10. *S-Wellen an der fest-flüssigen Schichtgrenze. II.*

Von Takeo MATUZAWA

Institut für Erdbebenforschung.

(Vorgelegt den 19. Feb. 1954.—Eingegangen den 23. März 1954.)

1. Verhalten der SV-Wellen an der Schichtgrenze.

In der ersten Mitteilung wurde das Verhalten der SH-Wellen an der fest-flüssigen Schichtgrenze untersucht. Natürlich kommt der Fall vom Eintritt der SV-Wellen oft vor. Als die Ergänzung wird der Fall diskutiert.

Die (x, y)-Ebene sei an der Schichtgrenze genommen und die positive z-Achse sei in die Zähflüssigkeit gerichtet.

Die Gleichung der kleine Bewegung in der Flüssigkeit lautet,

$$\left.\begin{aligned} \rho' \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}\right), \\ \rho' \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} &= -\frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right), \\ v' &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

wo, u', v' und w' Komponenten der kleinen Verschiebung des Flüssigkeitsteilchens sind,

ρ' die Dichte der Flüssigkeit ist,
ν die Viskosität der Flüssigkeit ist,
und p' der Zusatzdruck in der gestörten Flüssigkeit ist.

Nun

$$p' = -\rho' c^2 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right),$$

wo, c die Schallgeschwindigkeit in der Flüssigkeit ist.

Also aus (1)

$$\left.\begin{aligned} \rho' \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} &= \rho' c^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right) + \nu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}\right), \\ \rho' \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} &= \rho' c^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right) + \nu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Wenn man setzt in (2)

$$u' = \frac{\partial \phi'}{\partial x} - \frac{\partial \psi'}{\partial z} ,$$

$$w' = \frac{\partial \phi'}{\partial z} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} ,$$

dann

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial z^2} , \\ &\rho' \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 \phi') = \left(\rho' c^2 + \nu \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 (\nabla^2 \phi') , \\ &\rho' \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 \psi') = \nu \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 (\nabla^2 \psi') . \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Setze man

$$\phi' = A' \exp \{ih'(l_1'x + m_1'z) - ipt\} ,$$
$$\psi' = B' \exp \{ik'(l_2'x + m_2'z) - ipt\} ,$$

dann bekommt man, um den Gleichungen zu genügen,

$$\left.\begin{aligned} &\rho' p^2 = (c^2 \rho' - i p \nu)(\overline{h' l_1'}^2 + \overline{h' m_1'}^2) , \\ &\rho' p^2 = -i p \nu (\overline{k' l_2'}^2 + \overline{k' m_2'}^2) . \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Daher,

$$\overline{h' m_1'}^2 = \sqrt{\left\{\frac{\rho' p^2 \rho' c^2}{\overline{c^2 \rho'}^2 + \overline{p\nu}^2} - \overline{h' l_1'}^2\right\}^2 + \left(\frac{\rho' p^2 p\nu}{\overline{c^2 \rho'}^2 + \overline{p\nu}^2}\right)^2} \times e^{i\varphi} \qquad (5)$$

wo

$$\tan \varphi = \frac{\rho' p^2 p\nu}{\overline{c^2 \rho'}^2 + \overline{p\nu}^2} \Big/ \left\{\frac{\rho' p^2 c^2 \rho'}{\overline{c^2 \rho'}^2 + \overline{p\nu}^2} - \overline{h' l_1'}^2\right\} . \qquad (6)$$

Dann

$$h' m_1' = + \sqrt[4]{\left\{\frac{\rho' p^2 \rho' c^2}{\overline{c^2 \rho'}^2 + \overline{p\nu}^2} - \overline{h_1' l_1'}^2\right\}^2 + \left(\frac{\rho' p^2 p\nu}{\overline{c^2 \rho'}^2 + \overline{p\nu}^2}\right)^2} e^{i(\varphi/2)} , \qquad (7)$$

und

$$\overline{h' m_2'}^2 = + \sqrt{(k' l_2')^4 + \left(\frac{\rho' p^2}{p\nu}\right)^2} e^{-i\theta} , \qquad (8)$$

wo,

$$\tan\theta = \frac{\rho' p^2}{p\nu}\Big/ \overline{k' l_2'}^2 . \tag{9}$$

Dann

$$k' m_2' = +i\sqrt[4]{(k' l_2')^4 + \left(\frac{\rho' p^2}{p\nu}\right)^2}\, e^{-i(\theta/2)} . \tag{10}$$

Die Komponenten der Verschiebung sind also

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= \frac{\partial\phi'}{\partial x} = ih' l_1' A' \exp\{ih'(l_1' x + m_1' z) - ipt\} , \\ w_1' &= \frac{\partial\phi'}{\partial z} = ih' m_1' A' \exp\{ih'(l_1' x + m_1' z) - ipt\} , \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} u_2' &= -\frac{\partial\psi'}{\partial z} = -ik' m_2' B' \exp\{ik'(l_2' x + m_2' z) - ipt\} , \\ w_2' &= \frac{\partial\psi'}{\partial x} = ik' l_2' B' \exp\{ik'(l_2' x + m_2' z) - ipt\} . \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Es sei, im festen Teil, ρ die Dichte, λ und μ die Lamésche Konstanten. Die eintretende SV-Welle sei u_0, w_0, die reflektierte P-Welle u_1, w_1 und die reflektierte SV-Welle u_2, w_2.

Wie gewöhnlich setzt man,

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= -ikmB \exp\{ik(lx + mz) - ipt\} , \\ w_0 &= iklB \exp\{ik(lx + mz) - ipt\} , \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= ihl_1 A \exp\{ih(l_1 x - m_1 z) - ipt\} , \\ w_1 &= -ihm_1 A \exp\{ih(l_1 x - m_1 z) - ipt\} , \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= ikmB_1 \exp\{ik(lx - mz) - ipt\} , \\ w_2 &= iklB_1 \exp\{ik(lx - mz) - ipt\} , \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

wo

$$h^2 = \frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu} , \quad k^2 = \frac{\rho p^2}{\mu} , \quad l^2 + m^2 = 1, \quad \text{und} \quad l_1^2 + m_1^2 = 1 .$$

An der Schichtgrenze herrscht natürlich die Kontinuität der Verschiebung und der Spannung.

Nämlich, für $z=0$,

$$u = u' , \qquad w = w' ,$$

$$-c^2\rho'\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial w'}{\partial z}\right)+2\nu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\ ,$$

$$\nu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w'}{\partial x}+\frac{\partial u'}{\partial z}\right)=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\ ,$$

wo,

$$u=u_0+u_1+u_2\ ,\qquad w=w_0+w_1+w_2\ ,$$
$$u'=u_1'+u_2' \quad \text{und} \quad w'=w_1'+w_2'\ .$$

Daraus bekommt man,

$$kl=h'l_1'=hl_1=k'l_2'\ , \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned}
&h'm_1'A'+klB'+hm_1A-klB_1=klB\ ,\\
&klA'-k'm'B'-klA-kmB_1=-kmB\ ,\\
&\left\{\frac{c^2\rho'\rho'p^2}{c^2\rho'-ip\nu}-2ip\nu\overline{h'm_1'}^2\right\}A'-2ip\nu k'^2l_2'm_2'B'\\
&\qquad+\{\lambda h^2+2\mu\overline{hm_1}^2\}A-2\mu k^2lmB_1=-2\mu k^2lmB\ ,\\
&-2ip\nu klh'm_1'A'+ip\nu(\overline{k'm_2'}^2-\overline{kl}^2)B'\\
&\qquad-2\mu hm_1klA-\mu k^2(m^2-l^2)B_1=\mu k^2(m^2-l^2)B\ .
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

2. Approximation für kleines l, nämlich für beinahe vertikalen Eintritt der SV-Wellen.

Es ist ziemlich umständlich, den allgemeinen Fall streng zu lösen. Aber im Reflexionsverfahren interessiert uns der Fall vom beinahe vertikalen Eintritt. Wenn sich die Approximation bis zur ersten Ordnung von l beschränkt, dann wird die Rechnung ziemlich vereinfacht.

Aus (6) und (7)

$$\left.\begin{aligned}
&\tan\varphi \doteqdot \frac{p\nu}{\rho' c^2}\ ,\\
&h'm_1'=\sqrt{\frac{\rho' p^2}{\sqrt{\overline{c^2\rho'}^2+\overline{p\nu}^2}}}\,e^{i(\varphi/2)}\ .
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Aus (9) und (10)

$$\tan\theta\doteqdot\infty,\qquad \text{also}\qquad \theta\doteqdot\pi/2\ ,$$

und

$$k'm_2'=\sqrt{\frac{\rho' p^2}{p\nu}}\,e^{(i\pi/4)}. \tag{19}$$

Nach umständlichen Rechnungen bekommt man aus (17) mit Berücksichtigung von (16), (18) und (19)

$$\frac{A'}{B}=2\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2\times$$

$$\cdot\frac{\left[1+\sqrt{\frac{\rho'\mu}{\rho p\nu}}\left\{\left(2\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}}-1\right)e^{i(\pi/4)}-2\frac{p\nu}{\mu}\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}}e^{-i(\pi/4)}\right\}\right]l}{\left\{\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}}\frac{\mu}{\sqrt{c^2\rho'^2+p\nu^2}}e^{i(\varphi/2)}-\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}}\left(1+\frac{p\nu}{\sqrt{c^2\rho'^2+p\nu^2}}e^{i(\varphi-\pi)}\right)\right\}\left\{\sqrt{\frac{\rho\mu}{\rho' p\nu}}e^{i(\pi/4)}-1\right\}},\tag{20}$$

$$\frac{B'}{B}=2\frac{\rho}{\rho'}\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho\mu}{\rho' p\nu}}e^{i(\pi/4)}-1},\tag{21}$$

$$\frac{A}{B}=2\frac{\rho}{\rho'}\times$$

$$\cdot\frac{\left\{1+\sqrt{\frac{\rho'\mu}{\rho p\nu}}\,e^{i(\pi/4)}-2e^{-i(\pi/4)}-\frac{\mu}{p\nu}\,e^{i(\pi/4)}\right\}\,l}{\left\{\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}}\frac{\mu}{\sqrt{c^2\rho'^2+p\nu^2}}e^{i(\varphi/2)}-\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}}\left(1+\frac{p\nu}{\sqrt{c^2\rho'^2+p\nu^2}}e^{i(\varphi-\pi)}\right)\right\}\left\{\sqrt{\frac{\rho\mu}{\rho' p\nu}}e^{i(\pi/4)}-1\right\}},\tag{22}$$

$$\frac{B_1}{B}=-\frac{\sqrt{\frac{\rho\mu}{\rho' p\nu}}e^{i(\pi/4)}+1}{\sqrt{\frac{\rho\mu}{\rho' p\nu}}e^{i(\pi/4)}-1}.\tag{23}$$

Wir sehen also, dass A' und A von der ersten Ordnung von l sind. Daher bekommt man aus (11), (12), (13), (14) und (15) in der ersten Annäherung von l,

$$\left.\begin{aligned}&u_1'\doteqdot 0,\\&w_1'\doteqdot ih'm_1'A'\exp\{ih'(l_1'x+m_1'z)-ipt\}\,,\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned}&u_2'\doteqdot -ik'm_2'B'\exp\{ik'(l_2'x+m_2'z)-ipt\}\,,\\&w_2'\doteqdot ik'l_2'B'\exp\{ik'(l_2'x+m_2'z)-ipt\}\,,\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned}&u_0=-ikmB\exp\{ik(lx+mz)-ipt\}\,,\\&w_0=iklB\exp\{ik(lx+mz)-ipt\}\,,\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned}&u_1\doteqdot 0,\\&w_1\doteqdot -ihm_1A\exp\{ih(l_1x-m_1z)-ipt\}\,,\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} u_2 &\doteqdot ikmB_1 \exp\{ik(lx-mz)-ipt\}\,, \\ w_2 &\doteqdot iklB_1 \exp\{ik(lx-mz)-ipt\}\,. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

3. Zusammenfassende Bemerkung.

Wenn man schreibt, B statt $-ikB$ in (26), A statt $-ik'm_2'B'$ in (25) und B_r statt $ikmB_1$ in (28), dann sieht man, dass u_2' in (25) und u_2 in (28) respektiv identisch mit v' und v_r in der ersten Mitteilung sind.

Nämlich sind die horizontale Komponente der Verschiebung in der Flüssigkeit und die der reflektierten SV-Wellen in diesem Falle bis zur zweiten Ordnung von l gleich den entsprechenden Komponenten im Falle von der SH-Wellen.

Im Falle der SV-Welle kommen noch dazu kleine vertikale Komponenten hinzu. Obendrein treten auch kleine vertikale Komponenten von P-Wellen auf.

Auf alle Fälle, was die horizontale Komponente von S-Welle betrifft, können wir die beiden Fälle von SH-Wellen und SV-Wellen in ganz gleicherweise behandeln, wenn der Eintrittswinkel klein ist.

10. Kotai-Ekitai no Sakai no Men no S-Nami. II.

Zisin-Kenkyûsyo MATUZAWA Takeo.

Kotai-Ekitai no Sakai no Men ni tyokkaku ni tikai Kakudo de SV-Nami ga hairu Baai no aramasi no Keisan wo okonatta. Hairu Kakudo no Nizyô izyô wo suteru Baai niwa S-nami no Suiheidô ni tuite wa SH-Nami no Baai to Kawari wa nai. P-Nami oyobi S-Nami no Zyôgedô ga, arawareru ga, sorewa Kakudo no Itizyô no Mono de aru.