの逆問題解法についての議論を行った。観測方法を体系的に設計する手法を構築することは困難ではあるが、本研究がそのための指針になると考える。

謝辞

東京大学工学部藤村貞夫教授には、大学での研究の機会を頂き、本論文をまとめるに至るまで終始懇切なる御指導を頂いたことに対して深く感謝致します。東京大学工学部石川正俊助教授には研究について様々な御助言を頂き、厚く感謝致します。また、貴重な御意見・御討論を頂いた東京大学工学部中野馨教授、舘暲教授、安藤繁助教授に深くお礼申し上げます。

符号化開口放射型CTの実験では、千葉工業大学工学部桂井浩先生、東京大学附属病院放射線部佐々木康人教授、熊木利光主任の御協力を頂きました。記して感謝の意を表します。

熱赤外放射型CTの実験では、大阪ガス(株)基盤研究所平野光氏、富士電機(株)渡辺敦夫氏に実験装置で前端的に御協力を頂いたほか、専門的な見地から貴重な御助言を頂き、心より感謝致します。

研究を進めるにあたっては、法政大学花泉弘助教授、ヒューレット・パッカード日本研究所山田範秀氏、国立環境研究所横田達也氏、慶応義塾大学理工学部齊藤英雄助手から有益な御助言・御討論を頂き厚く感謝いたします。また、実験の遂行にあたっては、東京大学工学部喜安千弥助手、東京大学大学院渡辺泰彦氏、森本伸彦氏、伊藤剛氏、横河電機(株)吉野広樹氏をはじめとする諸氏の協力を頂きました。心より感謝致します。

参考文献

- [1] 北森 俊行, “計測の本質と計測工学” 計測と制御, **26**-2, pp.145-152 (1987).
- [2] D. D. Watson and W. H. Smith, “SPECT: Current and future developments”, *J. Nucl. Biol. Med.*, **36**-2, pp.108-112 (1992).
- [3] N. D. Volkow and L. Tancredi, “Current and future applications of SPECT in clinical psychiatry”, *J. Clin. Psychiatry*, **53**-11, pp.26-28 (1992).
- [4] H. E. Martz, S. G. Azevedo, J. M. Brase, K. E. Waltjen and D. J. Schnebeak, “Computed tomography systems and their industrial applications”, *Appl. Radiat. Isot.*, **41**-10/11, pp.943-961 (1990).
- [5] 日本機械学会編, “非破壊計測技術”, 朝倉書店 (1990).
- [6] 藤村 貞夫, “センシング技術 [III] —多次元化—”, 計測と制御, **27**-5, pp.151-158 (1988).
- [7] 加川 幸雄, “逆問題とCT”, コンピュートロール, **39**, pp.3-13 (1992).
- [8] J. M. Blackledge, “Quantitative coherent imaging: theory, methods and some applications”, Academic press (1989).
- [9] 日本エム・イー学会編, “臨床 ME ハンドブック”, pp.600-657, コロナ社/医学書院 (1984).
- [10] 田中 博, 岡部 政之, 鈴木 貴, “逆問題”, 岩波書店 (1993).
- [11] T. F. Budinger, G. T. Gullberg and R. H. Huesman, “Emission computed tomography”, in “Image reconstruction from projections”, G. T. Herman (ed.), pp.219-225, Springer-Verlag (1979).
- [12] 赤塚 孝雄, 田村 安孝, “計測と逆問題”, 計測と制御, **27**-5, pp.400-406 (1987).
- [13] 藤村 貞夫, “計測の原理”, 計測と制御, **27**-5, pp.377-382 (1988).
- [14] H. H. Barrett, “Fresnel zone plate imaging in nuclear medicine”, *J. Nucl. Med.*, **13**, pp.382-385 (1972).
- [15] R. S. May, Z. Akcasu, and G. F. Knoll, “Gamma-ray imaging with stochastic apertures”, *Appl. Opt.*, **13**-11, pp.2589-2601 (1974).

- [16] 藤村 貞夫, 伊藤 直史, “M 配列を用いた符号化開口放射型 CT”, 計測自動制御学会論文集, **28-4**, pp.426-432 (1992).
- [17] Tadashi Ito and Sadao Fujimura, “Optimum inversion method for coded aperture ECT using multiple projections”, SPIE, **1942**, pp.250-255 (1993).
- [18] 伊藤 直史, 藤村 貞夫, “複数投影を入力とする最適フィルタを用いた符号化開口 CT アルゴリズム”, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J77-D-II**, 9, pp.1925-1930 (1994).
- [19] 渡辺 泰彦, 森本 伸彦, “吸収を考慮した放射形 CT アルゴリズムの研究”, 東京大学工学部計数工学科卒業論文 (1993).
- [20] 吉野 広樹, 伊藤 剛, “放射形 CT アルゴリズムを用いた炎の温度分布計測の研究”, 東京大学工学部計数工学科卒業論文 (1994).
- [21] Tadashi Ito and Sadao Fujimura, “Simultaneous Measurement of Temperature and Absorption of Distributed Medium by Using Infrared Emission CT”, IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, **44-3**, pp.799-802 (1995).
- [22] 山本 誠一, 天野 昌治, “ポジトロン CT, 最近の動向”, 応用物理, **61-3**, pp.241-245 (1992).
- [23] A. Wouters, K. M. Simon and J. G. Hirschberg, “Direct Method of Decoding Multiple Images”, Appl. Opt., **12-8**, pp.1871-1873 (1973).
- [24] Y. Bizais, I. G. Zubal, R. W. Rowe, G. W. Bennett and A. B. Brill, “Dual Seven Pinhole Tomography”, IEEE Trans. on Medical Imaging, **30-1**, pp.703-706 (1983).
- [25] H. H. Barrett and G. D. DeMeester, “Quantum noise in Fresnel zone plate imaging”, Appl. Opt., **13-5**, pp.1100-1109 (1974).
- [26] H. Stark and R. Naab, “Application of optimum coding sequences to computerized classical tomography”, Appl. Opt., **17-19**, pp.3133-3137 (1978).
- [27] E. E. Fenimore and T. M. Cannon, “Coded aperture imaging with uniformly redundant arrays”, Appl. Opt., **17-3**, pp.337-347 (1978).
- [28] F. J. MacWilliams and N. J. A. Sloane, “Pseudo-random sequences and arrays”, Proc. IEEE, **64-12**, pp.1715-1728 (1976).
- [29] M. Willett, “Characteristic m -Sequences”, Math. Comp., **30-134**, pp.307-311 (1976).
- [30] 柏木 潤, “M 系列再発見”, 計測と制御, **20-2**, pp.236-245 (1981).
- [31] 伊藤 直史, 藤村 貞夫, “M 配列符号化開口放射型 CT におけるゴーストの性質”, 計測自動制御学会論文集, **28-12**, pp.1397-1402 (1992).
- [32] T. M. Cannon and E. E. Fenimore, “Tomographical imaging using uniformly redundant arrays”, Appl. Opt., **18-7**, pp.1052-1057 (1979).
- [33] G. F. Stone and N. M. Ceglio, “A zone plate shadow camera for 100 keV x rays and 6 MeV protons”, J. Vac. Sci. Technol. B, **1-4**, pp.1280-1284 (1983).

- [34] Y. Chen, M. Yamanaka, N. Miyanaga, T. Yamanaka, S. Nakai, C. Yamanaka and S. Tamura, "Three-dimensional reconstruction of laser-irradiated targets using a coded aperture cameras", *Optics Comm.*, **71**-5, pp.249-255 (1989).
- [35] G. G. Gindi, R. G. Paxman and H. H. Barrett, "Reconstruction of an object from its coded image and object constraints", *Appl. Opt.*, **23**-6, pp.851-856 (1984).
- [36] W. E. Smith, R. G. Paxman and H. H. Barrett, "Image reconstruction from coded data: I. Reconstruction algorithms and experimental results", *J. Opt. Soc. Am. A*, **2**-4, pp.491-500 (1984).
- [37] R. G. Paxman, H. H. Barrett, W. E. Smith and T. D. Milster, "Image reconstruction from coded data: II. Code design", *J. Opt. Soc. Am. A*, **2**-4, pp.501-509 (1984).
- [38] 寺嶋 廣克, 中島 真人, 伊藤 貴司, 森 瑞樹, "シンチカメラを用いた新しい3次元 γ 線映像法", *電子通信学会論文誌 C*, **59**-11, pp.770-771 (1976).
- [39] 寺嶋 廣克, 中島 真人, 伊藤 貴司, 森 瑞樹, 豊田 清, "シンチカメラを用いた3次元 γ 線映像法(ii) —実験的検証—", *電子通信学会論文誌 C*, **60**-7, pp.429-431 (1977).
- [40] W. L. Rogers and R. S. Adler, "Time-coded aperture design for nuclear medicine imaging: a study of signal-to-noise ratio", *Appl. Opt.*, **21**-2, pp.324-333 (1982).
- [41] 伊理 正夫, 韓 太舜, "線形代数", pp.202-205, 教育出版 (1977).
- [42] 日本アイソトープ協会編, "核医学入門 基礎から臨床まで", p.48, 丸善 (1978).
- [43] 田沼 充, "差動構造を有する M 配列符号化開口放射型 CT", 東京大学工学部計数工学科修士論文 (1988).
- [44] 山崎 文男編, "放射線", pp.87-94, 共立出版 (1973).
- [45] 田沼 充, 藤村 貞夫, 山田 範秀, "差動構造を有する M 配列符号化開口放射型 CT", 第 26 回計測自動制御学会学術講演会予稿集, pp.145-146 (1987).
- [46] J. W. Woods, M. P. Ekstrom, T. M. Palmiere and R. E. Twogood, "Best linear decoding of random mask images", *IEEE Trans. on Nuclear Science*, **22**, pp.379-383 (1975).
- [47] C. W. Helstrom, "Image restoration by the method of least squares", *J. Opt. Soc. Am.*, **57**-3, pp.297-303 (1967).
- [48] 茨木 俊秀, 福島 雅夫, "最適化プログラミング", pp.87-132, 岩波書店 (1991).
- [49] 横田 達也, 藤村 貞夫, 豊田 弘道, "熱赤外 3 バンド画像による大気中の放射吸収物質の空間分布推定", *計測自動制御学会論文集*, **22**-10, pp.1087-1093 (1986).
- [50] S. Twomey, "Introduction to the Mathematics of Inversion in Remote Sensing and Indirect Measurements", Elsevier Scientific Publishing Company (1977).
- [51] 黒崎 泰充, "燃焼の監視と制御", *システムと制御*, **31**-6, pp.397-405 (1987).

- [52] H. Uchiyama, M. Nakajima, and S. Yuta, "Measurement of flame temperature distribution by ir emission computed tomography", *Appl. Opt.*, **24**-23, pp.4111-4116 (1985).
- [53] 内山 博喜, 風早 完次, 中島 真人, 溝本 雅彦, 油田 信一, "熱線 CT における減衰補正法", *電子通信学会論文誌*, **J68-D**, 12, pp.2073-2081 (1985).
- [54] 若井 和憲, 志水 昭史, 近藤 充範, "吸取 2 色 CT 法による二次元温度濃度分布測定 (理論的検討)", *日本機械学会論文集 (B 編)*, **56**-532, pp.3932-3937 (1990).
- [55] R. J. Hall and P. A. Bonczyk, "Sooting flame thermometry using emission/absorption tomography", *Appl. Opt.*, **29**-31, pp.4590-4598 (1990).
- [56] A. V. Clough and H. H. Barrett, "Attenuated radon and abel transforms", *J. Opt. Soc. Am.*, **73**-11, pp.1590-1596 (1983).
- [57] 大沢 敏彦, 浅沼 強, "レーザーによる燃焼解析", *応用物理*, **52**-5, pp.388-396 (1983).
- [58] 幸田 清一郎, 田久保 嘉隆, "火炎の分光学的計測とその応用", pp.33-66, 学会出版センター (1990).
- [59] S. S. Penner, "Quantitative molecular spectroscopy and gas emissivities", pp.1-16, Pergamon press (1959).
- [60] A. G. Gaydon, "The spectroscopy of flames", Chapman and Hall (1959).
- [61] 高木 幹雄, 下田 陽久, "画像解析ハンドブック", pp.301-327, 東京大学出版会 (1991).
- [62] G. H. Golub and C. Reinsch, "Singular Value Decomposition and Least Squares Solutions", *Numer. Math.*, **14**, pp.403-420 (1970).
- [63] 有本 卓, "信号・画像のデジタル処理", pp.267-277, 産業図書 (1980).
- [64] 金原 寿朗, "気体の燃焼物理", pp.71-72, 裳華堂 (1985).
- [65] 温度計測部会編, "新編温度計測", pp.187-200, 計測自動制御学会 (1992).
- [66] C. B. Ludwig, "Measurement of the curves-of-growth of hot water vapor", *Appl. Opt.*, **10**-5, pp.1057-1073 (1971).
- [67] R. E. Dodd, "化学分光学", 近藤 幸夫訳, pp.45-48, 丸善 (1962).
- [68] R. A. Smith, F. E. Jones and R. P. Chasmar, "The detection and measurement of infra-red radiation", pp.39-46, Oxford University Press (1968).
- [69] Lawrence D. Lorah and Eugene Rubin, "Aerodynamic influences on infrared system design", in "The infrared handbook", William L. Wolfe and George J. Zissis (eds.), pp.24-15 - 24-16, Office of Naval Research (1978).

付録 ポアソン分布にしたがって変動する放射源による投影像

第3章では、放射源を連続的な強度をもつ通常の光源のように取り扱ったが、RIの場合には、放出される γ 線のカウント数はポアソン分布にしたがって統計的に変動する。ここでは、このような放射源に対しても、カウント数の期待値をとれば、放射源分布と投影像の間に前節と同様の関係が成り立つことを示す。

放射源の存在し得る3次元空間内の範囲を体積が dv の n 個の微小な箱に分割し、 j 番目の箱(箱 j と書く)から単位時間に放出される放射線のカウント数を s_j とする。箱 j から単位時間に s 個の放射線が放出される確率 $P_j(s_j = s)$ はポアソン分布

$$P_j(s_j = s) = \frac{(\bar{s}_j dv)^s}{s!} \exp(-\bar{s}_j dv) \quad (\text{A.1})$$

で与えられる。ここで \bar{s}_j は、単位体積・単位時間当たりのカウント数の期待値(単位は[カウント数/ m^3s])である。

箱 j から s 個の放射線が放出されたとき、そのうちの p 個が画素 i で検出される確率 $P_j(p_i = p | s_j = s)$ は、2項定理より

$$P_j(p_i = p | s_j = s) = \frac{s!}{p!(s-p)!} F_{ij}^p (1 - F_{ij})^{s-p} \quad (\text{A.2})$$

となる。ここで、 F_{ij} は箱 j から放出された γ 線が画素 i に到達する確率であり、箱 j と画素 i を結ぶ線分と開口が交差する点での透過率に等しい。

箱 j から放出された放射線が画素 i で p 個検出される確率 $P_j(p_i = p)$ は

$$P_j(p_i = p) = \sum_{s=p}^{\infty} P_j(p_i = p | s_j = s) P_j(s_j = s) \quad (\text{A.3})$$

で与えられる。(A.3)式に(A.1)式と(A.2)式を代入すると次式を得る。

$$P_j(p_i = p) = \frac{(F_{ij} \bar{s}_j dv)^p}{p!} \exp(-F_{ij} \bar{s}_j dv) \quad (\text{A.4})$$

(A.4)式は、箱 j から画素 i への到達する放射線のカウント数が期待値 $F_{ij} \bar{s}_j dv$ のポアソン分布にしたがうことを示している。

画素 i で p 個の放射線が検出される確率 $P(p_i = p)$ は、

$$P(p_i = p) = \sum_{k_1 + \dots + k_n = p} \prod_{j=1}^n P_j(p_i = k_j) \quad (\text{A.5})$$

で表される。(A.5)式に(A.4)式を代入すると、

$$P(p_i = p) = \frac{\left(\sum_{j=1}^n F_{ij} \bar{s}_j \right)^p}{p!} \exp \left(- \sum_{j=1}^n F_{ij} \bar{s}_j dv \right) \quad (\text{A.6})$$

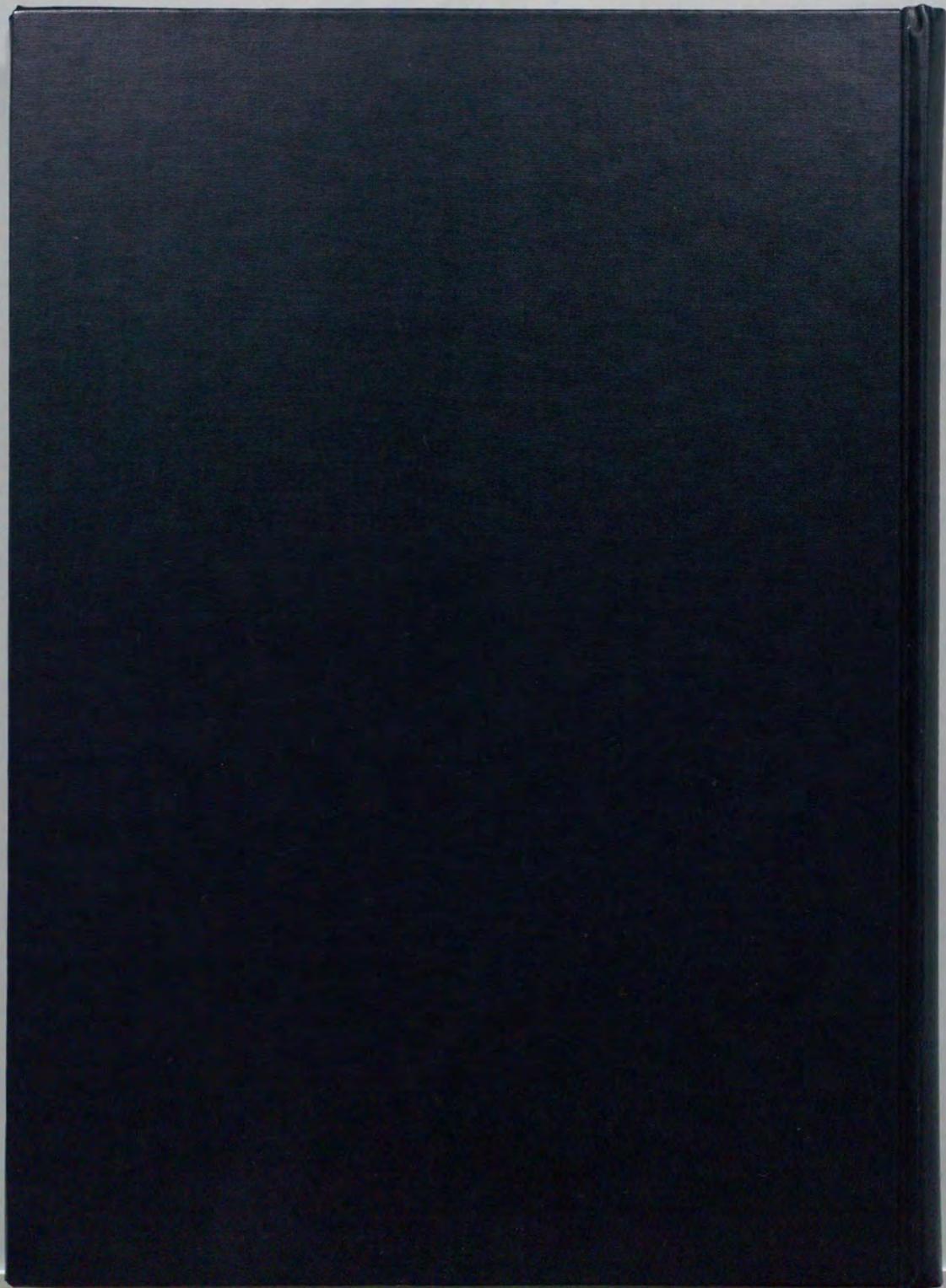
が得られる。(A.6)式より, エリアセンサの各画素で検出される放射線のカウント数は, 単位面積当たりの期待値を \bar{p}_i とすると,

$$\bar{p}_i dA = \sum_{j=1}^n F_{ij} \bar{s}_j dv \quad (\text{A.7})$$

のポアソン分布に従っている。(A.7)式を書き直すと

$$\bar{p}_i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{4\pi(D+z_j)^2} f\left(\frac{D\vec{x}_j + z_j\vec{y}_i}{D+z_j}\right) \bar{s}_j dv$$

が得られる。これは(2.4)式を有限和で近似したものに他ならない。

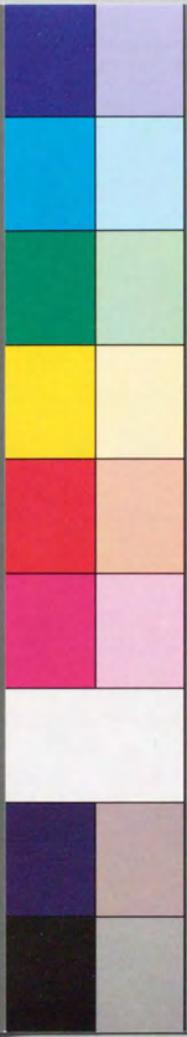


inches
1 2 3 4 5 6 7 8
cm
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM Kodak

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black



Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM Kodak

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

