

荷重組合を考慮した橋梁の  
動的慣性解析法に関する基礎的研究

勝 尾 隆 士

①

荷重組合せを考慮した構造物の  
動的信頼性評価法に関する基礎的研究

1990年10月

持尾 隆士

# 目 次

第1章 序 論 .....	1
1.1 まえがき .....	2
1.2 動的信頼性研究の現状 .....	4
1.3 動的信頼性研究の問題点と必要性 .....	9
1.4 本論文の内容 .....	13
参考文献 .....	18
第2章 動的信頼性評価への基本解法 .....	24
2.1 非線形不規則振動解析法の特徴 .....	25
2.2 統計的等価線形化手法による非線形構造系の不規則応答解析 ....	28
(平面応力場問題への適用)	
2.3 統計的等価線形化手法による非線形構造系の不規則応答解析 ....	71
(多質点系モデルにおける定式化)	
2.4 Fokker-Planck 法による非線形構造系の動的信頼性評価 .....	75
2.5 まとめ .....	94
参考文献 .....	96
第3章 線形構造系における荷重組合せを考慮した初通過破壊評価法の開発...	100
3.1 荷重組合せ問題について .....	101
3.2 変位制限型動的信頼性解析 .....	108
3.3 強度制限型動的信頼性解析 .....	125
3.4 動的荷重の相関を考慮した場合の取り扱い .....	136
3.5 数値計算例 .....	142
3.6 まとめ .....	152
参考文献 .....	154
第4章 非線形構造系における荷重組合せを考慮した初通過破壊評価法の開発	156
4.1 一自由度系に対する基本的定式化 .....	157
4.2 多自由度系に対する定式化 .....	168
4.3 数値計算例 .....	183
4.4 まとめ .....	188
参考文献 .....	190

第5章 荷重組合せを考慮した疲労損傷評価法の開発	191
5.1 評価手法の定式化	192
5.2 数値計算例	203
5.3 まとめ	212
参考文献	214
第6章 入力平均値及び材料強度のばらつき・経年変化による強度低下を考慮した場合の取り扱い	215
6.1 基本式の導出	216
6.2 数値計算例	225
6.3 まとめ	229
参考文献	231
第7章 動的信頼性評価手法の応用と今後の展開	232
7.1 荷重強度係数設計法への応用	233
7.2 確率論的地震リスク評価問題への応用	249
7.3 今後の展開と研究課題	260
7.4 まとめ	263
参考文献	265
第8章 結 論	268
謝 辞	274
付 録	275
付録1.1 動的信頼性について	276
付録2.1 非線形構成方程式が示す応力/歪関係	278
付録3.1 2入力と同時に作用する時の応答共分散マトリックスの導出	282
付録3.2 $g_i(p_{d,j})$ 具体的表現	286
付録4.1 1自由度弾塑性構造物の定常応答モーメント方程式	288
付録4.2 3自由度弾塑性構造物の定常応答モーメント方程式	289
付録5.1 $D_{12k,j}$ の解析的表現	295
付録7.1 安全係数法による構造物の損傷度評価	298
付録7.2 線形多自由度系における $G_k^I(u)$ の導出	300



## 第 1 章

### 序 論

- 1.1 まえがき
- 1.2 動的信頼性研究の現状
- 1.3 動的信頼性研究の問題点と必要性
- 1.4 本論文の内容

動的信頼性研究の現状と問題点，更に研究の必要性について述べるとともに，本論文の構成内容を概説する。

## 1.1 まえがき

構造物は通常その耐用期間中に種々の不規則荷重（地震、風、波浪等）を受ける。これらの荷重はいずれも再現性の無い時間的に変動する不確定量である。一方、構造物自身にも材料特性のばらつき、製作時工作誤差等から発生する不確定量が存在する。従来これらの不確定性は許容応力設計法の中で安全率という形に包括され、試行錯誤を繰返し経験的に最適な安全率を設定することにより、前述の不確定性に対処する設計が行われて来た。

しかし最近構造物の大型化、複雑化に伴い一度破損すると社会的経済的に大損害を被る様な重要構造物が増加しており、この様なものに対しては試行錯誤により安全率を改善、経験的に構造物の健全性・安全性を確保しようとする設計思想には自と限界があり、不確定性の影響を積極的に取り入れ、かつ安全裕度の定量的評価を可能とする構造信頼性設計手法の導入が是非とも必要となる。

この構造信頼性評価上での最も重要な要素技術の一つが荷重組合せ事象に対する評価技術である。すなわち構造物は一般に耐用期間内に各種の不規則荷重を受けるが、この中のいくつかは同時に作用する可能性を有している。これに対する最も簡便かつ保守的な評価方法は、同時発生する可能性のある荷重については各々最大値を単純に加算した値に対して構造物を設計することであるが、この考え方は明らかに過剰設計となってしまう。このため各荷重を時間的に変動する不確定量であり、その発生時期、継続時間も確率変数であることを認識した上で荷重の同時発生現象を確率現象としてとらえる必要がある。本荷重組合せ問題における同時発生現象の影響は、許容応力の割増しあるいは組合せ荷重値の低減という形で各国の構造設計指針の中にも考慮されているが、採用されている数値については理論的根拠に乏しく経験的に設定されたものが多い状況にあり、荷重組合せ効果の構造設計指針への理論的・合理的反映方法は未確立の問題として残されている。またすべての構造物が指針での掌握範囲内にあるとは限らず、対象外の構造物については個々に評価せざるを得ないことになる。更に指針で規定される構造物についても指針に従う安全性照査以外に、より詳細な安全裕度の把握等を実施したい場合があり、いずれについても構造信頼性の枠内で荷重組合せ現象を評価し得る解析的なツールとポテンシャルが要求される。

ところで、一般に信頼性と言えば構造強度関係で研究が進んでいる静的信頼性

を意味する場合が多い。しかし初通過破壊や疲労損傷問題等の様に時間経過が対象となる破壊現象を評価する必要がある場合には、静的信頼性での検討には限界があり、荷重（もしくは荷重効果）を確率過程として取り扱う動的信頼性理論の導入が必要となる。更に構造物が大型化してくると剛性が低下するのが一般的であり、このため構造物の動的応答が問題となって来る。すなわち、構造物の剛性が高い場合には荷重 → 荷重効果への変換は一意的に決定されるが、柔構造になれば荷重 → 荷重効果への変換は入力と構造の周波数特性に依存することになるため、不規則振動理論の援用による荷重 → 構造応答 → 荷重効果への変換としての応答量推定作業が新たに追加されることになる。しかも信頼性の評価であるから荷重レベルは将来発生の可能性のあるすべてについて考慮すべきであり、その中には構造物が非弾性応答を示すレベルのものも含まれているであろうから、非線形応答解析の導入も必要となる。このため静的信頼性の研究に比べ、動的信頼性の研究、特に構造の非線形性を考慮した荷重組合せ問題を含む研究については未開発の問題として残されている。

以上の研究状況下において、本研究は、構造物の振動応答が関与する動的信頼性<sup>\*)</sup>問題において、荷重組合せ問題及び関連の周辺諸問題に対する評価手法を開発し、更に応用することにより、従来経験的あるいは主観的に決定せざるを得なかった荷重組合せに関する諸問題を合理的、定量的に解決できるようにすることを主目的として実施するものである。

\*) 通常、確率過程としての取り扱いはいすべて動的信頼性と呼ばれるが、本研究では、構造系の振動応答が関与する確率過程問題のみを動的信頼性と定義し、解析対象としている。詳細は付録1.1参照。

## 1.2 動的信頼性研究の現状

構造物の信頼性解析は Freudenthal<sup>[1]</sup> が基礎理論の体系化を図って以来、今日まで活発な研究が続けられているが、この流れには二つの大きな節目がある。一つは1960年代後半の Ang, Cornell の研究である。すなわち、Ang & Amin<sup>[2]</sup> は Freudenthal の基本思想を踏襲しながら不確定要因に関する研究を行い客観的不確定量と主観的不確定量で構成される拡張信頼性理論を展開した。他方 Cornell<sup>[3]</sup> は信頼性評価を確率変数の平均値及び分散のみを用いて行う二次モーメント法を提案した。二番目の節目は二次モーメント法の改良、発展に関する研究であり1970年代に集中している。Cornell の提案した二次モーメント法では破壊確率に対応した指標として安全性指標  $\beta$  が採用されているが、この値は限界状態関数の定義の違いにより異なるという点で安全性指標の不変性の観点から問題があった。これを理論的に検討、解決したのが Ditlevsen<sup>[4]</sup> 及び Hasofer & Lind<sup>[5]</sup> である。また Rackwitz & Fiessler<sup>[6]</sup> は確率変数が正規分布あるいは対数正規分布に従わない場合、近似的に正規分布に変換することにより効率的に信頼性評価を行う方法を提案した。

以上の研究はすべて静的信頼性に関するものである。一方動的信頼性に関する研究は、その基礎となる閾値横断回数あるいは極値分布理論が Rice<sup>[7]</sup>, Middleton<sup>[8]</sup> により論じられて以来、種々の研究が行われているが、本研究で対象とする荷重組合せ問題まで含んだ動的信頼性研究の数は比較的少ない様である。以下に動的信頼性に関する研究動向を述べる。

動的信頼性問題で取り扱う破壊現象としては、主に初通過破壊問題と疲労損傷問題があるが、はじめに初通過破壊問題に関連した研究について述べる。

初通過破壊問題に対する厳密解は未だ得られておらず、このため種々の近似解法が提案されているが、その中で最も代表的なもの一つは Shinozuka<sup>[9]</sup> により提案された上下界法であろう。上下界法は破壊確率を直接求めるものではなく上限値及び下限値により破壊確率値の存在域を規定したものである。本手法は確

率過程が定常，非定常にかかわらず成立し，かつガウス過程以外にも適用できる点の特徴である。本上下界法は後年に Shinozuka & Yao<sup>[10]</sup> により閾値レベルが時間とともに変動する問題についても展開されている。一方 Lin<sup>[11]</sup> はキムラント母関数を用いて信頼度関数を級数解として与え，Iyengar<sup>[12]</sup> は Gram-Charlier 級数を用いて非定常過程を取り扱っている。極値点過程なる概念を用いて初通過破壊確率を推定した研究も多い。たとえば Yang & Shinozuka<sup>[13]</sup>，Roberts<sup>[14]</sup>，Lennox & Fraser<sup>[15]</sup> 等である。近年は種々の新しい試みもなされている。たとえば Vanmarcke<sup>[16]</sup> は狭帯域確率過程でかつ閾値レベルが低い場合に対する従来の近似式の改良を行い，Corotis ら<sup>[17]</sup> は広帯域定常確率ガウス過程を入力とする時の系の過渡応答を，非定常確率ガウス過程とみなしてスペクトル定数を用いた破壊確率の導出を行っている。ただし Vanmarcke<sup>[16]</sup> や Corotis ら<sup>[17]</sup> の研究は閾値通過にポアソン近似を仮定しているが，この仮定が成立しない現象に対する改良案として，Yang<sup>[18]</sup> は非定常確率ガウス過程の包絡線及びその時間微分との結合確率密度関数を誘導することで破壊確率の近似式を提案し，また木村ら<sup>[19]</sup> は閾値通過回数の階乗モーメントを用いた近似解を導出している。閾値レベルとしての構造材の材料特性が変動する問題を取り扱ったものもあり，小松ら<sup>[20][21]</sup> は材料特性が統計的変動を有する場合について解析しており，小池<sup>[22]</sup> は強度劣化を伴う構造信頼性の評価を行っている。

上記の研究は，比較的短い時間での初通過破壊問題を対象としているのに対し，Roberts<sup>[23]</sup> や Sankar ら<sup>[24]</sup> は長時間領域で有効な破壊確率の定式化を行った。

最近では非線形振動系に対する研究も活発に行われている。Wen<sup>[25]</sup> や岩壺ら<sup>[26]</sup> はヒステリシス構造系に対する解析を行い，洪<sup>[27]</sup> は完全弾塑性構造を取り扱っており，また Bergman ら<sup>[28]</sup> は剛体のすべり摩擦モデルをマルコフ過程として解析している。更に Roberts<sup>[29]</sup> は広帯域定常確率過程を入力とする非線形一自由度系の問題において，応答のエネルギー包絡線がマルコフ過程として対応する拡散方程式を数値的に求める方法を示している。一方 Sun ら<sup>[30]</sup> は確定的非線形解析分野で開発されたセル状態空間法を拡張して，非線形性が強くかつ減衰項の大きな系にも有効なセルマッピング法による破壊確率の算出法を提案した。

以上の研究は，ほとんどが一自由度系を対象としたものであり，基礎理論の把握や簡略検討の面からは一自由度系でも良いが，実機レベルの評価を必要とする

場合には多自由度系モデルが要求されるケースも多い。このため多自由度系を対象とした初通過破壊問題評価法の研究もいくつか報告されている<sup>[31]~[33]</sup>。しかしこれらの研究も、対象とする系は多自由度であるが、初通過問題については一次元現象を取り扱っているのみである。多次元初通過破壊問題は実機レベルの応力評価を行おうとする場合等に必要となる現象であるが、これを取り扱うにはランダムベクトル空間場での議論が必要となる。この分野における研究としては Park ら<sup>[34]</sup>のヒステリシス構造を対象としたもの、種々の限界状態表面に対する検討を行った Veneziano ら<sup>[35]</sup>の研究、時変の限界状態表面に対する定式化を行った Schrupp ら<sup>[36]</sup>の研究があるが、いずれも一次元場で定式化された Rice の超過回数期待値の表現を多次元場に拡張した Belyaev ら<sup>[37]</sup>の理論を基礎としたものである。

次に疲労損傷問題に関連した研究動向を述べる。疲労損傷評価には破壊力学をベースとしたミクロの立場に立つ方法と、S/N 曲線で代表されるマクロの立場による方法の二つがあるが、工学上の利用頻度からは後者の方法が多く、また本研究で採用する解析の流れは、破壊力学による評価とは観点を異にしているため、本節ではマクロの方法に限定して研究の流れを概説する。

疲労損傷評価に関する初期の代表的な研究は、Niles<sup>[38]</sup>が行った定常狭帯域ガウス過程に対する累積損傷度の導出、及び Roberts<sup>[39]</sup>の非定常狭帯域ガウス過程に対する定式化であり、以後種々の研究が実施されている。

疲労評価では累積損傷度に関する確率分布を推定することは一般に困難なため、一次モーメントとしての期待値を導出するのみの場合が多く、分散値については Crandall ら<sup>[40]</sup>が定常狭帯域ガウス過程について近似的に求めている程度である。最近では確率分布を対数正規分布と仮定して分散値を近似的に計算した例が報告されている<sup>[41][42]</sup>。

上述の研究の多くはガウス過程に対するものであるが、構造が非線形の場合には応答はガウス過程から大きくずれることもあり、このため非ガウス過程を想定した研究もいくつか発表されている。たとえば Winterstein<sup>[43][44]</sup>は非ガウス過程をエルミート級数で表現することにより累積疲労損傷度を評価しており、Jensen<sup>[45]</sup>は非ガウス過程としての確率変数とその時間微分との結合確率密度関数を Charlier 級数で近似することにより疲労損傷評価を行っている。



以上の研究では、破壊基準として基本的には Miner 則<sup>(46)</sup>の様な損傷度仮説を念頭に置いたものが多いが、他の破壊基準として塑性ひずみを基準とする損傷度の定義による研究<sup>(47)~(50)</sup>や、一自由度完全弾塑性系において履歴吸収エネルギーを破壊基準として評価した研究<sup>(51)</sup>も報告されている。既に述べた様に疲労評価では累積損傷に関する確率分布の推定が困難であるため、疲労に対する破壊確率も推定されたケースは少ない。その中で Shinozuka ら<sup>(52)</sup>は損傷度の期待値のみを用いて容易に破壊確率を推定できる近似式を提案した。一方 Ang ら<sup>(53)</sup>は疲労寿命のばらつきがワイブル分布に従うものとして信頼度関数を導入している。更に Mohammadi ら<sup>(54)</sup>は Ang らが提案した信頼度関数を利用して高サイクル疲労に対して有効な破壊確率式の誘導を行っている。また Wirsching ら<sup>(55)</sup>は Ang らが疲労寿命をワイブル分布で近似したのに対して対数正規分布で近似することにより破壊確率を導出した。

近年疲労評価研究の分野でも応用面に主眼を置いたものが増加しつつある。たとえば Smith ら<sup>(56)</sup>は多自由度構造物の耐風疲労問題に CQC 法<sup>(57)</sup>を導入して効率的に疲労評価を行っており、新谷<sup>(58)(59)</sup>は非定常入力を受ける線形構造系において、累積損傷度を応答倍率を用いて容易に推定できる簡便評価を提案している。また Lutes ら<sup>(60)</sup>は累積疲労損傷率をスペクトルモーメントの関数として表すことにより、応答のパワースペクトル形状の詳細な議論をすること無しに損傷率を評価できる手法を報告している。

以上動的信頼性に関する研究動向として初通過破壊問題と疲労破壊問題を概説したが、本論文での主要テーマである荷重組合せ問題に関連した研究現状を次に述べる。ただし荷重組合せ問題は、動的信頼性としての疲労破壊問題の中では現在まで解析された例が無く、このため初通過破壊を想定した荷重組合せ問題の研究動向のみを以下に示す。

荷重組合せ問題解析時の基礎となる荷重組合せ則は、Turkstra<sup>(61)</sup>が実用的な近似則を発表して以来種々の方法が提案されている(詳細は第3.1節参照)が、動的信頼性解析の中に組み入れる手法としては、Wen<sup>(62)</sup>により提案された Load Coincidence 法(LC法)や Larrabee ら<sup>(63)</sup>の提案するコンボリューション法が代表的手法と言える。LC法を用いた信頼性解析としては Kiureghian<sup>(64)</sup>や森塚ら<sup>(65)</sup>の研究があり、一方コンボリューション法は

Schwartz ら<sup>166)</sup>や Madsen ら<sup>167)</sup>の研究で採用されている。

ところで上記の研究では、荷重組合せの評価はいずれも応答値としての荷重効果のレベルで行われている。構造物が静的挙動を示す場合には、入力荷重と応答量としての荷重効果は、系が線形の範囲においては1対1で対応するため問題ないが、柔構造物の場合には、応答が入力と構造の周波数特性に依存することになるため、荷重組合せの評価は動的応答解析の枠内で行うことになる。すなわち構造物の振動特性を考慮に入れた荷重組合せ問題を解析する必要があるが生じる。これに対する研究は少ないが、たとえば Pearce ら<sup>168)</sup>はLC法を用いて平均値を有する二個の動荷重を受ける一自由度系について、変位制限タイプの限界状態に対する動的信頼性解析を行っており、また Naess<sup>169)</sup>は同じく変位制限タイプについてSRS法<sup>170)</sup>により常時作用する複数の動荷重に対する荷重組合せ問題を解析して超過回数期待値を求めている。一方 Shinozuka ら<sup>171)</sup>の研究は荷重組合せを考慮して多自由度系を解析した唯一の例であるが、このケースでは限界状態として強度制限タイプのみ、また組合せ荷重も動的荷重は一個で他は静的荷重しか対象としていない。

更に以上の研究ではすべて構造は線形系とみなしているが、実際には大きな入力レベルが作用する時、非弾性挙動を示す可能性がある。このため非線形系に対する荷重組合せ問題も解析可能とすることが必要であるが、本分野の研究はわずかに Chou ら<sup>172)</sup>が行っているのみであり、しかも Chou らの研究では構造の振動特性は考慮しておらず、一自由度のパイリニア荷重/変位曲線を用いた静的荷重組合せ問題のみを取り扱っている。

以上述べた通り、初通過破壊を想定した荷重組合せ問題に関する研究は、現在まで種々の限定されたケースについてしか行われておらず、広範囲にわたる汎用的な解析手法は未だ開発されていない。

### 1.3 動的信頼性研究の問題点と必要性

第1.1, 1.2 節でも述べた如く、従来の動的信頼性分野における研究・検討には次の様な問題点がある。

- (1) 従来の荷重組合せを考慮した初通過破壊問題の解析では、解析上の取り扱いの容易さから対象とする構造系は一自由度系に簡略モデル化されることが多いが、これでは高次振動モードの影響を考慮することができず、また破壊モードを一種類(単一自由度応答量の閾値横断現象)に限定してしまうことになる。更に動的応答解析においては線形解析のみに限定されて評価されることが多いが、実際には信頼性評価上から構造が非弾性を示す様な大きな入力レベルの荷重も対象とする場合の方が多く、このため動的信頼性問題を精度良く評価するためには動的非線形応答解析技術の援用が必要となる。しかし系の自由度が大きくなると、非線形応答解析自身が大きな研究課題の一つとなるため、特に多自由度非線形構造系に対する荷重組合せを考慮した初通過破壊問題は、未開発の研究として残されている。

一方、作用する荷重については、死荷重の様にその荷重レベルが一定で静的荷重と考えられるものもあるが、一般の荷重は地震、風等の様に不規則な動的荷重であるため、これらの複数個の動的荷重が同時に柔構造物に作用する場合の動的信頼性については、単独の動的荷重作用時とは異なる可能性があり定量的に十分把握しておく必要がある。ところで荷重の種類によっては平均値(直流成分)を含むものもあるが、系が非線形の場合には応答計算時に重ね合わせの原理が成立しないため、平均値分を(平均値を考慮しないで求めた)応答計算後に補正する簡便手法は使用できない。このため、従来の荷重組合せ問題では動的荷重は一個のみ、しかも平均値を含まないものについての解析例が目立っており、平均値を含む統一的な荷重組合せ問題評価手法が確立していない。

- (2) 動的信頼性問題における代表的な破壊現象は初通過破壊と疲労破壊であり、両者の研究は、従来ほとんどの場合別々に研究されている。しかし同一の構造物で初通過破壊が問題となる場合もあれば、疲労破壊が問題となるケースもあ

る。また両者の破壊現象を比較検討することにより総合的な動的信頼性の向上を図る必要性が発生することもある。この様な時に両破壊現象に対する解析手法が、まったく異なったものであれば非常に不都合であり、また解析精度のバランスの面からも好ましくない。このため両破壊現象の解析をできるだけ統一的に取り扱える手法の出現が望まれているが、現在まで有効な手法は確立していない。

特に疲労評価については、より合理性が高いと言われている応力頻度計数法（たとえばレンジベア法やレインフロー法）を、如何にして不規則振動解析の中に取り込むかという重要課題が、未確立の問題として残されているが、本論文での主要テーマである荷重組合せ問題においては、前述の応力頻度計数法改善による評価精度向上を議論する以前の問題として、疲労破壊現象に関する組合せ則自身が未開発のままであるという問題がある。すなわち、疲労評価に対する組合せ則がないため、偶発荷重に対する荷重組合せを考慮した疲労評価が必要となった場合には、現状では膨大なシミュレーションに頼らざるを得ないという状況にあり、このため疲労損傷解析における組合せ則の開発は、動的信頼性研究上での急務となりつつある。

- ③ 信頼性評価においては種々の不確実性が取り扱われる。すなわち外力、構造諸元、材料強度等の不確実性である。静的信頼性の分野ではこれらの不確実性を取り入れた研究が活発に行われているが、初通過破壊や疲労等を対象とする動的信頼性研究分野においては、第1.1節で述べた如く不規則応答解析作業が追加されるため、静的信頼性解析で取り扱われる程多くの不確実性は取り入れることが困難な場合が多い。このため通常は、外力の周波数特性を規定する定数（たとえばパワースペクトル密度の諸定数）、構造諸元、材料強度等はすべて確定値とする極めて限定的な問題について解析されることが多く、本来の信頼性評価に近づけるためには、前述の種々の不確実性を考慮し得る動的信頼性評価手法の開発が必要である。

以上、従来の動的信頼性研究における問題点について述べたが、これらの結果から動的信頼性研究上で取り組むべき課題を整理すれば次の通りとなる。

(1) 多自由度非線形の不規則応答解析法の開発

実際の構造物は多自由度系であり種々の破壊パターンを評価し得るためにも構造物の多自由度モデル化は是非とも必要である。また大振幅の入力レベルに対しても精度良く推定可能となるためには、動的信頼性評価に入る前の段階としての構造応答量推定時に、できるだけ種々の形状の構造物に適用可能な汎用性の高い多自由度非線形応答解析手法の開発が必要となる。

(2) 初通過破壊と疲労問題の効率的評価のための統一的動的信頼性解析手法の検討

動的信頼性問題の代表的な破壊現象である初通過破壊と疲労破壊の両者を効率的に取り扱うためには、両者に共通した応答統計量を用いて各々の破壊評価が可能となる統一的な動的信頼性手法を提案することが必要である。

(3) 初通過破壊を対象とした荷重組合せ問題の統一的取り組み

従来の動的信頼性問題における荷重組合せ問題の解析では、対象とする荷重の組合せケースは、個々の問題毎に部分的に取り上げられている場合が多いが、このような状況は荷重組合せ現象に対する全体の把握と理解、更には適切なモデル化・評価を行うという観点から改善されるべきものであり、組合せ荷重の分類と各分類毎の対応した動的評価手法の開発による統一的な理論体系の構築と確立が必要である。

(4) 疲労問題に対する荷重組合せを考慮した動的信頼性評価手法の開発

疲労問題は動的信頼性研究分野における非常に重要な研究領域であるが、荷重組合せ問題の枠内においては取り扱いの困難さから、従来信頼性の評価は言うに及ばず組合せ則についても報告された例がなく、荷重組合せ問題関連研究の中では最も開発が遅れている分野であり、早急に疲労に関する荷重組合せを考慮した動的信頼性評価法の基本技術の開発、基礎固めを図る必要がある。

(5) 動的信頼性解析に影響を及ぼす不確定性の定量的評価

従来の動的信頼性解析では、構造諸元、材料強度等に存在する不確定性についてはこれを確定値と仮定して、不規則応答の確率特性推定の方に研究の主眼点が置かれることが多く、このため不確定性の評価は静的信頼性研究ほどには

進んでいない。しかしこれは当然のことながら動的信頼性では不確定性を考慮しなくとも良いということではなく、近年の動的信頼性研究の発展にともない、不確定性についてもこれの影響を定量的に把握し得る手法の開発、評価・検討が急務となりつつある。

以上の必要性に対する認識のもとに、本研究では、荷重組合せ現象を中心として線形及び非線形多自由度構造系の、初通過及び疲労破壊に対する動的信頼性を評価する手法を開発すると共に、動的信頼性評価時に影響を及ぼす、材料強度の経年変化による強度低下現象、諸定数の不確定性、動荷重の平均値効果等についてもこれらを定量的に評価する方法を検討するものである。



## 1.4 本論文の内容

本論文は荷重組合せ現象を中心課題として動的信頼性問題を振動工学の立場から総合的に論じようとするものである。

本論文は全8章より構成されておりそのフローを図1.1に示す。

第2章以下の各章の構成は以下の通りである。

### [本論文の構成]

第2章：非線形構造系の動的信頼性解析を実現するための準備として、まず多自由度非線形構造系の不規則応答解析手法を開発する。本論文では統計的等価線形化手法とFokker-Planck法の二手法について解析法を開発する。すなわち具体例として材料非線形性を有する任意形状板構造の平面応力場問題を取り上げ、これを有限要素法と統計的等価線形化手法の導入により不規則応答量を推定する手法を開発するとともに、他の具体例として弾塑性復元力特性を有する多層構造物についても同様の定式化を行い、前者の平面応力場問題と解析手順の後半はほぼ同一となることを示すことで、本論文にて開発する手法は汎用性が高く有用な方法であることを述べる。一方、Fokker-Planck法についてもキウムラント打ち切り手法を援用することにより、種々の非線形系に適用できる汎用性の高い新たな方法を開発する。以上の提案する新たな二解析法についてはいずれもモンテカルロシミュレーションの実施によりその妥当性を確認する。

ところで動的信頼性問題は初通過破壊と疲労破壊問題に大別されるが、各々をまったく異なった手法で解析することは非効率的であり、また両者を比較する上でも解析精度のバランスの面から好ましくない。このため本論文では超過回数期待値を用いて両破壊問題を評価し得る手法を提案しており、これによって統一的な動的信頼性評価が可能となることを示す。

第3章：動的信頼性分野での荷重組合せ問題を評価するための基本則を選定するために、まず現状方法論の見直しと検討を行う。ここで選定される基本則を利用して、多自由度線形構造物の動的応答効果を考慮した荷重組合せ問題に対する初通過破壊の定式化を行う。この際、従来組み合わせられる荷重は問題毎に部分的にしか取り扱われていなかったが、本章では動的荷重のす

すべての組合せ（平均値有＋平均値有，平均値有＋平均値無，平均値無＋平均値無）を取り上げ，これに対する各々の定式化を行うことで，荷重組合せ現象に対する統一的な把握と解釈が可能になることを示す。

構造信頼性問題では通常信頼性の定義には二通りある。すなわち材料強度的にある許容応力レベルを超過する問題（強度制限タイプ）と，応力的には問題がなくとも応答変位量で信頼度が規定される（変位制限タイプ）場合である。本章では前述の組合せ荷重の分類とともに両タイプの信頼性問題についても合わせて評価式を導出する。また解析手法の妥当性を示すため，強度制限タイプの二荷重組合せ問題を対象としたモンテカルロシミュレーションを実施する。更に実機レベルの骨組構造物を対象とした試計算を行い，解析結果の解釈と利用法を示すことにより，動的信頼性評価更には荷重組合せ問題を解析することの有用性を明らかにする。

ところで荷重組合せ問題では，一般に作用する外荷重間には相関は無いものとして定式化されるが，相関がある場合にも，本章で開発する手法はほとんど修正無しで有効に利用できることも具体例をもとに示す。

第4章：前章での線形構造系に対する荷重組合せを考慮した初通過破壊評価手法の開発に引き続いて，本章では非線形多自由度構造系に対する評価手法開発を行う。ここでの具体的な非線形性としては，一般構造物の非線形特性の中で最も代表的なものの一つである弾塑性挙動を対象とした履歴復元力特性を取り上げる。まず一自由度非線形構造系に対して，第2章で開発されるキュムラント打ち切り手法を援用した Fokker-Planck 法による初通過破壊評価法の定式化を行う。次に一自由度系で開発した手法を多自由度系に拡張して任意の自由度に対して有効な解析理論を開発する。この際に破壊状態を規定する系の限界状態としては，前章同様に変位制限タイプと強度制限タイプの二種類を取り扱う。更に，開発する評価手法の精度を検討するためモンテカルロ法による数値実験を行い，手法の妥当性を確認する。

第5章：第3，4章で取り扱われる初通過破壊現象に関する荷重組合せ問題の解析に対して，構造の非線形性まで考慮した疲労破壊に関する荷重組合せ解析は従来まったく行われていない。そこでまず疲労問題における荷重組合せ則を誘導する。ただし本論文で取り扱う疲労は  $S/N$  曲線をベースにした線形損傷度仮説を用いるマクロの評価である。このため累積疲労損傷期待値について荷重組合せ則を新たに提案している。提案する荷重組合せ則は，

モデル化された荷重の振幅や継続時間を規定する確率分布形の種類によらずモンテカルロシミュレーション結果と良い一致を示し、精度の良い荷重組合せ則であることを明らかにする。次に提案した荷重組合せ則を用いて、第4章と同様の弾塑性多自由度構造物に対する荷重組合せを考慮した疲労損傷評価手法の開発を行うことにより、従来取り扱い困難とされて来た当該問題に対して定量的評価が可能となることを示す。更に一自由度弾塑性構造物の疲労損傷問題を取り上げ、この構造物の年間当たりの累積疲労損傷期待値を種々のパラメータについて求め、比較することにより疲労問題における荷重組合せ現象考慮の必要性を明らかにする。

第6章： 入力としての動的荷重が平均値（直流分）を含む場合、系が線形の時には重ね合わせ手法が有効なため平均値による応答は独立に評価できるが、非線形系の場合には重ね合わせ手法が利用できないため応答解析時には平均値分も同時に評価する必要がある、特に応答モーメント量の導出に際しては特別の工夫が要求される。そこで本章では荷重組合せ問題を含む動的信頼性解析全般に適用し得る解析手法として、キュムラント打ち切り手法の反復使用による新たな方法を提案する。また本方法の妥当性を確認するため一自由度 Duffing 振動系を取り上げ、これの理論解析とモンテカルロ法による数値実験結果との比較を行う。

更に本章では、信頼性解析に影響を及ぼす材料強度のばらつき及び経年変化による強度低下特性を考慮した場合の初通過破壊問題評価への定式化を行い、それらのパラメータが動的信頼性評価へ与える影響を定量的に検討する。

第7章： 荷重組合せを考慮した動的信頼性評価手法の実用面への応用例として、荷重強度係数設計法への展開を図る。すなわち荷重強度係数設計法における重要な研究課題である、必要最小限のコードフォーマット（設計規範式）の選定及び荷重係数の設定問題を、合理的、客観的にかつ構造物の振動特性を考慮して評価するために、荷重組合せを考慮した動的信頼性評価手法が利用できることを示す。また具体例を示すことにより提案する評価法の有用性を明らかにする。

更に一般の動的信頼性解析への応用として、諸定数の不確定性を考慮する場合の取り扱い法について述べる。すなわち第2～6章ではすべて構造諸元値は確定値とみなして解析を行うが、対象とする問題によっては構造諸元の

ばらつきが大きいもの、あるいは信頼性評価上からばらつきの定量的評価を必要とする場合がある。このため構造諸元のばらつきを考慮した時の動的信頼性解析手法を、構造物の確率論的地震リスク評価問題を具体例として導出する。

本章の最後として本論文では対象外とした動的信頼性研究上での未解決の重要なテーマを今後の研究課題として示す。

第8章 : 本研究で得られる成果を総括し、結論として述べる。

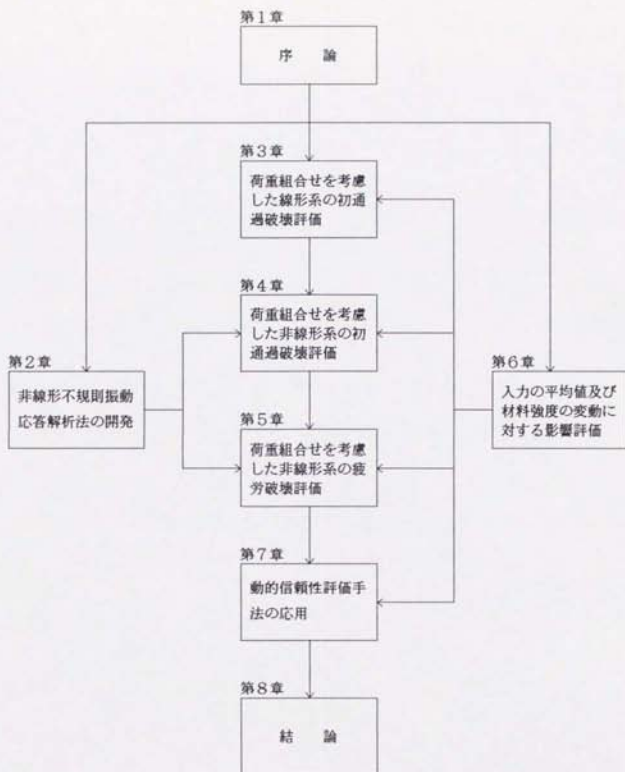


図1.1 本論文の構成フロー

## 参考文献 (第 1 章)

- [1] Freudenthal, A.M., The Safety of Structures, Trans. ASCE, Vol.112, (1947), 125.
- [2] Ang, A.H-S. and Amin, M., Safety Factors and Probability in Structural Design, J. Am. Soc. Civil Eng., Vol.95, No.57, (1969), 1389.
- [3] Cornell, C.A., A Probability-Based Structural Code, ACI Journal, (1969), 974.
- [4] Ditlevsen, O. Structural Reliability and the Invariance Problem, Report No.22, Solid Mech. Div., Univ. of Waterloo, (1973).
- [5] Hasofer, A.M., and Lind, N.C., Exact and Invariant Second-Moment Code Format, J. Am. Soc. Civil Eng., Vol.100, No.EM1, (1974), 111.
- [6] Rackwitz, R. and Fiessler, B., Structural Reliability under Combined Random Load Sequences, Computers and Structures, Vol.9, (1978), 489.
- [7] Rice, S.O., Mathematical Analysis of Random Noise, Bell System Tech. J., No.23, (1944), 282.
- [8] Middleton, D., An Introduction to Statistical Communication Theory, McGraw-Hill Inc., (1960).
- [9] Shinozuka, M., Probability of Structural Failure under Random Loading, J. Am. Soc. Civil Eng., Vol.90, No.EM5, (1964), 147.
- [10] Shinozuka, M. and Yao, J.T.P., On the Two-Sided Time-Dependent Barrier Problem, Journal of Sound and Vibration, Vol.6, No.1, (1967), 98.
- [11] Lin, Y.K., First-Excursion Failure of Randomly Excited Structures, AIAA J., Vol.8, No.4, (1970), 720.
- [12] Iyengar, R.N., First Passage Probability During Random Vibration, Journal of Sound and Vibration, Vol.31, No.2, (1973), 185.
- [13] Yang, J.N. and Shinozuka, M., On the First-Excursion Probability in Stationary Narrow-Band Random Vibration II, Journal of Applied Mechanics, Vol.39, No.3, (1972), 733.



- [14] Roberts, J.B., An Approach to the First Passage Problem in Random Vibration, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.8, No.2, (1968), 301.
- [15] Lennox, W.C. and Fraser, D.A., On the First-Passage Distribution for the Envelope of a Nonstationary Narrow Band Stochastic Process, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.41, No.3, (1974), 793.
- [16] Vanmarcke, E.H., On Measures of Reliability in Narrow-Band Random Vibration, Dept. of Civil Engng., M.I.T. Res. Rept., No.869-20, (1969).
- [17] Corotis, R.B., Vanmarcke, E.H. and Cornell, C.A., First Passage of Nonstationary Random Process, *J. Am. Soc. Civil Eng.*, Vol.98, No.EM2, (1972), 401.
- [18] Yang, J.N., Nonstationary Envelope Process and First Excursion Probability, *J. Struct. Mech.*, Vol.1, No.2, (1972), 231.
- [19] 木村康治, 矢ヶ崎一幸, 坂田勝, 非白色性励振を受ける線形系の閾値通過問題, *日本機械学会論文集*, Vol.53, No.492, (1987), 1653.
- [20] 小松定夫, 中山隆弘, 材料強度のばらつきを考慮した定常不規則振動体の初通過破壊確率の研究, *土木学会論文報告集*, No.250, (1976), 25.
- [21] 小松定夫, 中山隆弘, 材料強度のばらつきを考慮した非定常不規則振動体の初通過破壊確率, *土木学会論文報告集*, No.278, (1978), 25.
- [22] 小池武, 劣化構造物の動的信頼性解析, *土木学会論文報告集*, No.280, (1978), 1.
- [23] Roberts, J.B., Probability of First Passage Failure for Stationary Random Vibration, *AIAA J.*, Vol.12, No.12, (1974), 1636.
- [24] Sankar, T.S. and Wong, K.S., Amplitude Excursion Failure of Randomly Excited Mechanical System, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.37, No.2, (1974), 263.
- [25] Wen, Y.K., Method for Random Vibration of Hysteretic Systems, *J. Am. Soc. Civil Eng.*, Vol.102, No.EM2, (1976), 249.
- [26] 岩壺卓三, 菅野敏彦 他2名, 地震荷重下の構造物の信頼性について(第3報, 初通過破壊と累積疲労破壊の信頼性の比較および経年変化を考慮した信頼性), *日本機械学会論文集*, Vol.49, No.440, (1983), 588.

- [27] 洪起, 弾塑性構造物の動的信頼性理論に関する基礎的研究(第1報, 弾塑性ランダム振動の基本モデルと降伏レベルへの初通過問題), 日本建築学会論文報告集, No.256, (1977), 41.
- [28] Bergman, L.A. and Spencer, JR., B.F., First Passage of a Sliding Rigid Structure on a Frictional Foundation, Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.13, No.3, (1985), 281.
- [29] Roberts, J.B., First-Passage Time for Randomly Excited Non-Linear Oscillators, Journal of Sound and Vibration, Vol.109, No.1, (1986), 33.
- [30] Sun, J.-Q. and Hsu, C.S., First-Passage Time Probability of Non-Linear Stochastic Systems by Generalized Cell Mapping Method, Journal of Sound and Vibration, Vol.124, No.2, (1988), 233.
- [31] To, C.W.S., First Passage Time of Discretized Plates with Geometrical Nonlinearity, Computers and Structures, Vol.24, No.6, (1986), 893.
- [32] To, C.W.S., Distribution of the First-Passage Time of Mast Antenna Structures to Non-Stationary Random Excitation, Journal of Sound and Vibration, Vol.108, No.1, (1986), 11.
- [33] 矢ヶ崎一幸, 木村康治, 坂田勝, 非白色性励振を受ける非線形系の応答に対する初通過確率および閾値通過回数の確率分布, 日本機械学会論文集, Vol.53, No.495, (1987), 2183.
- [34] Park, Y.J., Wen, Y.K. and Ang, A.H-S., Random Vibration of Hysteretic Systems under Bi-Directional Ground Motions, Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.14, (1986), 543.
- [35] Veneziano, D., Grigoriu, M. and Cornell, C.A., Vector-Process Models for System Reliability, J. Am. Soc. Civil Eng., Vol.103, No.EM3, (1977), 441.
- [36] Schrupp, K. and Rackwitz, R., Outcrossing Rates of Gaussian Vector Processes for Cut Sets of Componential Failure Domains, Proc. 4th ICOSSAR, (1985), III-601.

- [37] Belyaev, Y.K. and Nosko, V.P., Characteristics of Excursions Above a High Level for a Gaussian Process and Its Envelope, Theory of Probability Applications, Vol.14, (1969), 296.
- [38] Miles, J.W., On Structural Fatigue under Random Loading, Journal of Aeronautical Science, Vol.21, (1954), 753.
- [39] Roberts, J.B., Structural Fatigue under Non-Stationary Random Loading, J. Mech. Engng. Sci., Vol.8, No.4, (1966), 392.
- [40] Crandall, S.H. and Mark, W.D., Random Vibration in Mechanical Systems, Academic Press, (1963).
- [41] 藤田隆史, 有脚液体容器の地震時疲労破壊に関する確率論的解析, 日本機械学会論文集, Vol.47, No.415, (1981), 298.
- [42] Kutt, T.V. and Bieniek, M.P., Cumulative Damage and Fatigue Life Prediction, AIAA J., Vol.26, No.2, (1988), 213.
- [43] Winterstein, S.R., Non-Normal Responses and Fatigue Damage, J. Am. Soc. Civil Eng., Vol.111, No.EM10, (1985), 1291.
- [44] Winterstein, S.R., Nonlinear Vibration Models for Extremes and Fatigue, J. Am. Soc. Civil Eng., Vol.114, No.EM10, (1988), 1772.
- [45] Jensen, J.J., Fatigue Damage Due to Non-Gaussian Responses, J. Am. Soc. Civil Eng., Vol.116, No.EM1, (1990), 240.
- [46] Miner, M.A., Cumulative Damage in Fatigue, Journal of Applied Mechanics, Vol.12, (1945), 159.
- [47] Tang, J.-P. and Yao, J.T.P., Expected Fatigue Damage of Seismic Structures, J. Am. Soc. Civil Eng., Vol.98, No.EM3, (1972), 695.
- [48] Wirshing, P.H. and Haugen, E.B., Probabilistic Design for Random Fatigue Load, J. Am. Soc. Civil Eng., Vol.99, No.EM6, (1973), 1165.
- [49] Yao, J.T.P., Fatigue Reliability and Design, J. Am. Soc. Civil Eng., Vol.100, No.ST9, (1974), 1827.
- [50] 岩壺卓三, 菅野敏彦 他2名, 地震荷重下の構造物の信頼性について(第2報, 累積疲労破壊の信頼性), 日本機械学会論文集, Vol.49, No.440, (1983), 581.

- [51] 洪起, 弾塑性構造物の動的信頼性理論に関する基礎的研究 (第3報, 履歴吸収エネルギーによる累積損傷崩壊機構を対象とした動的信頼性理論), 日本建築学会論文報告集, No.258, (1977), 47.
- [52] Shinozuka, M. and Yang, J.-N., Peak Structural Response to Non-Stationary Random Excitations, Journal of Sound and Vibration, Vol.16, No.4, (1971), 505.
- [53] Ang, A.H-S. and Munse, W.H., Practical Reliability Basis for Structural Fatigue, ASCE National Structural Engineering Convention, Preprint 2494, (1975).
- [54] Mohammadi, J. and Adeli, H., Structural Fatigue Failure under Random Vibrations, Civil Engineering for Practicing and Design Engineers, Vol.4, (1985), 551.
- [55] Wirsching, P.H. and Chen, Y.-N., Considerations of Probability-Based Fatigue Design for Marine Structures, Marine Structures, Vol.1, (1988), 23.
- [56] Smith, E., Solberg, M. and Skalmers, O., Stochastic Dynamic Fatigue Analysis of Steel Truss Towers to Wind Gustiness, Proc. 3rd Int. Offshore Mech. Arct. Eng. Symp., (1984), 392.
- [57] Der Kiureghian, A., Probabilistic Modal Combination for Earthquake Loading, Proc. 7th World Conference on Earthquake Eng., Vol.6, (1980), 729.
- [58] 新谷真功, 非定常過程における応答倍率値による累積損傷度の評価法について (第1報, 一質点系), 日本機械学会論文集, Vol.54, No.497, (1988), 135.
- [59] 新谷真功, 非定常過程における応答倍率値による累積損傷度の評価法について (第2報, 二質点系), 日本機械学会論文集, Vol.54, No.498, (1988), 376.
- [60] Lutes, L.D. and Larsen, C.E., Improved Spectral Method for Variable Amplitude Fatigue Prediction, J. Am. Soc. Civil Eng., Vol.116, No.ST4, (1990), 1149.

- [61] Turkstra, C.J., Probabilistic Design Formats. In Theory of Structural Design Decisions, Studies Series No.2, Solid Mech. Div., Univ. of Waterloo, (1970).
- [62] Wen, Y.K., Stochastic Dependencies in Load Combination, Proc. 3rd ICOSAB, (1981), 89.
- [63] Larrabee, R.D. and Cornell, C.A., Combination of Various Load Processes, J. Am. Soc. Civil Eng., Vol.107, No.ST1, (1981), 223.
- [64] Der Kiureghian, A., Second-Moment Combination of Stochastic Loads, J. Am. Soc. Civil Eng., Vol.104, No.ST10, (1978), 1551.
- [65] 藤塚正宜, 久保雅邦, 限界状態確率に基づく設計荷重の組合せと荷重係数の一決定法, 土木学会論文集, No.386, (1987), 301.
- [66] Schwartz, M.W. et al., Load Combination Program Project II Load Combination Methodology Development Interim Report II, NUREG/CR-1782, (1980).
- [67] Madsen, H., Kilcup, R. and Cornell, C.A., Mean Upcrossing Rates for Sums of Pulse-Type Stochastic Load Processes, Proc. Specialty Conf. on Probabilistic Mech. and Struct. Reliability, (1979), 54.
- [68] Pearce, H. and Wen, Y.K., Stochastic Combination of Load Effects, J. Am. Soc. Civil Eng., Vol.110, No.ST7, (1984), 1613.
- [69] Naess, A., A Study of Linear Combination of Load Effects, Journal of Sound and Vibration, Vol.129, No.2, (1989), 83.
- [70] Wen, Y.K., Methods for Reliability of Structures under Multiple Time Varying Loads, Nucl. Eng. Des., No.60, (1980), 61.
- [71] Shinozuka, M. et al., Reliability Assessment of Reinforced Concrete Containment Structures, NUREG/CR-3227, (1983).
- [72] Chou, K. and Thayaparan, P., Nonlinear Structural Response to Combined Live Load Processes, J. Am. Soc. Civil Eng., Vol.114, No.ST5, (1988), 1135.

## 第 2 章

### 動的信頼性評価への基本解法

- 2.1 非線形不規則振動解析法の特徴
- 2.2 統計的等価線形化手法による非線形構造系の不規則応答解析  
(平面応力場問題への適用)
- 2.3 統計的等価線形化手法による非線形構造系の不規則応答解析  
(多質点系モデルにおける定式化)
- 2.4 Fokker-Planck 法による非線形構造系の動的信頼性評価
- 2.5 まとめ

動的信頼性を評価するために必要となる応答統計量の理論的推定法、特に非線形構造系に対する不規則振動応答推定のための理論展開について述べる。



## 2.1 非線形不規則振動解析法の特徴

本節では動的信頼性を評価するために必要となる応答統計量の理論的推定法、特に非線形構造系に対する不規則振動応答推定法の各手法における特徴について述べる。

線形構造系に対する不規則振動応答推定法はほぼ手法が確立していること、動的信頼性問題では最大値応答や終局強度評価で非弾性挙動まで対象とせねばならない場合があること、更には現実の振動問題には非線形性を考慮せねば解決できない、あるいは精度良い評価ができないケースが多い、等の理由から本節では特に非線形構造系に限定してその応答推定法の種々の手法の特徴を述べる。

非線形構造系に対する不規則振動応答解析法として代表的なものには次の4つがある。

- ① モーダルアナリシスの応用
- ② 振動法
- ③ 統計的等価線形化手法
- ④ Fokker-Planck 法

モーダルアナリシスを応用した手法<sup>11)</sup>は確定入力に対する非線形構造系の応答推定問題でしばしば使用される手法、即ち線形項からのズレを外力とみなし反復計算を実施することにより収束解を求める方法を不規則振動解析に応用したものであるが、本手法は確定入力問題と同様に非線形性が小さい場合に限定されるものである。更にモーダルアナリシスであるから非線形項を無視した線形系については固有モードの存在を仮定していることになるが特に非線形項が減衰に関連している場合、線形系同様に減衰項の直交化には慎重な取り扱いが必要である。

振動法は非線形問題の代表的解法の一つとして以前より各分野で採用されている方法であり解を非線形パラメータで展開する法である。この手法を不規則振動応答解析に応用したものが本節での②としての振動法であるが<sup>[12]~[14]</sup>、①のモーダルアナリシス法同様に非線形性が小さい場合にのみ有効とされる手法である。

確定入力に対する等価線形化手法をそのまま不規則入力問題に適用したものが統計的等価線形化手法であり振動法と並ぶ代表的な非線形解析手法の一つであるが特に、

- i) 非線形性が大きい場合にも有効
- ii) 解析的取り扱いが容易
- iii) 入力の形に制約を受けない
- iv) 汎用性が高い

等の特徴を有するため現在まで種々の論文が発表されている<sup>[5]~[13]</sup>。しかし線形化するために原則として歪度やとがり度を求めることができず応答の高次モーメントを論ずる場合には問題となるケースが多い。

Fokker-Planck 法は不規則振動解析のみで使用される特殊な方法であり応答量をマルコフベクトル過程とみなすことにより物理現象を確率微分方程式系で表現して解を得る方法である。この手法は入力の形に制限を受けるがガウス過程入力に対する応答解析については唯一の厳密解を与えることが知られている。また

- i) 非線形性の形にほとんど制限を受けない
- ii) 応答統計量の算出にあたって、Duhamel 積分を実行する必要がないため数値計算が比較的楽である
- iii) 確率微分方程式を介して力学系の統計量を推定するので疲労評価等に必要となる確率密度の情報を得ることができる

等の特徴を有するため理論解の導出が煩雑となる場合もあるにもかかわらず種々の解析例が報告されている<sup>[14]~[19]</sup>。

以上4つの方法についてその特徴を述べたが、特に非線形構造系に対する不規則振動解析においては①②の方法は非線形性が小さい場合にのみ有効であること、一方動的信頼性問題では最大値応答や終局強度評価の様に非線形性が大きい場合も取り扱う可能性が高いことを考え、本論文では統計的等価線形化手法とFokker-Planck法を採用することとした。

## 2.2 統計的等価線形化手法による非線形構造系の不規則応答解析 (平面応力場問題への適用)

本節では非線形構造系不規則応答問題への統計的等価線形化手法の応用として平面応力場問題への適用について述べる。

### (1) 有限要素法における定式化

任意形状の平面応力場問題を取り扱うには有限要素法（以下FEMと略す）は有力なツールでありこのため本節でもFEMをベースとした定式化を行う。また非線形性としては弾塑性特性を対象とする。

FEMにより弾塑性構造問題を解析する際の手法としては、使用する構成方程式の形により全ひずみ理論とひずみ増分理論<sup>120)</sup>の2つがある。後者の方法は近年前者の方法より多用される傾向にあり確定入力に対してはより簡単に応答量を求めることができる。しかし不確定入力に対する不規則振動応答を統計的等価線形化手法を用いて解析しようとする場合には増分形式の表現では定式化が困難となる。このため本論文では全ひずみ理論による定式化を行う。

全ひずみ理論を採用する際には構成方程式の選定が問題となる。すなわち不規則振動解析に適した構成方程式の表現を選定しなければならないが、特に統計的等価線形化手法の使用を念頭に置いた時、最適と思われる構成方程式が見当たらない。このため弾塑性挙動を示し得る新たな構成式を、Boucにより提案され<sup>121)</sup>後に Wen により一般化された1次元ヒステリシス復元力モデル<sup>122)</sup>を参考に仮定する。ただし本論文では精度が検証された構成式を新たに提案するものではない。すなわち本論文では弾塑性挙動を示す全ひずみ表現での構成方程式が与えられたとした場合に、それを用いて如何にして有限要素法の枠内で不規則振動応答の確率統計量を理論的に推定するかが命題であり構成方程式

自体の開発を目指すものではない。したがって本節で仮定する構成式については今後実験的並びに理論的に詳細な検討・評価、改良が行われるべきであることは言うまでもない。

線形平面応力場問題における応力/歪の関係式、及び Wen の 1 次元ヒステリシスモデル<sup>12,21</sup>を参考にしてヒステリシス特性を有する弾塑性平面応力問題における応力/歪の関係式を次の様に仮定する。

$$\eta_x = \frac{E_x}{1-\nu^2} [\alpha_x \dot{\epsilon}_x + (1-\alpha_x) Z_x(\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_{xy})] + \frac{E_x \nu_y}{1-\nu^2} \dot{\epsilon}_y \\ + s_1 Z_y(\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_{xy}) + s_2 Z_{xy}(\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_{xy}) \quad (2.1)$$

$$\eta_y = \frac{E_y}{1-\nu^2} [\alpha_y \dot{\epsilon}_y + (1-\alpha_y) Z_y(\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_{xy})] + \frac{E_x \nu_y}{1-\nu^2} \dot{\epsilon}_x \\ + s_1 Z_x(\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_{xy}) + s_3 Z_{xy}(\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_{xy}) \quad (2.2)$$

$$\eta_{xy} = G_{xy} [\alpha_{xy} \dot{\epsilon}_{xy} + (1-\alpha_{xy}) Z_{xy}(\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_{xy})] \\ + s_2 Z_x(\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_{xy}) + s_3 Z_y(\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_{xy}) \quad (2.3)$$

ここで  $\eta$ ,  $\epsilon$  及び  $Z$  は各々露率変数としての応力, 歪及び非線形性を表わす補助変数を示している。更に  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $s$  はパラメータであるが特に系が線形であれば  $E$  及び  $\nu$  は各々ヤング率, ポアソン比に等しい。また  $\nu' = \nu_y \sqrt{E_x/E_y}$  である。(2.1) ~ (2.3) 式における添字としての  $x$ ,  $y$ ,  $xy$  は  $x$  軸,  $y$  軸及び剪断の各方向に関係した量であることを示す。

補助変数を規定する補助方程式の形としては同じく Wen のモデルを参考に次の表現を類推, 仮定する。

$$\dot{Z}_x(\cdot) = A_{x1} \dot{\epsilon}_x - \beta_{x1} |Z_x(\cdot)|^{n_{x1}-1} Z_x(\cdot) - \tau_{x1} \dot{\epsilon}_x |Z_x(\cdot)|^{n_{x1}} \\ + C_{x2} \dot{\epsilon}_y + k_{x2} Z_y(\cdot) + C_{x3} \dot{\epsilon}_{xy} + k_{x3} Z_{xy}(\cdot) \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}\dot{Z}_y(\cdot) = & A_{y2}\dot{\varepsilon}_y - B_{y2}|\dot{\varepsilon}_y||Z_y(\cdot)|^{n_{y2}-1} Z_y(\cdot) - \tau_{y2}\dot{\varepsilon}_y|Z_y(\cdot)|^{n_{y2}} \\ & + C_{y1}\dot{\varepsilon}_x + k_{y1}Z_x(\cdot) + C_{y3}\dot{\varepsilon}_{xy} + k_{y3}Z_{xy}(\cdot)\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}\dot{Z}_{xy}(\cdot) = & A_{xy2}\dot{\varepsilon}_{xy} - B_{xy2}|\dot{\varepsilon}_{xy}||Z_{xy}(\cdot)|^{n_{xy2}-1} Z_{xy}(\cdot) - \tau_{xy2}\dot{\varepsilon}_{xy}|Z_{xy}(\cdot)|^{n_{xy2}} \\ & + C_{xy1}\dot{\varepsilon}_x + k_{xy1}Z_x(\cdot) + C_{xy2}\dot{\varepsilon}_y + k_{xy2}Z_y(\cdot)\end{aligned}\quad (2.6)$$

ここで $Z_i(\cdot)$  ( $i=x, y, xy$ ) は $\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y$  及び $\dot{\varepsilon}_{xy}$  の関数としての $Z_i$ を示し、 $A_i, B_i, \tau_i, n_i, C_i$  及び $k_i$  は非線形性を特徴づけるパラメータである。

(2.4) ~ (2.6) 式で補助変数が記述される場合の構成方程式(2.1)~(2.3)式は一種の非線形粘弾性モデルを表わしているものと解釈できる。このモデルの代表例を付録2.1に示す。

本節で考える非線形性は材料非線形性のみに限定しておりこのため歪/変位関係については線形構造系と同様な関係が成立するものと仮定する。すなわち変位関数として線形関数を採用できるものとする。

ここでは三角形要素による定式化を行うことにし、変位関数としてはもっとも簡単な1次関数

$$\left. \begin{aligned}u &= a_1 + a_2x + a_3y \\ v &= a_4 + a_5x + a_6y\end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

を仮定する。ここで $u, v$  は任意点における $x, y$  方向の変位を示し $a_1 \sim a_6$  はパラメータを表わしている。(2.7) 式を各要素の節点変位にも適用することにより節点変位と任意点の変位間の関係が次の様に得られる。

$$f = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = [N] \delta_i^e \quad (2.8)$$



ここで

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta}, \quad N_j = \frac{a_j + b_j x + c_j y}{2\Delta}, \quad N_k = \frac{a_k + b_k x + c_k y}{2\Delta} \\ a_i &= x_j y_k - x_k y_j, \quad a_j = x_k y_i - x_i y_k, \quad a_k = x_i y_j - x_j y_i \\ b_i &= y_j - y_k, \quad b_j = y_k - y_i, \quad b_k = y_i - y_j \\ c_i &= x_k - x_j, \quad c_j = x_i - x_k, \quad c_k = x_j - x_i \end{aligned} \right\} (2.9)$$

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

でありまた  $\{\delta\}^e$  は要素で定義されている量であることを示している。

(2.8) (2.9) 両式より歪/変位関係が次の様に得られる。

$$\left\{ \begin{matrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{matrix} \right\} \quad (2.10)$$

$$= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{matrix} \right\} \equiv [B] \{\delta\}^e$$

## (2) 統計的等価線形化手法<sup>123)</sup>

(2.4) ~ (2.6) 式を直接に解くことは極めて困難であり、このため統計的等価線形化手法を用いてこれらの式を近似化する。

統計的等価線形化手法としてもっとも一般的な方法は Atalik ら<sup>112)</sup>が行っている様に構造系全体について線形化による誤差の2乗平均値を最小とする様

に係数を決めることであるが本節でのFEMをベースとした展開ではこの方法を採用することは困難である。なぜなら Atalik らの方法では等価線形化を行う前にシステム全体の非線形関数の形が既知であることが必要であるが、一方FEMではその手法上有限要素への離散化、全体マトリックスへの組立と進むため有限要素の離散化の段階で等価線形化を実行せねばならぬそのため等価線形化を行う時点ではまだ全体システムの運動方程式が得られておらず全体システムについて2乗平均誤差を最小とすることができないためである。

以上の理由により本節では等価線形化の方法として各エレメント毎に単独に線形近似化を行い、得られるパラメータの妥当性については収束判定の規準にシステム全体の応答量を同時に考慮することで結果的にはシステム全体がバランスのとれた(各エレメント毎の)最適パラメータを選定できる様工夫した。

(2.4) ~ (2.6) 式の線形化表現を以下の様に仮定する。

$$\dot{Z}_x = C_{x1} \dot{\varepsilon}_x + k_{x1} Z_x + C_{x2} \dot{\varepsilon}_y + k_{x2} Z_y + C_{x3} \dot{\varepsilon}_{xy} + k_{x3} Z_{xy} \quad (2.11)$$

$$\dot{Z}_y = C_{y2} \dot{\varepsilon}_y + k_{y2} Z_y + C_{y1} \dot{\varepsilon}_x + k_{y1} Z_x + C_{y3} \dot{\varepsilon}_{xy} + k_{y3} Z_{xy} \quad (2.12)$$

$$\dot{Z}_{xy} = C_{xy3} \dot{\varepsilon}_{xy} + k_{xy3} Z_{xy} + C_{xy1} \dot{\varepsilon}_x + k_{xy1} Z_x + C_{xy2} \dot{\varepsilon}_y + k_{xy2} Z_y \quad (2.13)$$

ここで(2.4) ~ (2.6) 式で用いられた  $Z_i(\cdot)$  の表現は便宜上  $Z_i$  と省略化している。線形化するために求めるべきパラメータは  $C_{x1}$ ,  $C_{y2}$ ,  $C_{xy3}$ ,  $k_{x1}$ ,  $k_{y2}$ ,  $k_{xy3}$  の6個であり、これらは2乗平均誤差を最小にするという条件を記述する(2.14) (2.15) 式を解くことにより得られる。

$$-\frac{\partial}{\partial C_i} E[|A_i \dot{\varepsilon}_i - \beta_i \dot{\varepsilon}_i| |Z_i|^{n_i-1} Z_i - \gamma_i \dot{\varepsilon}_i |Z_i|^{n_i} - C_i \dot{\varepsilon}_i - k_i Z_i]^2 = 0 \quad (2.14)$$

$$-\frac{\partial}{\partial k_i} E[|A_i \dot{\varepsilon}_i - \beta_i \dot{\varepsilon}_i| |Z_i|^{n_i-1} Z_i - \gamma_i \dot{\varepsilon}_i |Z_i|^{n_i} - C_i \dot{\varepsilon}_i - k_i Z_i]^2 = 0 \quad (2.15)$$

すなわち  $C_i$ ,  $k_i$  ( $i=x_1, y_2, xy_3$ ) は、

$$C_i = A_i - \beta_i \frac{(\sigma_{Z_i}^2 F_1 - \kappa_{k_i} Z_i F_2)}{(\sigma_{\dot{\varepsilon}_i}^2 \sigma_{Z_i}^2 - \kappa_{k_i}^2 Z_i)} - \gamma_i \frac{(\sigma_{Z_i}^2 F_2 - \kappa_{k_i} Z_i F_4)}{(\sigma_{\dot{\varepsilon}_i}^2 \sigma_{Z_i}^2 - \kappa_{k_i}^2 Z_i)} \quad (2.16)$$

$$k_i = -\beta_i \frac{(\sigma_{k_i}^2 F_3 - \kappa_{k_i} z_i F_1)}{(\sigma_{k_i}^2 \sigma_{z_i}^2 - \kappa_{k_i}^2 z_i)} - \gamma_i \frac{(\sigma_{k_i}^2 F_4 - \kappa_{k_i} z_i F_2)}{(\sigma_{k_i}^2 \sigma_{z_i}^2 - \kappa_{k_i}^2 z_i)} \quad (2.17)$$

となる。ここで  $\sigma_{k_i}^2$ ,  $\sigma_{z_i}^2$  及び  $\kappa_{k_i} z_i$  は各々  $\dot{\epsilon}_i$ ,  $Z_i$  の分散値, 共分散値を示し, また  $F_1 \sim F_4$  は次式で定義される量である。

$$F_1 = E [\dot{\epsilon}_i | \dot{\epsilon}_i | | Z_i |^{n_i-1} Z_i] \quad (2.18)$$

$$F_2 = E [\dot{\epsilon}_i^2 | Z_i |^{n_i}] \quad (2.19)$$

$$F_3 = E [|\dot{\epsilon}_i| | Z_i |^{n_i-1} Z_i^2] \quad (2.20)$$

$$F_4 = E [\dot{\epsilon}_i Z_i | Z_i |^{n_i}] \quad (2.21)$$

次に (2.18) ~ (2.21) 式を具体的に求める。今  $\dot{\epsilon}_i$  と  $Z_i$  は結合ガウス分布している確率変数であると仮定するとその結合確率密度関数  $f(\dot{\epsilon}_i, Z_i)$  は

$$f(\dot{\epsilon}_i, Z_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_{k_i}\sigma_{z_i}\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(\dot{\epsilon}_i - E[\dot{\epsilon}_i])^2}{\sigma_{k_i}^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2\rho(\dot{\epsilon}_i - E[\dot{\epsilon}_i])(Z_i - E[Z_i])}{\sigma_{k_i}\sigma_{z_i}} + \frac{(Z_i - E[Z_i])^2}{\sigma_{z_i}^2} \right] \right\} \quad (2.22)$$

ただし,

$$\rho = \frac{\kappa_{k_i} z_i}{\sigma_{k_i} \sigma_{z_i}}$$

で表わされるのでこれを用いて定義に従い (2.18) ~ (2.21) 式を実際に計算 ( $\dot{\epsilon}_i$  と  $Z_i$  の平均値は 0 と仮定) すると  $n_i$  が整数の場合には次の様な解析的表現が得られる。

(i)  $n_i = 2m \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$

$$\begin{aligned}
 F_1 = & \frac{\sigma_{k_1}^2 \sigma_{z_1}^2 (1-\rho^2)^{\frac{2m+1}{2}} m!}{\pi \rho^{2m+1}} \\
 & + \frac{\mathcal{H} \sigma_{k_1}^2 (1-\rho^2) (2m-1)!!}{\pi \sigma_{z_1}} \left\{ \sum_{r=0}^m \frac{(m-r)! \sigma_{z_1}^{2r}}{(2m-2r+1)!! \left( \xi_1^2 + \frac{1}{2\sigma_{z_1}^2} \right)^{m-r+1}} + \mathcal{H} \sigma_{z_1}^{2m+1} \tan^{-1} \left( \mathcal{H} \sigma_{z_1} \xi_1 \right) \right\} \\
 & + \frac{\mathcal{H} \sigma_{k_1} \rho^2 (2m+1)!!}{\pi \sigma_{z_1}^3} \left\{ \sum_{r=0}^{m+1} \frac{(m-r+1)! \sigma_{z_1}^{2r}}{(2m-2r+3)!! \left( \xi_1^2 + \frac{1}{2\sigma_{z_1}^2} \right)^{m-r+2}} + \mathcal{H} \sigma_{z_1}^{2m+3} \tan^{-1} \left( \mathcal{H} \sigma_{z_1} \xi_1 \right) \right\} \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

$$F_2 = \frac{\sigma_{k_1}^2 \sigma_{z_1}^2 (1+2\rho^2) (2m)!}{2^m m!} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned}
 F_3 = & \frac{\sigma_{k_1}^2 \sigma_{z_1}^2 (1-\rho^2)^{m+1} m!}{\pi \sqrt{1-\rho^2}} \\
 & + \frac{\mathcal{H} \sigma_{k_1} \rho (2m+1)!!}{\pi \sigma_{z_1}} \left\{ \sum_{r=0}^{m+1} \frac{(m-r+1)! \sigma_{z_1}^{2r}}{(2m-2r+3)!! \left( \xi_1^2 + \frac{1}{2\sigma_{z_1}^2} \right)^{m-r+2}} + \mathcal{H} \sigma_{z_1}^{2m+3} \tan^{-1} \left( \mathcal{H} \sigma_{z_1} \xi_1 \right) \right\} \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

$$F_4 = \frac{\sigma_{k_1} \sigma_{z_1}^{2m+1} \rho (2m+1)!}{2^m m!} \quad (2.26)$$

(ii)  $n_i = 2m + 1 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$

$$\begin{aligned}
 F_1 = & \frac{\sigma_{k_1}^2 \sigma_{z_1}^2 (1-\rho^2)^{m+2} (2m+1)!}{\sqrt{2\pi} 2^m \rho^{2m+1} m!} \\
 & + \frac{\sigma_{k_1}^2 \sigma_{z_1}^2 (1-\rho^2) (2m+1)!}{\sqrt{2\pi} 2^{m-1}} \left\{ \sum_{r=0}^m \frac{(-1)^r}{r!(m-r)!(2r+1)} \left( \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \frac{1}{2\sigma_{z_1}^2}}} \right)^{2r+1} + \right. \\
 & \left. + \frac{\sigma_{k_1}^2 \sigma_{z_1}^2 \rho^2 (2m+3)!}{\sqrt{2\pi} 2^m} \left\{ \sum_{r=0}^{m+1} \frac{(-1)^r}{r!(m-r+1)!(2r+1)} \left( \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \frac{1}{2\sigma_{z_1}^2}}} \right)^{2r+1} + \right. \right. \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

$$F_2 = \frac{2^{m+1} \sigma_{k_1}^2 \sigma_{z_1}^2 (2m^2 + \rho^2 + 1) m!}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.28)$$

$$F_2 = \frac{\sigma_{k_i} \sigma_{z_i}^{2m+2} (1-\rho^2)^{m+2} (2m+1)!}{\sqrt{2\pi} 2^{m+1} m!} - \frac{\sigma_{k_i} \sigma_{z_i}^{2m+2} \rho (2m+3)!}{\sqrt{2\pi} 2^m} \left[ \sum_{r=0}^{m+1} \frac{(-1)^{r+1}}{r!(m-r+1)!(2r+1)} \left( \frac{\xi_i}{\sqrt{\xi_i^2 + \frac{1}{2\sigma_{z_i}^2}}} \right)^{2r+1} \right] \quad (2.29)$$

$$F_k = \frac{2^{m+2} \sigma_{k_i} \sigma_{z_i}^{2m+2} \rho (m+1)!}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.30)$$

ここで

$$\xi_i = \frac{\rho}{\sqrt{2} \sigma_{z_i} \sqrt{1-\rho^2}} \quad , \quad m! = 1, 2, 3, \dots, m \quad 0! = 1$$

$$m!! = \begin{cases} m(m-2)(m-4) \cdots 3 \cdot 1 & m : \text{奇数} \\ m(m-2)(m-4) \cdots 4 \cdot 2 & m : \text{偶数} \end{cases}$$

$$0!! = (-1)!! = 1$$

である。

故に以上の関係を (2.16) (2.17) 両式に代入することにより、非線形平面応力場問題における線形化した構成方程式を補助方程式を付加した形で次の様に求めることができる。

$$\{\dot{\eta}\} = [D_L] \{\dot{\varepsilon}\} + [D_N] \{\dot{Z}\} \quad (2.31)$$

$$\{\dot{Z}\} = [C_e] \{\dot{\varepsilon}\} + [K_e] \{\dot{Z}\} \quad (2.32)$$

ところで

$$\left. \begin{aligned}
 \{\eta\} &= \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{Z\} = \begin{Bmatrix} Z_x \\ Z_y \\ Z_{xy} \end{Bmatrix} \\
 [h] &= \frac{E_x}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} e_x & \nu_y & 0 \\ \nu_x & \frac{E_y}{E_x} e_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_{xy} e_{xy} (1-\nu^2)}{E_x} \end{bmatrix}, \quad [h_0] = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \begin{bmatrix} (1-\nu_0) & s_1 & s_2 \\ s_1 & \frac{E_0}{E_x} (1-\nu_0) & s_3 \\ s_2 & s_3 & \frac{G_{xy} (1-\nu_0)}{E_x} (1-\nu_0^2) \end{bmatrix} \\
 [C_e] &= \begin{bmatrix} c_{x1} & c_{x2} & c_{x3} \\ c_{y1} & c_{y2} & c_{y3} \\ c_{xy1} & c_{xy2} & c_{xy3} \end{bmatrix}, \quad [K_e] = \begin{bmatrix} k_{x1} & k_{x2} & k_{x3} \\ k_{y1} & k_{y2} & k_{y3} \\ k_{xy1} & k_{xy2} & k_{xy3} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

### (3) 要素剛性方程式の統合

本節ではFEMの基礎となるエネルギー原理として仮想仕事の原理を採用する。これは仮想仕事の原理が本節で対象とする様な材料非線形問題に対して有効であると考えられることと、本節で提案する統計的等価線形手法の方法論をもっとも無理なく受け入れられる原理であるためである。

等価節点力  $\{F\}^e$  は次の仮想仕事の原理より導かれる。

$$\langle d\{\delta\}^T \rangle^T \{F\}^e = \iint \langle d\{\varepsilon\}^T \rangle h t dx dy - \iint \langle d\{f\}^T \rangle \{P_b\} t dx dy \quad (2.34)$$

ここで  $\{P_b\}$  は単位体積当りの物体力を示し、 $t$  は板厚、 $T$  は転置であることを表わしている。



もし初期の応力と歪を考え更に両者の関係は線形であると仮定できる場合には (2.31) 式は次式の様に書き改められる。

$$\{ \eta \} = [D_L] \{ \varepsilon \} + [D_N] \{ Z \} - [D] \{ \varepsilon_0 \} + \{ \eta_0 \} \quad (2.35)$$

(2.8), (2.10) 及び (2.35) 式を (2.34) 式に代入することにより等価節点力の形は

$$\begin{aligned} \{ F \}^e = & \iint [B]^T [D_L] [B] \{ \delta \}^e t dx dy + \iint [B]^T [D_N] \{ Z \} t dx dy \\ & - \iint [B]^T [D] \{ \varepsilon_0 \} t dx dy + \iint [B]^T \{ \eta_0 \} t dx dy - \iint [N]^T \{ P_b \} t dx dy \end{aligned} \quad (2.36)$$

となる。変位関数は線形一次を仮定しているので  $[B]$  及び歪は要素内で一定である。故に歪速度の関数としてのベクトル  $\{ Z \}$  も要素内で一定となる。この様なケースの場合には (2.36) 式は簡略化され次の通りとなる。

$$\{ F \}^e = [K]^e \{ \delta \}^e + [G]^e \{ Z \}^e + \{ F_{\varepsilon_0} \}^e + \{ F_{\eta_0} \}^e + \{ F_{P_b} \}^e \quad (2.37)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} [K]^e &= \iint [B]^T [D_L] [B] t dx dy = t \Delta [B]^T [D_L] [B] \\ [G]^e &= \iint [B]^T [D_N] t dx dy = t \Delta [B]^T [D_N] \\ \{ F_{\varepsilon_0} \}^e &= -t \iint [B]^T [D] \{ \varepsilon_0 \} dx dy \\ \{ F_{\eta_0} \}^e &= t \iint [B]^T \{ \eta_0 \} dx dy \\ \{ F_{P_b} \}^e &= -t \iint [N]^T \{ P_b \} dx dy \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

一方、(2.37) 式において初期の応力、歪更には物体力が考慮されない場合の等価節点力は次式の様になる。

$$\{ F \}^e = [K]^e \{ \delta \}^e + [G]^e \{ Z \}^e \quad (2.39)$$

要素毎の剛性方程式を全体システムとして統合するために(2.39)式における要素ベクトルの成分を以下の様に拡張定義する。

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \vdots \\ X_i \\ Y_i \\ \vdots \\ X_j \\ Y_j \\ \vdots \\ X_k \\ Y_k \\ \vdots \\ X_N \\ Y_N \end{Bmatrix}^e, \quad \{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_i \\ v_i \\ \vdots \\ u_j \\ v_j \\ \vdots \\ u_k \\ v_k \\ \vdots \\ u_N \\ v_N \end{Bmatrix}^e, \quad \{Z\}^e = \begin{Bmatrix} Z_{x1} \\ Z_{y1} \\ Z_{xy1} \\ \vdots \\ Z_{xi} \\ Z_{yi} \\ Z_{xyi} \\ \vdots \\ Z_{xL} \\ Z_{yL} \\ Z_{xyL} \end{Bmatrix}^e \quad (2.40)$$

前式におけるL, Nは各々要素及び節点の総数を表わす。

力のつり合い条件より節点力の合計は作用する外力とバランスしているので

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \vdots \\ X_N \\ Y_N \end{Bmatrix}^1 + \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \vdots \\ X_N \\ Y_N \end{Bmatrix}^2 + \cdots + \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \vdots \\ X_N \\ Y_N \end{Bmatrix}^L \quad (2.41)$$

となりこれよりシステム全体の剛性方程式は以下の形で表現される。

$$\{F\} = [K]\{\delta\} + [G]\{Z\} \quad (2.42)$$

ただし

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \vdots \\ X_N \\ Y_N \end{Bmatrix}, \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_N \\ v_N \end{Bmatrix}, \quad \{Z\} = \begin{Bmatrix} Z_{x1} \\ Z_{y1} \\ Z_{xy1} \\ \vdots \\ Z_{xL} \\ Z_{yL} \\ Z_{xyL} \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{1,1} & \cdots & k_{1,2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{2N,1} & \cdots & k_{2N,2N} \end{bmatrix}, \quad [G] = \begin{bmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{1,3L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{2N,1} & \cdots & g_{2N,3L} \end{bmatrix}$$

#### (4) 補助方程式の統合

(2.42) 式には補助変数ベクトル  $\{Z\}$  を含んでいるため (2.42) 式のみでは解を得ることはできず補助方程式の追加が必要であるが、これは (2.32) 式を用いることにより得られる。

すなわち (2.10) 式を (2.32) 式に代入することにより要素での  $\{Z\}^e$  と  $\{\delta\}^e$  の関係が得られる。

$$\{Z\}^e = [H]^e \{\delta\}^e + [K_e]^e \{Z\}^e \quad (2.44)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \{Z\}^e &= \begin{Bmatrix} Z_x \\ Z_y \\ Z_{xy} \end{Bmatrix}^e, \quad \{Z\}^e = \begin{Bmatrix} Z_x \\ Z_y \\ Z_{xy} \end{Bmatrix}^e, \quad \{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}^e \\ [K_e]^e &= \begin{bmatrix} k_{x1} & k_{x2} & k_{x3} \\ k_{y1} & k_{y2} & k_{y3} \\ k_{xy1} & k_{xy2} & k_{xy3} \end{bmatrix}^e \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned}
 \{H\}^e &= [C_e]^e [B]^e = \frac{1}{2\Delta}{}^e \begin{bmatrix} C_{x1} & C_{x2} & C_{x3} \\ C_{y1} & C_{y2} & C_{y3} \\ C_{xy1} & C_{xy2} & C_{xy3} \end{bmatrix}{}^e \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}{}^e \\
 &= \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{31} & \cdots & h_{36} \end{bmatrix}{}^e
 \end{aligned}$$

要素毎の補助方程式を全体システムへ統合する方法は剛性方程式の時に用いた方法とまったく同じである。すなわち(2.44)式での要素内で定義されているベクトル及びマトリックスを全体システムで再定義して全要素について重ね合わせるにより全体システムにおける補助方程式が以下の様に導かれる。

$$\{\dot{Z}\} = [H]\{\dot{\delta}\} + [K_e]\{Z\} \quad (2.46)$$

ここで

$$\begin{aligned}
 \{Z\} &= \begin{Bmatrix} Z_{x1} \\ Z_{y1} \\ Z_{xy1} \\ \vdots \\ Z_{xL} \\ Z_{yL} \\ Z_{xyL} \end{Bmatrix}, \quad \{\dot{\delta}\} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_N \\ \dot{v}_N \end{Bmatrix} \\
 [H] &= \begin{bmatrix} h_{1,1} & \cdots & h_{1,2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{3L,1} & \cdots & h_{3L,2N} \end{bmatrix}, \quad [K_e] = \begin{bmatrix} ke_{1,1} & \cdots & ke_{1,3L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ke_{3L,1} & \cdots & ke_{3L,3L} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (2.47)$$

# ⑤ 全体運動方程式

動的問題を解析する場合には慣性力の効果を考慮する必要がある。FEMにおいては慣性力のベースとなる質量マトリックスの構成の方法により lumped mass 法と consistent mass 法の2通りがあるが本節では平面応力場問題を対象としていることを考慮して後者の方法を採用する。すなわち要素における consistent mass マトリックス  $[M]^e$  は良く知られている様に

$$[M]^e = \rho_0 t \iint [N]^T [N] dx dy = \frac{\rho_0 t \Delta}{3} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

の形で表わされる。ここで  $\rho_0$  は対応する要素での質量密度を示す。全体システムでの質量マトリックスの構築は剛性マトリックスの場合とまったく同様にして実現できる。故に全体システムにおける慣性力は次の形で示される。

$$\{Q\} = -[M]\{\ddot{\delta}\} \quad (2.49)$$

ここで

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_{2N} \end{Bmatrix}, \quad \{\ddot{\delta}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \\ \ddot{v}_1 \\ \vdots \\ \ddot{v}_N \end{Bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,2N} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{2N,1} & \cdots & m_{2N,2N} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

(2.42) (2.46) (2.49) 式を考慮し、更に反力も含んだ形で外力ベクトル  $\{P\}$  を仮定することにより基本的な運動方程式が導出される。

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\dot{\delta}\} + [G]\{Z\} = \{P\} \quad (2.51)$$

$$\{\dot{Z}\} = [H]\{\dot{\delta}\} + [K_e]\{Z\} \quad (2.52)$$

ただし、(2.51) (2.52) 両式は反力を含んだ形となっており、必要な境界条件処理を終了した形のものでない。これを実施するために (2.51) (2.52) 式を

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \{Z\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_0 \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

$$\{\dot{Z}\} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_0 \end{Bmatrix} + [K_e]\{Z\} \quad (2.54)$$

ここで

$\{\delta_1\}$  : 未知変位に関するベクトル

$\{\delta_0\}$  : 既知変位に関するベクトル

$\{P_1\}$  : 既知外力に関するベクトル

$\{P_0\}$  : 未知外力に関するベクトル

の様な形で区分することにより以下の2つの方程式群に分割する。

$$(i) \begin{cases} [M_{11}]\{\ddot{\delta}_1\} + [K_{11}]\{\dot{\delta}_1\} + [G_1]\{Z\} = \{P_1\} - [M_{12}]\{\ddot{\delta}_0\} - [K_{12}]\{\dot{\delta}_0\} & (2.55) \\ \{ \dot{Z} \} = [H_1]\{\dot{\delta}_1\} + [H_2]\{\dot{\delta}_0\} + [K_e]\{Z\} & (2.56) \end{cases}$$

$$(ii) [M_{21}]\{\ddot{\delta}_1\} + [M_{22}]\{\ddot{\delta}_0\} + [K_{21}]\{\dot{\delta}_1\} + [K_{22}]\{\dot{\delta}_0\} + [G_2]\{Z\} = \{P_0\} \quad (2.57)$$



(2.55) (2.56) 両式が境界条件処理を施した解析すべき運動方程式群である。  
未知数としての反力は (2.55) (2.56) 式を解いて得られる  $\{\dot{\delta}_i\}$ ,  $\{\delta_i\}$ ,  $\{Z\}$   
を (2.57) 式の左辺に代入することで得られる。

解析を既知変位量が0, すなわち相当する節点は固定点と考える様なケース  
に限定する時には, (2.55)~(2.57) 式はより簡単な表現となる。

$$(i) \begin{cases} [M_{11}]\{\dot{\delta}_i\} + [K_{11}]\{\delta_i\} + [G_1]\{Z\} = \{P_1\} & (2.58) \\ \{Z\} = [H_1]\{\dot{\delta}_i\} + [K_e]\{Z\} & (2.59) \end{cases}$$

$$(ii) [M_{21}]\{\dot{\delta}_i\} + [K_{21}]\{\delta_i\} + [G_2]\{Z\} = \{P_0\} \quad (2.60)$$

更に (2.58) ~ (2.60) 式において添字を省略し, ヒステリシスによる減衰効果  
以外の減衰項を (将来の拡張を考慮して) 形式的に付加することにより最終  
的な運動方程式群が以下の様に得られる。

$$[M]\{\dot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} + [G]\{Z\} = \{P\} \quad (2.61)$$

$$\{Z\} = [H]\{\dot{\delta}\} + [K_e]\{Z\} \quad (2.62)$$

ここで

$$\begin{aligned} \{\delta\} &= \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{NN} \end{Bmatrix}, \quad \{Z\} = \begin{Bmatrix} Z_{x1} \\ Z_{y1} \\ Z_{xy1} \\ \vdots \\ Z_{xL} \\ Z_{yL} \\ Z_{xyL} \end{Bmatrix}, \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_{NN} \end{Bmatrix} \\ [M] &= \begin{bmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,NN} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{NN,1} & \cdots & m_{NN,NN} \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,NN} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{NN,1} & \cdots & c_{NN,NN} \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} k_{1,1} & \cdots & k_{1,NN} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{NN,1} & \cdots & k_{NN,NN} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{1,2L} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{NN,1} & \cdots & g_{NN,2L} \end{bmatrix} \quad [H] = \begin{bmatrix} h_{1,1} & \cdots & h_{1,NN} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{2L,1} & \cdots & h_{2L,NN} \end{bmatrix} \quad [K_e] = \begin{bmatrix} ke_{1,1} & \cdots & ke_{1,2L} \\ \vdots & & \vdots \\ ke_{2L,1} & \cdots & ke_{2L,2L} \end{bmatrix}$$

なお(2.63)式におけるNNは未知変数の数を表わしており、故に(2N-NN)が固定点の自由度の数を示していることになる。

#### (6) 状態空間での定式化による応答量の推定法

不規則振動解析においては応答の共分散値を求めることがその解析での中心課題となる場合が多い。この共分散値を求める場合の有力な方法の一つに状態空間表示による遷移行列法がある。本項ではこの方法に従う場合の応答共分散値導出のための定式化を行う。

(2.61)式における外力ベクトル $\{P\}$ 成分はすべて不規則荷重であるものと考え更にそれらの値は(2.64)式で示される様に、ガウシアンホワイトノイズに振幅非定常性を考慮するエンベロープ関数 $\psi(t)$ をかけたものを入力する1質点系の応答値として定義されるものと仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{P}_1 + 2\zeta_1 \omega_{01} \dot{P}_1 + \omega_{01}^2 P_1 &= \psi_1(t) w_1(t) \\ \ddot{P}_2 + 2\zeta_2 \omega_{02} \dot{P}_2 + \omega_{02}^2 P_2 &= \psi_2(t) w_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{P}_{NN} + 2\zeta_{NN} \omega_{0NN} \dot{P}_{NN} + \omega_{0NN}^2 P_{NN} &= \psi_{NN}(t) w_{NN}(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

(2.64)式におけるガウシアンホワイトノイズ $\{W(t)\} = \{w_1(t), \dots, w_{NN}(t)\}^T$ は次の様な特性を有するものとする。

$$E[W(t)] = \{0\} \quad (2.65)$$

$$E[W(t) W(t+\tau)^T] = 2\pi\delta(\tau) \begin{bmatrix} S_{01} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & S_{0NN} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

ここで次の様な状態ベクトル  $\{Q\}$  を定義すれば

$$\{Q\} = \{P_1 \ P_2 \ \cdots \ P_{NN} \mid \dot{P}_1 \ \dot{P}_2 \ \cdots \ \dot{P}_{NN}\}^T \quad (2.67)$$

(2.64) 式は以下の様に表現される。

$$\dot{Q}(t) = A_Q Q(t) + B_Q(t) W(t) \quad (2.68)$$

ただし

$$A_Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & -\omega_{0NN} \end{bmatrix}, \quad B_Q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

一方 (2.61) (2.62) 式における変数についても次式の様に状態ベクトル  $\{X\}$  でとりまとめることにより

$$\{X\} = \{\delta_1 \ \cdots \ \delta_{NN} \mid \dot{\delta}_1 \ \cdots \ \dot{\delta}_{NN} \mid Z_{x1} \ \cdots \ Z_{xYL}\}^T \quad (2.70)$$

(2.61) (2.62) 両式を次の様に表わすことができる。

$$\dot{X}(t) = A_X X(t) + P_X(t) \quad (2.71)$$

ここで

$$A_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[c] & -[M]^{-1}[G] \\ 0 & [H] & [Ke] \end{bmatrix}, \quad P_x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ [M]^{-1}\{P\} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

更に  $\{X\}$ ,  $\{Q\}$  を用いて新たな状態ベクトル  $\{Y\}$  を

$$\{Y\} = \begin{bmatrix} X \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \dots & \delta_{NN} \\ \dot{\delta}_1 & \dots & \dot{\delta}_{NN} \\ Z_{x1} & \dots & Z_{xNL} \\ P_1 & \dots & P_{NN} \\ \dot{P}_1 & \dots & \dot{P}_{NN} \end{bmatrix}^T \quad (2.73)$$

の様に定義し、(2.67) 式と (2.72) 式を結合することにより最終的な状態空間での表示式が以下の形で求められる。

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = A_Y Y(t) + B_Y(t) W_Y(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases} \quad (2.74)$$

$$(2.75)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} A_Y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[c] & -[M]^{-1}[G] & [M]^{-1} & 0 \\ 0 & [H] & [Ke] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & [A_1] & [A_2] \end{bmatrix} & B_Y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & [B_1] \end{bmatrix} \\ W_Y(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ W(t) \end{bmatrix} & [A_1] &= \begin{bmatrix} -\omega_1^2 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & -\omega_{NN}^2 \end{bmatrix} \\ [A_2] &= \begin{bmatrix} -2\zeta_1 \omega_{\theta 1} & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & -2\zeta_{NN} \omega_{NN} \end{bmatrix} & [B_1] &= \begin{bmatrix} \phi_1(t) & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \phi_{NN}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

方程式 (2.74) 式の解は状態遷移行列  $\Phi(t, x)$  を用いて次式で表わされる (2.74)。

$$Y(t) = \Phi(t, t_0) Y_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B_Y(x) W_Y(x) dx \quad (2.77)$$

ところで状態ベクトル  $\{Y\}$  に関する共分散マトリックス  $[S]$  は定義より

$$[S(t)] = E\{\{Y(t) - E[Y(t)]\} \{Y(t) - E[Y(t)]\}^T\} \quad (2.78)$$

であるから (2.77) 式を上式に代入することにより状態遷移行列を含んだ形で共分散マトリックスが表現される。

$$[S(t)] = \Phi(t, t_0) [S(t_0)] \Phi(t, t_0)^T + \int_{t_0}^t \Phi(t, x) B_Y(x) E[W_Y(x) W_Y(x)^T] B_Y(x)^T \Phi(t, x)^T dx \quad (2.79)$$

ここで  $[S(t_0)]$  は初期状態での共分散マトリックスを示し、

一方  $E[W_Y(x) W_Y(x)^T]$  は (2.66) 式より

$$E[W_Y(x) W_Y(x)^T] = 2\pi \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} S_{01} & 0 \\ 0 & S_{0NN} \end{matrix} \end{bmatrix} \equiv F_Y \quad (2.80)$$

である。

状態遷移行列に関する次の様な関係

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) &= A_Y \Phi(t, t_0) \\ \Phi(t_0, t_0) &= I \quad (\text{単位マトリックス}) \end{aligned} \right\} \quad (2.81)$$

を考慮し、(2.79) 式を  $t$  について微分することにより共分散マトリックスに

関する微分方程式を以下の様に得る。

$$\begin{aligned} [\dot{S}(t)] = & A_Y \Phi(t, t_0) [S(t_0)] \Phi(t, t_0)^T + \Phi(t, t_0) [S(t_0)] \Phi(t, t_0)^T A_Y^T \\ & + B_Y(t) F_Y B_Y(t)^T + \int_{t_0}^t A_Y \Phi(t, x) B_Y(x) F_Y B_Y(x)^T \Phi(t, x)^T dx \\ & + \int_{t_0}^t \Phi(t, x) B_Y(x) F_Y B_Y(x)^T \Phi(t, x)^T A_Y^T dx \end{aligned} \quad (2.82)$$

故に (2.79) 式を (2.82) 式に代入することで共分散マトリックスを求めるための最終的な微分方程式が次式の通りに導出される。

$$[\dot{S}(t)] = A_Y [S(t)] + [S(t)] A_Y^T + B_Y(t) F_Y B_Y(t)^T \quad (2.83)$$

上式の行列微分方程式を実際に解くことにより非定常の共分散値を得ることができる。

#### (7) 複素モーダルアナリシスによる応答量の推定法

前項では遷移行列法による定式化を行ったが、実際に (2.83) 式を解くに際しては対象とする行列の大きさが数値計算上問題となる。すなわち本節で取り扱っている FEM の如く自由度が膨大なものとなると数値計算上 (2.83) 式を解くことは極めて困難となる。このため本項では遷移行列法に代わり大次元問題に対しても数値計算上解析可能である複素モーダルアナリシス<sup>125)</sup>による定式化を行う。

(2.61) (2.62) 式を次の様な 1 階の微分方程式に変換する。

$$\bar{A} \dot{\bar{X}} + \bar{B} \bar{X} = \bar{P} \quad (2.84)$$



ただし

$$\begin{aligned} \vec{X} = \begin{Bmatrix} \vec{\phi}_1 \\ \vec{\phi}_{NN} \\ \vec{\phi}_1 \\ \vec{\phi}_{NN} \\ \vec{Z}_{KL} \\ \vec{Z}_{KVL} \end{Bmatrix}, \quad \vec{P} = \begin{Bmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_{NN} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \vec{A} = \begin{bmatrix} [C] & [M] & 0 \\ [M] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} [K] & 0 & [G] \\ 0 & [M] & 0 \\ 0 & [H] & [K_e] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.85)$$

(2.84) 式に対する固有振動問題

$$\vec{A}\vec{X} + \vec{B}\vec{X} = 0 \quad (2.86)$$

の*i*次モードの解を

$$\vec{X} = \{\phi\}_i e^{\lambda_i t} \quad (2.87)$$

と仮定し、上式を(2.86)式に代入することにより固有値方程式が導かれる。

$$\lambda_i \vec{A}\{\phi\}_i + \vec{B}\{\phi\}_i = 0 \quad (2.88)$$

上式で $\lambda_i$ ,  $\{\phi\}_i$ は各々*i*次における複素固有値, 複素固有ベクトルを示すが, 更に $\{\phi\}$ で構成される複素モードマトリックス $\{\Phi\}$ を次の様に定義しておく。

$$\{\Phi\} = [\{\phi\}_1, \dots, \{\phi\}_M] = [\{\phi\}_1, \dots, \{\phi\}_{M1} \mid \{\phi\}_{M1+1}, \dots, \{\phi\}_{M1+M2} \mid \{\phi\}_{M1+M2+1}, \dots, \{\phi\}_{M1+M2+M2}]$$

(2.89)

← 複素共役

ただし

$M (= NN + NN + 3L)$  :  $\vec{A}$  or  $\vec{B}$  の次元サイズ

$M1$  : 実固有値の数

$2 \times M2 (= M - M1)$  : 複素固有値の数

ところで複素固有値問題では(2.88)式に対応して次式で示される左固有値方程式が存在している。

$$\lambda_i \tilde{A} \{\psi\}_i + \tilde{B} \{\psi\}_i = 0 \quad (2.90)$$

上式中  $\{\psi\}_i$  は  $i$  次モードにおける複素固有ベクトルであり、 $\{\Phi\}$  と同様モードマトリックス  $\{\Psi\}$  を次式の様に定義しておく。

$$\{\Psi\} = [\{\psi\}_1, \dots, \{\psi\}_M] \quad (2.91)$$

(2.90) 式で表わされる左固有値問題では  $\tilde{A}$  及び  $\tilde{B}$  が対称行列でない限りモードマトリックス  $\{\Psi\}$  は  $\{\Phi\}$  に一致しないが、 $\tilde{A}$  及び  $\tilde{B}$  の対称性にかかわらず固有値は(2.88)式と(2.90)式で一致するという特徴を有している。その両者共通の固有値を用いて

$$\{\Lambda\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_M \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

なるマトリックス  $\{\Lambda\}$  を導入すれば、(2.88) (2.90) 式をまとめて全体の固有値方程式を以下の形に整理できる。

$$\tilde{A} \{\Phi\} \{\Lambda\} + \tilde{B} \{\Phi\} = 0 \quad (2.93)$$

$$\tilde{A}^T \{\Psi\} \{\Lambda\} + \tilde{B}^T \{\Psi\} = 0 \quad (2.94)$$

(2.93) 式の両辺に前から  $\tilde{A}^{-1}$  をかけ、続いて前後から  $\{\Phi\}^{-1}$  をかけることにより

$$\{\Lambda\} \{\Phi\}^{-1} + \{\Phi\}^{-1} \tilde{A}^{-1} \tilde{B} = 0 \quad (2.95)$$

あるいは

$$\{\Lambda\}[\tilde{A}\{\Phi\}]^{-1}\tilde{A} + [\tilde{A}\{\Phi\}]^{-1}\tilde{B} = 0 \quad (2.96)$$

となるが、この(2.96)式と(2.94)式の転置をとった

$$\{\Lambda\}\Psi\{\tilde{A}\}^T + \{\Psi\}\{\tilde{B}\}^T = 0 \quad (2.97)$$

の形を比較することにより

$$[\tilde{A}\{\Phi\}]^{-1} = \{\Psi\}^T \quad (2.98)$$

が導かれる。更に上式の両辺に後から $[\tilde{A}\{\Phi\}]$ をかけることで $\tilde{A}$ に関する直交性が示される。

$$\{\Psi\}\{\tilde{A}\{\Phi\}\}^T = \mathbb{I} \quad (2.99)$$

他方(2.93)式の両辺に前から $\{\Psi\}^T$ をかけ(2.99)式を利用することにより $\tilde{B}$ に関する直交性が導出される。

$$\{\Psi\}\{\tilde{B}\{\Phi\}\}^T = -\{\Lambda\} \quad (2.100)$$

次に過渡応答を求める。応答ベクトル $\tilde{X}$ は通常のモーダルアナリシス同様にモーダルマトリックス $\{\Phi\}$ と時間依存ベクトル $\tilde{Y}$ の積として

$$\tilde{X} = \{\Phi\}\tilde{Y} \quad (2.101)$$

で表わせるものと仮定する。この時(2.101)式を(2.84)式に代入し、前から $\{\Psi\}^T$ をかけ更に(2.99)(2.100)式の関係を利用することにより $\tilde{Y}$ についての1階微分方程式が次の様に求められる。

$$\dot{\tilde{Y}} - \{\Lambda\}\tilde{Y} = \{\Psi\}^T \tilde{P} \quad (2.102)$$

前式を成分単位で書くと

$$\dot{y}_i - \lambda_i y_i = \{\phi\}_i^T \tilde{P} \quad (2.103)$$

でありこの解は良く知られている様に

$$y_i = e^{\lambda_i t} \int_0^t \{\phi\}_i^T \tilde{P} e^{-\lambda_i \tau} d\tau + e^{\lambda_i t} y_i(0) \quad (2.104)$$

である。上式での $y_i(0)$ は初期値を示している。

ここで次の様な複素共役固有値を含む一組の方程式を考える。

$$\begin{cases} \dot{y}_{M1+k} - \lambda_{M1+k} y_{M1+k} = \{\phi\}_{M1+k}^T \tilde{P} \end{cases} \quad (2.105)$$

$$\begin{cases} \dot{y}_{(M1+M2)+k} - \lambda_{(M1+M2)+k} y_{(M1+M2)+k} = \{\phi\}_{(M1+M2)+k}^T \tilde{P} \end{cases} \quad (2.106)$$

(2.105) 式の解は (2.104) 式を参照として

$$y_{M1+k} = e^{\lambda_{M1+k} t} \int_0^t \{\phi\}_{M1+k}^T \tilde{P} e^{-\lambda_{M1+k} \tau} d\tau + e^{\lambda_{M1+k} t} y_{M1+k}(0) \quad (2.107)$$

となる。次に (2.105) 式の複素共役をとると

$$\dot{y}_{M1+k}^* - \lambda_{M1+k}^* y_{M1+k}^* = \{\phi\}_{M1+k}^{*T} \tilde{P} \quad (2.108)$$

となる (\*は複素共役であることを示す) が、上式は (2.89) 式での添字を考慮すれば (2.106) 式に完全に一致していることがわかる。故に (2.101) 式における $j$ 番目の応答値 $x_j$ は

$$\begin{aligned} x_j &= \cdots + \phi_{j, M1+k} y_{M1+k} + \cdots + \phi_{j, (M1+M2)+k} y_{(M1+M2)+k} + \cdots \\ &= \cdots + \phi_{j, M1+k} y_{M1+k} + \cdots + \phi_{j, M1+k}^* y_{M1+k}^* + \cdots \\ &= \cdots + 2\text{Re}[\phi_{j, M1+k} y_{M1+k}] + \cdots \end{aligned} \quad (2.109)$$

となっている。なお上式での  $\text{Re}[\ ]$  は複素数の実部であることを示す。

(2.109) 式をまとめると

$$x_i = \sum_{k=1}^{M1} \phi_{j,k} y_k + 2 \sum_{k=1}^{M2} \text{Re}[\phi_{j,M1+k} y_{M1+k}] \quad (2.110)$$

の形になる。(2.110) 式における  $y_i$  の値は (2.104) 式で示されるがこの中には基準座標系における初期値  $y_i(0)$  が含まれている。一方通常の初期値は物理座標系での値  $x_i(0)$  として与えられるので  $x_i(0)$  を用いて  $y_i(0)$  を表現する必要がある。これは (2.99) 及び (2.101) 式から次の様に容易に求めることができる。

$$\tilde{y}_0 = \{ \Psi \}^T \tilde{A} \tilde{x}_0 \quad (2.111)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y}_0 &= \{ y_1(0), y_2(0), \dots, y_M(0) \}^T \\ \tilde{x}_0 &= \{ x_1(0), x_2(0), \dots, x_M(0) \}^T \end{aligned} \right\} \quad (2.112)$$

である。

応答計算時に必要となる基本的な分散値及び共分散値は以下の4種類の量である。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\delta_n}^2, \quad \sigma_{kPe}^2, \quad \sigma_{2Pe}^2, \quad \sigma_{kPe}^2 z_{Pe} \\ n=1, 2, \dots, NN \\ P=x, y, xy \\ e=\text{要素番号} \end{aligned} \right\} \quad (2.113)$$

すなわち  $\sigma_{\delta_n}^2$  は反復計算における収束判定の評価に用いられ、残りは (2.16) (2.17) 式を計算するために必要である。これらの値は共分散マトリックスに

において図2.1の様な斜線の領域を計算することにより得られる。

ところで外力ベクトル $\bar{P}$ の平均値及び初期値ベクトル $\bar{V}_0$ が0である場合には(2.110)式より応答量の平均値も0となることがわかるが、本項ではこのような応答量の平均値が0のケースについてのみ以下定式化を進める。

$\sigma_{\delta_n}^2$ 及び $\sigma_{z_{pe}}^2$ は図2.1の共分散マト

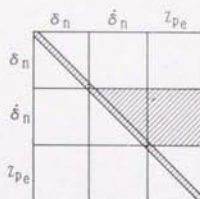


図2.1 共分散マトリックス

リックスの計算により直接求められるが $\sigma_{k_{pe}}^2$ 及び $\kappa_{k_{pe}z_{pe}}$ については直接求めることができないため若干の追加計算が必要となる。すなわち以下の様なベクトルを定義し、

$$\left. \begin{aligned} \{\hat{\delta}\}_e &= \{u_{ie}, v_{ie}, u_{ie}, v_{ie}, u_{ke}, v_{ke}\}^T \\ \{\hat{Z}\}_e &= \{Z_{xe}, Z_{ye}, Z_{xye}\}^T \\ \{\hat{V}\}_e &= \{\dot{\hat{\epsilon}}\}_e^T, \{\hat{Z}\}_e^T \end{aligned} \right\} \quad (2.114)$$

ただし

$$\{\dot{\hat{\epsilon}}\}_e^T = \{\dot{\epsilon}_{xe}, \dot{\epsilon}_{ye}, \dot{\epsilon}_{xye}\} \quad (2.115)$$

更に(2.10)式の関係を考慮すれば、 $\{\hat{V}\}_e$ に関する共分散マトリックスが

$$E[\{\hat{V}\}_e \{\hat{V}\}_e^T] = \begin{bmatrix} [B]E[\{\hat{\delta}\}_e \{\hat{\delta}\}_e^T][B]^T & [B]E[\{\hat{\delta}\}_e \{\hat{Z}\}_e^T] \\ E[\{\hat{Z}\}_e \{\hat{\delta}\}_e^T][B]^T & E[\{\hat{Z}\}_e \{\hat{Z}\}_e^T] \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

の形で得られることになるが、(2.116)式右辺は図2.1の共分散マトリックスが求められればすべて既知となる量であるため、これより $\sigma_{k_{pe}}^2$ 及び $\kappa_{k_{pe}z_{pe}}$ も求められたことになる。

応力に関する共分散マトリックスは、応力ベクトル

$$\{\hat{n}\}_e = \{n_{xe}, n_{ye}, n_{xye}\}^T \quad (2.117)$$

に対して (2.10) (2.31) 及び (2.33) 式を利用することで次の様に求まる。

$$\begin{aligned} E[\{\hat{n}\}_e \{\hat{n}\}_e^T] &= [D_L][B]E[\{\hat{\sigma}\}_e \{\hat{\sigma}\}_e^T][B]^T[D_L]^T + [D_L][B]E[\{\hat{\sigma}\}_e \{\hat{z}\}_e^T][D_N]^T \\ &\quad + [D_N]E[\{\hat{z}\}_e \{\hat{\sigma}\}_e^T][B]^T[D_L]^T + [D_N]E[\{\hat{z}\}_e \{\hat{z}\}_e^T][D_N]^T \end{aligned} \quad (2.118)$$

上式右边に存在する共分散マトリックスはすべて図2.1の共分散マトリックスに含まれているものであるからこれより応力の共分散マトリックスは完全に決まることになる。

実際に応答の共分散マトリックスを計算するためには最終的には以下の3つの値を求めることに帰着する。

(i) 全量がすべて実数の項

$$E[\sigma_{j,x} y_{j,k} \times \sigma_{j,k} y_{j,k}] \quad (2.119)$$

(ii)  $\sigma_{j,x}, y_{j,k}$  が実数他は複素数の項

$$E[\sigma_{j,x} y_{j,k} \times \text{Re}\{\sigma_{j,M+K} y_{M+K}\}] \quad (2.120)$$

(iii) 全量がすべて複素数の項

$$E[\text{Re}\{\sigma_{j,M+K} y_{M+K}\} \times \text{Re}\{\sigma_{j,M+K} y_{M+K}\}] \quad (2.121)$$

以上の量を (2.104) 式を用いてより具体的に表現すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} (i) &= \sigma_{j,x} \sigma_{j,k} E[y_{j,k} y_{j,k}] \\ &= \sigma_{j,x} \sigma_{j,k} e^{(i\lambda_x + i\lambda_k)t} \left[ \int_0^t \int_0^t \sum_{m,n} \psi_{m,x} \psi_{n,k} E[P_m(t_1) P_n(t_2)] e^{-\lambda_x t_1} e^{-\lambda_k t_2} dt_1 dt_2 \right. \\ &\quad \left. + E[y_{j,x}(0) y_{j,k}(0)] \right] \end{aligned} \quad (2.122)$$



$$\begin{aligned}
 (i) &= \text{Re} \{ \phi_{i, \lambda} \phi_{j, M1+k} E[y_{\lambda}(t_2) y_{M1+k}(t_2)] \} \\
 &= \text{Re} \{ \phi_{i, \lambda} \phi_{j, M1+k} e^{(\lambda_{\lambda} + \lambda_{M1+k})t_1} \left[ \int_0^{t_1} \sum_{\alpha=0}^{\alpha} \sum_{\beta=0}^{\beta} \phi_{\alpha, \lambda} \phi_{\beta, M1+k} E[P_{\alpha}(t_1) P_{\beta}(t_2)] \right] \right. \\
 &\quad \left. \times e^{-\lambda_{\lambda} t_1} e^{-\lambda_{M1+k} t_2} dt_1 dt_2 + E[y_{\lambda}(0) y_{M1+k}(0)] \right\} \quad (2.123)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (ii) &= E \left\{ \frac{1}{2} \text{Re} \{ \phi_{i, M1+\lambda} \phi_{j, M1+k} y_{M1+\lambda} y_{M1+k} \} + \frac{1}{2} \text{Re} \{ \phi_{i, M1+\lambda} \phi_{j, M1+k} y_{M1+\lambda}^* y_{M1+k}^* \} \right\} \\
 &= \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} \phi_{i, M1+\lambda} \phi_{j, M1+k} e^{(\lambda_{M1+\lambda} + \lambda_{M1+k})t_1} \left[ \int_0^{t_1} \sum_{\alpha=0}^{\alpha} \sum_{\beta=0}^{\beta} \phi_{\alpha, M1+\lambda} \phi_{\beta, M1+k} E[P_{\alpha}(t_1) P_{\beta}(t_2)] \right] \right. \\
 &\quad \left. \times e^{-\lambda_{M1+\lambda} t_1} e^{-\lambda_{M1+k} t_2} dt_1 dt_2 + E[y_{M1+\lambda}(0) y_{M1+k}(0)] \right\} \\
 &\quad + \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} \phi_{i, M1+\lambda}^* \phi_{j, M1+k}^* e^{(\lambda_{M1+\lambda}^* + \lambda_{M1+k}^*)t_1} \left[ \int_0^{t_1} \sum_{\alpha=0}^{\alpha} \sum_{\beta=0}^{\beta} \phi_{\alpha, M1+\lambda}^* \phi_{\beta, M1+k}^* E[P_{\alpha}(t_1) P_{\beta}(t_2)] \right] \right. \\
 &\quad \left. \times e^{-\lambda_{M1+\lambda}^* t_1} e^{-\lambda_{M1+k}^* t_2} dt_1 dt_2 + E[y_{M1+\lambda}^*(0) y_{M1+k}^*(0)] \right\} \quad (2.124)
 \end{aligned}$$

ここで仮に初期値が 0 でなく初期値ベクトルに対する共分散マトリックスも必要な場合には (2.111) 式を利用することにより

$$E[\tilde{y}_0 \tilde{y}_0^T] = \phi \{^T \tilde{\Lambda} E[\tilde{x}_0 \tilde{x}_0^T] \tilde{\Lambda}^T\} \phi \quad (2.125)$$

の形で評価することができるので、物理座標系における初期値ベクトルの共分散値  $E[\tilde{x}_0 \tilde{x}_0^T]$  がインプットとして与えられれば  $E[\tilde{y}_0 \tilde{y}_0^T]$  が求められる。

以上の定式化により外力の相互相関関数  $E[P_{\alpha}(t_1) P_{\beta}(t_2)]$  が与えられれば非定常関数としての (2.122) ~ (2.124) 式が求められ、この結果応答量の非定常共分散値が得られることになる。

(8) 耐震問題への応用

例題として図2.2の様な地震入力を受ける耐震壁の動的問題をとり上げる。この例は平面応力場問題の一つと考えられ、これを複素モーダルアナリシスにより解析する。

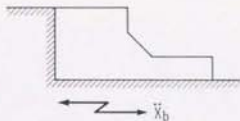


図2.2 平面応力場問題の例

図2.2の例題に対する運動方程式は(2.61)(2.62)式を参考にして以下の様になる。

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} + [G]\{Z\} = -[M]\{E_c\}\ddot{x}_b \quad (2.126)$$

$$\{\dot{Z}\} = [H]\{\dot{\delta}\} + [K_e]\{Z\} \quad (2.127)$$

ここで  $\{\delta\}$  は相対変位ベクトル、 $\ddot{x}_b$  は地動加速度、 $\{E_c\}$  は入力方向を示す単位ベクトルであり、また  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$ ,  $[G]$ ,  $[H]$  及び  $[K_e]$  マトリックスについては(2.63)式と同様である。

$\ddot{x}_b$  については次の様な形を仮定する。

$$\ddot{x}_b(t) = f(t)\ddot{x}_g(t) \quad (2.128)$$

上式で  $\ddot{x}_g$  は金井／田治見スペクトルを有する定常確率過程、 $f(t)$  は振幅非定常性を示す確定関数(すなわちエンベロープ関数)でその形は

$$f(t) = \frac{(e^{-at} - e^{-bt})}{\max[(e^{-at} - e^{-bt})]} \quad (2.129)$$

で表わされるものとする。

入力  $\ddot{x}_b(t)$  が非定常確率過程であるから応答の振幅レベルも時間依存となりこのため等価線形化係数も時間と共に変化することになる。本項ではこの間

題に対処するため定常とみなせる微小時間間隔 $\Delta t$ 毎に反復計算を行い $\Delta t$ 内の一定値として等価線形化係数，更には応答量を求める様にした。

(2.126) (2.127) 式の運動方程式を (2.84) 式と同様 1 階の微分方程式に変換する。

$$\bar{A}\bar{X} + \bar{B}\bar{U} = \bar{P} \quad (2.130)$$

ただし

$$\bar{P} = -\bar{M}\bar{E}_c\bar{x}_0, \quad \bar{M} = \begin{bmatrix} [M] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{E}_c = \begin{bmatrix} [E_c] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.131)$$

であり他のベクトル及びマトリックスについては (2.85) 式とまったく同一である。このため (2.130) 式の固有値問題は (2.84) 式のそれと同じものとなり，この結果 (2.93) ~ (2.100) 式の関係はそのまま本例題でも成立することになる。

$t=t_0$  での値を初期値とする  $t=t_0+\Delta t$  における  $j$  番目の変数の動的応答値  $x_j$  は (2.110) 及び (2.104) 式を用いて次式で表わされる。

$$\begin{aligned} x_j &= \sum_{s=1}^{M1} \phi_{j,s} \int_0^{\Delta t} \{ \phi_{j,s}^T \bar{P} e^{s_{j,s}(\Delta t-t')} dt' + e^{s_{j,s}\Delta t} y_{j,s}(t_0) \} \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{M2} \text{Re} \{ \phi_{j,M1+k} \int_0^{\Delta t} \{ \phi_{j,M1+k}^T \bar{P} e^{s_{j,M1+k}(\Delta t-t')} dt' + e^{s_{j,M1+k}\Delta t} y_{j,M1+k}(t_0) \} \} \\ &= - \sum_{s=1}^{M1} \phi_{j,s} \{ f(t_0 + \frac{\Delta t}{2}) \} \phi_{j,s}^T \bar{M} \bar{E}_c \int_0^{\Delta t} x_s(t') e^{s_{j,s}(\Delta t-t')} dt' - e^{s_{j,s}\Delta t} y_{j,s}(t_0) \} \\ &- 2 \sum_{k=1}^{M2} \text{Re} \{ \phi_{j,M1+k} \{ f(t_0 + \frac{\Delta t}{2}) \} \phi_{j,M1+k}^T \bar{M} \bar{E}_c \int_0^{\Delta t} x_s(t') e^{s_{j,M1+k}(\Delta t-t')} dt' - e^{s_{j,M1+k}\Delta t} y_{j,M1+k}(t_0) \} \} \end{aligned} \quad (2.132)$$

(2.132) 式は実数部の計算と複素数計算部が混在しておりこのことは電算機処理を行う場合不便である。このため実数の値も以下の様に形式上複素数とみなす。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\phi}_{j,a} &= \frac{\phi_{j,a}}{2} + 0i \\ \langle \tilde{\phi} |_a^T &= \langle \phi |_a^T + 0^T i \\ \tilde{\lambda}_a &= \lambda_a + 0i \end{aligned} \right\} \quad (2.133)$$

上式で記号 $\sim$ は実数値を形式上複素数とみなしたものであることを示す。この時 (2.132) 式は次の様により簡単な表現となる。

$$x_j = -2 \sum_{k=1}^{M/2} \text{Re}[\phi_{j,k} f(t_0 + \frac{\Delta t}{2})] \phi_{jk}^T \tilde{H} \tilde{E}_c \int_0^{\Delta t} x_k(t') e^{i k (\Delta t - t')} dt' - e^{i k \Delta t} y_k(t_0) i \quad (2.134)$$

(M/2=M1+M2)

(2.134) 式における  $\langle \phi |_k^T \tilde{H} \tilde{E}_c$  の項は実モーダルアナリシスにおける刺激係数に相当するものであるが、ここでは複素数となるため実モーダルアナリシスでの値とは完全には一致しない。そこで実モーダルアナリシスと一対一で対応づけるため本項では次式で定義する量を複素モーダルアナリシスでの刺激係数と呼ぶことにする。

$$D_k = |\langle \phi |_k^T \tilde{H} \tilde{E}_c| = \sqrt{\{\text{Re}[\langle \phi |_k^T \tilde{H} \tilde{E}_c]\}^2 + \{\text{Im}[\langle \phi |_k^T \tilde{H} \tilde{E}_c]\}^2} \quad (2.135)$$

上式に従えば  $\langle \phi |_k^T \tilde{H} \tilde{E}_c$  が実数の場合には (2.135) 式で求められる値は実モーダルアナリシスでの刺激係数に完全に一致することになる。したがって  $\langle \phi |_k^T \tilde{H} \tilde{E}_c$  が実数、複素数の違いによらず (2.135) 式で定義される  $D_k$  値を指標とすることにより (実モーダルアナリシスと同じ感覚で) 解析に必要なモードを選定することができる。

(2.135) 式を用いて解析に必要とするモードを実数について M1 個、複素数について M2 個選定したと仮定すれば (2.134) 式は次の様になる。

$$x_i = -2 \sum_{k=1}^{MD} R_{0i}[\theta_{i,k}] f(t_0 + \frac{\Delta t}{2}) | \phi |_{ik}^T \frac{1}{ME_C} \int_0^{\Delta t} \bar{x}_g(t') e^{\lambda_k(\Delta t - t')} dt' - e^{\lambda_k \Delta t} y_k(t_0) | \quad (2.136)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} MD &= MD1 + MD2 \\ 0 &\leq MD1 \leq M1 \\ 0 &\leq MD1 \leq M1 \end{aligned} \right\} \quad (2.137)$$

応答の分散，共分散値を求めるためには，応答量の平均値を 0 とした場合 (2.136) 式より次の統計量を評価することになる。

$$\begin{aligned} \kappa_{x_i x_j} = E[x_i x_j] &= 4 \sum_{k=1}^{MD} \sum_{l=1}^{MD} E \left[ R_{0i}[\theta_{i,k}] f(t_0 + \frac{\Delta t}{2}) | \phi |_{ik}^T \frac{1}{ME_C} \int_0^{\Delta t} \bar{x}_g(t_1) e^{\lambda_k(\Delta t - t_1)} dt_1 - e^{\lambda_k \Delta t} y_k(t_0) | \right. \\ &\quad \left. \times R_{0j}[\theta_{j,l}] f(t_0 + \frac{\Delta t}{2}) | \phi |_{jl}^T \frac{1}{ME_C} \int_0^{\Delta t} \bar{x}_g(t_2) e^{\lambda_l(\Delta t - t_2)} dt_2 - e^{\lambda_l \Delta t} y_l(t_0) | \right] \quad (2.138) \end{aligned}$$

(2.138) 式において初期値  $y_k(t_0)$  と入力加速度  $\bar{x}_g(t)$  の関係について考えてみる。初期値  $y_k(t_0)$  は  $t=t_0$  における値であり，一方  $\bar{x}_g(t)$  は  $t_0 < t < t_0 + \Delta t$  における値であることから両者の相関は小さいものと考えられ，これを省略することによれば (2.138) 式は次の様に変形できる。

$$\begin{aligned} \kappa_{x_i x_j} &= 4 f(t_0 + \frac{\Delta t}{2}) \sum_{k=1}^{MD} \sum_{l=1}^{MD} E[R_{0i}[\theta_{i,k}] | \phi |_{ik}^T \frac{1}{ME_C} \int_0^{\Delta t} \bar{x}_g(t_1) e^{\lambda_k(\Delta t - t_1)} dt_1 \\ &\quad \times R_{0j}[\theta_{j,l}] | \phi |_{jl}^T \frac{1}{ME_C} \int_0^{\Delta t} \bar{x}_g(t_2) e^{\lambda_l(\Delta t - t_2)} dt_2] + 4 \sum_{k=1}^{MD} \sum_{l=1}^{MD} E[R_{0i}[\theta_{i,k}] e^{\lambda_k \Delta t} y_k(t_0) | R_{0j}[\theta_{j,l}] e^{\lambda_l \Delta t} y_l(t_0)] \quad (2.139) \end{aligned}$$

上式の計算における解析上の中心は次式  $\bar{C}_{i,j,k,l}$  を求めることである。

$$\begin{aligned} \bar{C}_{i,j,k,l} &= E[f(t_0 + \frac{\Delta t}{2})]^2 R_{0i}[\theta_{i,k}] | \phi |_{ik}^T \frac{1}{ME_C} \int_0^{\Delta t} \bar{x}_g(t_1) e^{\lambda_k(\Delta t - t_1)} dt_1 \\ &\quad \times R_{0j}[\theta_{j,l}] | \phi |_{jl}^T \frac{1}{ME_C} \int_0^{\Delta t} \bar{x}_g(t_2) e^{\lambda_l(\Delta t - t_2)} dt_2 + R_{0i}[\theta_{i,k}] e^{\lambda_k \Delta t} y_k(t_0) | R_{0j}[\theta_{j,l}] e^{\lambda_l \Delta t} y_l(t_0) | \quad (2.140) \end{aligned}$$

$\hat{C}_{ijkA}$  を用いれば (2.139) 式は次の形で示される。

$$x_i x_j = 4 \sum_{k=1}^{MD} \sum_{A=1}^{MD} \hat{C}_{ijkA} \quad (2.141)$$

(2.140) 式は (2.124) 式を参照することにより以下の様に変形することができる。

$$\begin{aligned} \hat{C}_{ijkA} = & E \left[ \frac{1}{2} \left( f(t_0 + \frac{\Delta t}{2}) \right)^2 R_0 | \theta_{i,k} \theta_{j,A} | \phi'_{ik} \bar{\Psi}_{C1} | \phi'_{jk} \bar{\Psi}_{C1} \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \bar{x}_k(t_1) \bar{x}_A(t_2) e^{j\lambda_k(t-t_1)} \right. \\ & \times e^{j\lambda_A(t-t_2)} dt_1 dt_2 + \frac{1}{2} \left( f(t_0 + \frac{\Delta t}{2}) \right)^2 R_0 | \theta'_{i,k} \theta_{j,A} | \phi'_{ik} \bar{\Psi}_{C1} | \phi'_{jk} \bar{\Psi}_{C1} \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \bar{x}_k(t_1) \bar{x}_A(t_2) \\ & \times e^{j\lambda_k(t-t_1)} e^{j\lambda_A(t-t_2)} dt_1 dt_2 + \frac{1}{2} R_0 | \theta_{i,k} \theta_{j,A} | e^{j\lambda_k \Delta t} e^{j\lambda_A \Delta t} y_k(t_0) y_A(t_0) | \\ & + \frac{1}{2} R_0 | \theta'_{i,k} \theta_{j,A} | e^{j\lambda_k \Delta t} e^{j\lambda_A \Delta t} y_k(t_0) y_A(t_0) | \\ & = \frac{1}{2} R_0 | \theta_{i,k} \theta_{j,A} | \left( f(t_0 + \frac{\Delta t}{2}) \right)^2 | \phi'_{ik} \bar{\Psi}_{C1} | \phi'_{jk} \bar{\Psi}_{C1} | (\lambda_k, \lambda_A, \Delta t) + e^{j(\lambda_k + \lambda_A) \Delta t} E[y_k(t_0) y_A(t_0)] | \\ & + \frac{1}{2} R_0 | \theta'_{i,k} \theta_{j,A} | \left( f(t_0 + \frac{\Delta t}{2}) \right)^2 | \phi'_{ik} \bar{\Psi}_{C1} | \phi'_{jk} \bar{\Psi}_{C1} | (\lambda'_k, \lambda_A, \Delta t) + e^{j(\lambda'_k + \lambda_A) \Delta t} E[y_k(t_0) y_A(t_0)] | \end{aligned} \quad (2.142)$$

ただし

$$I(\lambda_k, \lambda_A, \Delta t) = \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} E[\bar{x}_k(t_1) \bar{x}_A(t_2)] e^{j\lambda_k(t-t_1)} e^{j\lambda_A(t-t_2)} dt_1 dt_2 \quad (2.143)$$

$$E[y_k(t_0) y_A(t_0)] = | \phi'_{ik} \bar{\Lambda} E[\bar{x}(t_0) \bar{x}^T(t_0)] \bar{\Lambda}^T | \phi'_{jk} \quad (2.144)$$

$$E[y'_k(t_0) y_A(t_0)] = | \phi'_{ik} \bar{\Lambda} E[\bar{x}(t_0) \bar{x}^T(t_0)] \bar{\Lambda}^T | \phi'_{jk} \quad (2.145)$$

(2.144) (2.145) 式は両式中含まれる  $E[\bar{x}(t_0) \bar{x}^T(t_0)]$  が一歩前のステップでの出力として既知量であることを考えれば容易に求められる値であることがわかる。故に (2.143) 式をいかに解くかが  $\hat{C}_{ijkA}$  計算時の中心となる。

$I(\lambda_k, \lambda_A, \Delta t)$  の値は  $E[\bar{x}_k(t_1) \bar{x}_A(t_2)]$  の項が解析的あるいは数値的に与えられれば計算できる。本項では  $\bar{x}_k(t)$  は定常確率過程と考えており、した

がって  $E[\bar{x}_g(t_1)\bar{x}_g(t_2)]$  は、時間差  $\tau (=t_1-t_2)$  のみの関数として以下の様に与えられる。

$$E[\bar{x}_g(t_1)\bar{x}_g(t_2)] = R_{\bar{x}_g}(t_1, t_2) = R_{\bar{x}_g}(t_1 - t_2) = R_{\bar{x}_g}(\tau) \quad (2.146)$$

上式で  $R_{\bar{x}_g}(\tau)$  はいわゆる自己相関関数と呼ばれるものであり、これは  $\bar{x}_g(t)$  のパワースペクトル密度  $S_{\bar{x}_g}(\omega)$  と次の関係にある。

$$R_{\bar{x}_g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\bar{x}_g}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.147)$$

(2.146) (2.147) 両式を (2.143) 式に代入し若干の演算を行うことにより

$$\begin{aligned} I(\lambda_k, \lambda_g, \Delta t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\bar{x}_g}(\omega) e^{i\lambda_k \Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{-(i\lambda_k - i\omega)t_1} dt_1 \int_0^{\Delta t} e^{i\lambda_g \Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{-(i\lambda_g + i\omega)t_2} dt_2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\bar{x}_g}(\omega) \frac{(e^{i\omega \Delta t} - e^{i\lambda_k \Delta t})(e^{-i\omega \Delta t} - e^{i\lambda_g \Delta t})}{(\lambda_k - i\omega)(\lambda_g + i\omega)} d\omega \end{aligned} \quad (2.148)$$

となる。上式中  $S_{\bar{x}_g}(\omega)$  の形としては本項では金井／田治見スペクトル<sup>[26]</sup>を仮定している。片側で定義される金井／田治見スペクトル  $G_{KT}(\omega)$  は

$$G_{KT}(\omega) = S_0 \frac{1 + 4\zeta_g^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2\right\}^2 + 4\zeta_g^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} \quad (2.149)$$

の形をしておりここで  $S_0$  は地震の強度を示し  $\omega_g$  及び  $\zeta_g$  は地盤特性を示すためのパラメータである。ところで (2.148) 式を計算する際、その積分領域を考慮すると対象とするパワースペクトル密度は両側で定義されているものの方が好都合である。このため  $S_{\bar{x}_g}(\omega)$  としては次式で定義される両側パワースペクトル密度を採用することとする。

$$S_{\bar{x}_g}(\omega) = \frac{G_{KT}(\omega)}{2} = \left(\frac{S_0}{2}\right) \frac{1 + 4\zeta_g^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2\right\}^2 + 4\zeta_g^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} \quad (2.150)$$



(2.150) 式を (2.148) 式に代入して

$$I(\lambda_k, \lambda_g, \Delta t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[1 + 4\zeta_g^2 (\frac{u}{u_g})^2] (e^{i\omega \Delta t} - e^{i\lambda_k \Delta t}) (e^{-i\omega \Delta t} - e^{i\lambda_g \Delta t})}{[1 - (\frac{u}{u_g})^2 + 4\zeta_g^2 (\frac{u}{u_g})^2] (\lambda_k - i\omega) (\lambda_g + i\omega)} du \quad (2.151)$$

となる。(2.151) 式は無限積分であるがこれは留数積分を実施することにより以下の様に求めることができる。

$$I(\lambda_k, \lambda_g, \Delta t) = 4\pi S_0 \zeta_g^2 \omega_g^2 i (B_{Z_5} + B_{Z_6}) \quad (2.152)$$

ここで

(i)  $\zeta_g \approx 1$  の場合

$$B_{Z_5} = \frac{(Z_5 - Z_1)(Z_5 - Z_2)(e^{i\Delta t Z_5} - e^{i\lambda_k \Delta t})(e^{-i\Delta t Z_5} - e^{i\lambda_g \Delta t})}{(Z_5 - Z_3)(Z_5 - Z_4)(Z_5 - Z_6)(Z_5 - Z_7)(Z_5 - Z_8)}$$

$$B_{Z_6} = \frac{(Z_6 - Z_1)(Z_6 - Z_2)(e^{i\Delta t Z_6} - e^{i\lambda_k \Delta t})(e^{-i\Delta t Z_6} - e^{i\lambda_g \Delta t})}{(Z_6 - Z_3)(Z_6 - Z_4)(Z_6 - Z_5)(Z_6 - Z_7)(Z_6 - Z_8)}$$

$$Z_1 = -(\frac{\omega_g}{2\zeta_g})i, Z_2 = (\frac{\omega_g}{2\zeta_g})i, Z_7 = -\lambda_k i \text{ and } Z_8 = \lambda_g i$$

$$\left. \begin{aligned} Z_3 &= \omega_g \sqrt{1 - \zeta_g^2} - \zeta_g \omega_g i, Z_4 = -\omega_g \sqrt{1 - \zeta_g^2} - \zeta_g \omega_g i \\ Z_5 &= \omega_g \sqrt{1 - \zeta_g^2} + \zeta_g \omega_g i, Z_6 = -\omega_g \sqrt{1 - \zeta_g^2} + \zeta_g \omega_g i \end{aligned} \right\} (0 < \zeta_g < 1)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_3 &= \omega_g (\sqrt{\zeta_g^2 - 1} - \zeta_g)i, Z_4 = -\omega_g (\sqrt{\zeta_g^2 - 1} + \zeta_g)i \\ Z_5 &= \omega_g (\sqrt{\zeta_g^2 - 1} + \zeta_g)i, Z_6 = -\omega_g (\sqrt{\zeta_g^2 - 1} - \zeta_g)i \end{aligned} \right\} (1 < \zeta_g)$$

(2.153)

(i)  $\zeta_g = 1$  の場合

$$B_{Z_5} = \frac{(Z_5 - Z_2)(e^{i\Delta t Z_5} - e^{i\lambda_k \Delta t})(e^{-i\Delta t Z_5} - e^{i\lambda_g \Delta t})}{(Z_5 - Z_3)^2 (Z_5 - Z_7)(Z_5 - Z_8)}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(Z_5 - Z_1) (e^{i\Delta t Z_5} - e^{i_k \Delta t}) (e^{-i\Delta t Z_5} - e^{i_k \Delta t})}{(Z_5 - Z_3)^2 (Z_5 - Z_7) (Z_5 - Z_8)} \\
& + \frac{(i\Delta t) (Z_5 - Z_1) (Z_5 - Z_2) \{ e^{i_k \Delta t Z_5} - e^{(i_k - i\Delta t) \Delta t} - e^{(i_k + i\Delta t) \Delta t} \}}{(Z_5 - Z_3)^2 (Z_5 - Z_7) (Z_5 - Z_8)} \\
& - \frac{2(Z_5 - Z_1) (Z_5 - Z_2) (e^{i\Delta t Z_5} - e^{i_k \Delta t}) (e^{-i\Delta t Z_5} - e^{i_k \Delta t})}{(Z_5 - Z_3)^3 (Z_5 - Z_7) (Z_5 - Z_8)} \\
& - \frac{(Z_5 - Z_1) (Z_5 - Z_2) (e^{i\Delta t Z_5} - e^{i_k \Delta t}) (e^{-i\Delta t Z_5} - e^{i_k \Delta t})}{(Z_5 - Z_3)^2 (Z_5 - Z_7)^2 (Z_5 - Z_8)} \\
& - \frac{(Z_5 - Z_1) (Z_5 - Z_2) (e^{i\Delta t Z_5} - e^{i_k \Delta t}) (e^{-i\Delta t Z_5} - e^{i_k \Delta t})}{(Z_5 - Z_3)^2 (Z_5 - Z_7) (Z_5 - Z_8)^2}
\end{aligned}$$

$$B_{26} = 0$$

$Z_1, Z_2, Z_7, Z_8$  の値は (i) と同様

$$Z_3 = -u_g i, \quad Z_4 = -u_g i, \quad Z_5 = u_g i, \quad Z_6 = u_g i$$

故に (2.152) 式を (2.142) 式に代入, (2.141) 式を考慮することにより応答量の分散及び共分散値を計算することができる。当然, 応力応答値の共分散マトリックスについても (2.118) 式を用いて算出することができる。

次に数値計算例について示す。

(ケース 1)<sup>12, 71</sup>

対象とするモデルは図 2.3 で示される 4 要素モデルである。入力振幅の非定常性を示すエンベロープ関数のパラメータとしては  $a=0.25, b=0.50$  を選んだ。この形は図 2.4 の通りである。計算に使用した諸定数は以下の通りであり他の値はすべて 0 としている。

$$S_0 = 1.7 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{sec}^2$$

$$u_g = 5.6 \text{ rad/sec}, \quad \zeta_g = 0.99, \quad \alpha_x = 0.05$$

$$\begin{aligned}
A_x &= 1.0, \quad \beta_x = 20.0, \quad \gamma_x = 20.0 \\
\alpha_x &= 1.0, \quad \alpha_y = 1.0, \quad \alpha_{xy} = 1.0 \\
E_x &= 2.06 \times 10^6 \text{ N/m}^2, \quad E_y = 2.06 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \\
\nu_{xy} &= 0.3, \quad G_{xy} = 7.92 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \\
\rho &= 1.08 \times 10^6 \text{ kg/m}^3
\end{aligned}$$

上記諸定数のうち  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $G_{xy}$  の値は一般の工業材料における物性値と比較すると小さいが、これは当該問題が材料非線形を取り扱うものであり非線形域での有用性を確認するため非線形性が大きい（すなわち応答変形量が大）となる様に物性値を想定したためである。

各時間ステップ毎に行う反復計算における収束判定のための規準として本項では次の関係式を採用した。

$$\frac{1}{NN} \sum_{n=1}^{NN} \left| \frac{\sigma_{\delta_n}^{(k)} - \sigma_{\delta_n}^{(k-1)}}{\sigma_{\delta_n}^{(k)}} \right| < \varepsilon_0 \quad (2.154)$$

ここで  $NN$  は未知変数の数、 $\sigma_{\delta_n}$  は  $n$  番目の変数  $\delta_n$  の標準偏差、添字  $(k)$  は  $k$  回目の反復計算値であることを示している。また収束判定値としては本計算では  $\varepsilon_0 = 0.05$  を用いている。

数値計算は6秒間について行った。計算結果の代表例として要素④の応力及び歪の非定常標準偏差を各々図2.5及び図2.6に示す。更に図中にはシミュレーションによる結果も載せているが、両者は良い一致を示しており本解析手法の妥当性が確認できたものとする。

## (ケース2)

計算対象は図2.7の様な20要素モデルである。エンベロップ関数としては  $a = 0.125$ ,  $b = 0.25$  で記述される図2.8の形のものをを用いた。使用した諸定数は以下の通りであり他の定数はすべて0としている。

$$\begin{aligned}
S_0 &= 1.7 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{sec}^3 \\
\omega_g &= 5.6 \text{ rad/sec}, \quad \zeta_g = 0.99, \quad \alpha_x = 0.05 \\
A_x &= 1.0, \quad \beta_x = 1.0, \quad \gamma_x = 1.0
\end{aligned}$$

$$\sigma_x=1.0, \quad \sigma_y=1.0, \quad \sigma_{xy}=1.0$$

$$E_x=2.06 \times 10^6 \text{ N/m}^2, \quad E_y=2.06 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$\nu_y=0.3, \quad G_{xy}=7.92 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$\rho=1.08 \times 10^6 \text{ kg/m}^3$$

数値計算は10秒間について行った。計算結果の代表例として要素⑩の応力成分の非定常標準偏差を各々図2.9及び図2.10に示す。本例では応答はいずれも単調に増加しているが、これは別途実施した線形域固有値解析より初期の固有周期は10秒以上にあり非線形性により更に長周期側にのびたため応答のピークは10秒以降に現われることになったためと思われる。

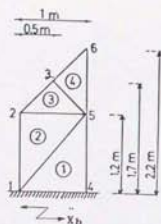


図2.3 ケース1におけるモデル

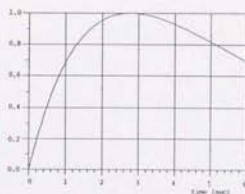


図2.4 ケース1におけるエンベロープ関数

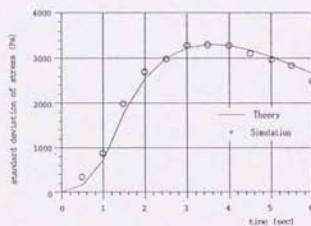


図2.5 応答応力 ( $\sigma$ ) の標準偏差

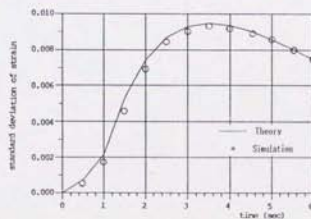


図2.6 応答歪 ( $\epsilon$ ) の標準偏差

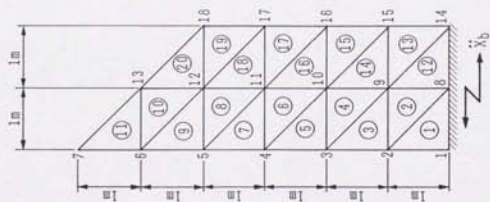


図2.7 ケース2におけるモデル

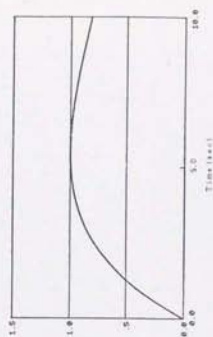
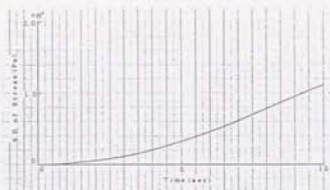
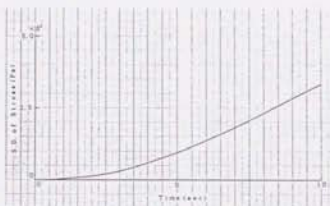


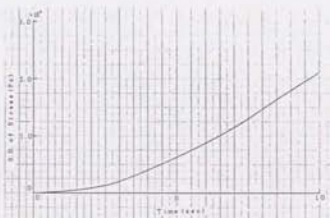
図2.8 ケース2におけるエンベロープ関数



(a)  $\sigma_{R_x}$



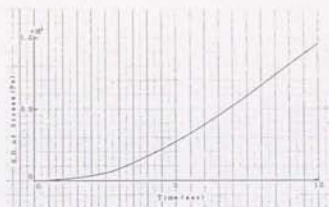
(b)  $\sigma_{R_y}$



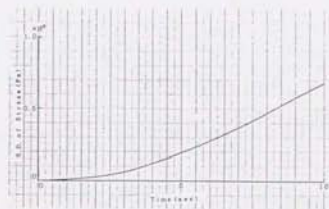
(c)  $\sigma_{R_{xy}}$

図2.9 要素⑩における応力成分の標準偏差

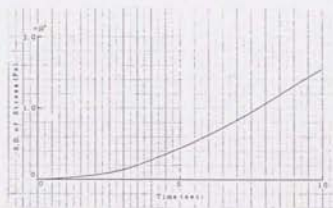




(a)  $\sigma_x$



(b)  $\sigma_y$



(c)  $\sigma_{xy}$

図2.10 要素④における応力成分の標準偏差

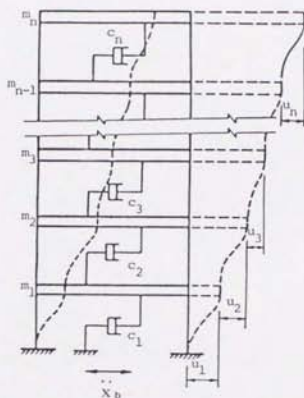
## 2.3 統計的等価線形化手法による非線形構造系の不規則応答解析 (多質点系モデルにおける定式化)

前節では統計的等価線形化手法の平面応力場問題への適用を詳細に述べたが、本節では弾塑性復元力特性を有する多質点系問題にも前節での方法をそのまま利用、解析できることを示す。

図2.11で示される弾塑性復元力特性を有する多層構造物の地震応答問題を考える。

$i$  層における運動方程式を記述すれば以下の様になる<sup>(28)</sup>。

$$m_i \sum_{j=1}^i \ddot{u}_j + C_i \dot{u}_i - C_{i+1} \dot{u}_{i+1} + Q_i(u_i) - Q_{i+1}(u_{i+1}) = -m_i \ddot{x}_b \quad (2.155)$$



(a) 多層構造モデル

ここで

$u_i$  :  $i$  点と  $(i-1)$  点との

間の相対変位

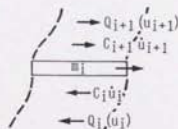
$\ddot{x}_b$  : 地震加速度

$m_i$  :  $i$  質点の質量

$C_i$  :  $i$  点と  $(i-1)$  点間の減衰係数

$Q_i(u_i)$  :  $i$  点と  $(i-1)$

点間の非線形復元力



(b)  $i$  層に作用する力

図2.11 弾塑性多質点系モデル

である。(2.155)式における弾塑性復元力  $Q_i(u_i)$  のモデルとしては従来種々のものが提案されているが理論的なランダム振動解析の中に取り込めるものは数が少ない。その中で Wen によって提案された数学モデル<sup>(22)</sup>は応用性の比較的広いものであり本節においてもこれを採用する。

Wen のモデルは数式表現すれば

$$\begin{cases} Q(u) = \sigma k u + (1 - \sigma) k Z \\ \dot{Z} = A u - \beta |\dot{u}| |Z|^{n-1} Z - \gamma \dot{u} |Z|^n \end{cases} \quad (2.156)$$

の形となっておりパラメータ  $\sigma, A, \beta, \gamma, n$  を適当に選ぶことにより種々の非線形性を示すことができる。パラメータの物理的意味については文献 [29] に詳しい。

(2.156) 式を (2.155) 式に代入し全システムの運動方程式としてマトリックス表示すれば次式が得られる。

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} + [G]\{Z\} = -[M]\{\ddot{x}_b\} \quad (2.158)$$

ただし

$$\begin{aligned} \{U\} &= \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}, \quad \{Z\} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix}, \quad \{E_c\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \\ [M] &= \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} c_1 & -c_2 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & -c_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & c_n \end{bmatrix} \\ [K] &= \begin{bmatrix} \sigma_1 k_1 & -\sigma_2 k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 k_2 & -\sigma_3 k_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_n k_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.159)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} (1-\sigma_1)k_1 & -(1-\sigma_2)k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (1-\sigma_2)k_2 & -(1-\sigma_3)k_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & (1-\sigma_n)k_n \end{bmatrix}$$

次に補助方程式のマトリックス表示を行う。(2.157)式右边に対して次の様な等価線形化を想定する。

$$\dot{Z}_i = C_{e_i} \dot{u}_i + k_{e_i} Z_i \quad (2.160)$$

上式の係数  $C_{e_i}$ ,  $k_{e_i}$  は、等価線形化による2乗平均誤差を最小とする様に決定される。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial C_{e_i}} E[\{A_i \dot{u}_i - \beta_i |\dot{u}_i| |Z_i|^{n_i-1} Z_i - \gamma_i \dot{u}_i |Z_i|^{n_i} - C_{e_i} \dot{u}_i - k_{e_i} Z_i\}^2] = 0 \quad (2.161)$$

$$\frac{\partial}{\partial k_{e_i}} E[\{A_i \dot{u}_i - \beta_i |\dot{u}_i| |Z_i|^{n_i-1} Z_i - \gamma_i \dot{u}_i |Z_i|^{n_i} - C_{e_i} \dot{u}_i - k_{e_i} Z_i\}^2] = 0 \quad (2.162)$$

の両式より  $C_{e_i}$ ,  $k_{e_i}$  を求めると次の通りである。

$$C_{e_i} = A_i - \beta_i \frac{(\sigma_{x_i}^2 F_1 - \kappa_{\dot{u}_i x_i} F_3)}{(\sigma_{\dot{u}_i}^2 \sigma_{x_i}^2 - \kappa_{\dot{u}_i x_i}^2)} - \gamma_i \frac{(\sigma_{x_i}^2 F_2 - \kappa_{\dot{u}_i x_i} F_4)}{(\sigma_{\dot{u}_i}^2 \sigma_{x_i}^2 - \kappa_{\dot{u}_i x_i}^2)} \quad (2.163)$$

$$k_{e_i} = -\beta_i \frac{(\sigma_{\dot{u}_i}^2 F_3 - \kappa_{\dot{u}_i x_i} F_1)}{(\sigma_{\dot{u}_i}^2 \sigma_{x_i}^2 - \kappa_{\dot{u}_i x_i}^2)} - \gamma_i \frac{(\sigma_{\dot{u}_i}^2 F_4 - \kappa_{\dot{u}_i x_i} F_2)}{(\sigma_{\dot{u}_i}^2 \sigma_{x_i}^2 - \kappa_{\dot{u}_i x_i}^2)} \quad (2.164)$$

(2.163) (2.164) 両式における  $F_1, \sim, F_4$  の値は前節と同様であり (2.18) ~ (2.21) 式で表わされる。故に補助方程式群に対するマトリックス表示が次の通り可能となる。

$$\dot{\{Z\}} = [H] \{\dot{U}\} + [K_e] \{Z\} \quad (2.165)$$

ここで

$$[H] = \begin{bmatrix} c_{e1} & & 0 \\ & c_{e2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & c_{en} \end{bmatrix}, \quad [K_e] = \begin{bmatrix} k_{e1} & & 0 \\ & k_{e2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & k_{en} \end{bmatrix} \quad (2.166)$$

(2.158) (2.165) 式を一つにまとめて

$$\tilde{A}X + \tilde{B}X = -\tilde{M}E_c X_b \equiv \tilde{P} \quad (2.167)$$

ただし

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ \vdots \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} [C] & [M] & 0 \\ [M] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} [K] & 0 & [G] \\ 0 & -[M] & 0 \\ 0 & -[H] & -[K_e] \end{bmatrix} \quad (2.168)$$

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} [M] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_c = \begin{bmatrix} [E_c] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

の形になるが、これはマトリックスの内容が若干異なるのみで基本的には前節の⑧項の問題と同一の形となっており、これより⑧項とまったく同一の解析手法により応答統計量を求めることができる。

## 2.4 Fokker-Planck 法による非線形構造系の動的信頼性評価

本節では Fokker-Planck 法を用いた非線形構造系の不規則応答解析法について述べるとともに一自由度系を対象とした動的信頼性評価の具体例について述べる。

### (1) 非定常共分散の推定

一般に非線形一自由度系の運動方程式は次の様に表される。

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = w(t) \quad (2.169)$$

(2.169) 式を  $x = X_1$ ,  $\dot{x} = X_2$  として状態変数表示すると、

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= -f(X_1, X_2) + w(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.170)$$

となるので (2.170) 式において  $w(t)$  を確率過程と考えれば (2.170) 式は  $(X_1, X_2)$  を状態確率変数とする確率微分方程式となる。

(2.170) 式における非定常確率過程  $w(t)$  を次の様に仮定する。

$$w(t) = e(t)n(t) \quad (2.171)$$

ここで  $e(t)$  は時間とともにゆっくり変化する確定関数であり  $n(t)$  は次の特性を有する正規性ホワイトノイズとする。

$$\left. \begin{aligned} E[n(t)] &= 0 \\ E[n(t)n(t+\tau)] &= 2\pi S_0 \delta(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (2.172)$$

$E[\ ]$  : アンサンブル平均

$S_0$  :  $n(t)$  のパワースペクトルの強度

$\delta(\tau)$  : デルタ関数

この状態確率変数  $X = (X_1, X_2)^T$  はマルコフベクトル成分と考えられその推移確率密度  $q_i \propto_i(X^T, t | X_0^T, t_0)$  は次の Fokker-Planck 方程式を満足する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial X_i} [x_i(X^T, t)q] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} [x_{ij}(X^T, t)q] \end{aligned} \quad (2.173)$$

$$x_i(X^T, t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{E[X_i \Delta\tau - X_i]}{\Delta\tau}$$

$$x_{ij}(X^T, t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{E[(X_i \Delta\tau - X_i)(X_j \Delta\tau - X_j)]}{\Delta\tau}$$

(2.173) 式において  $x_i, x_{ij}$  はそれぞれ状態確率変数の一次及び二次の微分モーメントであり、具体的には (2.170)~(2.172) 式より次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= X_2, \quad x_2 = -f(X_1, X_2) \\ x_{22} &= 2\pi S_0 e^2(t), \quad x_{11} = x_{12} = x_{21} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.174)$$

(2.174) 式を (2.173) 式に代入し、さらに初期条件が確率 1 でわかっていゝとした場合、確率密度関数  $P_i \propto_i(X^T, t)$  は次式を満たす。

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -X_2 \frac{\partial P}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2} \{f(X_1, X_2)P\} + \pi S_0 e(t) \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial X_2^2} \right\} \quad (2.175)$$



(2.175) 式を利用すれば応答の変位及び速度に関するモーメント方程式を容易に導出することができる。すなわち今  $n$  次モーメントまで求めようとすれば  $X_1, X_2$  に関する  $n$  次までのすべての組合せについて (2.175) 式の両辺に乘し、 $X_1, X_2$  に関して積分する。右辺については部分積分操作を繰り返せば最終的には次のモーメント方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} &= G(t; E[X_1^2], E[X_1 X_2], E[X_2^2], E[X_1^3], \dots, E[X_2^n]) \\ M &= \begin{Bmatrix} E[X_1^2] \\ \vdots \\ E[X_1 X_2] \\ \vdots \\ E[X_2^2] \end{Bmatrix} \\ G &= \begin{Bmatrix} g_1(t; E[X_1^2], \dots, E[X_2^n]) \\ g_2(t; E[X_1^2], \dots, E[X_2^n]) \\ \vdots \\ g_k(t; E[X_1^2], \dots, E[X_2^n]) \end{Bmatrix} \\ \ell &= \sum_{k=2}^n (k+1) \\ i+j &= 2, \dots, k, \dots, n \\ (i+j=k \text{ の時 } : i, j=0, \dots, k) \end{aligned} \right\} \quad (2.176)$$

(2.176) 式の導出までは比較的容易であるが、系が非線形の場合には(2.176)式は一般に閉じた方程式群とはならず式中に発生する高次モーメントの処理が問題となる。この解決法は後述することとし、最初に (2.175), (2.176) 式等が線形、非線形にかかわらず広く適用できることを簡単に示すために、二次モーメントまで考慮した場合のいくつかの例について述べる。

(i) 系が線形系の場合

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = w(t) \quad (2.177)$$

$$\therefore f(X_1, X_2) = a_1 X_2 + a_2 X_1 \quad (2.178)$$

故に (2.178) 式を (2.176) 式に代入することによりモーメント方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[X_1^2] &= 2E[X_1 X_2] \\ \frac{\partial}{\partial t} E[X_1 X_2] &= E[X_2^2] - a_2 E[X_1^2] - a_1 E[X_1 X_2] \\ \frac{\partial}{\partial t} E[X_2^2] &= -2a_2 E[X_1 X_2] - 2a_1 E[X_2^2] + 2\pi \overline{S_0} |e(t)|^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.179)$$

(2.179) 式は閉じた方程式群を構成しており初期条件を設定すれば数値的に容易に解を求めることができる。

(i) ばねに非線形性を有する系

代表例として Duffing 方程式を考える。

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2(x + \varepsilon x^3) = w(t) \quad (2.180)$$

$$\therefore f(X_1, X_2) = a_1 X_2 + a_2(X_1 + \varepsilon X_1^3) \quad (2.181)$$

(2.181) 式を (2.176) 式に代入して

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[X_1^2] &= 2E[X_1 X_2] \\ \frac{\partial}{\partial t} E[X_1 X_2] &= E[X_2^2] - a_1 E[X_1 X_2] - a_2 E[X_1^2] - a_2 \varepsilon E[X_1^4] \\ \frac{\partial}{\partial t} E[X_2^2] &= -2a_1 E[X_2^2] - 2a_2 E[X_1 X_2] - 2a_2 \varepsilon E[X_1^2 X_2] + 2\pi \overline{S_0} |e(t)|^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.182)$$

が得られるが (2.182) 式には高次モーメント  $E[X_1^4]$ ,  $E[X_1^2 X_2]$  を含むため閉じた方程式群とならずこのままでは解が得られない。

(ii) 減衰に非線形性を有する系

$$\ddot{x} + a_1(\dot{x} + \varepsilon x^3) + a_2 x = w(t) \quad (2.183)$$

$$\therefore f(X_1, X_2) = a_1(X_2 + \varepsilon X_2^3) + a_2 X_1 \quad (2.184)$$

(2.184) 式を (2.176) 式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[X_1^2] &= 2E[X_1 X_2] \\ \frac{\partial}{\partial t} E[X_1 X_2] &= E[X_2^2] - a_1 E[X_1 X_2] - a_1 \varepsilon E[X_1 X_2^3] - a_2 E[X_1^2] \\ \frac{\partial}{\partial t} E[X_2^2] &= -2a_1 E[X_2^3] - 2a_1 \varepsilon E[X_2^4] - 2a_2 E[X_1 X_2] + 2\varepsilon S_0 |e(t)|^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.185)$$

となるが、この場合にも  $E[X_2^3]$ ,  $E[X_1 X_2^3]$  なる高次モーメントを含むため (2.185) 式のみでは解が得られない。

上記の例からも明らかな様に非線形系の解析を行う場合にはモーメント方程式の中に高次モーメントが現れることが多く、この取扱いが問題となる。これに関して Kaul-Penzien<sup>[30]</sup> はモーメント方程式を導き出す一步直前の Fokker-Planck 方程式の段階において式中に現れる非線形項を等価線形化手法により線形化して高次モーメントが発生しない様工夫している。一方モーメント方程式の段階で近似化しようとする場合、Fokker-Planck 法に限った手法ではないが、しばしば高次モーメント打ち切りによる近似手法が使われる。本手法は方程式の形に依存することなく汎用性がありまた求解精度も必要に応じて選択できるため本手法を利用した解析は現在まで種々行われている<sup>[31]~[33]</sup>。本論文においてもできるだけ汎用性のある解析手法の開発に主眼を置いているため、高次モーメント打ち切り手法を Fokker-Planck 法に適用する<sup>[34]~[37]</sup>。

高次モーメント打ち切り手法にはいくつかあるが、精度の面から主に中心モーメント打ち切りとキュムラント打ち切りの2種類に分けられる。しかし中心モーメント打ち切り法においては応答の一次モーメントが零の場合には高次モーメント自身が零となり、近似精度が低下するため、ここではキュムラント打ち切り法を採用する。次にその概要を述べる。

$n$  次元結合確率密度関数に対する特性関数は,

$$\begin{aligned} M_{x_1 x_2 \dots x_n}(\theta_1, \dots, \theta_n) &= E \{ \exp[i(\theta_1 X_1 + \dots + \theta_n X_n)] \} \\ &= \int \dots \int \exp[i(\theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n)] \\ &\quad \times P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \end{aligned} \quad (2.186)$$

でありこの時の  $(m_1 + \dots + m_n)$  次のキュムラントは次の様に表される。

$$\begin{aligned} \kappa_{m_1 + \dots + m_n}(X_1, \dots, X_n) &= \frac{1}{i^{m_1 + \dots + m_n}} \\ &\quad \times \left( \frac{\partial^{m_1 + \dots + m_n}}{\partial \theta_1^{m_1} \dots \partial \theta_n^{m_n}} \ln M_{x_1 \dots x_n} \right)_{\theta_1 = \theta_2 = \dots = 0} \end{aligned} \quad (2.187)$$

(2.187) 式よりキュムラントは対数特性関数の展開時における係数と関係した量であると考えることができ、これの高次の値を零とすることにより高次モーメントを低次モーメントで近似しようとするのがキュムラント打ち切り法である。なお、本手法の妥当性は後でシミュレーション計算により評価されるが、応答がガウス過程では3次以上のキュムラントは零になる点と、非線形系の応答も、その統計量は中心極限定理よりガウス分布からあまり離れないケースが実際の現象には多いという点から考えて、3次以上の高次キュムラントを零とする本手法は有効な方法であることが予想される。具体例を示すため(2.182), (2.185) 式で現れる四次モーメントの近似化について述べる。

まず四次までのキュムラントを以下に示す。

$$\kappa_1[X_i] = E[X_i] \quad (2.188)$$

$$\kappa_2[X_i X_j] = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] \quad (2.189)$$

$$\kappa_3[X_i X_j X_k] = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)(X_k - \mu_k)] \quad (2.190)$$

$$\begin{aligned} \kappa_4[X_i X_j X_k X_a] &= E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)(X_k - \mu_k)(X_a - \mu_a)] - E[(X_i - \mu_i) \\ &\quad \times (X_j - \mu_j)] E[(X_k - \mu_k)(X_a - \mu_a)] - E[(X_i - \mu_i)(X_k - \mu_k)] E[(X_j - \mu_j) \\ &\quad \times (X_a - \mu_a)] - E[(X_i - \mu_i)(X_a - \mu_a)] E[(X_j - \mu_j)(X_k - \mu_k)] \end{aligned} \quad (2.191)$$

ただし,  $\mu_a = E[X_a]$   $a = i, j, k, a$

ここで四次のキュムラントを零とすれば次の様なモーメントに関する関係式が得られる。

$$\begin{aligned} E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)(X_k - \mu_k)(X_d - \mu_d)] &= E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]E[(X_k - \mu_k) \\ &\times (X_d - \mu_d)] + E[(X_i - \mu_i)(X_k - \mu_k)]E[(X_j - \mu_j)(X_d - \mu_d)] \\ &+ E[(X_i - \mu_i)(X_d - \mu_d)]E[(X_j - \mu_j)(X_k - \mu_k)] \end{aligned} \quad (2.192)$$

(2.192) 式を用いることによりすべての四次モーメントを低次モーメントで近似することが可能となるので、平均値が零であることを考慮して (2.182), (2.185) 式に現れる四次モーメントを近似化すれば、

$$\left. \begin{aligned} E[X_1^4] &= 3\{E[X_1^2]\}^2 \\ E[X_1^2 X_2^2] &= 3E[X_1^2]E[X_1 X_2] \\ E[X_2^4] &= 3\{E[X_2^2]\}^2 \\ E[X_1 X_2^3] &= 3E[X_2^2]E[X_1 X_2] \end{aligned} \right\} \quad (2.193)$$

となる。(2.193) 式を (2.182), (2.185) 式に代入することにより非定常統計量を完全に求めることができる。

## (2) 非定常確率密度関数の推定

動的信頼性の評価を行うには、一般に状態変数の確率密度関数が必要となるが Fokker-Planck 法の場合には、これは (2.175) 式を満たす  $P$  を求めることにほかならない。しかし系が非線形の場合には (2.175) 式の厳密解を求めることは非常に困難であり、このため近似解として、線形解の一つである Maxwell-Boltzmann 分布で近似する方法<sup>[139]</sup>や、Hermite 展開形結合分布あるいは Laguerre 展開形結合分布の様な級数展開で近似する方法<sup>[138][139]-[140]</sup>が考案されている。しかし実際の応用にあたっては相当煩雑な解析を必要とするものもあるようである。

本論文ではできるだけ広い範囲に適用できる、新たな確率密度簡易推定法を提案する。

確率密度関数の形は従来の種々の研究成果を参照するとほとんど指数関数を基本としている。そこでここでも指数関数を基礎とした次の様な形を仮定する。

$$P(X_1, X_2, t) = r_1(t) \exp[r_2(t)X_1^2 + r_3(t)X_1X_2 + \cdots + r_m(t)X_1^2X_2^2 + \cdots + r_s(t)X_2^2] \quad (2.194)$$

$$s = 1 + \sum_{k=2}^n (k+1)$$

$$i+j=2, \cdots, k, \cdots, n$$

$$(i+j=k \text{ の時 } i, j=0, \cdots, k)$$

ところで (2.194) 式の指数関数部を構成している状態変数の種に関する期待値は定義より

$$E[X_1^i X_2^j] = \iint X_1^i X_2^j P(X_1, X_2, t) dX_1 dX_2 \quad (2.195)$$

となっているが、(2.195) 式の右辺における  $P(X_1, X_2, t)$  の形は (2.194) 式で与えられているので、(2.195) 式右辺は係数  $r$  を含んだ形で解析的に求められる。一方、(2.195) 式左辺は (2.176) 式のモーメント方程式より既に得られているので、結局係数  $r_m(t)$  ( $m=1, \cdots, s$ ) に関する  $\ell$  個の連立方程式群が得られる。ただし未知数としての係数は  $s$  個であるのに対して方程式は  $\ell$  個 ( $\ell=s-1$ ) であり一つ不足しているがこれは確率密度に関する正規化条件

$$\iint P(X_1, X_2, t) dX_1 dX_2 = 1 \quad (2.196)$$

が加わることにより十分となる。

以上により係数を求めて (2.194) 式に代入することにより確率密度関数が得られるが、一般に近似精度を上げるため次数及び項数を大きくすると解析的に求まらず数値的に求めることになる可能性が強い。

ここでは具体例として状態変数の二次の組合せのみからなる確率密度関数を示しておくが、この場合は係数が解析的に求められる。

$$\begin{aligned}
 &P(X_1, X_2, t) = r_1(t) \exp[r_2(t)X_1^2 \\
 &\quad + r_3(t)X_1X_2 + r_4(t)X_2^2] \\
 &r_1(t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{E[X_1^2]E[X_2^2] - \{E[X_1X_2]\}^2}} \\
 &r_2(t) = \frac{-E[X_2^2]}{2\{E[X_1^2]E[X_2^2] - \{E[X_1X_2]\}^2\}} \\
 &r_3(t) = \frac{E[X_1X_2]}{\{E[X_1^2]E[X_2^2] - \{E[X_1X_2]\}^2\}} \\
 &r_4(t) = \frac{-E[X_1^2]}{2\{E[X_1^2]E[X_2^2] - \{E[X_1X_2]\}^2\}}
 \end{aligned} \quad (2.197)$$

### (3) 疲労破壊問題

一口に動的信頼性と言ってもその内容は多岐にわたるので、本論文ではその中でも最も代表的な疲労及び初通過破壊の問題に限定して考える。はじめに疲労損傷の評価について以下に述べる。

動的信頼性を論じる上で重要な値の一つである超過回数期待値についてまず考える。

ある時間  $t$  において振動変位が正の傾きをもってある一定レベル  $a$  を単位時間当たりに交差する回数の期待値  $\nu_a^+(t)$  は、信頼性理論により

$$\nu_a^+(t) = \int_0^{\infty} \dot{x} P(a, \dot{x}, t) d\dot{x} \quad (2.198)$$

と表されるので、非定常確率密度関数 (2.194) 式を上式に代入すれば  $\nu_a^+(t)$  が求められる。具体的には (2.197) 式を用いた場合次式の通りとなる。



$$\begin{aligned}
 \nu_a^+(t) &= \frac{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_{\dot{x}}^2 - K_{xx}^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_x^2}\right)}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{h'^2}{2}} \\
 &\quad + \frac{aK_{xx} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_x^2}\right)}{\sqrt{2\pi} \sigma_x^{\frac{3}{2}}} \text{Erf}(h') \\
 \text{Erf}(h') &= \text{誤差関数} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{h'}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
 h' &= \frac{-aK_{xx}}{\sigma_x \sqrt{\sigma_x^2 \sigma_{\dot{x}}^2 - K_{xx}^2}} \\
 \sigma_x^2 &= E[x^2] \quad , \quad \sigma_{\dot{x}}^2 = E[\dot{x}^2] \quad , \quad K_{xx} = E[x\dot{x}]
 \end{aligned} \tag{2.199}$$

ところでこの超過回数期待値  $\nu_a^+(t)$  は応答変位に関するものであるが疲労評価に際しては応力レベルでの定式化が必要となる。これは応力レベルにおける非定常確率密度関数を  $P(S, \dot{S}, t)$  とするとヤコビアン  $|J|$  を用いて次の変換式

$$P(S, \dot{S}, t) = P(x, \dot{x}, t) |J| \tag{2.200}$$

により容易に求められる。

ここでは具体例として  $P(x, \dot{x}, t)$  を (2.197) 式で、また変位と応力の関係を  $S = bx$  なる比例関係で近似した場合について応力レベルの超過回数期待値  $\nu_s^+(t)$  を求めると次の様になる。

$$\begin{aligned}
 \nu_s^+(t) &= \frac{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_{\dot{x}}^2 - K_{xx}^2} \exp\left(-\frac{S^2}{2b^2 \sigma_x^2}\right)}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{h^2}{2}} \\
 &\quad + \frac{SK_{xx} \exp\left(-\frac{S^2}{2b^2 \sigma_x^2}\right)}{\sqrt{2\pi} b \sigma_x^{\frac{3}{2}}} \text{Erf}(h) \\
 h &= \frac{-SK_{xx}}{b\sigma_x \sqrt{\sigma_x^2 \sigma_{\dot{x}}^2 - K_{xx}^2}}
 \end{aligned} \tag{2.201}$$

次に累積疲労損傷について考える。

不規則振動論と結びついた疲労評価の研究は種々行われているが、<sup>117)141)</sup>  
<sup>142)</sup>ほとんどの論文では疲労損傷を推定する際、応答のピーク値に対する確率密度は既知であることを前提にした内容になっており、このためピーク値に対する確率密度の仮定がきわめて重要なファクタとなっている。この様な評価上のリスクを避けるため本論文においてはピーク値に対する確率密度を用いず、超過回数期待値により解析的に疲労損傷を評価できる方法を考える。

$[t, t + \Delta t]$  において系に累積される疲労損傷  $\Delta D$  はマイナー則を利用できる場合次の様になる。

$$\Delta D = \sum \frac{n_i}{N_i} \quad (2.202)$$

$N_i$  : 応力レベル  $S_i$  における破壊までのサイクル数

$n_i$  :  $\Delta t$  間における応力レベル  $S_i$  の実際のサイクル数

ただしここでは応力  $S$  は不規則過程であるため  $n_i$  も期待値という形で求められることになる。

(2.202) 式で必要となる  $N_i$  の値については  $S-N$  曲線として図2.12の様な直線近似による曲線を採用する場合、 $j$  領域における  $N_i$  の値は

$$(N_i)_j = \left( \frac{\alpha_j}{S_i} \right)^{\beta_j} \quad (2.203)$$

$\alpha_j$  :  $j$  領域直線と縦軸と

の交点の応力

$\beta_j$  :  $j$  領域直線の傾きが  $-1/\beta_j$

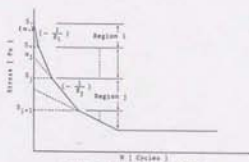


図2.12 直線近似による  $S-N$  曲線

となる。次に  $n_i$  の期待値を求める。

さて  $\nu_s(t)$  は単位時間当たり、あるレベル  $S$  を正こう配で横切る回数の期待値であるから、応答がほぼ狭帯域過程とみなせる時には、 $\Delta t$  時間におけるレベル  $S$  を横切る回数とレベル  $(S + \Delta S)$  を横切る回数の差の期待値は  $[S, S + \Delta S]$  間の正の極値数に等しくこれは  $E[n_i]$  に等しいことが期待できる。

$$E[n_i] = \Delta t \{ \nu_s^+(t) - \nu_s^+ \Delta s(t) \} \quad (2.204)$$

$$\therefore \Delta t \left\{ \frac{-\Delta \nu_s^+(t)}{\Delta S} \right\}_i = \frac{E[n_i]}{\Delta S} \quad (2.205)$$

ここで(2.204)式は通常の構造物応答を想定しているが、図2.7で取り扱った様な長周期構造物に対しても、計算対象とする時間を延ばして考える場合には、(2.204)式の表現は有効である。

(2.202)~(2.205)式より $\Delta t$ 間における累積疲労損傷の期待値  $E[\Delta D]$  は図2.12における直線近似数を  $\ell$  個とした場合次式の様になる。

$$E[\Delta D] = -\Delta t \sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{(\alpha_j)^{\beta_j}} \int_{s_{j+1}}^{s_j} (S)^{\beta_j} \left( \frac{d\nu_s^+(t)}{dS} \right) dS \quad (2.206)$$

また単位時間当たりの疲労損傷期待値  $D$  は(2.206)式より

$$D = \frac{E[\Delta D]}{\Delta t} = - \sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{(\alpha_j)^{\beta_j}} \int_{s_{j+1}}^{s_j} (S)^{\beta_j} \left( \frac{d\nu_s^+(t)}{dS} \right) dS \quad (2.207)$$

となる。上式において  $\nu_s^+(t)$  は(2.201)式で与えられているので  $D$  は求まるが、特に  $\beta_j$  が整数の場合には解析解が次の様に得られる。

(2.207)式を  $D = \sum_{j=1}^{\ell} D_j$  の様な形に整理した場合、各々の領域における  $D_j$  は、

(i)  $\beta_j = 2m$  の時

$$D_j = \frac{\textcircled{I} + \textcircled{II} + \textcircled{III} + \textcircled{IV} + \textcircled{V}}{(\alpha_j)^{2m}} \quad (2.208)$$

$$\textcircled{I} = \frac{-Am!}{4\pi\alpha_j^2 b^2 B} \left[ e^{-BS_j} \sum_{r=0}^m \frac{S_j^{2(m-r)}}{(m-r)! B^r} - e^{-BS_{j+1}} \sum_{r=0}^m \frac{S_{j+1}^{2(m-r)}}{(m-r)! B^r} \right]$$

$$\textcircled{II} = \frac{K_{j,j}(2m+1)!!}{2\sqrt{2\pi}\alpha_j^2 b^2} \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} \left[ \frac{1}{(2C)^i (2m-2k+3)!!} [S_j^{2m-2k+3} e^{-CS_{j+1}^2} - S_{j+1}^{2m-2k+3} e^{-CS_j^2}] \right] \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{C}(2C)^{m+1}} [\text{erf}(\sqrt{2C}S_{j+1}) - \text{erf}(\sqrt{2C}S_j)] \right\}$$

$$\textcircled{III} = \frac{K_{j,j}(2m-1)!!}{2\sqrt{2\pi}\alpha_j^2 b^2} \left\{ \sum_{i=1}^m \left[ \frac{1}{(2C)^i (2m-2k+1)!!} [S_j^{2m-2k-1} e^{-CS_{j+1}^2} - S_{j+1}^{2m-2k-1} e^{-CS_j^2}] \right] \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{2\pi}\alpha_j b}{(2C)^m} [\text{erf}(\sqrt{2C}S_{j+1}) - \text{erf}(\sqrt{2C}S_j)] \right\}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{V} &= \frac{-K_{xx}^2}{2\pi\sigma_x^2 b^2 A} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n (n+m+1)! \left( \frac{-K_{xx}}{\sqrt{2}\sigma_x b A} \right)^{2n}}{n!(2n+1)} \left\{ e^{-C_{xx}^2} \sum_{r=0}^{n+m+1} \frac{S_j^{2(n+m+1-r)}}{C^r (n+m+1-r)!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{-C_{xx}^2} \sum_{r=0}^{n-m-1} \frac{S_j^{2(n+m+1-r)}}{C^r (n+m+1-r)!} \right\} \right] \\ \textcircled{VI} &= \frac{K_{xx}^2}{2\pi\sigma_x^2 A} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n (n+m)! \left( \frac{-K_{xx}}{\sqrt{2}\sigma_x b A} \right)^{2n}}{n!(2n+1)} \left\{ e^{-C_{xx}^2} \sum_{r=0}^{n+m} \frac{S_j^{2(n+m-r)}}{C^r (n+m-r)!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{-C_{xx}^2} \sum_{r=0}^m \frac{S_j^{2(n+m-r)}}{C^r (n+m-r)!} \right\} \right] \end{aligned}$$

(i)  $\beta_j = 2m+1$  の時

$$D_j = \frac{\textcircled{V} + \textcircled{VI} + \textcircled{VII} + \textcircled{VIII} + \textcircled{IX}}{(a_j)^{2m+1}} \quad (2.209)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{V} &= \frac{A(2m+1)!}{2\pi\sigma_x^2 b^2 C} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2B)^n (2m+3-2k)!} [S_j^{2m+3-2k} e^{-BS_j^2} - S_j^{2m+3-2k} e^{-BS_j^2}] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{B}(2B)^{m+1}} [\text{erf}(\sqrt{2B} S_{j+1}) - \text{erf}(\sqrt{2B} S_j)] \right\} \right] \\ \textcircled{VI} &= \frac{-K_{xx}(m+1)!}{4\sqrt{2}\pi\sigma_x^2 b^2 C} \left[ e^{-C_{xx}^2} \sum_{r=0}^{m+1} \frac{S_j^{2(m+1-r)}}{(m+1-r)! C^r} - e^{-C_{xx}^2} \sum_{r=0}^{m+1} \frac{S_j^{2(m+1-r)}}{(m+1-r)! C^r} \right] \\ \textcircled{VII} &= \frac{K_{xx} m!}{4\sqrt{2}\pi\sigma_x^2 b^2 C} \left[ e^{-C_{xx}^2} \sum_{r=0}^m \frac{S_j^{2(m-r)}}{(m-r)! C^r} - e^{-C_{xx}^2} \sum_{r=0}^m \frac{S_j^{2(m-r)}}{(m-r)! C^r} \right] \\ \textcircled{VIII} &= \frac{-K_{xx}}{\sqrt{2}\pi\sigma_x^2 b^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n (2n+2m+3)! \left( \frac{-K_{xx}}{\sqrt{2}\sigma_x b A} \right)^{2n+1}}{n!(2n+1)} \left\{ \sum_{r=0}^{n+m+2} \frac{1}{(2C)^r (2n+2m+5-2k)!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times [S_j^{2n+2m+5-2k} e^{-CS_j^2} - S_j^{2n+2m+5-2k} e^{-CS_j^2}] + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{C}(2C)^{n+m+2}} [\text{erf}(\sqrt{2C} S_{j+1}) - \text{erf}(\sqrt{2C} S_j)] \right\} \right] \\ \textcircled{IX} &= \frac{K_{xx}}{\sqrt{2}\pi\sigma_x^2 b^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n (2n+2m+1)! \left( \frac{-K_{xx}}{\sqrt{2}\sigma_x b A} \right)^{2n+1}}{n!(2n+1)} \left\{ \sum_{r=0}^{n+m+1} \frac{1}{(2C)^r (2n+2m+3-2k)!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times [S_j^{2n+2m+3-2k} e^{-CS_j^2} - S_j^{2n+2m+3-2k} e^{-CS_j^2}] + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{C}(2C)^{n+m+1}} [\text{erf}(\sqrt{2C} S_{j+1}) - \text{erf}(\sqrt{2C} S_j)] \right\} \right] \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\sigma_x^2 \sigma_x^2 - K_{xx}^2} \quad B = \left\{ \frac{1}{2\sigma_x^2 b^2} + \frac{K_{xx}^2}{2\sigma_x^2 b^2 A^2} \right\} \quad C = \frac{1}{2\sigma_x^2 b^2} \\ n! &\begin{cases} n(n-2) \cdots 3 \cdot 1 & (n: \text{奇数}) \\ n(n-2) \cdots 4 \cdot 2 & (n: \text{偶数}) \end{cases} \end{aligned}$$

(2.207) 式により単位時間当たりの疲労損傷期待値が求められたので、これを  $t$  で積分することにより  $t$  時刻までの累積疲労損傷の期待値  $E[D]$  が得られる。

$$E[D] = -\sum_{j=1}^k \frac{1}{(\sigma_j)^{\beta_j}} \int_0^t \int_{S_{j+1}}^{S_j} (S)^{\beta_j} \left( \frac{d\nu_s^*(t)}{dS} \right) dS dt \quad (2.210)$$

#### (4) 初通過破壊問題

対象とする不規則外乱の性質や材料の特性によっては疲労問題以上に重要なものが初通過破壊問題である。これは応答の最大値が継続時間内において一定レベル  $S$  を越えない確率（あるいは越える確率）を議論する問題である。超過事象の考え方には種々あるが、ここでは前節で既に得られている超過回数期待値を用いたポアソン分布による法を採用する。

すなわち継続時間内に一定レベル  $S$  を越えない確率（信頼性） $P_A(S)$  及び越える確率（破壊確率） $P_F(S)$  は

$$P_A(S) = \exp\left[-\int_0^t \nu_S^+(t) dt\right] \quad (2.211)$$

$$P_F(S) = 1 - P_A(S) \quad (2.212)$$

で表される。さらに一般の材料では引張り圧縮側で同様の性質を有し応答も正負で超過問題を考えるのが自然であり、この場合、(2.211), (2.212) 式は各々次式となる。

$$\tilde{P}_A(S) = \exp\left[-2 \int_0^t \nu_S^+(t) dt\right] \quad (2.213)$$

$$\tilde{P}_F(S) = 1 - \tilde{P}_A(S) \quad (2.214)$$

故に (2.213), (2.214) 式に (2.201) 式を代入することにより初通過破壊問題における信頼性あるいは破壊確率を評価することが可能となる。

⑤ 非線形がた系の地震時動的信頼性問題への適用

化学プラントや原子力プラント機器配管系ではサーマルクリアランス等によりがた支持部を有することが多くこれの地震時挙動は重要な課題である。これを図2.13のモデルで代表して考える。ただし復元力特性は実際は図2.14(a)のとおりであるが、これを(b)の様に近似化する。この時運動方程式は良く知られた Duffing タイプの非線形振動方程式となる。

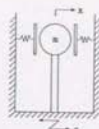


図2.13 解析モデル

$$\ddot{x}_r + 2\bar{\omega}_0 \dot{x}_r + \omega_0^2 (x_r + \varepsilon x_r^3) = -\ddot{z} \quad (2.215)$$

$$x_r = x - z, \quad -\ddot{z} = e(t)n(t) \quad (\bar{\delta}: \text{減衰比})$$

(2.215) 式の数値計算に際しては次の

諸定数を用いた。

$$\bar{\delta} = 0.01, \quad \omega_0 = 20 \text{ rad/s}, \quad \varepsilon = 0.1$$

$$\bar{S}_0 = 2.5 \times 10^3 \text{ cm}^2/\text{s}^2$$

$$e(t) = \exp(-0.125t) - \exp(-0.25t)$$

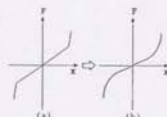


図2.14 非線形復元力特性

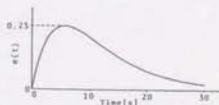


図2.15 エンベロープ関数

また図2.15にはエンベロープ関数の形状を示す。

応答の非定常共分散は (2.182), (2.193) 式を利用することにより図2.16～2.18の様に求められる。また非定常確率密度関数は (2.197) 式を用いて  $t = 5, 15, 25\text{s}$  に対して求めると図2.19, 2.20のようになる。さらに図中には本理論の妥当性を確認するために実施した、250波の模擬地震波によるシミュレーション結果も載せているが、理論と数値実験はかなり良い一致を示しており本論文において提案した解析手法の妥当性を確認できたものとする。

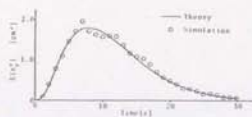


図2.16 位置の非定常分散

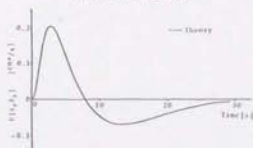


図2.17 位置と速度の非定常共分散

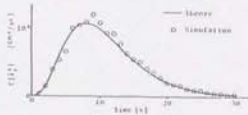


図2.18 速度の非定常分散

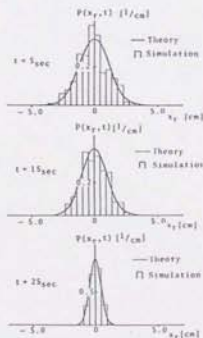


図2.19 応答位置の非定常確率密度

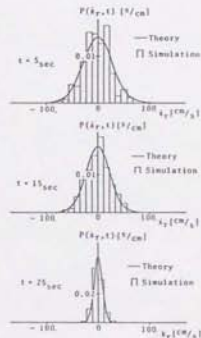


図2.20 応答速度の非定常確率密度



# [ 疲労評価 ]

まず動的信頼性評価上重要な要素である単位時間当たりの超過回数期待値を(2.201)式により2種類の応力レベルについて求めたものが図2.21である。

次に図2.12のS-N曲線において最も簡単な  $j=1$  を採用しかつ(2.203)式における  $\beta_1$  として  $\beta_1=2m$  ( $m$  ; 整数)と仮定した場合の、単位時間当たりの疲労損傷期待値及び累積疲労損傷期待値  $E[D]$  を図2.22, 2.23に示す。この場合の使用したS-N曲線の諸定数は  $\beta_1=14$ ,  $\sigma_1=3.92 \times 10^8 \text{ Pa}$ , 疲労限  $=9.81 \times 10^7 \text{ Pa}$  である。図2.23中には、250波の模擬波を用いて別途実施したシミュレーション結果も載せており、両者の良い一致が解析手法の妥当性を示している。

ところで疲労に関して最も設計者が知りたいのは疲労寿命であろうが、地震応答に関して言えば著者の知る限りほとんど求められていない。これは地震発生回数、継続時間、最大加速度等のすべてが確率変数であり十分な統計データが得られないためであろうと考えられるが、ここではランダム非線形振動解析の一応用という立場で、いくつかの大胆な仮定を設けながら疲労寿命の推定を試みる。

地震波1波を想定した場合、最終的な累積疲労損傷値が寿命に関係するが、その値はスロッシングの様な長周期成分を対象としない限り図2.22の様に主要動部でほとんど決まってしまう、あまり継続時間長の影響はうけないものと考え継続時間は確定量とする。次にエンベロープ関数の形であるが、これには種々の表現がありパラメータも多いため詳細の検討は今後の問題として、ここでは同一地点では同一エンベロープを有すると仮定して確定量とする。

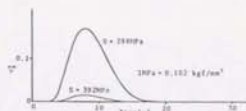


図2.21 応力レベルの単位時間当たりの超過回数期待値

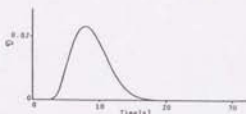


図2.22 単位時間当たりの疲労損傷期待値

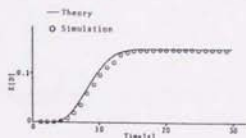


図2.23 累積疲労損傷の期待値  $E[D]$

ところで地震の統計データは最大加速度振幅で整理されることが多く、これを本論文での手法と結合するには同一特性の地震波群に対する加速度最大値の平均  $A$  と累積疲労損傷期待値  $D$  との関係式が要る。この関係は図2.24の様に単調増加となることが期待できるが、ここでは多数の地震波群を用いた (2.215) 式の数値実験結果をもとに次式を仮定する。



図2.24 AとDの関係

$$D(A) = 1.55 \times 10^{-8} \cdot A^{2.99} \quad (2.216)$$

一方、1年当たりの累積疲労損傷期待値  $D_V$  は1年当たりに、 $[A_i, A_i + \Delta A_i]$  の間の最大振幅を持つ地震が発生する回数の期待値を  $E[n_i]$  とすると、

$$D_V = \sum E[n_i] D(A_i) \quad (2.217)$$

であり  $E[n_i]$  は次式で表現できるものと仮定する。

$$E[n_i] = \bar{\lambda} P(A_i) \Delta A_i \quad (2.218)$$

$\bar{\lambda}$  : 1年間の地震発生回数平均値

$P(A_i) \Delta A_i$  : 1年間に  $[A_i, A_i + \Delta A_i]$  の間の最大振幅を持つ地震の起こる確率

故に  $D_V$  が次の様に得られる。

$$D_V = \int \bar{\lambda} P(A) D(A) dA \quad (2.219)$$

(2.219) 式を実行するには  $P(A)$  の形が必要となる。これは過去の地震歴から決定されるが、これが図2.25で与えられたと仮定した場合について実験式を求めると

$$P(A) = 0.019 A^{-1.62} \quad (2.220)$$

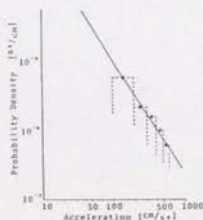


図2.25 年間地震発生に関する確率密度

となる。ただし実際の地震には A に上限が存在し、これはたとえばグンベルの第2漸近分布で表される年最大地動の極値分布<sup>[43]</sup>等より決定される。今の場合これを600galと仮定する。ところで(2.220)式は  $A \rightarrow 0$  で  $P(A) \rightarrow \infty$  となるが  $P(A)$  は正規化条件を満たす必要があるため次の様に再定義する。

$$\left. \begin{aligned} P(A) &= 0.019A^{-1.63} & 3.85 \times 10^{-3} \leq A \leq 600 \\ P(A) &= 0 & A < 3.85 \times 10^{-3} \end{aligned} \right\} \quad (2.221)$$

$\tilde{\lambda}$  はそのサイトでの地震統計より推定されるものであるが、ここでは例題計算として1000年に50057回の地震が発生したものととして  $\tilde{\lambda} = 50.057$  を用いる。以上によりすべての値が決定したので(2.219)式から  $D_Y$  は  $D_Y = 0.0225$  となり更に  $D_Y$  の逆数をとれば、疲労寿命期待値が44.5年と求まる。

#### (初通過破壊)

(2.215)式の系で疲労より初通過破壊が問題となる時には、(2.214)式を用いて破壊確率を求めることができる。図2.26は減衰比をパラメータとしていき(関)値応力レベルと破壊確率の関係を示したものであり、本計算例の場合減衰比が破壊確率に大きく影響することがわかる。

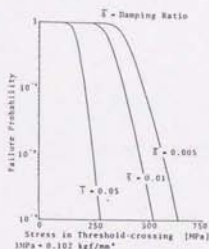


図2.26 応力レベルと破壊確率の関係

## 2.5 まとめ

本章では動的信頼性解析を行う上で基礎となる不規則振動応答解析法について述べるとともに、得られる応答統計量を用いて動的信頼性評価を行う手順を、簡単な非線形一自由度系の初通過破壊及び疲労破壊問題を例に検討した。

この節では上記検討結果より明らかになった点をまとめておく。

- (1) 動的信頼性問題では最大値応答や終局強度評価で非弾性挙動まで対象とせねばならない場合が多いことから非線形構造系に対する不規則振動解析法の特徴の整理を行った。その結果、動的信頼性問題で対象とする可能性がある非線形性大の不規則振動現象に対する解法としては統計的等価線形化手法及びFokker-Planck法が適していることを示した。
- (2) 統計的等価線形化手法の応用例として材料非線形性を有する任意形状板構造の平面応力場問題を取り上げた。任意形状を対象とするにはFEMが適しているが、この場合材料が非線形かつ非定常不規則入力に対する確率論の評価をFEMベースで実施するには種々の困難さを伴うため従来あまり研究がなされなかった。そこで本章ではまず非線形性を示す構成方程式を新たに仮定し、これに統計的等価線形化手法を適用することにより従来の線形系に対するFEMとほぼ同様の定式化で最終的な全体運動方程式まで導出する新たな方法を提案した。
- (3) 更に得られた運動方程式の非定常不規則入力に対する応答統計量を得るため、遷移行列法及び複素モーダルアナリシス法による理論展開を行うことにより両者の方法で非定常不規則応答解析が実現できることを明らかにした。また具体例として非定常不規則な地震入力を受ける非線形材料特性を有する耐震壁応答問題を取り上げ、これに複素モーダルアナリシス法を適用して実際に数値解析を行うとともにシミュレーション計算を実施、比較することにより提案した解析手法の妥当性ならびに有用性を示した。
- (4) 統計的等価線形化手法の他の応用例として多質点系構造の不規則応答に対する定式化を行った。すなわち弾塑性復元力特性を有する多層構造物の地震応答問題を取り上げ、非線形多質点系モデルとしてこれに統計的等価線形化手法を

適用し定式化を行うことにより後半の形は平面応力場問題とほぼ同一となることを示すことで、当該問題に対しても本章で提案する解析手法が有効であることを示した。

- (5) 次に Fokker-Planck 法の応用例として一般的な非線形一自由度系の不規則振動問題を取り上げこれの定式化を行った。Fokker-Planck 法を用いて応答量に関するモーメント方程式を求める際には、系が非線形の場合通常高次モーメントを式中含む場合が多くこれの処理が重要課題となる。そこで本章ではキウムラント打ち切り手法を Fokker-Planck 法に援用することにより種々の非線形系に適用できる汎用性の高い新たな方法を開発した。また別途実施したモンテカルロシミュレーションによる数値実験結果とも比較し本方法の妥当性を確認した。
- (6) 更に Fokker-Planck 法の応用例については、単に応答統計量を推定するのみならず、動的信頼性の評価手法を具体的に導出することにより非定常不規則入力を受ける非線形構造系の動的信頼性を評価する上での重要ポイント、手順を明らかにした。すなわち、
- (i) 動的信頼性の評価を行うには、一般に状態変数の確率密度関数が必要となる。このため本章では非定常確率密度を比較的簡単に、かつ任意の精度で求め得る新たな確率密度簡易推定法を提案した。これにより応答の推定から信頼性評価までが統一的に解析可能となった。
- (ii) 本章で取り扱った動的信頼性は初通過破壊と疲労問題である。特に疲労評価においては従来、応答のピーク値に対する確率密度は既知であることを前提にした展開が多い様であるが、このためピーク値に対する確率密度の仮定がきわめて重要な解析精度の支配要因となる。この様な評価上のリスクを避けるため本章においては応答のピーク値に対する確率密度を仮定することなしに、超過回数期待値から直接に累積疲労損傷期待値を推定できる手法を提案し、更に解析手法の妥当性をモンテカルロシミュレーションにより確認した。
- (iii) 動的信頼性評価手法の手順を示すため、非定常性を考慮した地震入力に対する Duffing タイプの非線形振動問題を取り上げ、これに対する初通過破壊確率及び疲労寿命の簡略推定を行った。

## 参考文献 (第2章)

- [1] 星谷 勝, 確率論手法による振動解析, (昭49), 鹿島出版会.
- [2] Crandall, S.H., Perturbation Technique for Random Vibration of Nonlinear Systems, Journal of Acoustical Soc. of America, Vol.35, No.11, (1963)
- [3] Roberts, J.B., Random Excitation of a Vibratory System with Autoparametric Interaction, Journal of Sound and Vibration, Vol.69, No.1, (1980), 101.
- [4] Ahmadi, G., Earthquake Response of Nonlinear Plates, Nuclear Eng. and Design, Vol.54, (1979), 407.
- [5] Wen, Y.K., Equivalent Linearization for Hysteretic Systems under Random Excitation, Journal of Applied Mechanics, Vol.47, No.1, (1980), 150.
- [6] Sakata, M. and Kimura, K., Calculation of the Non-Stationary Mean Square Response of a Non-Linear System Subjected to Non-White Excitation, Journal of Sound and Vibration, Vol.73, No.3, (1980), 333.
- [7] 洪 起, 確率論手法による構造物の必要塑性応答量解析, 日本建築学会論文報告集, No.289, (1980), 53.
- [8] 曾田五月也, 谷 賢信, 多層構造物の統計的耐震設計法に関する基礎的研究, 日本建築学会論文報告集, No.288, (1980), 97.
- [9] Ahmadi, G., Mean Square Response of a Duffing Oscillator to a Modulated White Noise Excitation by the Generalized Method of Equivalent Linearization, Journal of Sound and Vibration, Vol.71, No.1, (1980), 9.
- [10] Karnopp, D. and Brown, N., Random Vibration of Multidegree-of-Freedom Hysteretic Structures, Journal of Acous. Soc. of America, Vol.42, No.1, (1967), 54.
- [11] Iyengar, R.N. and Dash, P.K., Study of the Random Vibration of Nonlinear Systems by the Gaussian Closure Technique, Journal of Applied Mechanics, Vol.45, No.2, (1978), 393.
- [12] Atalik, T.S. and Utku, S., Stochastic Linearization of Multidegree-of-Freedom Nonlinear Systems, Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.4, (1976), 411.



- [13] Spanos, P.-T. and Iwan, W.D., On the Existence and Uniqueness of Solutions Generated by Equivalent Linearization, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Vol.13, No.2, (1978), 71.
- [14] Caughey, T.K., Derivation and Application of the Fokker-Planck Equation to Discrete Nonlinear Systems Subjected to White Random Excitation, *Journal of Acous. Soc. of America*, Vol.35, No.11, (1963), 1683.
- [15] 松島 豊, ホワイトノイズを受ける1自由度系の非線形ランダム応答, *日本建築学会論文報告集*, No.255, (1977), 17.
- [16] Roberts, J.B., Transient Response of Non-Linear Systems to Random Excitation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.74, No.1, (1981), 11.
- [17] Broch, J.T., Random Vibration of Non-Linear Systems, *Int. Res. Semin. Saf. Struct. Dyn. Loading*, (1978)
- [18] Iwan, W.D. and Spanos, P.-T., Response Envelope Statistics for Nonlinear Oscillators with Random Excitation, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.45, (1978), 170.
- [19] 藤田隆史, 服部 忍, 衝突振動系の定常不規則振動, *日本機械学会論文集*, Vol.45, No.397, (1979), 985.
- [20] 三好俊郎, 白鳥正樹 他2名, 有限要素法—構造要素の変形・破壊挙動の解析, (昭52), 実数出版.
- [21] Bouc, R., Forced Vibration of Mechanical Systems with Hysteresis, *Proc. of 4th Conference on Nonlinear Oscillation*, Prague, Czechoslovakia, (1967).
- [22] Wen, Y.K., Method for Random Vibration of Hysteretic Systems, *J. Am. Soc. Civil Eng.*, Vol.102, No.EM2, (1976), 249.
- [23] Mochio, T. and Shinozuka, M., Stochastic Equivalent Linearization for Nonlinear Structures Under Nonstationary Random Excitation, *Technical Report, Department of Civil Engineering and Engineering Mechanics, Columbia University*, (1984)
- [24] Soong, T.T., *Random Differential Equations in Science and Engineering*, Academic Press, (1973).
- [25] Meirovitch, L., *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff & Noordhoff, (1980)



- [26] Kanai,K., Semi-Empirical Formula for the Seismic Characteristics of the Ground. Bulletin of the Earthquake Research Institute, University of Tokyo, Vol.35, (1957), 309.
- [27] Mochio,T., Samaras,E. and Shinozuka,M., Stochastic Equivalent Linearization for Finite Element-Based Reliability Analysis, Proceedings of ICOSSAR'85, (1985), 1-375.
- [28] Chang,T-P., Mochio,T. and Samaras,E., Seismic Response Analysis of Nonlinear Structures, Journal of Probabilistic Engineering Mechanics, Vol.1, No.3, (1986), 157.
- [29] Baber,T.T. and Wen,Y.K., Stochastic Equivalent Linearization for Hysteretic,Degrading, Multistory Structures, Civil Engineering Studies, Structural Research Series No.471, University of Illinois, (1979)
- [30] Kaul,M.K. and Penzien,J., Stochastic Seismic Analysis of Yielding Offshore Towers, J. Am. Soc. Civil Eng., Vol.100, No.EM5, (1974), 1025.
- [31] 岡林隆敏, 不確定変量を有する動的系の非定常不規則応答, 土木学会論文報告集, No.308, (1981), 1.
- [32] Richardson,J.M., The Application of Truncated Hierarchy Techniques in the Solution of Stochastic Linear Differential Equation, Proc. Symp. Appl. Math., No.16, (1964), 290.
- [33] Haines,C.W., Hierarchy Methodos for Random Vibration of Elastic Strings and Beams, J. Engrg. math., No.1, (1967), 293.
- [34] 持尾隆士, 不規則外乱を受ける非線形構造系の動的信頼性解析, 日本機械学会論文集, Vol.49, No.445, (1983), 1455.
- [35] Wu, W.F. and Lin, Y.K., Cumulant-Neglect Closure for Non-Linear Oscillators under Random Parametric and External Excitations, Int.J.Non-Lin.Mech, vol.19, No.4, (1984), 349.
- [36] Ibrahim, R.A. et al., Stochastic Response of Nonlinear Dynamic Systems Based on a Non-Gaussian Closure, Journal of Applied Mechanics, Vol.52, (1985), 965.
- [37] Sun,J.Q. and Hsu,C.S., Cumulant-Neglect Closure Method for Nonlinear Systems under Random Excitations, Journal of Applied Mechanics, Vol.54, No.3, (1987), 649.

- [38] 太田光雄, 任意非線形整流素子の一般的な不規則応答解析, 応用物理, Vol.33, No.9, (1964), 632.
- [39] 生田 顕, 太田光雄 他2名, 任意雑音入力をもつ非定常非線形系の一応答解析, 広島大学工学部研究報告, Vol.29, (1980), 55.
- [40] Johnson, J.P. and Scott,R., Extension of Eigenfunction-Expansion Solutions of a Fokker-Planck Equation-I, J. Non-Linear Mech., Vol.14, (1979), 315.
- [41] 藤田隆史, 有脚液体容器の地震時疲労破壊に関する確率論的解析, 日本機械学会論文集, Vol.47, No.415, (1981), 298.
- [42] Lambert,R.G., Analysis of Fatigue under Random Vibration, Shock Vib. Bull., Vol.46, No.3 (1976), 55.
- [43] 松村和雄, 牧野 稔, ポアソン確率モデルから求められる最大地動の極値分布, 日本建築学会論文報告集, Vol.273, (1978), 55.

### 第 3 章

## 線形構造系における荷重組合せを 考慮した初通過破壊評価法の開発

- 3.1 荷重組合せ問題について
- 3.2 変位制限型動的信頼性解析
- 3.3 強度制限型動的信頼性解析
- 3.4 動的荷重の相関を考慮した場合の取り扱い
- 3.5 数値計算例
- 3.6 まとめ

荷重組合せ現象の概要について述べるとともに、多自由度線形構造物を対象とした荷重組合せ効果を考慮する動的信頼性評価手法について述べる。

### 3.1 荷重組合せ問題について

本節では構造信頼性の中で取り扱われる荷重組合せ現象の概要を述べるとともに、荷重組合せ問題に対する種々の近似解法の概略と特徴を述べることでより動的信頼性解析に適した近似理論の選定を行う。

#### (1) 荷重組合せ問題の概要

構造物の破壊形式には初通過破壊、疲労、クリープ等の種々があるが本章では初通過破壊について述べる。また本節では便宜上「荷重」という表現を用いるがこれは正確には「荷重効果」すなわち荷重が作用した時の注目している要素の応答量（変位、応力 etc.）を示している。

初通過破壊問題での荷重組合せ現象の特徴の一つを示したものが図3.1である。すなわち荷重組合せ問題とは荷重1と荷重2の合計の応答量の寿命中最大値 $S_{max}(t)$ がある許容レベルを超過する確率を論じる問題であり、 $S_{max}(t)$ の確率分布関数をいかに推定するかがポイントとなる。図3.1でも明らかな様に組合せ荷重での最大値発

生時刻 $T'$ は一般に単独荷重時の最大値発生時刻 $T_1$ 、 $T_2$ とは一致せず、また最大値についても単独荷重時の最大値を単純に加算した値よりもかなり低くなる。

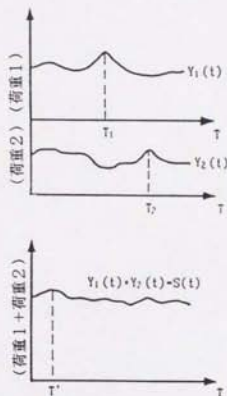


図3.1 組合せ荷重の概念図

構造物の耐用期間中に各荷重の最大値が同時に起こる可能性は極めて小さい（同時に起こるならば評価は非常に簡単になる。）ので、従来の構造設計規準・指針等においては、複数種の荷重組合せを考慮せねばならない場合の荷重値としては単純に各荷重値の最大値を合計したものよりかなり低目になる様規定している。しかし前記規準・指針での荷重低減率は経験的に決められたものであり、これをより合理的に設定しようとするれば各荷重単独としての確率分布特性のみならず各荷重間の相関性を規定する確率情報が必要となる。この点から考えても本荷重組合せ問題は解析上単純な現象ではないことが予想される。

更に、組合せられる荷重の種類により解析手法も異なってくる。荷重の種類には図3.2の様に三つのタイプがある。Aは永久荷重と呼ばれ寿命中持続して作用し、しかもそのレベルはほとんど変動しないもので死荷重がこれに相当する。Bは変動荷重と呼ばれ活荷重がこれの代表である。タイプCは過渡荷重であり継続時間は短くまた稀にしか発生しないもので地震や突風等がこのタイプに属する。当然のことながら荷重タイプB、Cを含む荷重組合せ問題の場合が取り扱いはより複雑となる。

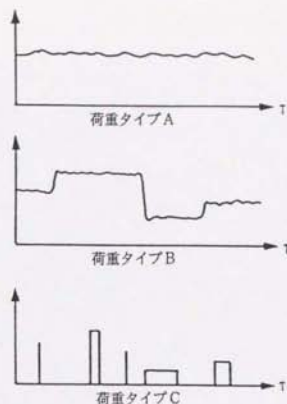


図3.2 荷重の種類

以上の荷重組合せ問題に対するかなり厳密な解析的取り扱いが Hasofer<sup>[1]</sup>, Bosshard<sup>[2]</sup>, Gaver & Jacobs<sup>[3]</sup> らにより行われているが、いずれも実際の計算には困難を伴ない、しかも現実の荷重歴としてのモデルとするには制限が大きく実用的ではない。このため次項に示す様な種々の近似解法が提案されている。

② 荷重組合せ問題に対する近似的解法

① Turkstra の方法<sup>14)</sup>

近似解法として最も代表的な考え方の一つであり、この思想は ANSI A58.1-1982<sup>15)</sup>の中にも取り入れられている。数式表現すれば

$$\max_i [S(t)] \approx \max_i \left\{ \max_{i=1}^N [Y_i(t)] + \sum_{i=1}^N Y_i(t) \right\} \quad (3.1)$$

$$\text{ただし} \quad S(t) = \sum_{i=1}^N Y_i(t)$$

となる。上式において  $Y_j$  は  $j$  番目の確率過程  $Y_j(t)$  の任意時刻における確率変数としての値である。(3.1) 式の様に表現することにより  $S(t)$  の最大値を確率過程の中でとらえることなしに、確率変数の次元のみで把握することが可能となる。

(3.1) 式で与えられる近似式は表現が簡単で分かり易いが、 $Y_i(t)$  ( $i=1, \dots, N$ ) いずれかが最大になる時点以外で  $S(t)$  が最大になる確率を考慮していないのでその意味では非安全サイドの方法である。

② Ferry Borges & Castanheta の方法<sup>16)</sup>

図3.3の通り各荷重の荷重一定継続時間の比  $\tau_i/\tau_j$  を整数にするという制限を設けることにより以降の解析を容易にすることができるメリットを有する方法である。

しかし対象とする自然界の動的荷重に対して図3.3の様な制限を設けることは相当に限定されたモデルとなるため実用性の面からはほとんど本方法は使用されていない。

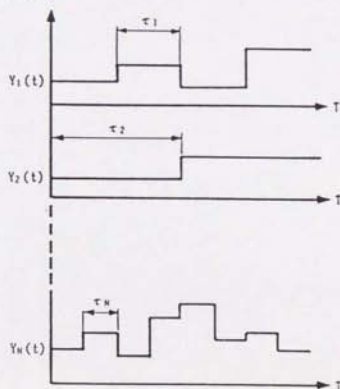


図3.3 継続時間整数比タイプの荷重

#### ③ S R S S 法<sup>[7]</sup>

この方法は耐震解析の応答スペクトル法でしばしば用いられる方法と同様で各荷重の最大値の二乗和平方根値をもって組合せ荷重の最大値とする考え方である。数式表現すれば

$$\max[S(t)] \cong \sqrt{\sum_{i=1}^N \{\max[V_i(t)]\}^2} \quad (3.2)$$

となる。

#### ④ Kiureghian の方法<sup>[8]</sup>

組合せ荷重の最大値分布に関する統計量を、単独荷重の確率分布特性を知ることなしに1次及び2次モーメントのみによって近似的に表現する方法であり以下の様になる。

$$E[S_{\max}] = \sum_{i=1}^N E[V_i] + p \sum_{i=1}^N \sigma_{V_i}^2 \quad (3.3)$$

$$\sigma_{S_{\max}}^2 = q \sum_{i=1}^N \sigma_{V_i}^2 \quad (3.4)$$

上式において $E[\cdot]$ 、 $\sigma^2$ は各々期待値、分散値を示す。本方法は一見、実用的かつ簡便な手法の様に思われるが、実際の適用に際しては組合せ荷重歴の変動を特徴づけるパラメータ $p$ 、 $q$ の選定に経験を要し更に理論的裏付けにも限界がある等、今後いくつかの改良すべき点を残した手法であると言える。

#### ⑤ Load Coincidence (LC) 法<sup>[9]</sup>

Y.K.Wen により提案されたこの方法では過渡荷重間での同時発生効果までも考慮できる特徴を有しており実用性が高く、また後述の如く本研究でも採用した手法であるため以下に若干詳細にLC法について述べる。

一般的な非定常確率過程における初通過問題での閾値横断確率の上下限はShinozuka ら<sup>[10]</sup>により次式の様に求められている。



$$P\{A_1(t_1) \cup A_2(t_2)\} < P_Y(T; -\alpha_1, \alpha_2) < \int_0^T [\nu^+(\alpha_2; t) + \nu^-(-\alpha_1; t)] dt \\ + P\{Y(0) \leq -\alpha_1(0)\} + P\{Y(0) \geq \alpha_2(0)\} - P\{A_1(t_1) \cap A_2(t_2)\} \quad (3.5)$$

ただし

$$A_1(t_1) = \{Y(t_1) \leq -\alpha_1(t_1) : 0 \leq t_1 \leq T\}$$

$$A_2(t_2) = \{Y(t_2) \geq \alpha_2(t_2) : 0 \leq t_2 \leq T\}$$

$\nu^+(\alpha_2; t)$  : 時刻  $t$  において  $\alpha_2$  を正勾配で超過する単位時間  
当りの超過回数期待値

$\nu^-(-\alpha_1; t)$  : 時刻  $t$  において  $-\alpha_1$  を負勾配で超過する単位時間  
当りの超過回数期待値

(3.5) 式において定常確率過程を想定し、かつ絶対値としての最大値を対象にすることとして片側限界のみについて考えてみると (3.5) 式は次の様になる。

$$A_{20} < P_Y(T; -\infty, \alpha) < \nu(\alpha)T + A_{20} \quad (3.6)$$

ただし

$$A_{20} = P\{Y(0) \geq \alpha\}$$

上式において上限値に関する不等式、すなわち

$$P_Y(T; -\infty, \alpha) < \nu(\alpha)T + A_{20} \quad (3.7)$$

の形は別途 Leadbetter<sup>[11]</sup>、更に Larrabee<sup>[12]</sup>によっても求められており非常に有用な関係式である。ところで (3.7) 式における  $A_{20}$  は時刻 0 において既に閾値  $\alpha$  を超過している確率であるが通常はほぼ 0 とみなせ、また不等号による表現は閾値横断確率の最大限界値を示しているわけであるから安全側の評価として等号で代用することにすれば、閾値横断確率は次の形で近似化できる。

$$P_Y(T; -\infty, \alpha) = \nu(\alpha)T \quad (3.8)$$

(3.8) 式では荷重組合せ問題を考慮しているわけではないが、Wen はこれを拡張して平均超過回数期待値  $\nu^*$  を導入することにより、荷重組合せを考慮した構造破壊確率  $P_f(T)$  を次の様に導出した<sup>13)</sup>。

$$P_f(T) = \nu^* T \quad (3.9)$$

$$\nu^* = \sum_{i=1}^N \nu_i \tilde{P}_i + \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^N \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \tilde{P}_{ij} + \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j \neq k)}}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \nu_{ijk} \tilde{P}_{ijk} + \dots \quad (3.10)$$

ここで

$\tilde{P}_i$  : 荷重  $F_i$  のみが存在し、かつ発生する時の平均発生率  
(1/year)

$\tilde{P}_{ij}$  : 荷重  $F_i$  と  $F_j$  のみが存在し、かつ発生する時の平均発生率  
(1/year)

$\nu_i$  : 荷重  $F_i$  のみが存在し、かつ発生した時、限界値を超過する条件付超過回数期待値 ( $= \mu_{d_i} \hat{\nu}_i$  ;  $\hat{\nu}_i$  は単位時間当りの条件付超過回数期待値)

$\nu_{ij}$  : 荷重  $F_i$  と  $F_j$  のみが存在し、かつ発生した時、限界値を超過する条件付超過回数期待値 ( $= \mu_{d_{ij}} \hat{\nu}_{ij}$  ;  $\hat{\nu}_{ij}$  は単位時間当りの条件付超過回数期待値)

$\mu_{d_i}$  : 荷重  $F_i$  のみが存在し、かつ発生する時の平均継続時間 (sec)

$\mu_{d_{ij}}$  : 荷重  $F_i$ ,  $F_j$  が存在し、かつ同時に発生する時の平均継続時間 ( $\approx \mu_{d_i} \mu_{d_j} / (\mu_{d_i} + \mu_{d_j})$ ) (sec)

$\tilde{P}_{ijk}$ ,  $\nu_{ijk}$ ,  $\mu_{d_{ijk}}$  ... についても同様

(3.9) (3.10) 両式による評価が LC 法と呼ばれるものであり、この方法の妥当性はモンテカルロシミュレーションにより確認されている<sup>13)</sup>。

#### ⑩ Larrabee & Cornell の方法<sup>14)</sup>

LC 法での  $\nu^*$  がコンボリーションを含む形で表現されたものとみなすことができる。2 荷重の場合に対する定式化を以下に示す。

$$\nu^* = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(y) \nu_j(a-y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} f_j(y) \nu_i(a-y) dy \quad (3.11)$$

(3.11) 式における  $f_{\lambda}(y)$  ( $\ell = i$  or  $j$ ) は、荷重  $\ell$  に対する確率密度関数である。なお (3.11) 式は基本的には (3.10) 式と一致することが確かめられている<sup>[14]</sup>。

以上6つの近似解法について述べたが、動的信頼性解析の中に取り込む場合、適したものとそうでないものがある。すなわち①～③の方法では過渡荷重間の同時発生効果を適切に表現することができない。④の方法ではLC法を採用することで過渡荷重の同時発生効果を考慮することができるが、パラメータの選定法に問題が残されている。結局、荷重組合せ問題を含んで動的信頼性解析に適した方法となると⑤、⑥の方法と言うことになるが、⑥の方法では⑤の方法に比べ積分操作が追加された分計算が煩雑となり、かつ数値計算上の精度低下の可能性を含むことになる。

以上の理由により荷重組合せ問題を含む動的信頼性解析には⑤の方法がもっとも実用的な方法であると判断し、本研究ではLC法を採用することとした。

### 3.2 変位制限型動的信頼性解析

本節では複数種の動的荷重を受ける多自由度線形構造物において、その応答変位量が信頼度を規定することになる場合の初通過破壊問題を対象とした動的信頼性評価手法について述べる。

#### (1) 限界状態の定義と超過回数期待値

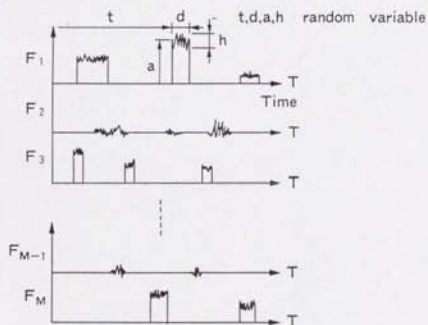
構造物の信頼性評価では通常応力ベースで解析が行われることが多いが、現実の問題としてはサービス、営業、保全性管理等の面から構造強度より変位自身が対象となることもある。本節ではこの様な変位量により信頼度が規定される問題に対する定式化を行う。

構造物に作用する動的荷重のモデルとして図3.4を考える。なおモデル化に際しては以下の仮定を設定する。

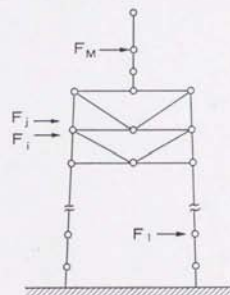
- ① 動荷重が作用する構造物はN自由度系線形連続体構造物。
- ② 各節点に作用する動荷重の個数をMとし、M個の荷重は同一節点に集中しても良い。
- ③ 動荷重モデルは図3.4に示す様な平均値を含むものと含まないものとの混合とする。ただしこれらの荷重は同時には2個までしか重ならない(すなわち3個以上の同時発生確率は非常に小さいとして無視)。
- ④ 各動荷重は統計的に独立とする。

上記④の仮定が成立する時、構造物全体としての初通過破壊確率は荷重組合せ問題にL C法を用いるとすれば(3.9)(3.10)式により求めることができる。

更に $\bar{P}_i, \bar{P}_{ij}$ についても確率ポアソン過程を仮定した場合には近似的に以下の表現が可能である<sup>(1)</sup>。



(a) 動荷重モデル



(b) 複数種の動的荷重が作用する構造物

図 3.4 組合せ荷重を受ける構造物の概念

$$\tilde{p}_i = \lambda_i \quad (3.12)$$

$$\tilde{p}_{ij} = \lambda_i \lambda_j (\mu_{di} + \mu_{dj}) \quad (3.13)$$

ここで  $\lambda_k (k=i, j)$  は荷重  $F_k$  の平均発生率 (1/年),  $\mu_{dk}$  は荷重  $F_k$  の平均継続時間 (年) である。

故に  $\hat{v}_i, \hat{v}_{ij}$  を計算すれば破壊確率  $P_f(T)$  が求まることになる。

変位制限タイプの限界状態として次の形を定義する。

非破壊領域に対して,

$$\bigcap_{k=1}^N \{ |x_k(t)| \leq d_k, 0 \leq t \leq T \} \quad (3.14)$$

ここで  $x_k(t)$  は  $k$  番目の自由度における絶対応答変位であり  $d_k$  は  $x_k(t)$  に対する閾値を示している。

この時本問題は  $N$  次元ランダムベクトルが (3.14) 式で表わされる限界状態表面を通過する初通過破壊問題に帰着される。3次元の時の概念図を図3.5に示す。限界状態が (3.14) 式で表わされる場合の  $\hat{v}_i, \hat{v}_{ij}$  は厳密には次のようになる<sup>115)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \hat{v}_i &= \sum_{k=1}^N v_{ik} + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N v_{ijk} + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N v_{ijkl} + \dots \dots \dots \\ \hat{v}_{ij} &= \sum_{k=1}^N v_{ijik} + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N v_{ijk} + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N v_{ijkl} + \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

ここで,

$v_{ik}$  : 荷重  $F_i$  のみが存在しかつ発生している時, 絶対変位  $x_k(t)$  以外の絶対変位  $x_d(t) (d \neq k)$  は非破壊領域にあるという条件下での,  $x_k(t)$  が限界状態を超過する単位時間当りの条件付超過回数期待値

$\nu_{ik_2}$ : 荷重 $F_i$ のみが存在しかつ発生している時、絶対変位 $x_k(t)$ 及び $x_d(t)$ 以外の絶対変位は非破壊領域にあるという条件下での、 $x_k(t)$ と $x_d(t)$ が同時に限界状態を超過する単位時間当りの条件付超過回数期待値

$\nu_{ij_{ik}}$ : 荷重 $F_i$ と $F_j$ が存在しかつ同時に発生している時、絶対変位 $x_k(t)$ 以外の絶対変位は非破壊領域にあるという条件下での、 $x_k(t)$ が限界状態を超過する単位時間当りの条件付超過回数期待値

$\nu_{ij_{kd}}$ : .....

以下同様

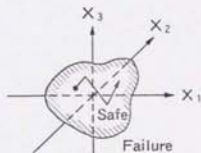


図3.5 3次元ランダムベクトル空間における限界状態表面

である。しかし(3.15)式における右辺第2項以上は第1項に比較して小さいのでこれを省略して $\hat{\nu}_i, \hat{\nu}_{ij}$ に関する近似式

$$\left. \begin{aligned} \hat{\nu}_i &= \sum_{k=1}^N \nu_{ik} \\ \hat{\nu}_{ij} &= \sum_{k=1}^N \nu_{ij_{ik}} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

を採用する。更に $\nu_{ik}$ 及び $\nu_{ij_{ik}}$ は(条件無)超過回数期待値 $\nu_{ik}, \nu_{ij_{ik}}$ と次の関係で結ばれる。

$$\nu_{ik} = P_{ik} \hat{\nu}_{ik} \quad (3.17)$$

$$\nu_{ij_{ik}} = P_{ij_{ik}} \hat{\nu}_{ij_{ik}} \quad (3.18)$$



ここで,

$$P_{i,k} = P\left(\bigcap_{k=1}^N [|x_{di}(t)| \leq d_k, 0 \leq t \leq T]\right) \quad (3.19)$$

$$P_{i,jk} = P\left(\bigcap_{k=1}^N [|x_{dij}(t)| \leq d_k, 0 \leq t \leq T]\right) \quad (3.20)$$

である。ただし  $x_{di}(t)$  は荷重  $F_i$  が作用した時の  $i$  番目の自由度における絶対変位,  $x_{dij}(t)$  は荷重  $F_i, F_j$  が作用した時の絶対変位を表わしている。

(3.16) ~ (3.18) 式において次の理由,

- ① 通常計算される量は  $\nu_{ik}, \nu_{ijk}$  の方である。
- ② (3.19) (3.20) 式の左辺の値は 0 から 1 までの値であり、故に

$$\nu_{ik} > \nu_{ik}, \nu_{ijk} > \nu_{ijk}$$

- ③  $P_{ik}$  及び  $P_{ijk}$  の値は  $d_k$  が大きくなるにつれ 1 に近づく。
- ④  $\nu_{ik}$  及び  $\nu_{ijk}$  を  $\nu_{ik}$  及び  $\nu_{ijk}$  で代用することは常に安全サイドの評価になる。

により  $\hat{\nu}_i, \hat{\nu}_{ij}$  を次の形で安全側に近似する。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\nu}_i &= \sum_{k=1}^N \nu_{ik} \\ \hat{\nu}_{ij} &= \sum_{k=1}^N \nu_{ijk} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

故に最終的には  $\nu_{ik}$  及び  $\nu_{ijk}$  を求めることによりシステムのトータル破壊確率  $P_f(T)$  を得ることができる。

(2) 平均値を含む動的荷重2個の同時発生を考慮する場合

- (i)  $v_{ijk}$  の導出 (荷重  $F_i, F_j$  が同時に作用している時の  $k$  番目の自由度に対する単位時間当りの超過回数期待値)

このケースの場合には荷重  $F_i$  および  $F_j$  が平均値を含んでいるが、まず平均値 0 の解析を行う。

すなわち、

$$\left. \begin{aligned} F_i &= F_i^0 + F_i \\ F_j &= F_j^0 + F_j \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

と置いた時の  $F_i, F_j$  について振動を考える。なお (3.22) 式において  $F_i^0, F_j^0$  が平均値成分を示し、 $F_i, F_j$  が平均 0 のランダム過程を示している。運動方程式は一般に次の形で表わされる。

$$[M]\ddot{x} + [C]\dot{x} + [K]x = \{A_i\}F_i + \{A_j\}F_j \quad (3.23)$$

(3.23) 式で  $\{A_i\}$  は荷重  $F_i$  に関する単位ベクトルを表わしている。(3.23) 式は線形系であるので荷重  $F_i, F_j$  に対する重ね合せが可能であり、更にモーダルアナリシスの手法 (近年、近接モード間の相関までも考慮した CQC 法の採用例が増加しているが、CQC 法を用いれば応答の数値が変化するのみで、本論文で提案する動的信頼性評価法に本質的な差が発生するわけではない。このため本論文では、従来より実績のあるモード間の相関は無視した通常のモーダル法を用いている。) を用いることにより  $k$  番目の自由度に対する絶対変位  $x_k(t)$  は以下の通りに表わされる。

$$x_k(t) = \sum_{a=1}^N \phi_{ka} \{ Y_a(t) + Z_a(t) \} \quad (3.24)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_a(t) &= \frac{b_{ja}}{w_a} \int_0^t h_a(t-\tau) F_i(\tau) d\tau \\ Z_a(t) &= \frac{b_{ja}}{w_a} \int_0^t h_a(t-\tau) F_j(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

(3.24) 式における  $\phi_{kA}$  はモーダルマトリックス ( $=[\Phi]$ ) での  $k$  番目の自由度の  $\ell$  次成分を示す。また (3.25) 式での  $h_A(\cdot)$ ,  $m_A$  は各々  $\ell$  次での基準座標系におけるインパルス応答関数、モーダル質量を表わし、更に  $b_{rA}(r=i, j)$  はベクトル  $[\Phi]^T \{A_r\}$  の  $\ell$  次成分を表わしている。今モーダル座標系においてモーダルダンピングが小さくまた固有振動数が広く分散している場合を仮定するとこの時のモード間の相関は小さいのでこれを無視することとし、更に作用動荷重間には仮定により独立であることを考慮すれば応答分散値  $\sigma_{x_k}^2$  が次の様に得られる。

$$\sigma_{x_k}^2 = \sum_{A=1}^N \phi_{kA}^2 \{ E\{Y_A^2(t)\} + E\{Z_A^2(t)\} \} \quad (3.26)$$

一方  $F_i, F_j$  は平均値 0 の定常正規性ホワイトノイズであると仮定すれば以下の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} E\{F_i(t)\} &= E\{F_j(t)\} = 0 \\ E\{F_i(t)F_i(t+t')\} &= 2\pi S_i \delta(t') \\ E\{F_j(t)F_j(t+t')\} &= 2\pi S_j \delta(t') \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

ここで  $S_i, S_j$  は各々荷重  $F_i, F_j$  のパワースペクトル強度であり  $\delta(t')$  はデルタ関数である。上式の関係を用いると不規則振動理論により応答分散値の具体的な表現が得られる。

$$\sigma_{x_k}^2 = g_i S_i + g_j S_j \quad ; \quad g_r = \frac{\pi}{2} \sum_{A=1}^N \frac{\phi_{kA}^2 b_{rA}^2}{\xi_A m_A^2 \omega_A^3} \quad (r=i, j) \quad (3.28)$$

同様にして速度に関する応答分散値  $\sigma_{\dot{x}_k}^2$  は、

$$\sigma_{\dot{x}_k}^2 = h_i S_i + h_j S_j \quad ; \quad h_r = \frac{\pi}{2} \sum_{A=1}^N \frac{\phi_{kA}^2 b_{rA}^2}{\xi_A m_A^2 \omega_A^3} \quad (r=i, j) \quad (3.29)$$

となる。なお (3.28) (3.29) 式における  $\bar{\epsilon}_k$ ,  $w_k$  は各々  $k$  次のモーダルダンピング、固有円振動数を表わす。

次のステップとして  $k$  番目の自由度の応答変位が正勾配で  $x=d_k$  を横断する単位時間当りの超過回数期待値  $\nu_{i,j,k}^{++}$  を求める。今入力としての荷重は定常ガウス過程であるから応答値  $x_k$  も定常ガウス過程である。したがって  $\nu_{i,j,k}^{++}$  は  $\sigma_{x_k}$ ,  $\sigma_{\dot{x}_k}$  を用いて次の形で表される。

$$\begin{aligned}\nu_{i,j,k}^{++} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}_k}}{\sigma_{x_k}} \exp\left(-\frac{d_k^2}{2\sigma_{x_k}^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{h_i S_i + h_j S_j}}{\sqrt{g_i S_i + g_j S_j}} \exp\left\{-\frac{d_k^2}{2(g_i S_i + g_j S_j)}\right\}\end{aligned}\quad (3.30)$$

ところで以上の解析は平均値を含まない荷重  $F_i$ ,  $F_j$  について行われてきたが、実際には平均値を含んでおりその分補正が必要となる。次にその方法について述べる。

(3.22) 式において平均値  $F_i^0$ ,  $F_j^0$  は同符号となることも異符号となることもあり得るが、解析上の煩雑さを避けるために常に同符号かつ正と仮定する。これは信頼性評価上、一般性を失うこと無しに安全側の仮定であると考えて良い。更に  $F_i^0$ ,  $F_j^0$  は荷重発生中変動が小さいものとすれば、これは確率過程として取り扱う必要はなく確率変数として取り扱えば良い。この時  $F_i^0$ ,  $F_j^0$  は静的荷重となるので  $k$  番目の自由度への効果も静的に求められる。この静的効果  $\tau_{i,j,k}$  は影響係数  $\beta$  を用いて次の様に表わされる。

$$\tau_{i,j,k} = \beta_{ik} F_i^0 + \beta_{jk} F_j^0 \quad (3.31)$$

$\tau_{i,j,k}$  を用いて (3.30) 式を補正すると、

$$\nu_{i,j,k}^{++} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{h_i S_i + h_j S_j}}{\sqrt{g_i S_i + g_j S_j}} \exp\left\{-\frac{(d_k - \tau_{i,j,k})^2}{2(g_i S_i + g_j S_j)}\right\} \quad (3.32)$$

が得られ、同様の操作により負側の値  $\nu_{i,j,k}^{--}$  も得られるので全体としての  $\nu_{i,j,k}$  は

$$\nu_{ijk}^+ = \nu_{ijk}^{*+} + \nu_{ijk}^{*-} \quad (3.33)$$

となる。(3.33)式では常に $\nu_{ijk}^{*+} > \nu_{ijk}^{*-}$ であるので、 $\nu_{ijk}^+$ に対する安全側の近似値として

$$\nu_{ijk}^+ \approx 2\nu_{ijk}^{*+} \quad (3.34)$$

が得られる。(3.34)式において $S_i$ 、 $S_j$ 及び $\tau_{ijk}$ が確定値であれば $\nu_{ijk}^+$ の値が完全に定まることになる。しかし明らかにそれらの値は確率変数であるのでこの点を考慮した次の形が $\nu_{ijk}^+$ に対する最終的な表現となる。

$$\begin{aligned} \nu_{ijk}^+ = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sqrt{h_i S_i + h_j S_j}}{\sqrt{g_i S_i + g_j S_j}} \exp \left\{ - \frac{(d_k - \tau_{ijk})^2}{2(g_i S_i + g_j S_j)} \right\} \\ & \times f_{S_i}(S_i) f_{S_j}(S_j) f_{\tau_{ijk}}(\tau_{ijk}) dS_i dS_j d\tau_{ijk} \end{aligned} \quad (3.35)$$

ここで $f_{S_i}(\cdot)$ 、 $f_{S_j}(\cdot)$ 及び $f_{\tau_{ijk}}(\cdot)$ は各々 $S_i$ 、 $S_j$ 及び $\tau_{ijk}$ に対する確率密度関数を示している。

#### (i) $\nu_{ijk}^+$ の具体的計算法

$\nu_{ijk}^+$ を(3.36)式より計算するには $S_i$ 、 $S_j$ 及び $\tau_{ijk}$ に関する確率密度関数の形が必要となる。ところで $\tau_{ijk}$ については(3.31)式より $F_i^0$ 、 $F_j^0$ で構成されるため、それらの確率密度関数が与えられれば自動的に $f_{\tau_{ijk}}(\tau_{ijk})$ も求められることになる。以下に $F_i^0$ 、 $F_j^0$ の分布形の仮定をベースにした場合の $\nu_{ijk}^+$ の具体的算出法を述べる。

#### ① $F_i^0$ 、 $F_j^0$ が一様分布の場合

$F_i^0$ 、 $F_j^0$ に対する確率密度関数は次の通りである。

$$f_{F_i^0}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta_i} & (0 < x < \delta_i) \\ 0 & (x \geq \delta_i) \end{cases} \quad (3.36)$$

$$f_{Fq}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta_j} & (0 < x < \delta_j) \\ 0 & (x \geq \delta_j) \end{cases} \quad (3.37)$$

(3.31), (3.36) 及び (3.37) 式を用いて  $f_{\tau_{ijk}}(\tau_{ijk})$  が求まるが、これは  $\tau_{ijk}$  の範囲により次の様な形に分類される。

a)  $\beta_{ik}\delta_i \geq \beta_{jk}\delta_j$  の場合

$$0 < \tau_{ijk} \leq \beta_{jk}\delta_j : f_{\tau_{ijk}}(\tau_{ijk}) = \frac{\tau_{ijk}}{\beta_{ik}\beta_{jk}\delta_i\delta_j} \quad (3.38)$$

$$\beta_{jk}\delta_j < \tau_{ijk} \leq \beta_{ik}\delta_i : f_{\tau_{ijk}}(\tau_{ijk}) = \frac{1}{\beta_{ik}\delta_i} \quad (3.39)$$

$$\beta_{ik}\delta_i < \tau_{ijk} \leq \beta_{ik}\delta_i + \beta_{jk}\delta_j : f_{\tau_{ijk}}(\tau_{ijk}) = \frac{\beta_{ik}\delta_i + \beta_{jk}\delta_j - \tau_{ijk}}{\beta_{ik}\beta_{jk}\delta_i\delta_j} \quad (3.40)$$

$$\beta_{ik}\delta_i + \beta_{jk}\delta_j < \tau_{ijk} : f_{\tau_{ijk}}(\tau_{ijk}) = 0 \quad (3.41)$$

b)  $\beta_{jk}\delta_j > \beta_{ik}\delta_i$  の場合

$$0 < \tau_{ijk} \leq \beta_{ik}\delta_i : f_{\tau_{ijk}}(\tau_{ijk}) = \frac{\tau_{ijk}}{\beta_{ik}\beta_{jk}\delta_i\delta_j} \quad (3.42)$$

$$\beta_{ik}\delta_i < \tau_{ijk} \leq \beta_{jk}\delta_j : f_{\tau_{ijk}}(\tau_{ijk}) = \frac{1}{\beta_{jk}\delta_j} \quad (3.43)$$

$$\beta_{jk}\delta_j < \tau_{ijk} \leq \beta_{ik}\delta_i + \beta_{jk}\delta_j : f_{\tau_{ijk}}(\tau_{ijk}) = \frac{\beta_{ik}\delta_i + \beta_{jk}\delta_j - \tau_{ijk}}{\beta_{ik}\beta_{jk}\delta_i\delta_j} \quad (3.44)$$

$$\beta_{ik}\delta_i + \beta_{jk}\delta_j < \tau_{ijk} : f_{\tau_{ijk}}(\tau_{ijk}) = 0 \quad (3.45)$$

次に  $f_{S_i}(S_i)$ ,  $f_{S_j}(S_j)$  についても一様分布を仮定する。

$$f_{S_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\tau_i} & (0 < x < \tau_i) \\ 0 & (x \geq \tau_i) \end{cases} \quad (3.46)$$

$$f_{s_j}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_j} & (0 < x < \varepsilon_j) \\ 0 & (x \geq \varepsilon_j) \end{cases} \quad (3.47)$$

結局 (3.38)~(3.47) 式を (3.35) 式に代入することにより  $\nu_{ijk}$  が次の形で求まる。

$$\begin{aligned} \nu_{ijk} = & \frac{1}{\varepsilon \theta_2 \varepsilon_i \varepsilon_j} \left[ \int_0^{\varepsilon_i} \int_0^{\varepsilon_j} \int_0^{\theta_1} \frac{\tau_{ijk} \sqrt{h_i S_i + h_j S_j}}{\theta_1 \sqrt{g_i S_i + g_j S_j}} \right. \\ & \times \exp \left\{ -\frac{(d_k - \tau_{ijk})^2}{2(g_i S_i + g_j S_j)} \right\} dS_i dS_j d\tau_{ijk} \\ & + \int_0^{\varepsilon_i} \int_0^{\varepsilon_j} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{h_i S_i + h_j S_j}}{\sqrt{g_i S_i + g_j S_j}} \exp \left\{ -\frac{(d_k - \tau_{ijk})^2}{2(g_i S_i + g_j S_j)} \right\} \\ & \times dS_i dS_j d\tau_{ijk} + \int_0^{\varepsilon_i} \int_0^{\varepsilon_j} \int_{\theta_2}^{\theta_1 + \theta_2} \frac{(\theta_1 + \theta_2 - \tau_{ijk}) \sqrt{h_i S_i + h_j S_j}}{\theta_1 \sqrt{g_i S_i + g_j S_j}} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{(d_k - \tau_{ijk})^2}{2(g_i S_i + g_j S_j)} \right\} dS_i dS_j d\tau_{ijk} \Big] \quad (3.48) \end{aligned}$$

ここで、

$$\beta_{ik} \delta_i \geq \beta_{jk} \delta_j \text{ の時: } \theta_1 = \beta_{jk} \delta_j, \theta_2 = \beta_{ik} \delta_i$$

$$\beta_{jk} \delta_j \geq \beta_{ik} \delta_i \text{ の時: } \theta_1 = \beta_{ik} \delta_i, \theta_2 = \beta_{jk} \delta_j$$

(3.48) 式は通常の三重積分であるので、これを数値計算することにより最終的な  $\nu_{ijk}$  の値を求めることができる。

②  $F_i^0, F_j^0$  がレーリー分布の場合

$F_i^0, F_j^0$  に対する確率密度関数は次の通りである。

$$f_{F_i^0}(x) = \frac{x}{\varepsilon_i^2} \exp \left( -\frac{x^2}{2\varepsilon_i^2} \right) \quad (0 < x < \infty) \quad (3.49)$$

$$f_{F_j^0}(x) = \frac{x}{\varepsilon_j^2} \exp \left( -\frac{x^2}{2\varepsilon_j^2} \right) \quad (0 < x < \infty) \quad (3.50)$$



(3.31), (3.49) 及び (3.50) 式より  $f_{\tau_{ijk}}(\tau_{ijk})$  が次の様に求まる。

$$f_{\tau_{ijk}}(\tau_{ijk}) = \frac{1}{e^c \beta_{ik}^2 \beta_{jk}^2 \varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2} \left[ \frac{(\tau_{ijk} - b) e^{-ab^2}}{2a} + \frac{\{2ab(\tau_{ijk} - b) - 1\} \text{Erf}(-b\sqrt{a})}{2a\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \right] \quad (3.51)$$

ここで,

$$a = \frac{(\beta_{jk}^2 \varepsilon_j^2 + \beta_{ik}^2 \varepsilon_i^2)}{2\beta_{ik}^2 \beta_{jk}^2 \varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2}, \quad b = \frac{\beta_{ik}^2 \varepsilon_i^2 \tau_{ijk}}{(\beta_{ik}^2 \varepsilon_i^2 + \beta_{jk}^2 \varepsilon_j^2)}$$

$$c = \frac{\tau_{ijk}^2}{2(\beta_{jk}^2 \varepsilon_j^2 + \beta_{ik}^2 \varepsilon_i^2)}, \quad \text{Erf}(x) = \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

更に  $f_{S_i}(S_i)$ ,  $f_{S_j}(S_j)$  についてもレーリー分布を考えると,

$$f_{S_i}(x) = \frac{x}{\eta_i^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\eta_i^2}\right) \quad (0 < x < \infty) \quad (3.52)$$

$$f_{S_j}(x) = \frac{x}{\eta_j^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\eta_j^2}\right) \quad (0 < x < \infty) \quad (3.53)$$

であるので (3.51)~(3.53) 式を (3.35) 式に代入することにより  $\nu_{ijk}$  が以下の様に求まる。

$$\nu_{ijk} = \frac{1}{\pi \beta_{ik}^2 \beta_{jk}^2 \varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2 \eta_i^2 \eta_j^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sqrt{h_i S_i + h_j S_j}}{\sqrt{g_i S_i + g_j S_j}} \times \exp\left\{-\frac{(d_k - \tau_{ijk})^2}{2(g_i S_i + g_j S_j)} - \frac{S_i^2}{2\eta_i^2} - \frac{S_j^2}{2\eta_j^2}\right\} \times \frac{S_i S_j}{e^c} \left[ \frac{(\tau_{ijk} - b) e^{-ab^2}}{2a} + \frac{\{2ab(\tau_{ijk} - b) - 1\} \text{Erf}(-b\sqrt{a})}{2a\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \right] dS_i dS_j d\tau_{ijk} \quad (3.54)$$

(ii)  $\nu_{ik}^*$  の導出 (荷重  $F_i$  のみが作用している時の  $k$  番目の自由度に対する単位時間当りの超過回数期待値)

$\nu_{ik}^*$  は  $\nu_{ik}$  の定式化の中で荷重  $F_j$  に関する項がないだけであるから (i) 及び (ii) からの類推によりその形は以下の様に容易に推定できる。

①  $F_i^0$ ,  $S_i$  が一様分布の場合

$$\nu_{ik}^* = \frac{1}{\pi \beta_{ik} \delta_i \zeta_i} \int_0^{\beta_{ik} \delta_i \zeta_i} \int_0^{\zeta_i} \frac{\sqrt{h_i S_i}}{\sqrt{g_i S_i}} \exp \left\{ -\frac{(d_k - \tau_{ik})^2}{2 g_i S_i} \right\} dS_i d\tau_{ik} \quad (3.55)$$

②  $F_i^0$ ,  $S_i$  がレーリー分布の場合

$$\begin{aligned} \nu_{ik}^* = & \frac{1}{\pi \beta_{ik}^2 \varepsilon_i^2 \eta_i^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{S_i \tau_{ik} \sqrt{h_i S_i}}{\sqrt{g_i S_i}} \exp \left\{ -\frac{(d_k - \tau_{ik})^2}{2 g_i S_i} \right\} \\ & - \frac{S_i^2}{2 \eta_i^2} - \frac{\tau_{ik}^2}{2 \beta_{ik}^2 \varepsilon_i^2} \Big| dS_i d\tau_{ik} \end{aligned} \quad (3.56)$$

なお (3.55), (3.56) 式において  $\tau_{ik}$  は (3.31) 式での右辺第 1 項のみを採用した時の値を表わしている。

③ 平均値を含む動的荷重と含まない動的荷重の同時発生を考慮する場合

(i)  $\nu_{ik}^*$  の導出

荷重  $F_i$ ,  $F_j$  のうち  $F_i$  の方が平均値を含んでいるものとする。すなわち

$$\left. \begin{aligned} F_i &= F_i^0 + F_i^* \\ F_j &= F_j^* \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

と考え、この時の $F_i, F_j$ についての振動を考える。

運動方程式は(3.23)式と同じである。ここで $F_j$ として各節点に直接作用する強制外力を採用する場合にはその取り扱いとは前項とまったく同じとなる。一方 $F_j$ として地震の様な強制変位入力を採用する場合には(3.23)式の右辺第2項を

$$iA_j iF_j \equiv -[M]iEiz \quad (3.58)$$

$iE$  : 強制変位入力の単位ベクトル

$z$  : 強制変位入力における入力加速度

とし、 $ix$ を相対変位ベクトルとみなすことにより後の式展開はやはり前項と全く同一とすることができる。

最終的な $v_{ijk}$ の形は(3.35)式と同一であるが、 $\tau_{ijk}$ は今の場合平均値が1個であるので

$$\tau_{ijk} \equiv \tau_{ik} = \beta_{ik} F_i^0 \quad (3.59)$$

となっている。

#### (i) $v_{ijk}$ の具体的計算法

前項の類推により $v_{ijk}$ は以下の様に容易に求められる。

①  $F_i^0, S_i, S_j$ が一様分布の場合

$$v_{ijk} = \frac{1}{\pi \beta_{ik} \delta_i \tau_i \tau_j} \int_0^{\tau_i} \int_0^{\tau_j} \int_0^{\beta_{ik} \delta_i} \frac{\sqrt{h_i S_i + h_j S_j}}{\sqrt{g_i S_i + g_j S_j}} \\ \times \exp\left[-\frac{(d_k - \tau_{ik})^2}{2(g_i S_i + g_j S_j)}\right] dS_i dS_j d\tau_{ik} \quad (3.60)$$

②  $F_1^0$ ,  $S_i$ ,  $S_j$ がレーリー分布の場合

$$\begin{aligned} \nu_{ik} = & \frac{1}{\pi \beta_{ik}^2 \varepsilon_i^2 n_i^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{S_i S_j \tau_{ik} \sqrt{h_i S_i + h_j S_j}}{\sqrt{g_i S_i + g_j S_j}} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{(d_k - \tau_{ik})^2}{2(g_i S_i + g_j S_j)} - \frac{\tau_{ik}^2}{2\beta_{ik}^2 \varepsilon_i^2} - \frac{S_i^2}{2n_i^2} - \frac{S_j^2}{2n_j^2} \right\} \\ & \times dS_i dS_j d\tau_{ik} \end{aligned} \quad (3.61)$$

(i)  $\nu_{ik}$ の具体的計算法

前項の類推により以下の通り求まる。

① 平均値を含む荷重 $F_i$ の $\nu_{ik}$

a)  $F_1^0$ ,  $S_i$ が一様分布の場合

$$\nu_{ik} = \frac{1}{\pi \beta_{ik}^2 \varepsilon_i^2 \xi_i} \int_0^{\beta_{ik} \varepsilon_i} \int_0^{\xi_i} \frac{\sqrt{h_i S_i}}{\sqrt{g_i S_i}} \exp \left\{ -\frac{(d_k - \tau_{ik})^2}{2g_i S_i} \right\} dS_i d\tau_{ik} \quad (3.62)$$

b)  $F_1^0$ ,  $S_i$ がレーリー分布の場合

$$\begin{aligned} \nu_{ik} = & \frac{1}{\pi \beta_{ik}^2 \varepsilon_i^2 n_i^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{S_i \tau_{ik} \sqrt{h_i S_i}}{\sqrt{g_i S_i}} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{(d_k - \tau_{ik})^2}{2g_i S_i} - \frac{S_i^2}{2n_i^2} - \frac{\tau_{ik}^2}{2\beta_{ik}^2 \varepsilon_i^2} \right\} dS_i d\tau_{ik} \end{aligned} \quad (3.63)$$

② 平均値を含まない荷重 $F_j$ の $\nu_{ik}$

a)  $S_j$ が一様分布の場合

$$\nu_{ik} = \frac{1}{\pi \xi_j} \int_0^{\xi_j} \frac{\sqrt{h_j S_j}}{\sqrt{g_j S_j}} \exp \left\{ -\frac{d_k^2}{2g_j S_j} \right\} dS_j \quad (3.64)$$

b)  $S_i$  がレーリー分布の場合

$$\nu_{ik} = \frac{1}{\pi \eta_i^2} \int_0^\infty \frac{S_i \sqrt{h_i S_i}}{g_i S_i} \exp \left\{ -\frac{d_k^2}{2g_i S_i} - \frac{S_i^2}{2\eta_i^2} \right\} dS_i \quad (3.65)$$

(4) 平均値を含まない動的荷重2個の同時発生を考慮する場合

(i)  $\nu_{ik}$  の具体的計算法

第2項の類推により  $\nu_{ik}$  は以下の様に求められる。

①  $S_i, S_j$  が一様分布の場合

$$\nu_{ik} = \frac{1}{\pi \zeta_i \zeta_j} \int_0^{\zeta_i} \int_0^{\zeta_j} \frac{\sqrt{h_i S_i + h_j S_j}}{g_i S_i + g_j S_j} \exp \left\{ -\frac{d_k^2}{2(g_i S_i + g_j S_j)} \right\} dS_i dS_j \quad (3.66)$$

②  $S_i, S_j$  がレーリー分布の場合

$$\begin{aligned} \nu_{ik} &= \frac{1}{\pi \eta_i^2 \eta_j^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{S_i S_j \sqrt{h_i S_i + h_j S_j}}{g_i S_i + g_j S_j} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{d_k^2}{2(g_i S_i + g_j S_j)} - \frac{S_i^2}{2\eta_i^2} - \frac{S_j^2}{2\eta_j^2} \right\} dS_i dS_j \end{aligned} \quad (3.67)$$

(i)  $\nu_{ik}$  の具体的計算法

第2項の類推により以下の通り求める。

①  $S_i$  が一様分布の場合

$$\nu_{ik} = \frac{1}{\pi \zeta_i} \int_0^{\zeta_i} \frac{\sqrt{h_i S_i}}{g_i S_i} \exp \left\{ -\frac{d_k^2}{2g_i S_i} \right\} dS_i \quad (3.68)$$

②  $S_i$  がレーリー分布の場合

$$\nu_{ik} = \frac{1}{\pi \eta_i^2} \int_0^{\infty} \frac{S_i \sqrt{h_i S_i}}{\sqrt{g_i S_i}} \exp\left[-\frac{d_k^2}{2g_i S_i} - \frac{S_i^2}{2\eta_i^2}\right] dS_i \quad (3.69)$$

以上により破壊確率を算出する上で必要となる全ての量が求まったことになる。

### 3.3 強度制限型動的信頼性解析

本節では複数種の動的荷重を受ける多自由度線形構造物において、その構造強度（応答応力）が信頼度を規定することになる場合の初通過破壊問題を対象とし、その動的信頼性評価手法について述べる。

#### (1) 限界状態の定義と超過回数期待値

構造物全体としての破壊確率  $P_F(T)$  の表現は限界状態の形には依存しないので変位制限タイプのものでまったく同一である。すなわち、破壊確率は (3.9) (3.10) 式により与えられる。

強度制限タイプの限界状態として次の形を定義する。  
非破壊領域に対して、

$$\bigcap_{e=1}^{E_N} [Fe(\sigma_{xe}, \sigma_{ye}, \sigma_{ze}, \sigma_{xye}, \sigma_{yze}, \sigma_{zxe}) \leq 0, 0 \leq t \leq T] \quad (3.70)$$

ここで  $Fe(\cdot) = 0$  は  $e$  番目の構造部材に関する破壊条件限界式であり  $E_N$  は部材要素総数を表わしている。たとえばランダム変数が3個で規定される破壊条件式の場合には図3.6の様な3次元ランダム応力ベクトル空間場での斜線内が非破壊領域である。

破壊条件式については一般の材料強度度で良く知られたものや各種機関で制定された指針、規準等が存在する。たとえば破壊条件式として von Mises を採用すれば

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \geq 2\sigma_f^2 \quad (3.71)$$

となるので限界状態表面を記述する方程式は

$$F_e = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) - 2\sigma_f^2 = 0 \quad (3.72)$$



となる。この時本問題は多次元ランダムベクトルが (3.72) 式で表わされる限界状態表面を通過する初通過破壊問題に帰着される。

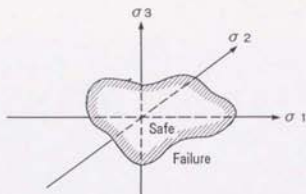


図3.6 3次元ランダム応力ベクトル空間における限界状態表面

限界状態が (3.70) 式で表わされる場合の  $\hat{\nu}_i$ ,  $\hat{\nu}_{ij}$  は変位制限タイプと同様に各要素で定義される単位時間当りの超過回数期待値  $\nu_{ie}$ ,  $\nu_{ije}$  を用いて次の様に求められるので、

$$\hat{\nu}_i = \sum_{e=1}^{E_N} \nu_{ie} \quad (3.73)$$

$$\hat{\nu}_{ij} = \sum_{e=1}^{E_N} \nu_{ije} \quad (3.74)$$

結局  $\nu_{ie}$ ,  $\nu_{ije}$  を求めることによりシステムのトータル破壊確率  $P_f(T)$  を得ることができる。

## (2) 平均値を含む動的荷重2個の同時発生を考慮する場合

(i)  $\nu_{ije}$  の導出 (荷重  $F_i$ ,  $F_j$  が同時に作用している時の要素  $e$  に対する単位時間当りの超過回数期待値)

解析手法に対する基本的考え方及び運動方程式は前節と同様である。しかし前節の様に限界状態が変位で記述されている時には変位に関する運動方程

式を解くのみで良いが、本節の様に応力レベルで記述されている時には更に  
 応力の統計量を求めておく必要がある。

今それらの量が求められたとして次に必要なことはある統計量を持つ \$k\$ 次  
 元ランダム応力ベクトルが限界状態表面を超過する期待値 \$\nu\_{i\_e}\$ を求めること  
 である。入力が定常ガウス過程であると仮定すれば線形系の場合応答も定常  
 ガウス過程となるのでこの場合には解析的表現が可能となる。すなわち  
 Belyaev ら<sup>[16]</sup>によれば \$\nu\_{i\_e}\$ は

$$\nu_{i_e} = \int_{F_D} f_{i+1}(\{\sigma\}) dS_{\sigma} \int_0^{\infty} \dot{y} f_{\dot{y}}(\dot{y} | \{\sigma\}) d\dot{y} \quad (3.75)$$

ここで、

\$f\_{i+1}(\cdot)\$ : ランダム応力ベクトル \$\{\sigma\}\$ に関する \$k\$ 次元確率密度関数

\$f\_{\dot{y}}(\dot{y} | \{\sigma\})\$ : ランダム応力ベクトル \$\{\sigma\}\$ が \$\{\sigma\}\$ に等しいという条件の  
 もとでの \$\dot{y}\$ に関する条件付確率密度関数

\$F\_D\$ : 限界状態表面

\$\dot{y}\$ : 限界状態表面における速度の外向法線方向成分 \$= \{n\}^T \dot{\sigma}\$

として与えられる。一方ランダム応力ベクトルの微分値に関する条件付統計  
 量は共分散マトリックス \$C\_{i+1, i+1}\$ を用いて次の様に表わされるので<sup>[17]</sup>,

$$E\{\dot{\sigma} | \{\sigma\}\} = E\{\dot{\sigma}\} + C_{i+1, i+1} C_{i+1, i+1}^{-1} (\{\sigma\} - E\{\sigma\}) \quad (3.76)$$

$$E\{(\dot{\sigma} - E\{\dot{\sigma}\})(\dot{\sigma} - E\{\dot{\sigma}\})^T | \{\sigma\}\} \\ = C_{i+1, i+1} - C_{i+1, i+1} C_{i+1, i+1}^{-1} C_{i+1, i+1} \quad (3.77)$$

これより \$\dot{y}\$ に関する条件付統計量も次の様に求まる。

$$E\{\dot{y} | \{\sigma\}\} = \hat{\mu}_y(\sigma) = \{n\}^T [E\{\dot{\sigma}\} \\ + C_{i+1, i+1} C_{i+1, i+1}^{-1} (\{\sigma\} - E\{\sigma\})] \quad (3.78)$$

$$E\{(\dot{y} - \hat{\mu}_y)^2 | \{\sigma\}\} = \hat{\delta}_y^2(\sigma) = \{n\}^T [C_{i+1, i+1} \\ - C_{i+1, i+1} C_{i+1, i+1}^{-1} C_{i+1, i+1}] \{n\} \quad (3.79)$$

(3.78) (3.79) 両式を (3.75) 式に代入することにより  $v_{i,j_0}$  の形が次の様に決定する

$$\begin{aligned} v_{i,j_0} = & \int_{\mathbb{R}^D} \int_0^\infty \frac{1}{(2\pi)^{k/2} |\det C_{i+1,i+1}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\right. \\ & \times (\{\sigma\} - E\{\boldsymbol{\varepsilon}\})^T C_{i+1,i+1}^{-1} (\{\sigma\} - E\{\boldsymbol{\varepsilon}\})] \frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}{\sqrt{2\pi} \dot{\delta}_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}(\sigma)} \\ & \times \exp\left\{-\frac{(\dot{\boldsymbol{\gamma}} - \hat{\mu}_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}(\sigma))^2}{2\dot{\delta}_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}^2(\sigma)}\right\} d\boldsymbol{\gamma} d\mathbf{S} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.80)$$

次に具体的な限界状態を定義する。更に最初は入力の実平均値を 0 とした解析を行う。限界状態の形は対象とする構造要素により異なるが本節では立体骨組構造物を例題として取り上げることとし、更に破損規準に関しては梁構造でもっとも簡単な表現である、曲げと剪断、曲げと圧縮等に対する次の様な 2 次元クライテリアを採用する。

$$\frac{|\sigma_1|}{a_1} + \frac{|\sigma_2|}{a_2} \leq \varepsilon \quad (3.81)$$

(3.81) 式の間係を図示すれば図 3.7 の様になる。この時限界状態表面を記述する式は

$$G = \frac{|\sigma_1|}{a_1} + \frac{|\sigma_2|}{a_2} - \varepsilon = 0 \quad (3.82)$$

となるが、更に安全側の近似として限界状態を図 3.7 に内接する円で代表させることにすれば、この円の半径  $\tilde{r}$  は (3.82) 式において  $a_1, a_2, \varepsilon$  が与えられれば自動的に決定する。

円を限界状態とする時には、(3.80) 式は極座標系を用いてより簡単に次式で表わされる<sup>[18]</sup>。

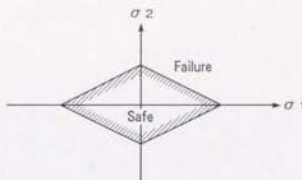


図3.7 2次元限界状態

$$\begin{aligned}
 v_{i,j,e} = & \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2\pi) |\det C_{(i+1)(j+1)}|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \{ \sigma \} \right. \\
 & \left. - E[\{ \sigma \}]^T C_{(i+1)(j+1)}^{-1} \{ \sigma \} - E[\{ \sigma \}] \right] \\
 & \times \left\{ \frac{\hat{\mu}_y(\sigma)}{\sqrt{\kappa}} \operatorname{Erfc} \left( -\frac{\hat{\mu}_y(\sigma)}{\sqrt{2} \hat{\delta}_y(\sigma)} \right) + \hat{\delta}_y(\sigma) \phi \left( \frac{\hat{\mu}_y(\sigma)}{\hat{\delta}_y(\sigma)} \right) \right\} d\theta \quad (3.83)
 \end{aligned}$$

ここで,

$$\operatorname{Erfc}(x) = \int_x^\infty e^{-t^2} dt, \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

でありまたこの段階では入力平均 0 としているので応答も平均 0 すなわち

$$E[\{ \sigma \}] = E[\{ \dot{\sigma} \}] = \{ 0 \} \quad (3.84)$$

となっている。

(3.83) 式を実際に計算するには 2 入力と同時に作用する時の  $C_{(i+1)(j+1)}$ ,  $C_{(i+1)(i+1)}$ ,  $C_{(j+1)(j+1)}$  が求められねばならないが、その量は従来の不規則振動論を用いて容易に求められ<sup>(6)(7)(8)</sup>以下の様になる。

$$C_{(i+1)(j+1)} = [C_{kA}], \quad C_{kA} = S_i C_{i kA} + S_j C_{j kA} \quad (3.85)$$

$$C_{i kA} = \sum_{m=1}^L \frac{\pi I_{i m m} E_{k m} E_{j m}}{2 \xi_m \omega_m^3}$$

$$C_{j kA} = \sum_{m=1}^L \frac{\pi I_{j m m} E_{k m} E_{j m}}{2 \xi_m \omega_m^3}$$

$$C_{(i,j)(i,j)} = C_{(i,j)(i,j)} = [0] \quad (3.86)$$

$$C_{(i,j)(i,j)} = [C_{k,j}^T], \quad C_{k,j}^T = S_i C_{i,j}^T + S_j C_{j,k}^T \quad (3.87)$$

$$C_{i,j}^T = \sum_{m=1}^L \frac{x_{i,j,m}^T \varepsilon_{k,m} \varepsilon_{j,m}}{2 \xi_m \omega_m}$$

$$C_{j,k}^T = \sum_{m=1}^L \frac{x_{j,k,m}^T \varepsilon_{k,m} \varepsilon_{j,m}}{2 \xi_m \omega_m}$$

(3.85)~(3.87) 式の共分散マトリックスは $12 \times 12$ であるが、ここでは2次元限界状態問題を考えているので、必要とする $2 \times 2$ のマトリックスは(3.85)~(3.87) 式の対応する要素より抽出することにより得られる。

(3.84)~(3.87) 式を考慮することにより2次元問題に対する $v_{i,j,e}$ が次式の様に求まる。

$$v_{i,j,e} = \tilde{\gamma} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{\delta}_y(\sigma)}{(2\pi)^{3/2} |\det C_{(i,j)(i,j)}|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \right. \\ \left. \times \{ \sigma \}^T C_{(i,j)(i,j)}^{-1} \{ \sigma \} \right] d\theta \quad (3.88)$$

ところで(3.88) 式を構成する共分散マトリックスは付録3.1より明らかな通り部材端力に関する式であるが、これに対する限界状態の記述(3.81) 式は応力表示になっているので(3.81) 式を部材端力に変換しておく必要がある。降伏条件として曲げ、圧縮等のどの応力を採用するかにより係数の値は若干異なるが一般に部材端力に関する次の様な限界状態方程式に変換できる。

$$\frac{|K_1|}{\bar{A}_1} + \frac{|K_2|}{\bar{A}_2} - \varepsilon = 0 \quad (3.89)$$

以上の解析はあくまでも入力のパラメータの応答に関するものであるが、実際には入力としての動荷重は今の場合平均値を含んでいるのでその補正が必要となる。

動荷重の平均値分(前節と同様に $F_i^0, F_j^0$ とする)のe部材における応答部材力 $K_1$ 成分への寄与分 $v_{i,j,e}$ は影響係数 $\beta$  ( $F_i^0 = 1$ を作用させた時の部材端力値)を用いて次の様に表わされる。

$$\gamma_{ie_1} = \beta_{ie_1} F_i^0 + \beta_{je_1} F_j^0 \quad (3.90)$$

ここで $\beta_{ie_1}$ 、 $\beta_{je_1}$ は各々荷重 $F_i^0$ 、 $F_j^0$ を作用させた時のe部材における部材端力成分1の値である。同様に $\kappa_2$ 成分への寄与 $\gamma_{ie_2}$ は

$$\gamma_{ie_2} = \beta_{ie_2} F_i^0 + \beta_{je_2} F_j^0 \quad (3.91)$$

となる。故に入力の平均値を考慮した場合の安全側の限界状態方程式としては(3.89)~(3.91)式より以下の形が定義できる。

$$\frac{|\kappa_1|}{(\bar{A}_1 - \gamma_{ie_1})} + \frac{|\kappa_2|}{(\bar{A}_2 - \gamma_{ie_2})} - \varepsilon = 0 \quad (3.92)$$

限界状態が(3.92)式で記述される場合の半径 $\tilde{\gamma}$ は

$$\tilde{\gamma} = \frac{\varepsilon |(\bar{A}_1 - \beta_{ie_1} F_i^0 - \beta_{je_1} F_j^0)(\bar{A}_2 - \beta_{ie_2} F_i^0 - \beta_{je_2} F_j^0)|}{\sqrt{(\bar{A}_1 - \beta_{ie_1} F_i^0 - \beta_{je_1} F_j^0)^2 + (\bar{A}_2 - \beta_{ie_2} F_i^0 - \beta_{je_2} F_j^0)^2}} \quad (3.93)$$

と求まるので、仮に $S_i$ 、 $S_j$ 、 $F_i^0$ 、 $F_j^0$ が確定値であれば(3.93)式を(3.88)式に代入することにより $\nu_{ie}$ を実際に計算することができる。しかし明らかにそれらの値は確率変数であるのでそれを考慮した値を求める必要がある。これは各確率パラメータの確率密度関数を用いて次の様に表現される。

$$\begin{aligned} \nu_{ie} = & \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{\gamma} \hat{\delta}_S(\sigma)}{(2\pi)^{3/2} |\det C_{i+1, i+1}|^{1/2}} \\ & \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \{ \sigma |^T C_{i+1, i+1}^{-1} | \sigma | \} f_{S_i}(S_i) f_{S_j}(S_j) f_{F_i^0}(F_i^0) f_{F_j^0}(F_j^0) \right. \\ & \left. \times dS_i dS_j dF_i^0 dF_j^0 d\theta \right] \quad (3.94) \end{aligned}$$

(i)  $\nu_{ie}$ の具体的計算

(3.94)式を実際に計算するには $S_i$ 、 $S_j$ 、 $F_i^0$ 、 $F_j^0$ に関する確率密度関数を定義せねばならない。関数の形は任意で良いが、ここでは代表例として一様分布を取り上げ定式化を行う。

$S_i, S_j, F_i^0, F_j^0$ に関する一様分布としての確率密度関数は次の様に表わされる。

$$f_{S_i}(S_i) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta_i} & (0 < S_i < \zeta_i) \\ 0 & (S_i \geq \zeta_i) \end{cases} \quad (3.95)$$

$$f_{S_j}(S_j) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta_j} & (0 < S_j < \zeta_j) \\ 0 & (S_j \geq \zeta_j) \end{cases} \quad (3.96)$$

$$f_{F_i^0}(F_i^0) = \begin{cases} \frac{1}{\delta_i} & (0 < F_i^0 < \delta_i) \\ 0 & (F_i^0 \geq \delta_i) \end{cases} \quad (3.97)$$

$$f_{F_j^0}(F_j^0) = \begin{cases} \frac{1}{\delta_j} & (0 < F_j^0 < \delta_j) \\ 0 & (F_j^0 \geq \delta_j) \end{cases} \quad (3.98)$$

故に (3.95)~(3.98) 式を (3.94) 式に代入することにより  $\nu_{i_e}$  の最終的な形を得ることができる。

$$\begin{aligned} \nu_{i_e} = & \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \zeta_i \zeta_j \delta_i \delta_j} \int_0^{\zeta_i} \int_0^{\zeta_j} \int_0^{\delta_i} \int_0^{\delta_j} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{\gamma}_{\delta\varphi}(\sigma)}{|\det C_{i+1+i}|^{1/2}} \\ & \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \{\sigma\}^T C_{i+1+i}^{-1} \{\sigma\} \right] dS_i dS_j dF_i^0 dF_j^0 d\theta \end{aligned} \quad (3.99)$$

(3.99) 式は5重積分であるが、これはモンテカルロ法を利用することにより容易に求められる。

(i)  $\nu_{i_e}$  の具体的な計算(荷重  $F_i$  のみが作用している時の要素  $e$  に対する単位時間当りの超過回数期待値)

$\nu_{i_e}$  は  $\nu_{i_e}$  の定式化の中で荷重  $F_j$  に関する部分がないだけであるから (i) 及び (ii) からの類推により  $\nu_{i_e}$  が次の様に導出される。



$$\nu_{ie} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \zeta_i \delta_i} \int_0^{\zeta_i} \int_0^{\delta_i} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{\gamma} \delta_g(\sigma)}{|\det C_{i+1, i+1}|^{1/2}} \\ \times \exp \left[ -\frac{1}{2} |\sigma|^T C_{i+1, i+1}^{-1} |\sigma| \right] dS_i dF_i^0 d\theta \quad (3.100)$$

ここで,

$$\tilde{\gamma} = \frac{\varepsilon |(\bar{A}_1 - \beta_{ie_1} F_i^0)(\bar{A}_2 - \beta_{ie_2} F_i^0)|}{\sqrt{(\bar{A}_1 - \beta_{ie_1} F_i^0)^2 + (\bar{A}_2 - \beta_{ie_2} F_i^0)^2}} \quad (2.101)$$

でありまた (3.100) 式中の共分散マトリックスの要素は (3.85) 式及び (3.87) 式において  $S_i$  に関する項のみが対象となる。

③ 平均値を含む動的荷重と含まない動的荷重の同時発生を考慮する場合

(i)  $\nu_{ie}$  の具体的計算

荷重  $F_i, F_j$  のうち,  $F_i$  の方が平均値を含んでいるものとする。すなわち

$$\left. \begin{aligned} F_i &= F_i^0 + F_i^1 \\ F_j &= F_j^1 \end{aligned} \right\} \quad (3.102)$$

と考え前節及び前項を考慮することにより  $\nu_{ie}$  が容易に導出される。

$$\nu_{ie} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \zeta_i \zeta_j \delta_i} \int_0^{\zeta_i} \int_0^{\zeta_j} \int_0^{\delta_i} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{\gamma} \delta_g(\sigma)}{|\det C_{i+1, i+1}|^{1/2}} \\ \times \exp \left[ -\frac{1}{2} |\sigma|^T C_{i+1, i+1}^{-1} |\sigma| \right] dS_i dS_j dF_i^0 d\theta \quad (3.103)$$

なお (3.103) 式における  $\tilde{\gamma}$  の形は (3.101) 式と同じである。

(i)  $\nu_{ie}$  の具体的計算

前項の類推により求めることができる。すなわち平均値を含む荷重  $F_i$  に関する  $\nu_{ie}$  は (3.100) 式と同一であり、一方平均値を含まない荷重  $F_j$  に関する  $\nu_{ie}$  の形は以下の様になる。

$$\begin{aligned} \nu_{ie} = & \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \xi_j} \int_0^{\xi_j} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{\gamma} \tilde{b}_2(\sigma)}{|\det C_{(1+1+1)}|^{1/2}} \\ & \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \{ \sigma |^T C_{(1+1+1)}^{-1} \sigma | \} \right] dS_j d\theta \end{aligned} \quad (3.104)$$

ここで、

$$\tilde{\gamma} = \frac{\varepsilon |\bar{A}_1 \bar{A}_2|}{\int \bar{A}_1^2 + \bar{A}_2^2} \quad (3.105)$$

でありまた (3.104) 式中の共分散マトリックスの要素は (3.85) 式及び (3.87) 式において  $S_j$  に関する項のみが対象となる。

(4) 平均値を含まない動的荷重 2 個の同時発生を考慮する場合

(i)  $\nu_{ije}$  の具体的計算

前節及び前項を考慮することにより  $\nu_{ije}$  を求めると次の様になる。

$$\begin{aligned} \nu_{ije} = & \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \xi_i \xi_j} \int_0^{\xi_i} \int_0^{\xi_j} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{\gamma} \tilde{b}_2(\sigma)}{|\det C_{(1+1+1)}|^{1/2}} \\ & \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \{ \sigma |^T C_{(1+1+1)}^{-1} \sigma | \} \right] dS_i dS_j d\theta \end{aligned} \quad (3.106)$$

ここで  $\tilde{\gamma}$  は (3.105) 式と同一の形である。

(i)  $\nu_{i_e}$  の具体的計算

この場合には前項から明らかな様に  $\nu_{i_e}$  の形は (3.104) 式に完全に一致している。

以上により破壊確率を算出する上で必要となる全ての量が求まったことになる。

### 3.4 動的荷重の相関を考慮した場合の取り扱い

本節では構造信頼性評価での荷重組合せ問題において、特に荷重間の相関を考慮した場合に対する取り扱い法の概要を述べるとともに、具体例として既の実施された原子力発電所格納容器の動的信頼性問題を取り上げこれの荷重発生に関する相関を考慮した時の影響度合を定量的に検討する。

#### (1) 荷重組合せ問題における相関の影響

前節までの荷重組合せ問題においては荷重間の相関が無い場合のみを対象としたが、実際の荷重間にはその発生時期や荷重レベルに相関性が認められる場合がある。例えば、群発地震やある嵐により発生する多くの竜巻等がその例である。この様なケースの場合にも基本的な取り扱い方法が既に報告されており<sup>[9]</sup>、以下にその概要を簡単に述べる。ただし以下の説明では2荷重の場合に限定して述べるが基本的には3荷重以上の場合も同様の取り扱いとなる。

##### (i) 同一荷重内での相関

###### ① 荷重レベルと継続時間に相関がある場合

非常にレベルの高い風の時には継続時間も長くなる傾向にあるが、この様なモデルを取り扱う場合に適している。

このケースの場合には他荷重間との相関は無いので荷重レベル/継続時間での相関の影響は2荷重の同時発生効果のみに波及する。例えばL.C法の場合(3.10)式右辺の第2項以降が影響を受ける。具体的な定式化が正規分布について行われているが<sup>[9]</sup>、一般にこの影響は小さいと言われている。

② 荷重レベル間に相関がある場合

プラントの安全弁からの放出による過渡的な圧力のレベルが、それ以前の過渡的圧力変動レベルと相関がある場合が本ケースに属する。

荷重レベルを次の形でモデル化することにより相関の影響を定量的に評価することが可能となる。

$$Y_{k+1} = \alpha Y_k + \sqrt{1 - \alpha^2} Z_k \quad (3.107)$$

(3.107) 式で  $\alpha$  は相関を示すパラメータ、 $Z_k$  は正規分布する独立変数である。このケースも①同様に相関性が非常に強い場合を除いて全体の破壊確率への影響は小さい。

③ 荷重発生自身に相関がある場合

本震と余震、ある嵐により発生する多くの竜巻等が本ケースである。

解析モデルとしてクラスター化の概念を導入することにより近似的に定量的評価が可能である。ここでの相関の影響は2荷重同時発生率へ与える効果が最も大きい。

(i) 2荷重間での相関

① 各荷重の荷重レベル間に相関がある場合

2荷重間の荷重レベルにおける相関は通常の相互相関関数  $R_{Y_1, Y_2}(\tau)$  の概念と同じものである。ただし  $\tau$  に相当する各荷重発生時刻間の時間差が確率変数となっているので、この点を考慮すれば破壊確率が導出される。

② 各荷重の発生自身に相関がある場合

化学・発電プラントにおいて大地震時、配管破損による圧力上昇が発生する場合が本ケースに属する。2荷重とも図3.2のCタイプの過渡荷重

であれば理論的検討がなされている<sup>119)</sup>。すなわち図3.8において両荷重発生の際となる parent point process を仮定し、両荷重の発生はこれからの従属事象とすることにより間接的に2荷重の発生に相関性を持たせるものである。この時の各荷重における発生率  $\lambda_i$  は次の様に表現できる。

$$\lambda_i = \beta + \beta P_i \quad (3.108)$$

(3.108) 式において  $\beta$  は parent point process の発生率、 $P_i$  は parent point process が発生した時これに従属して荷重  $Y_i$  が発生する確率、 $\beta_i$  は独立なノイズ過程の発生率である。

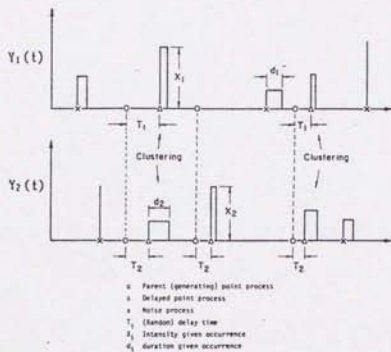


図3.8 各荷重の発生に相関がある時のモデル<sup>119)</sup>

本ケースでの発生に関する相関性は2荷重同時発生率の評価に影響を与えることになる。LC法で考えれば独立事象の場合には(3.10)式における $\tilde{P}_{12}$ は近似的に、

$$\tilde{P}_{12} \cong \lambda_1 \lambda_2 (\mu d_1 + \mu d_2) \quad (3.109)$$

で表わされるが相関性を考慮すると

$$\tilde{P}_{12} \cong g_2(\mu_{d1}) \lambda_1 + g_1(\mu_{d2}) \lambda_2 \quad (3.110)$$

の様な形となる。ここで $\lambda_i$ ,  $\mu_{di}$  ( $i=1,2$ )は荷重 $i$ の平均発生率, 平均継続時間を示している。また $g_i(\mu_{di})$ は $\mu_{di}$ の関数であることを示しているがこれの具体的表現が各荷重の parent point process からの遅れ時間(図3.8における $T_1$ ,  $T_2$ )に関するいくつかの分布形について既に求められている<sup>[19]</sup>。これを付録3.2に示しておく。

以上, 動的荷重の相関を考慮した場合の取り扱い法について概説したが, これらから明らかな様にいくつかの相関性の取り扱いについては, 荷重組合せ法としてLC法を採用した場合大幅な理論修正をすることなしに平均発生率のみを修正するだけで相関の考慮による効果を評価できるというメリットを有していることが分かる。この点が本研究ではLC法を採用した理由の一つである。

## ② 相関を考慮した場合における具体的検討例<sup>[20]</sup>

具体例として米国で既に実施された図3.9の原子力発電所格納容器に対する動的信頼性解析結果<sup>[21]</sup>を取り上げ, これの相関を考慮した場合の影響度合を検討する。

文献[21]で対象とした荷重は地震と重大事故による内圧上昇であるが両荷重間には相関性は無いものとして解析されている。しかし実際には地震により重大事故が発生, 内圧上昇に至る可能性もあるので地震と内圧の発生時期については部分的に相関があると考えることができる。ただしこの発生について非常に重要な事実がある。すなわち地震は重大事故を誘発するが逆はありえないということである。この様な一方通行の相関を取り扱うのに parent point process の概念は非常に有用である。すなわち地震そのものを parent point



process に対応させれば上記現象の解析が可能となる。この時 (3.110) 式の右辺は第一項のみとなる。

2 荷重間の発生自身に対する相関は信頼性解析全体の中で直接的には 2 荷重同時発生率  $\tilde{P}_{12}$  の評価にのみ影響を与えるのでここでは  $\tilde{P}_{12}$  についてのみの評価対象とする。計算に使用した諸定数は  $\lambda_1 = 1.5 \times 10^{-2}/\text{year}$ ,  $\lambda_2 = 1.0 \times 10^{-5}/\text{year}$ ,  $\mu_{a_1} = 10\text{sec}$ ,  $\mu_{a_2} = 600\text{sec}$  であり以下の 4 ケースについて数値計算を実施した。

CASE 1 :  $\beta_2 = 0$  ,  $a_2 = 10\text{min}$

CASE 2 :  $\beta_2 = 0$  ,  $a_2 = 10\text{hour}$

CASE 3 :  $\beta_2 = \lambda_2/2$  ,  $a_2 = 10\text{min}$

CASE 4 :  $\beta_2 = \lambda_2/2$  ,  $a_2 = 10\text{hour}$

( $a_2$  は荷重 2 の遅れ時間の平均値)

計算結果を表 3.1 に示す。相関性を考慮した方が同時発生率は全体的に上昇するが、特に CASE 1,3 で顕著である。これは CASE 1,3 では遅れ時間が CASE 2,4 に比較して平均的に少ないため同時発生する可能性がそれだけ増大したためである。

本項で取り扱った方法論は、たとえば原子力発電所の様な重要構造物の地震時安全性評価において、共通要因故障解析<sup>[22]</sup>や建屋損傷を考慮した機器系の損傷モード評価<sup>[23]</sup>等重要研究課題への入力となる破損確率データを供与する可能性を秘めており、今後発展が期待される研究分野の一つと思われる。



### 3.5 数値計算例

本節では、第3.2、3.3節で開発した解析手法を具体的な構造物に適用することにより動的信頼性解析の有用性を示すとともに、シミュレーション計算結果との比較による解析手法の妥当性の確認について述べる。

なお、本研究は動的信頼性解析法の開発を主体としたものであり、外力のモデル化を詳細に検討するものではない。したがって、以下の試計算に用いた外力に関する統計パラメータは必ずしも現実の状態を正しく表わしたものとはなっておらず、本件については別途他の研究による詳細な評価が必要と思われる。

#### (1) 解析手法の妥当性の検討

本章では変位制限型と強度制限型の2種類の動的信頼性解析法について理論展開を行ったが、初通過破壊現象に対する基本的なアプローチの方法は両者で同一である。ただし強度制限型では応力ベースで理論展開を行わねばならない分、変位制限型より取り扱いが複雑になっている。このため解析手法の妥当性の検討は式展開がより煩雑になっている強度制限型について行う。

妥当性検討用のモデルとしては図3.10の様な簡易モデルを用いた。すなわち図3.10で先端に集中質量を有する片持梁がその先端部に平均値を含む動的荷重と含まない動的荷重を受ける場合、根元部（要素①）の応力が次の様な2次元強度制限式（破壊規準）

$$\frac{|\sigma_{se}|}{\sigma_{sy}} + \frac{|\sigma_{be}|}{\sigma_{by}} = 1 \quad (3.111)$$

を単位時間当りに超過する回数の期待値 $\nu_{i,je}$ を、集中質量 $m$ 、 $\sigma_{sy}$ および $\sigma_{by}$ をパラメータとして求めた。

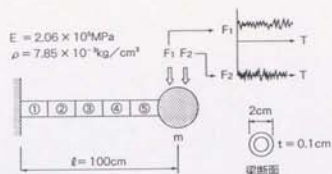


図3.10 2入力を受ける簡易梁モデル

なお (3.111) 式における  $\sigma_{se}$ ,  $\sigma_{be}$  は各々根元部の応答剪断応力, 曲げ応力であり,  $\sigma_{sy}$ ,  $\sigma_{by}$  は剪断, 曲げに対する許容応力値を示している。更に  $F_i^0$ ,  $S_i$  及び  $S_j$  の分布として一様分布を仮定する場合には (3.103) 式がそのまま利用できる。(3.103) 式における積分定数, すなわち一様分布の上限値としての  $\delta_1$ ,  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  の値としてここでは  $\delta_1 = 0.049 \text{ (N)}$ ,  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.48 \text{ (N}^2 \cdot \text{sec)}$  を用いた

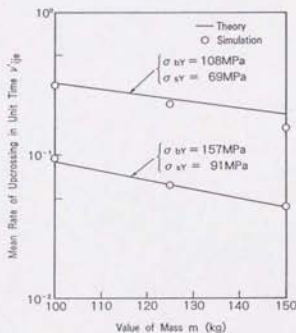


図3.11 簡易梁モデルにおける単位時間当りの超過回数期待値

場合について数値計算を行ったものが図3.11である。同図には別途実施した1000回の試行によるモンテカルロシミュレーション結果も載せているが両者はかなり良い一致を示しており、これにより解析手法の妥当性は確認できたものとする。

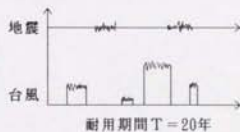
## (2) 具体的な構造物への適用（試計算）

### (i) 変位制限型動的信頼性解析の例

#### ① 地震と突風を受ける風力発電用風車

高地震地帯かつ台風多発地帯に設置されることを想定した場合の風力発電用風車の動的信頼性解析を行った。図3.12に示す対象モデルにおいて、突風の力は等価的にナセル受台に作用するものと仮定し、鉄塔最上部の節点に集中的に作用させた。使用した荷重条件は下記の通りであり、また

	平均発生率	平均継続時間
地震	1回/2年	15sec
台風	パラメータ	3 H



$$(\text{台風}) \quad \zeta_1 = 9.60 \times 10^6 (\text{N}^2 \cdot \text{sec}) \quad , \quad \delta_1 = 1.96 \times 10^4 (\text{N})$$

$$(\text{地震}) \quad \zeta_2 = 1000 (\text{cm}^2 / \text{sec}^2)$$

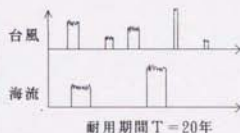
限界状態（破壊規準）としては、全節点の応答変位のうち、いずれか1ヶ所でも閾値（ $x_{\max} = 120\text{cm}$ ）を超えれば破壊状態に達したものとする想定を行った。

計算結果として、台風の年間平均発生率と破壊確率の関係を図3.13に示す。

## ② 突風と海流を受ける海洋構造物

台風多発地帯に設置される海洋構造物が、異常環境気象下で突発的かつ過大な海流による外力を受ける場合の動的信頼性解析を行った。対象としたモデルは図3.14で示されるジャケットタイプの海洋構造物<sup>124)</sup>であり、デッキに作用する突風の力は近似的にデッキ上の集中節点1及び2のみに作用するものと仮定した。一方、海流による外力は海面下のすべての節点に作用するが、ここでは節点(5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35)のみに作用するものと考えた。更に外力の大きさは深さ方向に低減するが、今の場合、この割合は図中で示される様な確定量と仮定した。採用した荷重条件は下記の通りである。

	平均発生率	平均継続時間
台風	1回/10年	3 H
海流	1回/50年	4.4 日



$$(\text{台風}) \zeta_1 = 9.60 \times 10^8 (\text{N}^2 \cdot \text{sec}), \quad \delta_1 = 1.96 \times 10^6 (\text{N})$$

$$(\text{海流}) \zeta_2 = 9.60 \times 10^7 (\text{N}^2 \cdot \text{sec}), \quad \delta_2 = 1.96 \times 10^6 (\text{N})$$

限界状態としては、全節点の応答変位のうち、いずれか1ヶ所でも閾値 ( $x_{\max} = 50\text{cm}$ ) を超えた時を破壊状態として定義した。

図3.15に部材断面定数と破壊確率の関係を計算結果として示す。

### (i) 強度制限型動的信頼性解析の例

#### ① 地震と事故荷重を受けるラックシステム

化学プラントや自動倉庫等で器具の収納・移動用に用いられるラックシステムが、事故(たとえば機器内圧力上昇、内容物噴出)により発生する

動的荷重と地震を受けることを想定した場合の動的信頼性解析を行った。  
ラックシステムは図3.16の様に立体骨組構造でモデル化し、事故荷重は節  
点5に作用するものと仮定した。荷重条件は下記に示す通りである。

	平均発生率	平均継続時間
事故荷重	1回/20年	10H
地震	1回/50年	20sec



$$(\text{事故荷重}) \zeta_1 = 9.60 \text{ (N}^2 \cdot \text{sec)}, \quad \delta_1 = 9.81 \times 10^3 \text{ (N)}$$

$$(\text{地震}) \zeta_2 = 1.0 \text{ (cm}^2 \text{/sec}^2)$$

限界状態としては、ラック構造を構成する全フレームのうち、いずれか  
1要素でも軸力と曲げモーメントに関する以下の近似的な強度制限式を超  
えた時を破壊状態に達したものと定義した。

$$\frac{|\sigma_c|}{\sigma_{cY}} + \frac{|\sigma_b|}{\sigma_{bY}} = 1 \quad (3.112)$$

ここで、

$\sigma_c, \sigma_b$  ; 軸力及び曲げモーメントに対する応答応力

$\sigma_{cY}$  ; 許容圧縮(引張)応力=283 (MPa)

$\sigma_{bY}$  ; 許容曲げ応力=324 (MPa)

計算結果として、耐用期間と破壊確率の関係を図3.17に示す。

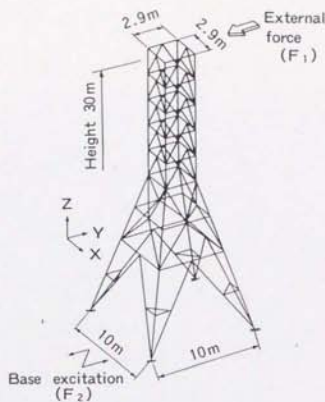


図3.12 信頼性解析用鉄塔モデル

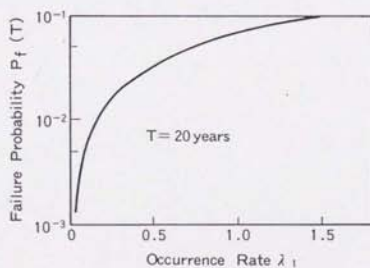


図3.13 破壊確率に及ぼす動荷重平均発生率の影響



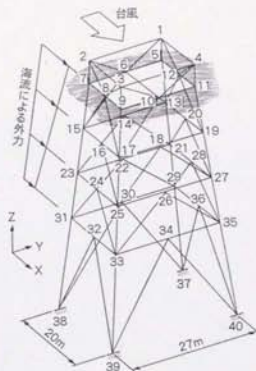


図3.14 信頼性解析用海洋構造物モデル

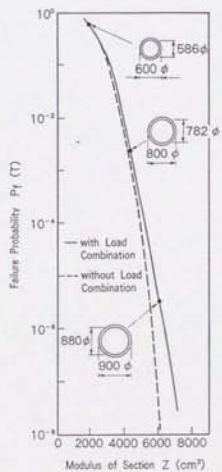


図3.15 部材断面定数と破壊確率の関係

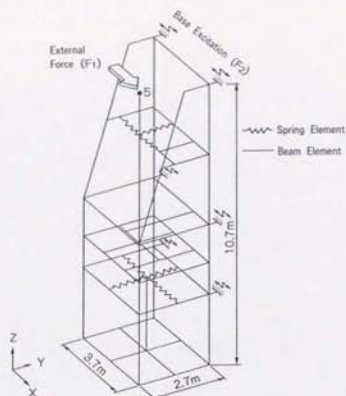


図3.16 信頼性解析用骨組ラックシステムモデル

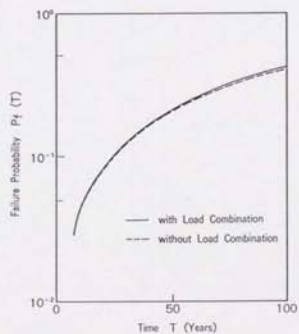


図3.17 耐用期間と破壊確率の関係

### (3) 試算結果に対する考察

(i) 動的信頼性解析においては構造物に作用する外力の統計的性質を考慮に入れた信頼性評価が可能である。図3.13では台風の平均発生率をパラメータとした時の構造物の信頼性に対する定量的な指標（すなわち破壊確率）を示したものであるが、これより台風多発地帯に当該構造物を設置する場合にはかなりのリスク増加を覚悟しなければならないということになる。

(i) 設計者にとっては構造物の断面形状の選定及びそれに伴う設計裕度の評価がもっとも重要かつ興味ある項目の一つであろう。図3.15の例は部材断面定数と破壊確率の関係を図示したものであるが、このケースの場合、断面定数を $5000\text{cm}^3$ 以上にすれば土木構造物に対して通常考えられている信頼性レベル（ $10^{-3}\sim 10^{-5}$ ）の範囲にあり、十分な設計裕度を有しているものと考えられることを示している。

ところで図3.15では破壊確率が低い領域で荷重組合せ効果の影響が顕著になっている。これは荷重組合せ問題での一般的な傾向であり、(7.14)式あるいは図7.6、7.9両図の比較等により明らかである。

(ii) 耐用期間中に複数の動荷重の作用を受ける可能性がある場合に問題となるのは、荷重の同時発生効果を考慮する必要があるか否かであるが、本研究の理論によればこの効果の定量的評価が可能となる。すなわち、図3.15のケースでは、通常設計でめざす信頼性レベル（ $10^{-3}\sim 10^{-5}$ ）以上で同時発生効果を考慮した時としない時でかなりの差が発生（しかも考慮しない場合は理論的に必ず非安全側の評価となる）するため、より信頼度の高い構造物を設計しようとする場合には同時発生効果は無視しえないことになる。

一方図3.17のケースでは、逆に同時発生効果は小さく、この効果を考慮しなくとも精度の良い信頼性解析結果がえられることになる。

以上の様に荷重組合せにおける荷重の同時発生効果の影響を設計で取り入れなければならないか否かの決定に際し、本理論によれば定量的な判断資料を与えることが可能となる。

(ii) 動的信頼性解析によれば、耐用期間の増加とともに信頼度が減少（破壊確率が増加）する傾向を定量的に把握することができる。図3.17における耐用期間と破壊確率の関係によれば耐用期間を20年以上とすれば破壊リスクが相当に大きくなることを示しており、当該構造物の場合には耐用期間を10年程度に設定するかあるいは10年後には構造変更・補強の対策を講じる必要が有る等のメンテナンスに関する情報を得ることができる。

### 3.6 まとめ

本章では荷重組合せを考慮した動的信頼性解析を行う上で基礎となる荷重組合せ問題の物理的解釈、及び現状手法の整理を行うとともに、複数種の動的荷重を受ける多自由度線形構造物の初通過破壊問題を評価するための解析手法について検討した。

この節では上記検討結果より明らかになった点をまとめておく。

- (1) 荷重組合せ問題に対する現状手法の特徴を整理し、検討することにより、本研究で取り扱う動的信頼性解析の中に組み入れる手法としては load coincidence 法 (LC法) がもっとも適していることを明らかにした。
- (2) 多自由度系を対象とした初通過破壊問題では、導出が容易な各節点あるいは各要素単位での(条件無)単位時間当りの超過回数期待値を、いかにしてシステム全体の等価的な超過回数期待値へ組み込むかが解析実現上での重要なポイントとなる。このため本章ではそれを可能とするための新たな近似関係式を提案した。
- (3) LC法を利用することにより、従来解析困難であった有限要素法をベースとした実機レベルでの、複数の動荷重の同時発生効果を考慮した動的信頼性評価が可能となった。

本研究では有限要素として梁要素のみに対する定式化を行ったが、同様の手法を他の有限要素へも拡張することにより、より多くの機械・構造物への適用が可能と考えられる。

なお、本研究で可能となった解析対象は以下の3(合計6)ケースである。

- (i) 2個の平均値有動荷重(例:風+海流)の同時発生を考慮した変位制限型信頼性解析<sup>(1)</sup>及び強度制限型信頼性解析<sup>(2)</sup>
- (ii) 平均値有/無動荷重(例:風+地震)の同時発生を考慮した変位制限型信頼性解析及び強度制限型信頼性解析

(ii) 2個の平均値無動荷重(例;地震+波浪)の同時発生を考慮した変位制限型信頼性解析及び強度制限型信頼性解析

- ① ; 応答変位がある閾値に達するとそのシステムは限界状態に到達したと考える場合の信頼性解析
- ② ; 部材の応答応力がある降伏条件式に達するとそのシステムは限界状態に到達したと考える場合の信頼性解析

(4) 解析対象の中で、標準的な荷重組合せである平均値有/無動荷重のケースで、かつ理論展開がより煩雑となっている強度制限タイプについて、理論値とシミュレーションによる数値実験結果を比較することにより解析手法の妥当性を確認した。

(5) 荷重組合せ問題における動荷重の相関性考慮に対する現状手法の整理を行うとともに、本章で開発した動的信頼性解析法へも取り込めることを明らかにするために、格納容器信頼性解析の例を取り上げこれの定量的評価を行うことにより、本研究での動的信頼性評価手法が動荷重の相関問題にも対応しうる手法であることを示した。

(6) 実機レベルの骨組構造物を対象とした試計算を行い、解析結果の利用法に対する示唆を与えることにより、動的信頼性解析の有用性を示した。

### 参考文献 (第 3 章)

- [1] Hasofer, A.M., Time Dependent Maximum of Floor Live Loads, J.Am.Soc. Civil Eng., Vol.100, No.EM5, (1974), 1086.
- [2] Bosshard, W., On Stochastic Load Combination, John Blume Earthquake Engineering Center, No.16, Stanford Univ., (1975).
- [3] Gaver, D.P. and Jacobs, P.A., On Combinations of Random Loads, SIAM J. of Applied Mathematics, Vol.40, No.3, (1981), 454.
- [4] Turkstra, C.J., Probabilistic Design Formats, In Theory of Structural Design Decisions, Studies Series No.2, Solid Mech.Div., Univ. of Waterloo, (1970).
- [5] American National Standards Institute, American National Standard Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures, ANSI, A58.1-1982, National Bureau of Standards, (1982).
- [6] Borges, J.F. and Castanheta, M., Structural Safety, 2nd edition, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, (1971).
- [7] Wen, Y.K., Methods for Reliability of Structures under Multiple Time Varying Loads, Nucl. Eng. Des., No.60, (1980), 61.
- [8] Kiureghian, A.D., Second-Moment Combination of Stochastic Loads, J.Am.Soc. Civil Eng., Vol.104, No.ST10, (1978), 1551.
- [9] Wen, Y.K., Stochastic Dependencies in Load Combination, Proc. 3rd ICOSSAR, (1981), 89.
- [10] Shinozuka, M. and Yao, J.T.P., On the Two-Sided Time-Dependent Barrier Problem, Journal of Sound and Vibration, Vol.6, No.1, (1967), 98.
- [11] Leadbetter, M.R., Extreme Value Theory and Stochastic Processes, International Conference on Structural Safety and Reliability, Pergamon Press, (1972).
- [12] Larrabee, R.D. and Cornell, C.A., Upcrossing Rate Solution for Load Combinations, J.Am.Soc. Civil Eng., Vol.105, No.ST1, (1979), 125.
- [13] Wen, Y.K., Statistical Combination of Extreme Loads, J.Am.Soc. Civil Eng., Vol.103, No.ST5, (1977), 1079.



- [14] Larrabee, R.D. and Cornell, C.A., Combination of Various Load Processes, J.Am.Soc. Civil Eng., Vol.107, No.ST1, (1981), 223.
- [15] 持尾隆士, 荷重組合せを考慮した重要構造物の動的信頼性評価法の開発 (第1報, 変位制限タイプに対する定式化), 日本機械学会論文集, Vol.56, No.527, (1990), 1719.
- [16] Belyaev, Y.K. and Nosko, V.P., Characteristics of Excursions Above a High Level for a Gaussian Process and Its Envelope, Theory of Probability Applications, Vol.14, (1969), 296.
- [17] Lin, Y.K., Probabilistic Theory of Structural Dynamics, (1967), McGraw-Hill.
- [18] 持尾隆士, 荷重組合せを考慮した重要構造物の動的信頼性評価法の開発 (第2報, 強度制限タイプに対する定式化), 日本機械学会論文集, Vol.56, No.527, (1990), 1725.
- [19] Wen, Y.K., Clustering Model for Correlated Load Processes, J.Am.Soc. Civil Eng., Vol.107, No.ST5, (1981), 965.
- [20] 持尾隆士, 森塚正宣, 構造信頼性評価における荷重組合せ問題, 第2回確率論的安全評価に関する国内シンポジウム論文集, エネルギー総合工学研究所, (1987), 187.
- [21] Hwang, H. et al., Reliability Assessment of Reinforced Concrete Containment Structures, NUREG/CR-3227, (1983).
- [22] Bohn, M.P., Analysis of Dependent Failures and External Events, SAND85-2434A, Sandia National Laboratories, (1985), 245.
- [23] 柴田碧, 建屋内の機器・配管系の建屋損傷を考慮した地震損傷のシナリオの構成法, 第1回構造物の安全性および信頼性に関する国内シンポジウム論文集, 日本材料学会, (1987), 311.
- [24] Karadeniz, H., Manen, S. and Vrouwenfelder, A., Probabilistic Reliability Analysis for the Fatigue Limit State of Gravity and Jacket-Type Structures, Behav. Off-Shore Struct., Vol.2, (1983), 147.



## 第 4 章

### 非線形構造系における荷重組合せを 考慮した初通過破壊評価法の開発

- 4.1 一自由度系に対する基本的定式化
- 4.2 多自由度系に対する定式化
- 4.3 数値計算例
- 4.4 まとめ

履歴復元力特性で代表される弾塑性構造物を対象とした，荷重組合せ効果を考慮する動的信頼性評価手法について述べる。

#### 4.1 一自由度系に対する基本的定式化

本節では前章で述べた荷重組合せ問題を履歴特性で代表される非線形構造物の初通過破壊問題へ応用するための手法について述べる。なお本節では基本的定式化として一自由度系を対象とする。

##### (I) 一自由度非線形履歴系モデル

本節では具体例として図4.1の様な一自由度履歴系モデルを取り上げ、これに強制変位入力による荷重と一般外力の2種類の動的荷重が作用する荷重組合せ問題を解析する。なお図4.1においては、 $x$  及び  $x_g$  は各々絶対変位、地動変位を示し、また  $m$ ,  $C$  は質量及び減衰係数を表わす。更に  $F(t)$  は作用する外力を、 $Q$  は非線形復元力を示す。

図4.1に対する一般的な運動方程式は

$$m\ddot{x}_r + C\dot{x}_r + Q(x_r, t) = -m\ddot{x}_g + F(t) \quad (4.1)$$

である。(4.1)式で必要となる履歴モデルには現在まで種々のものが提案されているが、動的信頼性の理論解析にとって有効なモデルは以外と少ない。その中で Wen のモデル<sup>11)</sup>は比較的应用性の高いものであり数式表現で与えられているため理論解析の中にも取り込み易い。このため本節では次式で示される Wen のモデルを利用する。

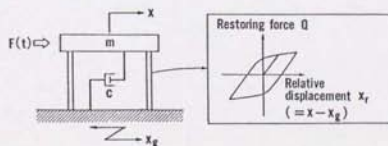


図4.1 一自由度履歴系モデル

$$Q(x_r, t) = \alpha k x_r + (1 - \alpha) k Z \quad (4.2)$$

$$\dot{Z} = A \dot{x}_r - \beta |\dot{x}_r| |Z|^{n-1} Z - \gamma \dot{x}_r |Z|^n \quad (4.3)$$

(4.2) 式における  $\alpha$  は非線形性の度合を示すものであり  $\alpha=1$  ならば系は線形でありこの時  $k$  は通常のばね定数を示している。(4.3) 式における  $A, \beta, \gamma, n$  は非線形特性を表わすパラメータでありこれらの値を変化させることにより種々の非線形性を表現することが可能である。その一例を図4.2に示す。なお当該モデルは汎用性の高い数学モデルであるだけに、パラメータ同定に関しても最小自乗法<sup>[2]</sup>や拡張カルマンフィルタアルゴリズム<sup>[3]</sup>等を利用した種々の研究がなされており、実用面への応用についても十分対応可能なモデルである。

(4.1)~(4.3) 式が本節で対象とする履歴系を記述する運動方程式である。

## (2) 2 荷重同時作用時の超過回数期待値

### (i) Fokker-Planck 法による応答共分散値の推定<sup>[4], [5]</sup>

本節では非線形不規則振動に対する解法として Fokker-Planck 法を採用した場合について以下に定式化を行う。

はじめに (4.1)~(4.3) 式を  $x_r = \bar{x}_1, \dot{x}_r = \bar{x}_2, Z = \bar{x}_3$  として状態変数表示すると、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= -\frac{C}{m} \bar{x}_2 - \frac{\alpha k}{m} \bar{x}_1 - \frac{(1-\alpha)k}{m} \bar{x}_2 - \bar{x}_g + \frac{F(t)}{m} \\ \dot{\bar{x}}_3 &= A \bar{x}_2 - \beta |\bar{x}_2| |\bar{x}_3|^{n-1} \bar{x}_3 - \gamma \bar{x}_2 |\bar{x}_3|^n \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

となるので (4.4) 式において  $\bar{x}_g$  及び  $F(t)$  を確率過程と考えれば (4.4) 式は  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  を状態確率変数とする確率微分方程式となる。

(4.4) 式における  $\bar{x}_g$  及び  $F(t)$  は互いに独立な非定常確率過程とし、次の様に仮定する。

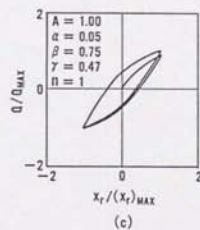
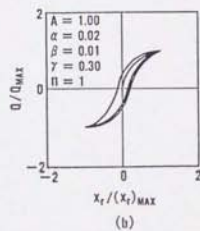
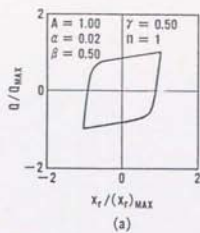


図4.2 パラメータ変化による各種の非線形復元力特性

$$\tilde{x}_g = e_g(t)n_g(t) \quad (4.5)$$

$$\frac{F(t)}{m} = e_f(t)n_f(t) \quad (4.6)$$

ここで  $e_g(t)$  及び  $e_f(t)$  は時間とともにゆっくり変化する形状関数であり  $n_g(t)$  及び  $n_f(t)$  は次の特性を有する正規性ホワイトノイズとする。

$$\left. \begin{aligned} E[n_l(t)] &= 0 \\ E[n_l(t)n_l(t+\tau)] &= 2\pi S_{0l}\delta(\tau) \\ (l=g, f) \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

$E[\ ]$  : アンサンブル平均

$S_{0l}$  :  $n_l(t)$  のパワースペクトル強度

$\delta(\tau)$  : デルタ関数

(4.4) 式において動荷重は  $\tilde{x}_g$  と  $F(t)$  の二つであるが互いに独立したホワイトノイズより構成されているので、この時状態確率変数  $X = (X_1, X_2, X_3)^T$  はマルコフベクトル成分と考えられその推移確率密度  $q_{(x)}(X^T, t | X_0^T, t_0)$  は (2.173) 式で示される Fokker-Planck 方程式を満足する。(2.173) 式における一次及び二次の微分モーメント  $x_i, x_{ij}$  は (4.4) ~ (4.7) 式を利用して導出されるのでこの結果を (2.173) 式に代入し、更に初期条件が確率 1 でわかっているとした場合、確率密度関数  $P_{(x)}(X^T, t)$  が満たすべき方程式が次の様に求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & -X_2 \frac{\partial P}{\partial X_1} - AX_2 \frac{\partial P}{\partial X_3} + \left(-\frac{C}{m}\right)P \\ & + i\left(-\frac{\alpha k}{m}\right)X_1 + \left(\frac{C}{m}\right)X_2 + \frac{k(1-\alpha)}{m}X_3 \left\{ \frac{\partial P}{\partial X_2} \right. \\ & + B \left\{ X_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial X_3} \right\} \left\{ X_2 \right\}^{n-1} X_3 P \right\} + 7X_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial X_3} \right\} \left\{ X_2 \right\}^n P \Big\} \\ & + \pi \{ S_{0g} e_g^2(t) + S_{0f} e_f^2(t) \} \left\{ -\frac{\partial^2 P}{\partial X_2^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

(4.8)式における $n$ の値としては種々のものが考えられるがWenによれば<sup>16)</sup>  
 $n=1$  が一般の弾塑性挙動を良く表わしている様であり、また理論的な解釈  
 もつけ易いため本節では以下  $n=1$  のケースに限定して定式化を進める。更  
 に(4.8)式に現われている絶対値の項は次の様に二次曲線近似を行う。

$$|X_2| \approx a_1 X_2^2, \quad |X_3| \approx a_2 X_3^2 \quad (4.9)$$

ただし  $a_1, a_2$  は近似化による統計的な二乗平均誤差が最小になる様に決定  
 する。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial a_1} E[(|X_2| - a_1 X_2^2)^2] = 0 \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2} E[(|X_3| - a_2 X_3^2)^2] = 0 \quad (4.11)$$

を満たす様に  $a_1, a_2$  を求めれば

$$a_1 = \frac{E[|X_2|X_2^2]}{E[X_2^4]}, \quad a_2 = \frac{E[|X_3|X_3^2]}{E[X_3^4]} \quad (4.12)$$

となる。更に(4.12)式は  $X_2, X_3$  が各々近似的に平均値 0 の正規分布に  
 従っているものと仮定すれば

$$E[|X_2|X_2^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |X_2|X_2^2 p(X_2) dX_2 = \frac{4\sigma_{X_2}^3}{\sqrt{2\pi}} \quad (4.13)$$

$$E[X_2^4] = \int_{-\infty}^{\infty} X_2^4 p(X_2) dX_2 = 3\sigma_{X_2}^4 \quad (4.14)$$

であることから

$$a_1 = \left( \frac{4}{3\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{\sigma_{X_2}} \quad (4.15)$$

が導かれる。ここで  $p(X_2)$  及び  $\sigma_{X_2}$  はそれぞれ  $X_2$  に関する正規確率密度  
 関数及び標準偏差を示している。同様にして  $a_2$  も以下の如くに導かれる。

$$a_2 = \left( \frac{4}{3\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{\sigma_{x_2}} \quad (4.16)$$

$n=1$ であることを考慮して(4.9)(4.15)及び(4.16)式を(4.8)式に代入することにより確率密度関数  $P(x_1)$  が満たすべき絶対値項を含まない方程式が次の形で得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & -X_2 \frac{\partial P}{\partial X_1} - AX_2 \frac{\partial P}{\partial X_2} + \left( \frac{C}{m} \right) P \\ & + \left\{ \left( -\frac{\sigma k}{m} \right) X_1 + \left( \frac{C}{m} \right) X_2 + \frac{k(1-a)}{m} X_3 \right\} \frac{\partial P}{\partial X_2} \\ & + \left( \frac{4\beta}{3\sqrt{2\pi}} \right) \frac{X_2^2}{\sigma_{x_2}} \left\{ X_3 P \right\} + \left( -\frac{4\gamma}{3\sqrt{2\pi}} \right) \frac{X_2}{\sigma_{x_2}} \left\{ X_3^2 P \right\} \\ & + \pi \{ S_{0x} e_x^2(t) + S_{0r} e_r^2(t) \} \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial X_2^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

(4.17)式を利用すれば  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  に関するモーメント方程式群を容易に導出することができる。すなわち、今2次モーメントを求めようとすれば  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  に関する2次のすべての組合せを選び出しこれを(4.17)式の両辺に乗じた後、積分を行う。右辺の積分に際しては部分積分操作を繰返す必要がある<sup>17)</sup>。

上述の方法により得られた2次モーメントに関する方程式群を以下に示す。

$$\frac{\partial}{\partial t} E[X_1^2] = 2E[X_1 X_2] \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[X_2^2] = & -4\xi\omega_0 E[X_2^2] - 2a\omega_0^2 E[X_1 X_2] - 2(1-a)\omega_0^2 \\ & \times E[X_2 X_3] + 2\pi \{ S_{0x} e_x^2(t) + S_{0r} e_r^2(t) \} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[X_3^2] = & 2AE[X_2 X_3] - \left( \frac{8\beta}{3\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{\sigma_{x_2}} E[X_2^2 X_3^2] \\ & - \left( \frac{8\gamma}{3\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{\sigma_{x_3}} E[X_2 X_3^2] \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E(X_1 X_2) = E(X_2^2) - \sigma \omega_0^2 E(X_1^2) - 2\xi \omega_0 E(X_1 X_2) - (1-\sigma) \omega_0^2 E(X_1 X_3) \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E(X_2 X_3) &= AE(X_2^2) - (1-\sigma) \omega_0^2 E(X_2^2) - \sigma \omega_0^2 E(X_1 X_3) - 2\xi \omega_0 E(X_2 X_3) \\ &\quad - \left( \frac{4\beta}{3\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{\sigma x_2} E(X_2^2 X_3) - \left( \frac{4\gamma}{3\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{\sigma x_3} E(X_2^2 X_3^2) \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E(X_1 X_3) &= AE(X_1 X_2) + E(X_2 X_3) - \left( \frac{4\beta}{3\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{\sigma x_2} E(X_1 X_2^2 X_3) \\ &\quad - \left( \frac{4\gamma}{3\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{\sigma x_3} E(X_1 X_2 X_3^2) \end{aligned} \quad (4.23)$$

ただし上式において  $(k/m) = \omega_0^2$ ,  $(C/m) = 2\xi \omega_0$  と置換している。

(4.18)~(4.23) 式を解く際には式中に高次モーメントを含んでいるため閉じた方程式群とはなっておりこのままでは解が得られない。そこで文献<sup>(7)</sup>と同様キムラント打ち切り手法を用いて高次モーメントを次の様な2次モーメントのみで近似すれば、

$$\left. \begin{aligned} E(X_2^2 X_3^2) &= E(X_2^2)E(X_3^2) + 2\{E(X_2 X_3)\}^2 \\ E(X_2 X_3^2) &= 3E(X_2 X_3)E(X_3^2) \\ E(X_2^2 X_3) &= 3E(X_2 X_3)E(X_2^2) \\ E(X_1 X_2^2 X_3) &= 2E(X_1 X_2)E(X_2 X_3) + E(X_1 X_3)E(X_2^2) \\ E(X_1 X_2 X_3^2) &= E(X_1 X_2)E(X_2 X_3^2) + 2E(X_1 X_3)E(X_2 X_3) \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

(4.18)~(4.23) 式は閉じた方程式群となるのでこれは初期条件を設定すれば数値計算を行うことにより非定常応答モーメント量を容易に求めることができる。ただしこれは入力としての動荷重の振幅レベルを規定するパラメータ、すなわち  $S_{0g}$ ,  $S_{0f}$  更に  $e_g(t)$ ,  $e_f(t)$  を表現する関数形のパラメータがすべて確定値である時の状況であり、現実には明らかにこれらのパラメータは不確定量であるため確率変数とした取り扱いが必要となる。ただし本節では次の理由により、確率変数としては  $S_{0g}$ ,  $S_{0f}$  のみを取り上げ  $e_g(t)$ ,



$e_f(t)$  については、 $e_g(t)=e_f(t)=1$  なるパラメータを含まない一定値としての取り扱いに限定する。

① (3.10) 式を動的信頼性解析の荷重組合せ問題に適用する場合、通常は定常確率過程に対する定式化として採用されることが多い。

②  $e_g(t)$ ,  $e_f(t)$  の非定常性を示すパラメータに関しては十分な統計データが整理されていない。

これに従い本節では以下定常確率過程の場合に限定して解析を進める。とここで (4.18)~(4.23) 式を解く場合、式中に確率変数  $S_{og}$ ,  $S_{of}$  を含むためこれらを考慮した形で解を求め更に信頼性評価に結びつけるには取り扱いが非常に煩雑となる。そこで本節ではいくつかの  $(S_{og}+S_{of})$  値に対する応答モーメント量を計算し、これに最小自乗法を用いることにより応答モーメント量を近似的に  $(S_{og}+S_{of})$  の関数とすることで後の信頼性計算を容易にする様にした。この時応答モーメントは次の様な形になる。

$$E(\dot{x}_1^2) = H_1(S_{og}+S_{of}) \quad (4.25)$$

$$E(\dot{x}_2^2) = H_2(S_{og}+S_{of}) \quad (4.26)$$

上式における  $H_1$  及び  $H_2$  が最小自乗法により得られた関数形である。なお  $E(\dot{x}_1 \dot{x}_2)$  は定常確率過程の場合には (4.18) 式より 0 である。

#### (i) 単位時間当りの条件付超過回数期待値の算出

はじめに  $x_r (= \dot{x}_1)$  及び  $\dot{x}_r (= \dot{x}_2)$  に関する結合確率密度関数  $P(x_r, \dot{x}_r)$  を求める。 $x_r$  と  $\dot{x}_r$  の共分散が 0 であることを考慮し、更に応答は近似的にガウス過程と仮定できる時には  $P(x_r, \dot{x}_r)$  は次の様になる。

$$P(x_r, \dot{x}_r) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x_r}\sigma_{\dot{x}_r}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x_r^2}{\sigma_{x_r}^2} + \frac{\dot{x}_r^2}{\sigma_{\dot{x}_r}^2} \right) \right\} \quad (4.27)$$

(4.27) 式を用いることにより単位時間当りの、あるレベル ( $x_r=d$ ) を正勾配で越える条件付超過回数期待値  $\nu_{gf}^+$  が

$$\nu_{gf}^+ = \int_0^\infty \dot{x}_r P(d, \dot{x}_r) d\dot{x}_r = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sigma_{\dot{x}_r}}{\sigma_{x_r}} \right) \exp\left(-\frac{d^2}{2\sigma_{\dot{x}_r}^2}\right) \quad (4.28)$$

の様に求まる。負勾配の場合にもほぼ同様と考えれば  $x_r$  が  $|x_r| \leq d$  の領域を越える条件付超過回数期待値  $\nu_{gf}$  は

$$\nu_{gf} = \nu_{gf}^+ + \nu_{gf}^- \approx 2\nu_{gf}^+ = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sigma_{\dot{x}_r}}{\sigma_{x_r}} \right) \exp\left(-\frac{d^2}{2\sigma_{\dot{x}_r}^2}\right) \quad (4.29)$$

となる。(4.25) 及び (4.26) 式を考慮すれば  $\nu_{gf}$  は

$$\nu_{gf} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{H_2}{H_1}} \exp\left(-\frac{d^2}{2H_1}\right) \quad (4.30)$$

の形で表現される。(4.30) 式において  $S_{og}$ ,  $S_{of}$  が確定値であれば  $\nu_{gf}$  の値が完全に定まることになる。しかし  $S_{og}$ ,  $S_{of}$  は確率変数であるので、それを考慮した次の形が  $\nu_{gf}$  に対する最終的な表現となる。

$$\begin{aligned} \nu_{gf} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \sqrt{\frac{H_2}{H_1}} \exp\left(-\frac{d^2}{2H_1}\right) f_{S_{og}}(S_{og}) \\ &\quad \times f_{S_{of}}(S_{of}) dS_{og} dS_{of} \end{aligned} \quad (4.31)$$

ここで  $f_{S_{og}}$  及び  $f_{S_{of}}$  は各々  $S_{og}$ ,  $S_{of}$  に関する確率密度関数である。(4.31) 式は数値積分を行うため  $f_{S_{og}}$  及び  $f_{S_{of}}$  の形は任意のもので良いが以下に代表的な一様分布及びレーリー分布の場合について定式化を行う。

①  $S_{og}$ ,  $S_{of}$  が一様分布の場合

$S_{og}$ ,  $S_{of}$  は現実的には上限値が存在するのでこれを考慮すると

$$f_{S_{01}}(S_{01}) = \begin{cases} \frac{1}{\delta_1} & (0 < S_{01} < \delta_1) \\ 0 & (S_{01} \geq \delta_1) \end{cases} \quad (4.32)$$

( $l = g, f$ )

となる。これを (4.31) 式に代入すれば  $\nu_{gf}$  が求まる。

$$\nu_{gf} = \frac{1}{\pi \delta_g \delta_f} \int_0^{\delta_g} \int_0^{\delta_f} \sqrt{\left(\frac{H_g}{H_f}\right)} \exp\left(-\frac{d^2}{2H_f}\right) dS_{og} dS_{of} \quad (4.33)$$

②  $S_{og}$ ,  $S_{of}$  がレーリー分布の場合

$S_{og}$ ,  $S_{of}$  の上限値の存在を考慮した場合の修正されたレーリー分布は

$$f_{S_{01}}(S_{01}) = \begin{cases} \frac{S_{01}}{z_1^2 \{1 - \exp(-\frac{b_1^2}{2z_1^2})\}} \exp\left(-\frac{S_{01}^2}{2z_1^2}\right) & (0 < S_{01} < b_1) \\ 0 & (S_{01} \geq b_1) \end{cases} \quad (4.34)$$

( $l = g, f$ )

の形で示されるのでこれを (4.31) 式に代入すれば  $\nu_{gf}$  が次の様に求まる。

$$\nu_{gf} = \frac{1}{\pi z_g^2 z_f^2 \{1 - \exp(-\frac{b_g^2}{2z_g^2})\} \{1 - \exp(-\frac{b_f^2}{2z_f^2})\}} \int_0^{b_g} \int_0^{b_f} S_{og} S_{of} \\ \times \sqrt{\left(\frac{H_g}{H_f}\right)} \exp\left(-\frac{d^2}{2H_f} - \frac{S_{og}^2}{2z_g^2} - \frac{S_{of}^2}{2z_f^2}\right) dS_{og} dS_{of} \quad (4.35)$$

③ 1 荷重のみ作用時の超過回数期待値

1 荷重のみ作用時に対する定式化は 2 荷重作用時の場合とほぼ同様であり入力としての動的荷重を何個考えるかが基本的に異なるのみである。すなわち 1 荷重の場合には応答モーメントを計算する際に (4.19) 式で  $S_{og}$ ,  $S_{of}$  いずれかが 0 となるだけである。

以下に単位時間当りの条件付超過回数期待値  $\nu_l$  ( $l = g, f$ ) に対する最終的な表現を示す。

$$\nu_l = \frac{1}{\pi \delta_l} \int_0^{\delta_l} \sqrt{\left(\frac{H_l}{H_1}\right)} \exp\left(-\frac{d^2}{2H_1}\right) dS_{01} \quad (4.36)$$

(一様分布の場合)

$$\nu_1 = \frac{1}{\pi z_1^2 \{1 - \exp(-\frac{b_1^2}{2z_1^2})\}} \int_0^{b_1} S_{01} \sqrt{\frac{H_{21}}{H_{11}}} \\ \times \exp(-\frac{d^2}{2H_{11}} - \frac{S_{01}^2}{2z_1^2}) dS_{01} \quad (4.37)$$

(レーリー分布の場合)

ここで  $H_{11}$ ,  $H_{21}$  は 1 荷重のみ作用した場合の応答モーメント  $E(X_1^2)$ ,  $E(X_2^2)$  に対する近似関数式である。

以上により破壊確率を算出する上で必要となるすべての量が求まったことになるので、これらの値を (3.9) (3.10) 式に代入することにより破壊確率を計算することができる。

## 4.2 多自由度系に対する定式化

本節では前節で展開した一自由度系に対する解析手法を基礎として、任意の多自由度履歴構造系への拡張を図る。

### (1) 荷重組合せを考慮した構造物全体としての破壊確率

解析対象としては図4.3で示される多質点履歴系モデルを取り上げ、これに強制変位入力による荷重と一般外力の両方が作用する荷重組合せ問題の定式化を行う。

図4.3のモデルでは多自由度系であるために破壊確率を前節の一自由度系の様に(3.9)(3.10)式により求めることはできない。しかし系が線形の場合、既に多自由度系について(3.21)式で示される近似式を導出しており、非線形の場合についてもこれは適用可能と考えられる。故に構造物全体としての破壊確率  $P_f(T)$  を本節では次式により近似することとした。

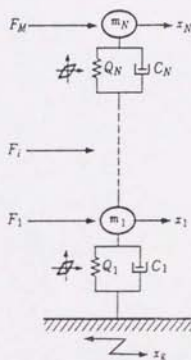


図4.3 複数の荷重を受ける多質点履歴系モデル

$$\left. \begin{aligned}
 P_f(T) &= \left\{ \sum_{i=1}^M \nu_i \tilde{p}_i + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \nu_{ij} \tilde{p}_{ij} \right\} T \\
 \nu_i &= \mu \dot{d}_i \hat{\nu}_i, \quad \nu_{ij} = \mu \dot{d}_{ij} \hat{\nu}_{ij} \\
 \hat{\nu}_i &= \sum_{k=1}^N \nu_{ik}, \quad \hat{\nu}_{ij} = \sum_{k=1}^N \nu_{ijk}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

ここで,

- $T$  : 耐用期間  
 $\nu_{ik}$  : 荷重  $F_i$  のみが存在し, かつ発生した時,  $k$  点の応答変位  
 (あるいは  $k$  層の層間変形量) がある設定限界を超過する  
 単位時間当りの条件付超過回数期待値  
 $\nu_{ijk}$  : 荷重  $F_i$  と  $F_j$  のみが存在し, かつ同時に発生した時,  $k$  点  
 の応答変位 (あるいは  $k$  層の層間変形量) がある設定限界  
 を超過する単位時間当りの条件付超過回数期待値  
 $M$  : 一般外力の種類の総数  
 $N$  : 質点総数

なお, 平均発生率  $\bar{P}_i, \bar{P}_{ij}$  については第3章と同様に, 確率ポアソン過程  
 を仮定した (3.12) (3.13) 式によって求められるものとする。平均継続時間  
 $\mu_{d_i}, \mu_{d_{ij}}$  についても第3章と同様である。

## ② 非線形構造系の応答統計量の導出

### (i) 非線形運動方程式

図4.3に対する一般的な運動方程式は次の通りである。

$$\left. \begin{aligned}
 m_1 \ddot{y}_1 + C_1 \dot{y}_1 - C_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + Q_1 (y_1) - Q_2 (y_2 - y_1) \\
 = -m_1 \ddot{x}_g + F_1 \\
 \vdots \\
 m_k \ddot{y}_k + C_k (\dot{y}_k - \dot{y}_{k-1}) - C_{k+1} (\dot{y}_{k+1} - \dot{y}_k) + Q_k (y_k - y_{k-1}) \\
 - Q_{k+1} (y_{k+1} - y_k) = -m_k \ddot{x}_g + F_i \\
 \vdots \\
 m_N \ddot{y}_N + C_N (\dot{y}_N - \dot{y}_{N-1}) + Q_N (y_N - y_{N-1}) = -m_N \ddot{x}_g + F_M
 \end{aligned} \right\} (4.99)$$

ここで,

- $m_k$  :  $k$  点の集中質量  
 $C_k$  :  $k$  点と  $(k-1)$  点間の減衰係数  
 $Q_k(y_k - y_{k-1})$  :  $k$  点と  $(k-1)$  点間の非線形復元力  
 $F_i$  :  $i$  番目の種類の一般外力  
 $x_g$  : 地動変位  
 $x_k$  :  $k$  点の絶対変位  
 $y_k$  :  $k$  点での地動に対する相対変位 ( $=x_k - x_g$ )

(4.39) 式で必要となる非線形復元力モデルとしては前節同様に次式の Wen モデルを採用する。

$$Q(u_i, t) = \alpha u_i + (1 - \alpha)kZ \quad (4.40)$$

$$\dot{Z} = A\dot{u}_i - \beta|\dot{u}_i||Z|^{n-1}Z - \gamma\dot{u}_i|Z|^n \quad (4.41)$$

ここで  $u_i$  は質点間の相対変位を示す。

(4.40) (4.41) 両式を (4.39) 式に代入することにより最終的な運動方程式が以下の様に得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 & m_1\ddot{y}_1 + C_1\dot{y}_1 - C_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + \alpha_1 k_1 y_1 - \alpha_2 k_2 (y_2 - y_1) \\
 & \quad + (1 - \alpha_1)k_1 Z_1 - (1 - \alpha_2)k_2 Z_2 = -m_1 \ddot{x}_g + F_1 \\
 & \quad \vdots \\
 & m_k \ddot{y}_k + C_k(\dot{y}_k - \dot{y}_{k-1}) - C_{k+1}(\dot{y}_{k+1} - \dot{y}_k) + \alpha_k k_k (y_k - y_{k-1}) \\
 & \quad - \alpha_{k+1} k_{k+1} (y_{k+1} - y_k) + (1 - \alpha_k)k_k Z_k - (1 - \alpha_{k+1})k_{k+1} Z_{k+1} \\
 & \quad = -m_k \ddot{x}_g + F_i \\
 & \quad \vdots \\
 & m_N \ddot{y}_N + C_N(\dot{y}_N - \dot{y}_{N-1}) + \alpha_N k_N (y_N - y_{N-1}) + (1 - \alpha_N)k_N Z_N = -m_N \ddot{x}_g + F_N \\
 & \dot{Z}_1 = A_1 \dot{y}_1 - \beta_1 |\dot{y}_1| |Z_1|^{n_1-1} Z_1 - \gamma_1 \dot{y}_1 |Z_1|^{n_1} \\
 & \quad \vdots \\
 & \dot{Z}_k = A_k (\dot{y}_k - \dot{y}_{k-1}) - \beta_k |\dot{y}_k - \dot{y}_{k-1}| |Z_k|^{n_k-1} Z_k - \gamma_k (\dot{y}_k - \dot{y}_{k-1}) |Z_k|^{n_k} \\
 & \quad \vdots \\
 & \dot{Z}_N = A_N (\dot{y}_N - \dot{y}_{N-1}) - \beta_N |\dot{y}_N - \dot{y}_{N-1}| |Z_N|^{n_N-1} Z_N - \gamma_N (\dot{y}_N - \dot{y}_{N-1}) |Z_N|^{n_N}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

(i) Fokker-Planck 法による応答共分散値の推定

前節と同様に Fokker-Planck 法を用いて (4.42) 式より応答共分散値を推定する。

はじめに (4.42) 式を,

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \bar{X}_1, & y_2 &= \bar{X}_2, & \dots, & y_N &= \bar{X}_N \\ \dot{y}_1 &= \bar{X}_{N+1}, & \dot{y}_2 &= \bar{X}_{N+2}, & \dots, & \dot{y}_N &= \bar{X}_{2N} \\ Z_1 &= \bar{X}_{2N+1}, & Z_2 &= \bar{X}_{2N+2}, & \dots, & Z_N &= \bar{X}_{3N} \end{aligned} \right\} (4.43)$$

として状態変数表示すると<sup>(8)</sup>,

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{X}}_1 &= \bar{X}_{N+1} \\ &\vdots \\ \dot{\bar{X}}_N &= \bar{X}_{2N} \\ \dot{\bar{X}}_{N+1} &= -2\xi_1 w_1 \bar{X}_{N+1} + 2\rho_2 \xi_2 w_2 (\bar{X}_{N+2} - \bar{X}_{N+1}) - \sigma_1 w_1^2 \bar{X}_1 \\ &\quad + \sigma_2 \rho_2 w_2^2 (\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (1 - \sigma_1) w_1^2 \bar{X}_{2N+1} \\ &\quad + (1 - \sigma_2) \rho_2 w_2^2 \bar{X}_{2N+2} - \bar{X}_E + \frac{F_1}{m_1} \\ &\quad \vdots \\ \dot{\bar{X}}_{2N} &= -2\xi_N w_N (\bar{X}_{2N} - \bar{X}_{2N-1}) - \sigma_N w_N^2 (\bar{X}_N - \bar{X}_{N-1}) \\ &\quad - (1 - \sigma_N) w_N^2 \bar{X}_{3N} - \bar{X}_E + \frac{F_N}{m_N} \\ \dot{\bar{X}}_{2N+1} &= A_1 \bar{X}_{N+1} - \beta_1 |\bar{X}_{N+1}| |\bar{X}_{2N+1}|^{n_1-1} \bar{X}_{2N+1} \\ &\quad - \gamma_1 \bar{X}_{N+1} |\bar{X}_{2N+1}|^{n_1} \\ &\quad \vdots \\ \dot{\bar{X}}_{3N} &= A_N (\bar{X}_{2N} - \bar{X}_{2N-1}) - \beta_N |\bar{X}_{2N} - \bar{X}_{2N-1}| |\bar{X}_{3N}|^{n_N-1} \bar{X}_{3N} \\ &\quad - \gamma_N (\bar{X}_{2N} - \bar{X}_{2N-1}) |\bar{X}_{3N}|^{n_N-1} \end{aligned} \right\} (4.44)$$



ここで,

$$k_i/m_i = w_i^2$$

$$c_i/m_i = 2\xi_i w_i$$

$$m_{i+1}/m_i = \rho_{i+1}$$

となるので、(4.44)式において  $\bar{x}_g$  及び  $F_i$  を確率過程と考えれば、(4.44)

式は  $(X_1, \dots, X_{2N})$  を状態確率変数とする確率微分方程式となる。

(4.44)式における  $\bar{x}_g$  及び  $F_i \sim F_M$  は互いに独立な定常確率過程とし、次のように仮定する。

$$\bar{x}_g = w_g(t) \quad (4.45)$$

$$F_i(t)/m_k = b_i w_i(t) \quad (i=1, \dots, M) \quad (4.46)$$

ここで  $b_i$  は構造物に作用する荷重パターンを規定するための確定定数である。また  $w_g(t)$  は、次の特性を有する正規性ホワイトノイズとする。

$$\left. \begin{aligned} E[w_g(t)] &= 0 \\ E[w_g(t)w_g(t+\tau)] &= 2\pi S_{og}\delta(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

ここで、

$E[\cdot]$  : アンサンブル平均

$S_{og}$  :  $w_g(t)$  のパワースペクトル強度

$\delta(\tau)$  : デルタ関数

(4.46)式の  $w_1(t) \sim w_M(t)$  も独立した確率過程ではあるが、次のようにそのパワースペクトル強度はすべて等しい正規性ホワイトノイズであるものと仮定する。

$$\left. \begin{aligned} E[w_i(t)] &= 0 \\ E[w_i(t)w_i(t+\tau)] &= 2\pi S_{of}\delta(\tau) \quad (i=1, \dots, M) \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

(4.44) 式において  $\bar{x}_k$  及び  $F_i (i=1, \dots, M)$  は互いに独立したホワイトノイズであるから、この時、状態確率変数  $X = (X_1, \dots, X_{2N})^T$  はマルコフベクトル成分と考えられ、その推移確率密度は Fokker-Planck 方程式を満足する。ここで初期条件が確率 1 で分かっているとした場合には、システムの確率密度関数  $P_{i(x)}(X^T)$  が満たすべき関係式が自動的に得られる。ここでは最も標準的な非線形パラメータ  $n_k=1$  のケースについて具体的な関係式を以下のように導出した。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P}{\partial t} = & - \sum_{k=1}^N \bar{x}_{N+k} \frac{\partial P}{\partial \bar{x}_k} - \sum_{k=1}^N [-2\bar{x}_k u_k P - 2\bar{x}_k u_k \bar{x}_{N+k} \frac{\partial P}{\partial \bar{x}_{N+k}} \\
 & + 2\bar{x}_k u_k \bar{x}_{N+k-1} \frac{\partial P}{\partial \bar{x}_{N+k}} + 2\rho_{k+1} \bar{x}_{k+1} u_{k+1} \bar{x}_{N+k+1} \frac{\partial P}{\partial \bar{x}_{N+k}} \\
 & - 2\rho_{k+1} \bar{x}_{k+1} u_{k+1} P - 2\rho_{k+1} \bar{x}_{k+1} u_{k+1} \bar{x}_{N+k} \frac{\partial P}{\partial \bar{x}_{N+k}} \\
 & - a_k u_k^2 (\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}) \frac{\partial P}{\partial \bar{x}_{N+k}} + a_{k+1} \rho_{k+1} u_{k+1}^2 (\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k) \frac{\partial P}{\partial \bar{x}_{N+k}} \\
 & - (1 - a_k) u_k^2 \bar{x}_{2N+k} \frac{\partial P}{\partial \bar{x}_{N+k}} \\
 & - (1 - a_{k+1}) \rho_{k+1} u_{k+1}^2 \bar{x}_{2N+k+1} \frac{\partial P}{\partial \bar{x}_{N+k}}] \\
 & - \sum_{k=1}^N [A_k (\bar{x}_{N+k} - \bar{x}_{N+k-1}) \frac{\partial P}{\partial \bar{x}_{2N+k}} \\
 & - \beta_k |\bar{x}_{N+k} - \bar{x}_{N+k-1}| \frac{\partial}{\partial \bar{x}_{2N+k}} (\bar{x}_{2N+k} P) \\
 & - \gamma_k (\bar{x}_{N+k} - \bar{x}_{N+k-1}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_{2N+k}} (|\bar{x}_{2N+k}| P)] \\
 & + \varepsilon \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^N (S_{0k} + S_{0\ell} b_k^2) \frac{\partial^2 P}{\partial \bar{x}_{N+k} \partial \bar{x}_{N+\ell}} \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

更に (4.49) 式における  $|\bar{x}_{N+k} - \bar{x}_{N+k-1}|$ ,  $|\bar{x}_{2N+k}|$  の項を (4.9) 式を参考に次の様に近似化する。

$$|\bar{x}_{N+k} - \bar{x}_{N+k-1}| \approx a_{1k} (\bar{x}_{N+k} - \bar{x}_{N+k-1})^2 \quad (4.50)$$

$$|\bar{x}_{2N+k}| \approx a_{2k} \bar{x}_{2N+k}^2 \quad (4.51)$$

ここで  $a_{1k}$ ,  $a_{2k}$  は近似化による統計的な二乗平均誤差が最小になる様に決定する。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial a_{1k}} E[ (|X_{N+k} - X_{N+k-1}| - a_{1k}(X_{N+k} - X_{N+k-1})^2)^2 ] = 0 \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_{2k}} E[ (|X_{2N+k}| - a_{2k}X_{2N+k}^2)^2 ] = 0 \quad (4.53)$$

を満たす様に  $a_{1k}$ ,  $a_{2k}$  を求め, 更に  $X_{N+k}$ ,  $X_{N+k-1}$  及び  $X_{2N+k}$  が近似的に平均値 0 の正規分布に従っているものと仮定することにより

$$a_{1k} = \frac{4}{3\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_{X_{N+k}}^2 + \sigma_{X_{N+k-1}}^2 - 2\kappa X_{N+k}X_{N+k-1}}} \quad (4.54)$$

$$a_{2k} = \frac{4}{3\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_{X_{2N+k}}} \quad (4.55)$$

として求められる。ここで  $\sigma^2$ ,  $\kappa$  は各々分散及び共分散値を示す。

(4.50) (4.51) 両式を代入した (4.49) 式を利用して  $X_1, \dots, X_{2N}$  に関する 2 次モーメントまでの式 (式総数  $2N(2N+1)/2$ ) を導くと以下の様になる。ただし導出の方法は第 2.4 節に従った。

$$\frac{\partial}{\partial t} E[X_k^2] = 2E[X_k X_{N+k}] \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E[X_k X_d] = E[X_d X_{N+k}] + E[X_k X_{N+d}] \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[X_{N+k}^2] = & -4\xi_k \omega_k E[X_{N+k}^2] + 4\xi_k \omega_k E[X_{N+k-1} X_{N+k}] \\ & + 4\rho_{k+1} \xi_{k+1} \omega_{k+1} E[X_{N+k} X_{N+k+1}] - 4\rho_{k+1} \xi_{k+1} \omega_{k+1} E[X_{N+k}^2] \\ & - 2\sigma_k \omega_k^2 E[X_k X_{N+k}] + 2\sigma_k \omega_k^2 E[X_{k-1} X_{N+k}] \\ & + 2\sigma_{k+1} \rho_{k+1} \omega_{k+1}^2 E[X_{k+1} X_{N+k}] - 2\sigma_{k+1} \rho_{k+1} \omega_{k+1}^2 E[X_k X_{N+k}] \\ & - 2(1-\sigma_k) \omega_k^2 E[X_{N+k} X_{2N+k}] \\ & + 2(1-\sigma_{k+1}) \rho_{k+1} \omega_{k+1}^2 E[X_{N+k} X_{2N+k+1}] + 2\pi(S_{\text{off}} + S_{\text{off}} b_k^2) \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[X_{N+k} X_{N+d}] = & -2\xi_k \omega_k E[X_{N+k} X_{N+d}] - 2\xi_d \omega_d E[X_{N+k} X_{N+d}] \\ & + 2\xi_k \omega_k E[X_{N+k-1} X_{N+d}] + 2\xi_d \omega_d E[X_{N+d-1} X_{N+k}] \\ & + 2\rho_{k+1} \xi_{k+1} \omega_{k+1} E[X_{N+k+1} X_{N+d}] + 2\rho_{d+1} \xi_{d+1} \omega_{d+1} E[X_{N+k} X_{N+d+1}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\rho_{k+1}\tilde{\varepsilon}_{k+1}\omega_{k+1}E[X_{N+k}X_{N+d}]-2\rho_{d+1}\tilde{\varepsilon}_{d+1}\omega_{d+1}E[X_{N+k}X_{N+d}] \\
& -\sigma_k\omega_k^2E[X_kX_{N+d}]+\sigma_k\omega_k^2E[X_{k-1}X_{N+d}]-\sigma_d\omega_d^2E[X_dX_{N+k}] \\
& +\sigma_d\omega_d^2E[X_{d-1}X_{N+k}]+\sigma_{k+1}\rho_{k+1}\omega_{k+1}^2E[X_{k+1}X_{N+d}] \\
& -\sigma_{k+1}\rho_{k+1}\omega_{k+1}^2E[X_kX_{N+d}]+\sigma_{d+1}\rho_{d+1}\omega_{d+1}^2E[X_{d+1}X_{N+k}] \\
& -\sigma_{d+1}\rho_{d+1}\omega_{d+1}^2E[X_dX_{N+k}]-\{1-\sigma_k\}\omega_k^2E[X_{N+k}X_{2N+k}] \\
& -\{1-\sigma_d\}\omega_d^2E[X_{N+k}X_{2N+d}]+\{1-\sigma_{k+1}\}\rho_{k+1}\omega_{k+1}^2E[X_{N+k}X_{2N+k+1}] \\
& +\{1-\sigma_{d+1}\}\rho_{d+1}\omega_{d+1}^2E[X_{N+k}X_{2N+d+1}]+2\pi S_{0g} \quad (4.59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial t}E[X_{2N+k}^2]&=2A_kE[X_{N+k}X_{2N+k}]-2A_kE[X_{N+k-1}X_{2N+k}] \\
& -2B_k\theta_{1k}E[X_{N+k}^2X_{2N+k}]+4B_k\theta_{1k}E[X_{N+k-1}X_{N+k}X_{2N+k}^2] \\
& -2B_k\theta_{1k}E[X_{N+k-1}X_{2N+k}^2]-2\gamma_k\theta_{2k}E[X_{N+k}X_{2N+k}^2] \\
& +2\gamma_k\theta_{2k}E[X_{N+k-1}X_{2N+k}^2] \quad (4.60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial t}E[X_{2N+k}X_{2N+d}]&=A_kE[X_{N+k}X_{2N+d}]-A_kE[X_{N+k-1}X_{2N+d}] \\
& +A_dE[X_{N+d}X_{2N+k}]-A_dE[X_{N+d-1}X_{2N+k}]-B_k\theta_{1k}E[X_{N+k}X_{2N+k}X_{2N+d}] \\
& +2B_k\theta_{1k}E[X_{N+k-1}X_{N+k}X_{2N+k}X_{2N+d}]-B_k\theta_{1k}E[X_{N+k-1}X_{2N+k}X_{2N+d}] \\
& -B_d\theta_{1d}E[X_{N+d}^2X_{2N+k}X_{2N+d}]+2B_d\theta_{1d}E[X_{N+d-1}X_{N+d}X_{2N+k}X_{2N+d}] \\
& -B_d\theta_{1d}E[X_{N+d-1}X_{2N+k}X_{2N+d}]-\gamma_k\theta_{2k}E[X_{N+k}X_{2N+k}^2X_{2N+d}] \\
& +\gamma_k\theta_{2k}E[X_{N+k-1}X_{2N+k}^2X_{2N+d}]-\gamma_d\theta_{2d}E[X_{N+d}X_{2N+k}X_{2N+d}^2] \\
& +\gamma_d\theta_{2d}E[X_{N+d-1}X_{2N+k}X_{2N+d}^2] \quad (4.61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial t}E[X_kX_{N+d}]&=E[X_{N+k}X_{N+d}]-2\varepsilon_d\omega_dE[X_kX_{N+d}]+2\varepsilon_d\omega_dE[X_kX_{N+d-1}] \\
& +2\rho_{d+1}\tilde{\varepsilon}_{d+1}\omega_{d+1}E[X_kX_{N+d+1}]-2\rho_{d+1}\tilde{\varepsilon}_{d+1}\omega_{d+1}E[X_kX_{N+d}] \\
& -\sigma_d\omega_d^2E[X_kX_d]+\sigma_d\omega_d^2E[X_kX_{d-1}]+\sigma_{d+1}\rho_{d+1}\omega_{d+1}^2E[X_kX_{d+1}] \\
& -\sigma_{d+1}\rho_{d+1}\omega_{d+1}^2E[X_kX_d]-\{1-\sigma_d\}\omega_d^2E[X_kX_{2N+d}] \\
& +\{1-\sigma_{d+1}\}\rho_{d+1}\omega_{d+1}^2E[X_kX_{2N+d+1}] \quad (4.62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} E[\bar{X}_{N+k} \bar{X}_{2N+A}] = & -2\xi_k \omega_k E[\bar{X}_{N+k} \bar{X}_{2N+A}] + 2\xi_k \omega_k E[\bar{X}_{N+k-1} \bar{X}_{2N+A}] \\
& + 2\rho_{k+1} \xi_{k+1} \omega_{k+1} E[\bar{X}_{N+k+1} \bar{X}_{2N+A}] - 2\rho_{k+1} \xi_{k+1} \omega_{k+1} E[\bar{X}_{N+k} \bar{X}_{2N+A}] \\
& - \sigma_k \omega_k^2 E[\bar{X}_k \bar{X}_{2N+A}] + \sigma_k \omega_k^2 E[\bar{X}_{k-1} \bar{X}_{2N+A}] \\
& + \sigma_{k+1} \rho_{k+1} \omega_{k+1}^2 E[\bar{X}_{k+1} \bar{X}_{2N+A}] - \sigma_{k+1} \rho_{k+1} \omega_{k+1}^2 E[\bar{X}_k \bar{X}_{2N+A}] \\
& - (1 - \sigma_k) \omega_k^2 E[\bar{X}_{2N+k} \bar{X}_{2N+A}] + (1 - \sigma_{k+1}) \rho_{k+1} \omega_{k+1}^2 E[\bar{X}_{2N+A} \bar{X}_{2N+k+1}] \\
& + A_k E[\bar{X}_{N+k} \bar{X}_{N+A}] - A_k E[\bar{X}_{N+k} \bar{X}_{N+A-1}] - \beta_{A+1, k} E[\bar{X}_{N+k} \bar{X}_{N+A}^2 \bar{X}_{2N+A}] \\
& + 2\beta_{A+1, k} E[\bar{X}_{N+k} \bar{X}_{N+A} \bar{X}_{N+A-1} \bar{X}_{2N+A}] \\
& - \beta_{A+1, k} E[\bar{X}_{N+k} \bar{X}_{N+A-1}^2 \bar{X}_{2N+A}] - \gamma_{A+2, k} E[\bar{X}_{N+k} \bar{X}_{N+A} \bar{X}_{2N+A}^2] \\
& + \gamma_{A+2, k} E[\bar{X}_{N+k} \bar{X}_{N+A-1} \bar{X}_{2N+A}^2]
\end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} E[\bar{X}_k \bar{X}_{2N+A}] = & E[\bar{X}_{N+k} \bar{X}_{2N+A}] + A_k E[\bar{X}_k \bar{X}_{N+A}] - A_k E[\bar{X}_k \bar{X}_{N+A-1}] \\
& - \beta_{A+1, k} E[\bar{X}_k \bar{X}_{N+A}^2 \bar{X}_{2N+A}] + 2\beta_{A+1, k} E[\bar{X}_k \bar{X}_{N+A} \bar{X}_{N+A-1} \bar{X}_{2N+A}] \\
& - \beta_{A+2, k} E[\bar{X}_k \bar{X}_{N+A-1}^2 \bar{X}_{2N+A}] - \gamma_{A+2, k} E[\bar{X}_k \bar{X}_{N+A} \bar{X}_{2N+A}^2] \\
& + \gamma_{A+2, k} E[\bar{X}_k \bar{X}_{N+A-1} \bar{X}_{2N+A}^2]
\end{aligned} \quad (4.64)$$

(4.56)~(4.64) 式は多質点系について求められた一般式であるが、ここで  $N=1$  として 1 質点系に対するモーメント方程式群を求めてみるとこれらは完全に (4.18)~(4.23) 式に一致する。このことは (4.56)~(4.64) 式の導出が正しく行われたことを示唆している。

(4.56)~(4.64) 式が求めるべきモーメント方程式であるが、これらには高次モーメントを含むため閉じた方程式群とはならない。このため発生している高次モーメントに対して次の様なキュムラント打ち切りによる近似化<sup>(7)</sup>を行う。

$$E[X_i X_j X_k X_A] = E[X_i X_j] E[X_k X_A] + E[X_i X_k] E[X_j X_A] + E[X_i X_A] E[X_j X_k] \quad (4.65)$$

(4.65) 式及び (4.54) (4.55) 式を (4.56)~(4.64) 式に代入することにより閉じたモーメント方程式が得られる。更に本節では定常応答を求めることを考えると、この時の対象となるモーメント方程式は (4.56)~(4.64) 式

において各式の左辺を 0 としたものに相当するので、これら数値計算することで定常応答モーメント量を求めることができる。ただしこれらは入力としての動荷重の振幅レベルを規定するパラメータ、すなわち  $S_{0g}$ ,  $S_{0f}$  がすべて確定値である時の状況であり、現実には明らかにこれらのパラメータは不確定量であるため確率変数とした取り扱いが必要となる。ところで (4.56)~(4.64) 式を解く場合、式中に確率変数  $S_{0g}$ ,  $S_{0f}$  を含むのでこれらを考慮した形で解を求め更に信頼性評価に結びつけるには取り扱いが非常に煩雑となるため次の様な近似化を行う。すなわち最初に  $S_{0g}$ ,  $S_{0f}$  を固定してモーメント方程式を解き、得られる応答モーメントが  $S_{0g}$ ,  $S_{0f}$  の関数であることからこの関数形を最小自乗法により推定する。この様にすることで応答モーメントが確率変数  $S_{0g}$ ,  $S_{0f}$  の関数として解析的に表現可能となり以降の信頼性解析が容易となる。ここでこれらの形を次の様に表現する。

$$\left. \begin{aligned} E[X_k^2] &= H_{1k}(S_{0g}, S_{0f}) \equiv \sigma_{y_k}^2 \\ E[X_{N+k}^2] &= H_{2k}(S_{0g}, S_{0f}) \equiv \sigma_{y_k}^2 \\ E[X_k X_{k-1}] &= H_{3k}(S_{0g}, S_{0f}) \equiv \kappa_{y_k y_{k-1}} \\ E[X_{N+k} X_{N+(k-1)}] &= H_{4k}(S_{0g}, S_{0f}) \equiv \kappa_{y_k y_{k-1}} \end{aligned} \right\} \quad (k=1, \dots, N) \quad (4.66)$$

ところで信頼性評価に際しては、limit state (限界状態) を規定する必要がある。すなわち、信頼性あるいは安全性の面から考えた時、1) maintainability あるいは serviceability 等から、ある質点の地上からの最大変位量が問題となる場合と、2) 構造強度上から隣接する2質点間の相対変位量が問題となる場合がある。このうち 1) のケースは、状態変数を  $y$  (すなわち地上からの変位) に関してとっているので問題ないが、2) については相対変位  $u_k$  及び相対速度  $\dot{u}_k$  に関する分散値が更に必要となる。この値は  $u_k = y_k - y_{k-1}$  であること、及び定常応答の場合には (4.56) (4.57) 両式の右辺が 0 に等しいことを考慮することにより以下の様に容易に求められる。

$$E[u_k^2] = E[y_k^2] + E[y_{k-1}^2] - 2E[y_{k-1} y_k] \quad (4.67)$$

$$E[\dot{u}_k^2] = E[\dot{y}_k^2] + E[\dot{y}_{k-1}^2] - 2E[\dot{y}_{k-1} \dot{y}_k] \quad (4.68)$$

$$E[u_k \dot{u}_k] = 0$$

$$(4.69)$$

### (3) 2 荷重同時作用時の超過回数期待値

(i) 変位制限タイプ (各質点の地上からの相対変位量がある閾値を超えると破壊とみなす場合)

$y_k, \dot{y}_k$  に関する結合確率密度関数  $P_{y_k}(y_k, \dot{y}_k)$  を求める。 $y_k$  と  $\dot{y}_k$  の共分散は定常状態では (4.56) 式より 0 である。また応答は近似的にガウス過程と仮定できる時には

$$P_{y_k}(y_k, \dot{y}_k) = \frac{1}{2\pi\sigma_{y_k}\sigma_{\dot{y}_k}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_k^2}{\sigma_{y_k}^2} + \frac{\dot{y}_k^2}{\sigma_{\dot{y}_k}^2}\right)\right\} \quad (4.70)$$

となるので、これより単位時間当りのあるレベル ( $y_k = d_k$ ) を正勾配で超える超過回数期待値  $\nu \nu_{i j k}^+$  は、

$$\nu \nu_{i j k}^+ = \int_0^\infty \dot{y}_k P_{y_k}(d_k, \dot{y}_k) d\dot{y}_k = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sigma_{\dot{y}_k}}{\sigma_{y_k}}\right) \exp\left(-\frac{d_k^2}{2\sigma_{y_k}^2}\right) \quad (4.71)$$

となる。負勾配についてもほぼ同一と考えられるので、結局  $y_k$  が  $|y_k| \leq d_k$  のバンド幅を超える単位時間当りの超過回数期待値  $\nu \nu_{i j k}$  は、以下の様になる。

$$\nu \nu_{i j k} = \nu \nu_{i j k}^+ + \nu \nu_{i j k}^- \approx 2 \nu \nu_{i j k}^+ = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sigma_{\dot{y}_k}}{\sigma_{y_k}}\right) \exp\left(-\frac{d_k^2}{2\sigma_{y_k}^2}\right) \quad (4.72)$$

(4.72) 式に (4.66) 式を代入することにより次式の様な  $S_{o\pi}$ ,  $S_{of}$  をパラメータとする表現が得られる。

$$\nu \nu_{i j k} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\|z_k\|}{\|i_k\|}} \exp\left\{-\frac{d_k^2}{2\|i_k\|}\right\} \quad (4.73)$$



(4.73) 式において  $S_{og}$ ,  $S_{of}$  が確定値であれば  $\gamma \nu_{ijk}$  の値が完全に定まることになる。しかし明らかにそれらの値は確率変数であるので、それを考慮した次の形が  $\gamma \nu_{ijk}$  に対する最終的な表現となる。

$$\gamma \nu_{ijk} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \sqrt{\frac{H_{2k}}{H_{1k}}} \exp\left\{-\frac{d_k^2}{2H_{1k}}\right\} \times f_{S_{og}}(S_{og}) f_{S_{of}}(S_{of}) dS_{og} dS_{of} \quad (4.74)$$

ここで、

$f_{S_{og}}(\cdot)$ ,  $f_{S_{of}}(\cdot)$  :  $S_{og}$ ,  $S_{of}$  に対する確率密度関数

(4.74) 式において  $f_{S_{og}}$ ,  $f_{S_{of}}$  の形を具体的に決めれば  $\gamma \nu_{ijk}$  が数値的に得られることになる。ここでは代表的な分布形として一様分布及びレーリー分布の場合について以下に述べる。

①  $S_{og}$ ,  $S_{of}$  が一様分布の場合

分布形は一自由度系の場合と同様に (4.32) 式で表わされるので、これを (4.74) 式に代入すれば良い。

$$\gamma \nu_{ijk} = \frac{1}{\pi \delta_g \delta_f} \int_0^{\delta_g} \int_0^{\delta_f} \sqrt{\frac{H_{2k}}{H_{1k}}} \times \exp\left\{-\frac{d_k^2}{2H_{1k}}\right\} dS_{og} dS_{of} \quad (4.75)$$

②  $S_{og}$ ,  $S_{of}$  がレーリー分布の場合

分布形は (4.34) 式の通りであり、これを (4.74) 式に代入することにより  $\gamma \nu_{ijk}$  が得られる。

$$\begin{aligned} \gamma \nu_{ijk} = & \frac{1}{\pi z_g^2 z_f^2 \{1 - \exp(-\frac{b_g^2}{2z_g^2})\} \{1 - \exp(-\frac{b_f^2}{2z_f^2})\}} \\ & \times \int_0^{b_g} \int_0^{b_f} S_{og} S_{of} \sqrt{\frac{H_{2k}}{H_{1k}}} \\ & \times \exp\left\{-\frac{d_k^2}{2H_{1k}} - \frac{S_{og}^2}{2z_g^2} - \frac{S_{of}^2}{2z_f^2}\right\} dS_{og} dS_{of} \end{aligned} \quad (4.76)$$



(i) 強度制限タイプ (隣接質点間の相対変位量がある閾値を超えると破壊とみなす場合)

$u_k$  と  $\dot{u}_k$  の共分散も (4.69) 式より 0 であるので、その結合確率密度関数  $P_{u_k}(\dot{u}_k, \dot{u}_k)$  は、

$$P_{u_k}(\dot{u}_k, \dot{u}_k) = \frac{1}{2\pi\sigma_{u_k}\sigma_{\dot{u}_k}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{u}_k^2}{\sigma_{u_k}^2} + \frac{\dot{u}_k^2}{\sigma_{\dot{u}_k}^2}\right)\right\} \quad (4.77)$$

となる。これより単位時間当たりのあるレベル ( $u_k=r_k$ ) を正勾配で超える超過回数期待値  $u\dot{v}_{i,jk}^+$  は、

$$u\dot{v}_{i,jk}^+ = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sigma_{\dot{u}_k}}{\sigma_{u_k}}\right) \exp\left(-\frac{r_k^2}{2\sigma_{u_k}^2}\right) \quad (4.78)$$

となり、(i) と同様に  $u\dot{v}_{i,jk}$  を下記の様に近似する。

$$u\dot{v}_{i,jk} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sigma_{\dot{u}_k}}{\sigma_{u_k}}\right) \exp\left(-\frac{r_k^2}{2\sigma_{u_k}^2}\right) \quad (4.79)$$

(4.79) 式に (4.67) (4.68) 式、更に (4.66) 式を代入することにより

$$u\dot{v}_{i,jk} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{H_{2k} + H_{2(k-1)} - 2H_{4k}}{H_{1k} + H_{1(k-1)} - 2H_{3k}}} \exp\left\{-\frac{r_k^2}{2(H_{1k} + H_{1(k-1)} - 2H_{3k})}\right\} \quad (4.80)$$

が得られる。故に  $u\dot{v}_{i,jk}$  に対する最終的表現は

$$\begin{aligned} u\dot{v}_{i,jk} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \sqrt{\frac{H_{2k} + H_{2(k-1)} - 2H_{4k}}{H_{1k} + H_{1(k-1)} - 2H_{3k}}} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{r_k^2}{2(H_{1k} + H_{1(k-1)} - 2H_{3k})}\right\} \\ &\quad \times f_{S_{0g}}(S_{0g}) f_{S_{0f}}(S_{0f}) dS_{0g} dS_{0f} \end{aligned} \quad (4.81)$$

となる。したがって (4.81) 式において  $f_{S_{0g}}$ ,  $f_{S_{0f}}$  の形を具体的に決めてやれば  $u\dot{v}_{i,jk}$  が求まる。一様分布とレーリー分布の場合を以下に示す。

①  $S_{og}, S_{of}$  が一様分布の場合

$$u\nu_{ik}^i = \frac{1}{\pi\theta_g\theta_f} \int_0^{\theta_g} \int_0^{\theta_f} \sqrt{\frac{H_{2k} + H_{2(k-1)} - 2H_{4k}}{H_{1k} + H_{1(k-1)} - 2H_{3k}}} \\ \times \exp\left\{-\frac{r_k^2}{2(H_{1k} + H_{1(k-1)} - 2H_{3k})}\right\} dS_{og} dS_{of} \quad (4.82)$$

②  $S_{og}, S_{of}$  がレーリ一分布の場合

$$u\nu_{ik}^i = \frac{1}{\pi z_g^2 z_f^2 \{1 - \exp(-\frac{b_g^2}{2z_g^2})\} \{1 - \exp(-\frac{b_f^2}{2z_f^2})\}} \\ \times \int_0^{b_g} \int_0^{b_f} S_{og} S_{of} \sqrt{\frac{H_{2k} + H_{2(k-1)} - 2H_{4k}}{H_{1k} + H_{1(k-1)} - 2H_{3k}}} \\ \times \exp\left\{-\frac{r_k^2}{2(H_{1k} + H_{1(k-1)} - 2H_{3k})} - \frac{S_{og}^2}{2z_g^2} - \frac{S_{of}^2}{2z_f^2}\right\} dS_{og} dS_{of} \quad (4.83)$$

(4) 1 荷重のみ作用時の超過回数期待値

前項では2荷重同時作用時の超過回数期待値を導出したが、1荷重作用時の定式化も前項とほとんど同じである。

単一荷重としては  $\bar{x}_g, F_i$  のいずれを用いても定式化は同じであるが、便宜上ここでは  $\bar{x}_g$  を採用した場合についてその結果を以下に示しておく。

(i) 変位制限タイプ

① 一様分布の場合

$$\gamma\nu_{ik}^i = \frac{1}{\pi\theta_g} \int_0^{\theta_g} \sqrt{\frac{H_{2k}}{H_{1k}}} \exp\left\{-\frac{d_k^2}{2H_{1k}}\right\} dS_{og} \quad (4.84)$$

② レーリー分布の場合

$$\begin{aligned}
 \nu_{ik} = & \frac{1}{\pi z_g^2 \{1 - \exp(-\frac{b_g^2}{2z_g^2})\}} \int_0^{b_g} S_{0g} \sqrt{\frac{H_{2k}}{H_{1k}}} \\
 & \times \exp\left\{-\frac{d_k^2}{2H_{1k}} - \frac{S_{0g}^2}{2z_g^2}\right\} dS_{0g} \quad (4.85)
 \end{aligned}$$

(i) 強度制限タイプ

① 一様分布の場合

$$\begin{aligned}
 \nu_{ik} = & \frac{1}{\pi \delta_g} \int_0^{\delta_g} \sqrt{\frac{H_{2k} + H_{2(k-1)} - 2H_{4k}}{H_{1k} + H_{1(k-1)} - 2H_{3k}}} \\
 & \times \exp\left\{-\frac{r_k^2}{2(H_{1k} + H_{1(k-1)} - 2H_{3k})}\right\} dS_{0g} \quad (4.86)
 \end{aligned}$$

② レーリー分布の場合

$$\begin{aligned}
 \nu_{ik} = & \frac{1}{\pi z_g^2 \{1 - \exp(-\frac{b_g^2}{2z_g^2})\}} \int_0^{b_g} S_{0g} \sqrt{\frac{H_{2k} + H_{2(k-1)} - 2H_{4k}}{H_{1k} + H_{1(k-1)} - 2H_{3k}}} \\
 & \times \exp\left\{-\frac{r_k^2}{2(H_{1k} + H_{1(k-1)} - 2H_{3k})} - \frac{S_{0g}^2}{2z_g^2}\right\} dS_{0g} \quad (4.87)
 \end{aligned}$$

#### 4.3 数値計算例

本節では第4.1, 4.2節で開発した解析手法を用いて履歴系構造物の初通過破壊問題に対する解析例を示すとともに、シミュレーション計算結果との比較による解析手法の妥当性の確認について述べる。

##### (1) 一自由度系に対する数値計算

図4.1に対する数値計算として採用した履歴モデルにおける諸定数は、 $A=1.0$ ,  $\alpha=0.05$ ,  $\beta=0.75$ ,  $n=1$  及び  $\gamma=0.47$  でありこの特性は図4.2 (C) に示す通りである。更に構造の振動特性を示す定数として  $\omega_0=10.0$  (rad/s)  $\xi=0.01$  を用いた。

信頼性評価に必要となる応答モーメント量は、定常確率過程の場合時間に関する項を無視できることを考慮することにより通常の連立非線形方程式となる(4.18)~(4.23)式を解くことで求められる<sup>(註4.1) [9]</sup>。本節では連立非線形方程式の解法としてニュートン・ラフソン法を用いた。求められた応答モーメントを  $(S_{0g}+S_{0f})$  の関数として示したものが図4.4であるが、図中  $E[x_f \ddot{x}_f]$  は定常状態では(4.18)式より常に0となるので省略している。ところで図4.4には理論解析と同時に300波の模擬入力波を用いたモンテカルロ法による数値実験結果もプロットしているが両者は良く一致しており、解析理論の妥当性を示しているものと言える。

図4.4で得られる応答モーメントを関数近似することにより単位時間当りの条件付超過回数期待値が求められるが本節では具体例として  $S_{0g}$  及び  $S_{0f}$  が一様分布する場合について計算を行った。使用した定数は  $\delta_g=\delta_f=1.0 \times 10^3$  ( $\text{cm}^2/\text{s}^3$ ) である。更に最終的な破壊確率を計算する上で必要となる荷重パラメータとしては  $\lambda_1=\lambda_2=0.2$ ,  $\mu_{d_1}=\mu_{d_2}=0.165$  及び  $T=20$  年を標準ケースとして考えた。破壊確率の計算結果を図4.5及び図4.6に示すがいずれも横軸は閾値レベルを表わしている。図4.5は破壊確率に及ぼす耐用年数の影響を示し

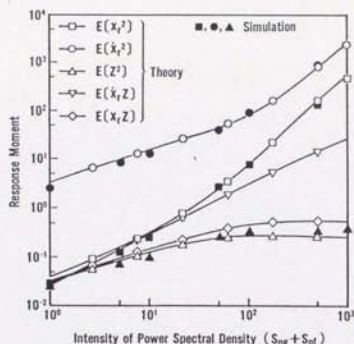


図4.4 入力パワースペクトル強度と応答モーメント量の関係

たものであり、図4.6で動荷重平均発生率の破壊確率への影響度合が示されている。なお図4.5には  $T=20$  年で荷重組合せ効果を無視した場合の計算結果もプロットしており両者の差は破壊確率が低い領域で大きくなる。元来、構造物の信頼性設計においては、破壊確率が高くなる様な設計は行わず比較的低い破壊確率になる様設計するのが当然であろうから、その様な低確率の領域で差が

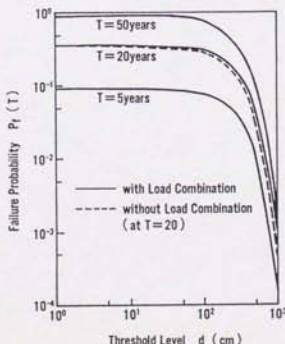


図4.5 破壊確率に及ぼす耐用年数の影響

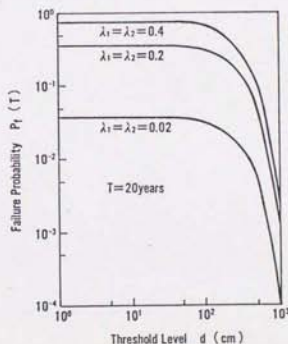


図4.6 破壊確率に及ぼす動荷重平均発生率の影響

大きく現われるということは少なくとも本節で使用了諸定数に限定する場合については荷重組合せ効果は構造信頼性設計上、無視しえない重要なファクタであるということになる。

## ② 三自由度系に対する数値計算

図4.3のモデルにおいて質点数3個、作用する一般外力3個とした場合について数値計算を行った。この時の使用した履歴モデルにおける諸定数及び構造の振動特性を示す定数は以下の通りである。

$$A_1 = A_2 = A_3 = 1.0$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.05$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.75$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0.47$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 70.0 \text{ (rad/s)}$$

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0.01$$

$$\rho_2 = \rho_3 = 1.0$$

信頼性評価に必要となる応答モーメント量は、定常確率過程の場合時間に関する項を無視できることを考慮することにより一般的な非線形連立方程式となる(4.56)~(4.64)式を解くことにより得られる<sup>(註4.2)</sup>。求められた応答モーメントの一部を  $S_{ox}$  ( $=S_{of}$ ) の関数として示したものが図4.7、4.8である。多質点系の場合には信頼性評価として変位制限タイプと強度制限タイプが考えられるため、これに対応して図4.7には地動に対する相対変位量  $y_k$  に関する応答モーメントを、一方図4.8には質点間の層間変位量  $u_k$  に関するものを示している。ところで図4.7及び図4.8には理論解析と同時に200波の模擬入力波を用いたモンテカルロ法による数値実験結果もプロットしているが両者は良く一致しており、これにより解析手法の妥当性は確認できたものとする。

図4.7で代表される応答モーメント群を関数近似することにより単位時間当

りの条件付超過回数期待値が求められる。本節では具体例として  $S_{og}$  及び  $S_{of}$  が一様分布する場合でかつ強度制限タイプについて計算を行った。使用した定数は  $\delta_g = \delta_f = 1.0 \times 10^3 \text{ (cm}^2/\text{s}^2)$  及び  $b_1 = b_2 = b_3 = 1.0$  である。更に具体的な破壊確率を計算する上で必要となる荷重パラメータとしては  $\lambda_1 = 0.2$ ,  $\lambda_2 = 0.5$ ,  $\mu_{d_1} = 6.3 \times 10^{-7}$ ,  $\mu_{d_2} = 3.4 \times 10^{-4}$  及び  $T = 20$  年を用いた。各層間変位量に対する閾値を同一（すなわち  $r_1 = r_2 = r_3$ ）にとりかつパラメータとした時の破壊確率の変化状況を図4.9に示す。同図の場合閾値が10cmを超えると破壊確率が急激に減少する傾向にあることがわかる。

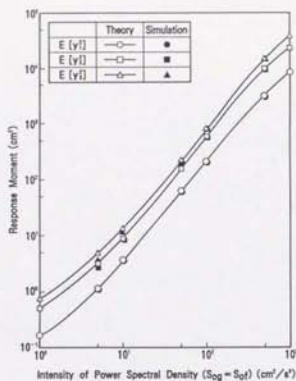


図4.7 入力パワースペクトル強度と応答モーメント量の関係 (相対変位  $y_k$  の場合)

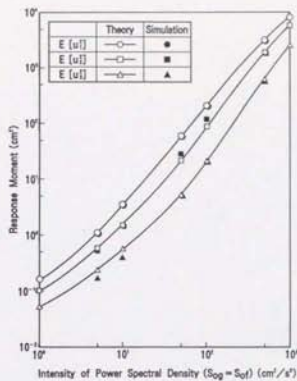


図4.8 入力パワースペクトル強度と応答モーメント量の関係 (相対変位  $u_k$  の場合)

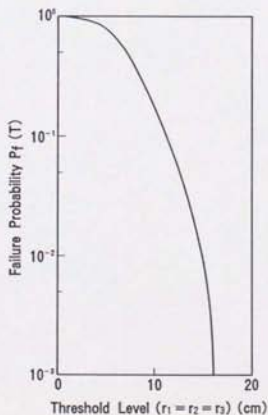


図4.9 強度制限タイプにおける破壊確率と閾値の関係



#### 4.4 まとめ

本章では荷重組合せを考慮した動的信頼性解析の理論展開として、複数種の動的荷重を受ける多自由度非線形構造物の初通過破壊問題を取り上げ、これを評価するための解析手法について検討した。

この節では上記検討結果より明らかになった点をまとめておく。

(1) 本章では構造非線形として、一般構造物の非線形特性の中でもっとも代表的なものの一つである弾塑性挙動を対象とした履歴復元力特性を取り上げたが、この履歴モデルとしては動的信頼性解析上からは Wen のモデルがもっとも利用し易く汎用性も高いことを述べた。

(2) 従来解析困難であった複数の不規則な動的荷重の同時発生効果を考慮した非線形（弾塑性）構造物に対する動的信頼性評価が可能となった。

本章で対象とした解析は以下の二つである。

##### (i) 一自由度非線形構造系に対する解析

Wen により提案された履歴復元力モデルを有する一自由度非線形構造系に対して、Fokker-Plank 法を適用、更にキュムラント打ち切り手法を援用することにより初通過破壊問題を解析する理論的評価手法を開発した。

##### (ii) 多自由度非線形構造系に対する解析

一自由度系で開発した手法を多自由度系に拡張し、任意の自由度に対して有効な解析理論を開発した。更に破壊状態を規定する系の限界状態 (limit state) としては変位制限タイプ<sup>(1)</sup>と強度制限タイプ<sup>(2)</sup>の二種類に対する定式化を行った。

① ; 各質点の地上からの相対変位量がある閾値を超えると破壊とみなす場合

② ; 隣接質点間の相対変位量がある閾値を超えると破壊とみなす場合

③ 本章での理論展開における開発手順は、まず一自由度系に対する解析手法を開発し、一自由度系開発時に得られた知見、技法を十分に考慮した上で多自由度系の手法開発へと進んでいる。このため各開発段階での解析手法の精度、妥当性を評価するために一自由度系及び多自由度系（本章での例は三自由度系）の両者に対して、工學上有効と考えられる数百の模擬入力波を用いたモンテカルロ法による数値実験を行った。その結果、応答モーメント量に関する数値実験結果と理論解析結果は一自由度系、多自由度系のいずれについても良い一致を示しており本解析手法の妥当性は十分に確認できたものと考ええる。

④ 一自由度系、多自由度系の両者について入力パラメータの不確定性を考慮した構造物の初通過破壊確率を具体的に算出した。特に一自由度系については動荷重の平均発生率及び耐用年数が破壊確率に及ぼす影響を定量的に把握するとともに、荷重組合せ効果を考慮することの必要性を、例題をもとに明らかにした。

#### 参考文献 (第4章)

- [1] Wen, Y.K., Method for Random Vibration of Hysteretic Systems, J.Am.Soc. Civil Eng., Vol.102, No.EM2, (1976), 249.
- [2] Sues, R.H., Mau, S.T. and Wen, Y.K., Systems Identification of Degrading Hysteretic Restoring Forces, J.Am.Soc.Civil Eng., Vol.114, No.EM5, (1988), 833.
- [3] 星谷鶴, 丸山収, 非線形構造系の地震時挙動特性の同定, 土木学会論文報告集, No.386, (1987), 397.
- [4] 持尾隆士, 荷重組合せを考慮した非線形履歴系の動的信頼性解析 (第1報, 一自由度系の場合), 日本機械学会論文集, Vol.54, No.504, (1988), 1716.
- [5] Mochio, T., Dynamic Reliability of Hysteretic Structures Under Combined Random Loads (Analysis of a Single-Degree-of-Freedom System), JSME International Journal, Ser. III, Vol.32, No.1, (1989), 19.
- [6] Sues, R.H., Wen, Y.K. and Ang, A.H-S., Stochastic Seismic Performance Evaluating Buildings, Civil Engineering Studies, Structural Research Series No.506, University of Illinois, (1983).
- [7] 持尾隆士, 不規則外乱を受ける非線形構造系の動的信頼性解析, 日本機械学会論文集, Vol.49, No.445, (1983), 1455.
- [8] Mochio, T., Dynamic Reliability of Multi-Degrees-of-Freedom Structures with Hysteretic Characteristics Under Combined Random Loads, Proceedings of ICOSAR'89, (1989).
- [9] 持尾隆士, 重要構造物の動的信頼性解析, 三菱重工技報, Vol.25, No.6, (1988), 590.

## 第 5 章

### 荷重組合せを考慮した 疲労損傷評価法の開発

- 5.1 評価手法の定式化
- 5.2 数値計算例
- 5.3 まとめ

履歴復元力特性で代表される弾塑性構造物を対象とした，荷重組合せ効果を考慮する疲労損傷評価手法について述べる。

## 5.1 評価手法の定式化

第3, 4章では初通過破壊問題に対する解析手法の開発について述べたが, 本節では動的信頼性問題における他方の重要な破壊モードである疲労損傷問題を取り上げ, これの荷重組合せを考慮した評価手法について述べる。

### (1) 荷重組合せを考慮した疲労損傷による構造物全体としての破壊確率

#### (i) 解析対象とする構造モデル

本章で対象とする疲労評価用構造モデルとしては前章で取り扱った多自由度履歴構造系, すなわち図4.3で示されるモデルを対象とする。この時には疲労損傷の解析上で必要となる応答統計量はすべて前章で得られている値が利用可能となる。なお前章の多自由度系の場合については変位制限タイプと強度制限タイプの二種類に対する定式化を行ったが, 本章では疲労損傷を対象としているため隣接する2質点間の相対応答量に関する統計量が必要となり必然的に強度制限タイプを取り扱うことになる。

#### (ii) 構造物全体としての疲労損傷による破壊確率

本節では疲労損傷に対するクライテリアとしてマイナー則を用いる。

N自由度(Nエレメント)における疲労損傷による破壊確率  $P_f(T)$  を,

$$P_f(T) = P\left[\bigcup_{k=1}^N (D_k - \hat{d}_k \geq 0) ; t=T\right] \quad (5.1)$$

$$= 1 - P\left[\bigcap_{k=1}^N (D_k - \hat{d}_k < 0) ; t=T\right] \quad (5.2)$$

ただし

$D_k$  :  $k$  層での  $t=T$  における累積疲労損傷度

$\hat{\sigma}_k$  :  $k$  層での累積疲労損傷度に対する限界値

の形で定義する。すなわち各層の累積疲労損傷度の中でいずれか一つでもその層で規定される限界値を超えると構造物全体が破壊したものと想定する。

(5.1) 式において

$$P\left[\bigcup_{k=1}^N (D_k - \hat{\sigma}_k \geq 0); t=T\right] < \sum_{k=1}^N \{P[D_k - \hat{\sigma}_k \geq 0; t=T]\} \equiv \sum_{k=1}^N \hat{P}_k(T) \quad (5.3)$$

が成立するので本節では  $P_f(T)$  に対する安全側の近似式として

$$P_f(T) = \sum_{k=1}^N \hat{P}_k(T) \quad (5.4)$$

を採用する。

$\hat{P}_k(T)$  は動荷重の継続時間、発生時刻、振幅レベル等が確定値である場合には比較的容易に求められるが、これらが不確定量でありかつ荷重組合せ問題が対象となる時には取り扱いが非常に複雑となる。すなわち (5.4) 式を求めるために必要となる  $D_k$  の統計量については、平均値は求められても分散値以上の高次モーメントを厳密に求めることには相当な困難が予想される。そこで本節では疲労損傷による破壊確率評価式として従来から多用されているものを応用した  $\hat{P}_k(T)$  推定のための新たな近似評価法を提案する。

#### ① Ang & Munse の評価式

Ang & Munse はコンポーネントの疲労損傷による破壊確率として次のようなワイブルタイプの近似式を提案した<sup>11)</sup>。

$$P_F(n) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{n}{\bar{n}}\right) \Gamma(1 + \Omega_R^{1.08})\right\} \bar{n}^{-1.08} \quad (5.5)$$

ただし

$n$  : サイクル数

$\bar{n}$  : 疲労寿命サイクル期待値

$\Gamma(\cdot)$  : ガンマ関数

$\Omega_R$  : 不確定性を示すパラメータ

$$\left[ \begin{array}{l} \circ \text{マイナー則によるモデル化誤差} \\ \circ \text{S-N曲線の不確定性} \\ \circ \text{コンポーネント製作上の誤差} \end{array} \right]$$

(5.5) 式はサイクル数に関して定式化されたものであるが、本節ではこの(5.5)式の表現が、継続時間、発生時刻、振幅レベル等が不確定量である問題における時間のパラメータでも置換できるものと仮定すれば、

$$\hat{P}_k(T) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{T}{\bar{T}_k}\right) \Gamma(1 + \Omega_R^{-1.08}) \Omega_R^{-1.08}\right\} \quad (5.6)$$

となる。ここで  $\bar{T}_k$  は  $k$  層での疲労寿命期待値である。故に  $\bar{T}_k$  を求めれば最終的には  $P_f(T)$  を求めることができる。ところで  $\bar{T}_k$  は疲労損傷クライテリアとしてマイナー則を用いることより

$$\bar{T}_k = \frac{\hat{\delta}_k}{D_k^*} \quad (5.7)$$

の形で与えられる。(5.7) 式中の  $D_k^*$  は  $k$  層における年間の累積疲労損傷期待値を示している。

## ② Shinozuka & Yang の評価式

Shinozuka & Yang は狭帯域ランダム過程の応答問題に関連して疲労による破壊確率を次式の様に近似している<sup>[21]</sup>。

$$\hat{P}_k(T) = \exp\left\{-\frac{1}{\bar{D}(T)}\right\} \quad (5.8)$$

ここで  $\bar{D}(T)$  は時刻  $T$  までの累積疲労損傷期待値であるから本節での荷重組合せを考慮した  $D_k^*$  値を用い、更に累積疲労損傷度に対する限界値が本節では  $\hat{\delta}_k$  であることを考慮すれば (5.8) 式は次式の様に表現することができる。

$$\hat{P}_k(T) = \exp\left\{-\frac{\hat{Q}_k}{T\Omega_k}\right\} \equiv \exp\left(-\frac{\bar{T}_k}{T}\right) \quad (5.9)$$

なお (5.9) 式は  $T=0$  及び  $\infty$  において  $\Omega_k=1$  の時の (5.6) 式に一致する。

上記いずれの評価式を採用するかは対象とする問題毎に十分検討すべきであるが、両者の精度検証あるいは有用性の比較検討等は通常の疲労損傷解析における全体的な問題であるだけに今後の研究課題とすることとし、本研究では当該検討は対象外とした。但し、いずれの評価式を採用するにしても最終的には  $\Omega_k$  を求めることに帰着するため、この値を如何にして推定するか解析上の最大のポイントとなる。しかし、動荷重の継続時間、発生時刻、振幅レベル等の不確定性及び荷重組合せを考慮した  $\Omega_k$  の定式化は未だ行われていない。このため本節では初通過破壊問題に対してのみ定式化された Wen の Load Coincidence 法<sup>13)</sup>を拡張して、2種の動荷重を受ける場合について次の様な疲労問題に対する新たな関係式を提案した。

$$\Omega_k = \bar{P}_1 \mu_{d1} D_{1k} + \bar{P}_2 \mu_{d2} D_{2k} + \bar{P}_{12} \mu_{d12} D_{12k} \quad (5.10)$$

ただし

$\bar{P}_1$  : 荷重  $F_1$  のみが存在し、かつ発生する時の平均発生率

$\bar{P}_2$  : 荷重  $F_2$  のみが存在し、かつ発生する時の平均発生率

$\bar{P}_{12}$  : 荷重  $F_1, F_2$  が存在し、かつ同時に発生する時の平均発生率

$\mu_{d1}$  : 荷重  $F_1$  のみが存在する時の平均継続時間

$\mu_{d2}$  : 荷重  $F_2$  のみが存在する時の平均継続時間

$\mu_{d12}$  : 荷重  $F_1, F_2$  が存在し、かつ同時に発生する時の平均継続時間 ( $\approx \mu_{d1} \mu_{d2} / (\mu_{d1} + \mu_{d2})$ )

$D_{1k}$  :  $k$  層において荷重  $F_1$  のみが存在し、かつ発生する時の単位時間当りの疲労損傷期待値



$D_{2k}$  :  $k$  層において荷重  $F_2$  のみが存在し、かつ発生する時の単位時間当りの疲労損傷期待値

$D_{12k}$  :  $k$  層において荷重  $F_1, F_2$  が存在し、かつ同時に発生する時の単位時間当りの疲労損傷期待値

上式における  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_{12}$  としては、初通過破壊問題同様に荷重の発生が確率ポアソン過程に従うものと仮定して (3.12) 及び (3.13) 式で近似化できるものとする。

(5.10) 式を利用することにより、 $D_{1k}, D_{2k}, D_{12k}$  が計算できれば、単位年間の累積疲労損傷期待値が求められるとともに、 $T$  年後における累積疲労損傷期待値及び疲労損傷の破壊確率が、更には疲労寿命期待値が求められることになる。

## (2) 2 荷重同時作用時の単位時間当りの疲労損傷期待値

### (i) 単位時間当りの超過回数期待値

一般に超過回数期待値は応答変位に関して求められることが多いが疲労評価に際しては応力レベルでの定式化が必要となる。本章で対象としている多質点系についても応答統計量は変位に関して得られるので変位→応力への変換が必要となる。しかしこの変換を厳密に評価しようとするれば、対象とする構造物の詳細な形状、材料特性、応力集中状態等の情報が更に必要となるが、本章での主目的は、このような変位→応力への変換を詳細に検討するのではなく、不規則振動下における疲労評価問題への荷重組合せの影響を検討することにある。したがって変位→応力への変換についてはもっとも簡単な次の関係式

$$S = \eta u \quad (5.11)$$

が近似的に成立する様なケースに限定して本章では以下の検討を進めることとする。

(5.11) 式が成立する場合には応答応力に関する単位時間当りの超過回数期待値  $\nu_{12k}^+$  は第2.4節より次の通りとなる。

$$\begin{aligned} \nu_{12k}^+ = & \frac{\sqrt{\sigma_{u12k}^2 \sigma_{\dot{u}12k}^2 - \kappa_{u12k} \dot{u}_{12k}}} {2\pi \sigma_{u12k}^2} \exp\left(-\frac{S^2}{2\eta^2 \sigma_{u12k}^2}\right) \cdot e^{-\frac{h^2}{2}} \\ & + \frac{S \kappa_{u12k} \dot{u}_{12k} \exp\left(-\frac{S^2}{2\eta^2 \sigma_{u12k}^2}\right)}{\sqrt{2\pi} \eta \sigma_{u12k}^3} \operatorname{Erf}(h) \end{aligned} \quad (5.12)$$

ただし

$$\begin{aligned} \operatorname{Erf}(h) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_h^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ h &= \frac{-S \kappa_{u12k} \dot{u}_{12k}}{\eta \sigma_{u12k} \sqrt{\sigma_{u12k}^2 \sigma_{\dot{u}12k}^2 - \kappa_{u12k} \dot{u}_{12k}}} \end{aligned}$$

ここで  $\sigma_{u12k}^2$ ,  $\sigma_{\dot{u}12k}^2$ ,  $\kappa_{u12k} \dot{u}_{12k}$  は各々、荷重  $F_1$ ,  $F_2$  が同時に作用した時の、 $k$  層における層間相対変位、相対速度の分散値、及び共分散値を示しているがこれらの値は既述の如く図4.3のモデルを対象とする場合には既に第4.2節により求められている。

(i) 単位時間当りの疲労損傷期待値

不規則振動下における疲労損傷評価手法としては種々の方法が提案されているが、本節では第2.4節で提案した超過回数期待値から直接疲労評価を行う方法を採用する。すなわち  $[t, t + \Delta t]$  において系に累積される疲労損傷量  $\Delta D_{12k}$  はマイナー則より

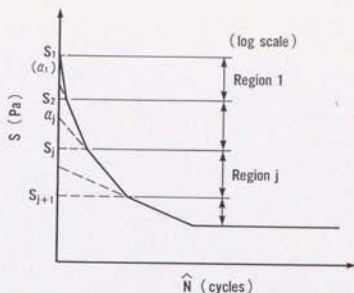


図5.1 直線近似によるS-N曲線

$$\Delta D_{12k} = \sum_q \left( \frac{n_q}{\hat{N}_q} \right) \quad (5.13)$$

ただし

$n_q$  :  $\Delta t$  間における応力レベル  $S_q$  のサイクル数

$\hat{N}_q$  : 応力レベル  $S_q$  における破壊までのサイクル数

であり、(5.13) 式で必要となる  $\hat{N}_q$  の値についてはS-N曲線として図5.1の様な直線近似による曲線を利用する場合、 $j$  領域における  $\hat{N}_q$  の値は、

$$(\hat{N}_q)_j = \left( \frac{\alpha_j}{S_q} \right)^{\beta_j} \quad (5.14)$$

ただし

$\alpha_j$  :  $j$  領域直線と縦軸との交点の応力

$\beta_j$  :  $j$  領域直線の傾きが  $-1/\beta_j$

となることより  $\Delta t$  間における累積疲労損傷の期待値  $E[\Delta D_{12k}]$  は、第2.4節同様に次の様に導出される。

$$E[\Delta D_{12k}] = -\Delta t \sum_{i=1}^k \frac{1}{(\alpha_i)^{\beta_i}} \int_{S_{i+1}}^{S_i} S^{\beta_i} \left\{ \frac{d\nu_{S_{12k}}^+(t)}{ds} \right\} dS \quad (5.15)$$

ただし前式は図5.1での直線近似数を $k$ 個と仮定した場合における定式化である。ところで、近年、応力(あるいは歪)頻度の計数法としては、レンジペア法、レインフロー法等が最も合理性が高いと言われているが、(5.15)式での超過回数期待値をベースとした手法では、計数法としてピーク計数法を採用したことに相当しており、本論文では、このピーク計数法による疲労損傷評価も、有効であるとの仮定のもとで理論展開をはかっている。

(5.15) 式より単位時間当りの疲労損傷期待値  $D_{12k}$  は

$$D_{12k} = \frac{E[\Delta D_{12k}]}{\Delta t}$$

$$= - \sum_{j=1}^k \frac{1}{(\sigma_j)^{\beta_j}} \int_{S_{j+1}}^{S_j} S^{\beta_j} \left\{ \frac{d\nu_{12k}^+(t)}{ds} \right\} dS \quad (5.16)$$

となる。(5.16) 式において  $\nu_{12k}^+(t)$  は (5.12) 式で与えられているので  $D_{12k}$  は求まるが、特に  $\beta_j$  が整数の場合には解析解が得られる。この形を  $D_{12k} = \sum_{j=1}^k D_{12kj}$  とした時の各々の領域における  $D_{12kj}$  を付録5.1に示す。更に本節では定常確率過程に対する疲労問題を取り扱うことにすれば、応答共分散値  $\kappa_{u_{12k}u_{12k}}$  は第4.2節より 0 となるのでこれを考慮すれば付録5.1に示す  $D_{12kj}$  は以下の様に比較的簡単な表現となる。

①  $\beta_j = 2m$  の時

$$D_{12kj} = \frac{-\sigma_{u_{12k}}^{2m} m!}{2\pi\sigma_{u_{12k}}^2 (\sigma_j)^{2m}} \left[ \exp\left(-\frac{S_j^2}{2\sigma_{u_{12k}}^2 \eta^2}\right) \sum_{r=0}^m \frac{S_j^{2(m-r)} (2\sigma_{u_{12k}}^2 \eta^2)^r}{(m-r)!} \right.$$

$$\left. - \exp\left(-\frac{S_{j+1}^2}{2\sigma_{u_{12k}}^2 \eta^2}\right) \sum_{r=0}^m \frac{S_{j+1}^{2(m-r)} (2\sigma_{u_{12k}}^2 \eta^2)^r}{(m-r)!} \right] \quad (5.17)$$

②  $\beta_j = 2m+1$  の時

$$D_{12kj} = \frac{\sigma_{u_{12k}}^{2m+1} (2m+1)!!}{2\pi\sigma_{u_{12k}}^2 \eta^2 (\sigma_j)^{2m+1}} \left\{ \sum_{r=1}^{m+1} \frac{(\sigma_{u_{12k}}^2 \eta^2)^{2r}}{(2m+3-2r)!} \right.$$

$$\times [S_{j+1}^{2m+3-2r} \cdot \exp\left(-\frac{S_{j+1}^2}{2\sigma_{u_{12k}}^2 \eta^2}\right) - S_j^{2m+3-2r} \cdot \exp\left(-\frac{S_j^2}{2\sigma_{u_{12k}}^2 \eta^2}\right)]$$

$$\left. + \sqrt{2\pi} (\sigma_{u_{12k}} \eta)^{2m+3} \left[ \operatorname{Erf}\left(-\frac{S_{j+1}}{\sigma_{u_{12k}} \eta}\right) - \operatorname{Erf}\left(-\frac{S_j}{\sigma_{u_{12k}} \eta}\right) \right] \right\} \quad (5.18)$$

(i) 入力レベルの不確定性を考慮した単位時間当りの疲労損傷期待値

(5.16) 式に含まれている  $\sigma_{u_{12k}}$ ,  $\sigma_{\dot{u}_{12k}}$ ,  $\kappa_{u_{12k}\dot{u}_{12k}}$  (定常応答の場合には 0) は明らかに入力としての動荷重  $F_1$ ,  $F_2$  のスペクトル特性を規定するパラメータ  $a$  の関数である。ここで  $a$  が確定値であれば (5.16) 式は計算できるが、対象とする動荷重は自然界の現象であり  $a$  は不確定性を有していると考えの方がより現実的である。このため  $a$  の不確定性を考慮して (5.16) 式を修正したものが次式である。

$$\mathcal{D}_{12k} = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\sigma_j)^{\beta_j}} \int_{A_1} \cdots \int_{A_M} \int_{S_{j+1}}^{S_j} S^{\beta_j} \left( \frac{d\nu_{S_{12k}}^+}{dS} \right) f(a_1) \cdots f(a_M) dS da_1 \cdots da_M \quad (5.19)$$

ただし

$A_i$  : パラメータ  $a_i$  の積分領域を示す

$f(a_i)$ :  $a_i$  に関する確率密度関数

$M$  : パラメータの個数

本節で対象としている様なホワイトノイズ入力の場合にはスペクトル特性を規定するパラメータはパワースペクトル強度 1 個であるので各荷重について各々  $S_{0g}$ ,  $S_{0f}$  で表現すれば (5.19) 式は以下の様になる。

$$\mathcal{D}_{12k} = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\sigma_j)^{\beta_j}} \int \int \int_{S_{j+1}}^{S_j} S^{\beta_j} \left( \frac{d\nu_{S_{12k}}^+}{dS} \right) f_{S_{0g}}(S_{0g}) \times f_{S_{0f}}(S_{0f}) dS dS_{0g} dS_{0f} \quad (5.20)$$

更に  $\beta_j$  が整数で (5.17) 式もしくは (5.18) 式が使用できる場合には、便宜上 (5.17) 式もしくは (5.18) 式の右辺を  $V_{12kj}(\sigma_{u_{12k}}, \sigma_{\dot{u}_{12k}}) \Rightarrow V_{12kj}(S_{0g}, S_{0f})$  と置く時、

$$\mathcal{D}_{12k} = \sum_{j=1}^{\infty} \int \int V_{12kj}(S_{0g}, S_{0f}) f_{S_{0g}}(S_{0g}) f_{S_{0f}}(S_{0f}) dS_{0g} dS_{0f} \quad (5.21)$$

となる。故に (5.21) 式において  $f_{S_{0g}}(S_{0g})$ ,  $f_{S_{0f}}(S_{0f})$  の形を具体的に決めてやれば  $\mathcal{D}_{12k}$  が以下の如くに求まる。

①  $S_{0g}, S_{0f}$  が一様分布する場合

分布形は (4.32) 式で表わされるので、これを (5.21) 式に代入すればよい。

$$D_{12k} = \frac{1}{\delta_g \delta_f} \sum_{j=1}^k \int_0^{\delta_g} \int_0^{\delta_f} V_{12k_j}(S_{0g}, S_{0f}) dS_{0g} dS_{0f} \quad (5.22)$$

②  $S_{0g}, S_{0f}$  がレーリー分布する場合

分布形は (4.34) 式の通りであり、これを (5.21) 式に代入することにより  $D_{12k}$  が得られる。

$$D_{12k} = \frac{1}{z_g^2 z_f^2 \{1 - \exp(-\frac{b_g^2}{2z_g^2})\} \{1 - \exp(-\frac{b_f^2}{2z_f^2})\}} \sum_{j=1}^k \int_0^{b_g} \int_0^{b_f} S_{0g} S_{0f} V_{12k_j}(S_{0g}, S_{0f}) \cdot \exp\{-\frac{S_{0g}^2}{2z_g^2} - \frac{S_{0f}^2}{2z_f^2}\} dS_{0g} dS_{0f} \quad (5.23)$$

③ 1 荷重のみ作用時の単位時間当りの疲労損傷期待値

前項では 2 荷重同時作用時の単位時間当りの疲労損傷期待値を導出したが、1 荷重作用時の定式化も前項とほとんど同じである。

単一荷重としては  $\bar{x}_g, F_i$  のいずれを用いても定式化は同じであるが、便宜上ここでは  $\bar{x}_g$  を採用した場合 (すなわち  $\bar{x}_g$  に対応する値を  $D_{1k}$  とし、 $D_{2k}$  については導出を省略) についてその結果を以下に示しておく。

①  $S_{0g}$  が一様分布する場合

$$D_{1k} = \frac{1}{\delta_g} \sum_{j=1}^k \int_0^{\delta_g} V_{1k_j}(S_{0g}) dS_{0g} \quad (5.24)$$

②  $S_{0g}$  がレーリー分布する場合

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{1k} = & \frac{1}{z_g^2 \{1 - \exp(-\frac{b_g^2}{2z_g^2})\}} \sum_{j=1}^A \int_0^{b_g} S_{0g} V_{1k_j}(S_{0g}) \\ & \times \exp(-\frac{S_{0g}^2}{2z_g^2}) dS_{0g} \end{aligned} \quad (5.25)$$

ここで (5.24) (5.25) 両式における  $V_{1k_j}(S_{0g})$  は, (5.17)式もしくは(5.18)式において  $\sigma_{u_{12k}}, \sigma_{\dot{u}_{12k}}$  のかわりに  $\sigma_{u_{1k}}, \sigma_{\dot{u}_{1k}}$  を代入した時の値を示している。

## 5.2 数値計算例

本節では前節で開発した解析手法を用いて履歴系構造物の疲労破壊問題に対する解析例を示すとともに、新たに提案した疲労問題における荷重組合せ則の妥当性を確認するために実施したシミュレーション計算結果についても述べる。

### (1) 荷重組合せ則の妥当性の検討

前節では荷重組合せの影響を考慮した年間の累積疲労損傷期待値に対する新たな関係式((5.10)式)を提案したが、この関係式の妥当性を確認するためにモンテカルロシミュレーションを実施した。

シミュレーションは(5.10)式右辺の表現自身が成立するかどうかを検討するものであったため、モンテカルロ法によって発生させたサンプルは荷重履歴ではなく荷重効果(load effect)としてのある要素における応力応答の時刻歴であるものと想定、更に疲労損傷推定に必要なS-N曲線の形については定性的傾向を示す次式

$$S = C_0 \exp(-C_B \cdot N) \quad (5.26)$$

で簡単に表現することとした。また応力応答波形は、次の理由により周期 $T_F$ (確定値)の正弦波モデルで仮定した。

- i) 構造物の応力応答の様な狭帯域確率過程では、系の卓越固有周期で振動する場合が多い。
- ii) 本論文で採用している応力頻度計数法としてのピーク計数法が有効とした場合には、狭帯域確率過程での最大ピーク値に他のピーク値も一致させる(すなわち一定振幅化)様な振幅のモデル化は、マイナー則を用いた累積疲労損傷評価においては、安全サイドのモデル化である。



- ii) 二荷重同時発生時においても、その初期の過渡状態を除いては、i) が成立する可能性が大きい。
- iv) 二荷重同時発生時も含み、一般に外乱が作用した直後の過渡応答部分は、構造の非線形特性、応答量の初期値、外乱の振幅や位相等により種々の非定常状態をとり、特定のモデル化を行うことが困難である。このため本論文では、過渡応答部分については、定常とみなせる領域の継続時間を増加させることで疲労評価に対応できるものと仮定、もしくはそれが許容されるケースに限定することとし、過渡応答部分の詳細な取り扱いは今後の課題とする。

この場合の確率変数は、応力応答振幅  $S$  (平均値  $=\mu_s$ , 標準偏差  $=\sigma_s$ ) 及び応力応答継続時間  $d$  (平均値  $=\mu_d$ , 標準偏差  $=\sigma_d$ ) である。更に発生時刻  $t$  は確率ポアソン過程 (平均発生率  $=\lambda$ ) に従うものとした。

シミュレーションで用いた諸定数のうち標準ケース (reference case) の値を以下に示す。

$$\left. \begin{aligned} \mu_{d1} &= \mu_{d2} = 2.85 \times 10^{-6} \text{ (year)}, & \sigma_{d1} &= \sigma_{d2} = 0.2 \mu_{d1} \\ \mu_{s1} &= \mu_{s2} = 1.0 \times 10^7 \text{ (Pa)}, & \sigma_{s1} &= \sigma_{s2} = 0.1 \mu_{s1} \\ \lambda_1 &= \lambda_2 = 3.46 \times 10^4, & T_f &= 1.0 \text{ (sec)} \\ C_a &= 3.92 \times 10^8 \text{ (Pa)}, & C_d &= 1.39 \times 10^{-5} \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

上記値をベースにして  $\mu_s$  及び  $\mu_d$  をパラメータとして年間累積疲労損傷期待値  $D^*$  を求めたものが図5.2及び図5.3であるが、いずれも確率分布形の違いによる影響を評価するため応力応答振幅  $S$  及び継続時間  $d$  の分布形として正規分布、指数分布及び一様分布を仮定した場合について結果を示している。

図中の理論値は (5.10) 式右辺に従い解析的に  $D^*$  を求めたものであり、一方シミュレーションは300組のサンプルより得られた累積疲労損傷値を統計処理して求めたものであるが、確率分布形の種類に関係なく両者は良い一致を示しており、これにより提案した (5.10) 式の妥当性は確認できたものと考ええる。ただし、前述の正弦波モデル化理由での非該当項目、すなわち、ピーク計数法以外の応力頻度計数法による疲労損傷評価や、応答過渡状態の詳細取り扱いを含んだ疲労損傷評価に対しては、(5.10) 式の有用性・妥当性が別途検討されるべきであることは言うまでもない。

(2) 一自由度履歴系構造物による荷重組合せ効果の検討

疲労損傷問題における荷重組合せ効果の影響を検討するため一自由度履歴系構造物を用いたパラメータ感度解析を実施した。対象としたモデル及び構造諸元は図4.1と同一の強制変位入力と一般外力の2荷重を受ける荷重組合せ問題であり第4章数値計算例同様に定常確率過程の場合に限定する。更に本検討例では荷重組合せ現象そのものに焦点を絞ることとし入力のパワースペクトル強度は確定値とした。

荷重組合せの影響を評価するためには対象とする一自由度履歴系の年間の累積疲労損傷期待値  $\bar{D}^*$  を求めれば良い。 $\bar{D}^*$  は (5.10) (3.12) 及び (3.13) 式を用いて記述されるが、荷重組合せの影響を検討するために以下の様に変形するのが都合良い。

$$\begin{aligned}\bar{D}^* &= \lambda_1 \mu \dot{a}_1 D_1 + \lambda_2 \mu \dot{a}_2 D_2 + \lambda_1 \lambda_2 (\mu a_1 + \mu a_2) \mu \dot{a}_{12} D_{12} \\ &= (\lambda_1 \mu \dot{a}_1 D_1 + \lambda_2 \mu \dot{a}_2 D_2) \left\{ 1 + \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\mu a_1 + \mu a_2) \mu \dot{a}_{12} D_{12}}{(\lambda_1 \mu \dot{a}_1 D_1 + \lambda_2 \mu \dot{a}_2 D_2)} \right\} \quad (5.28)\end{aligned}$$

①

前式において  $\mu \dot{a}_1$ ,  $\mu \dot{a}_2$ ,  $\mu \dot{a}_{12}$  は各々  $\mu a_1$ ,  $\mu a_2$ ,  $\mu a_{12}$  を秒単位で示したものである。また①は荷重の同時発生効果を見捨てた場合の年間の累積疲労損傷期待値を1とする時の、同時発生による累積疲労損傷期待値の割合を示している。故に①の値が1に比べてオーダ的にどの程度であるかを評価することにより同時発生現象を考慮する必要があるか否かを定量的に判断することが可能となる。

(5.28) 式における  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_{12}$  は (5.17) 式もしくは (5.18) 式を用いることにより得られる。本項では以下の諸定数を用いて具体的計算を実施した。

$$\begin{aligned}L &= 1, \quad B_1 = 2m = 14.0 (\therefore m = 7) \\ S_1 &= 392 \text{ (MPa)}, \quad S_2 = 98 \text{ (MPa)}, \quad \sigma_1 = 392 \text{ (MPa)} \\ \eta &= 50 \text{ (MPa/cm)}\end{aligned}$$

計算結果として動荷重のパワースペクトル強度  $S_0$ 、平均継続時間  $\mu_d$  及び平均発生率  $\lambda$  をパラメータに示したものが図5.4である。仮に荷重組合せの影響が大きくなるレベルを  $10^{-1}$  程度以上と考えれば、同図より  $\lambda_1(=\lambda_2) \geq 10^{-1}$  かつ  $\mu_{d1}(=\mu_{d2}) \geq 10^{-2}$  の範囲では荷重組合せ効果の影響は特に大きく、荷重組合せ現象を無視することは累積疲労による損傷度を低目、すなわち非安全側に評価してしまうことを意味している。一方  $\mu_{d1}(=\mu_{d2}) \leq 10^{-4}$  では  $\lambda$  の値によらず荷重組合せ効果は無視しても良いことになる。ただし以上の結論は対象とする構造の非線形特性、材料強度 (S/N 曲線) 及び外力の特性により種々異なるものであり、このため荷重の同時発生の可能性がありかつ疲労損傷が懸念される様な構造物を新規に設計・施工する際には荷重組合せの影響を定量的に十分把握しておく必要がある。この必要性に対して前節で開発した解析手法を利用すれば荷重組合せ効果を含んだ疲労損傷評価が可能になるとともに荷重組合せ効果の部分のみを抽出・検討することもでき荷重組合せの影響を設計上考慮する必要があるか否かを定量的に判断することが可能となる。

### ③ 三自由度履歴系構造物の疲労損傷解析

前章で取り扱ったと同じ履歴系構造物、すなわち図4.3のモデルを対象として疲労損傷による破壊確率を解析した。破壊確率解析時の基礎となる評価式には既述の如く二種あるが、ここでは不確定性の破壊確率への寄与度の傾向を知るため Ang & Munse の式を採用した。具体的には質点数3個、作用する一般外力3個とした場合について数値計算を行ったが、計算時に使用した諸定数のうち標準ケース (reference case) の値を以下に示す。

(構造系基本定数)

$$w_1 = w_2 = w_3 = 10.0 \text{ (rad/s)}$$

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0.01$$

$$\rho_2 = \rho_3 = 1.0$$

(履歴モデルのパラメータ)

$$\begin{aligned}A_1 &= A_2 = A_3 = 1.0 \\ \alpha_1 &= \alpha_2 = \alpha_3 = 0.05 \\ \beta_1 &= \beta_2 = \beta_3 = 0.75 \\ \gamma_1 &= \gamma_2 = \gamma_3 = 0.47\end{aligned}$$

(S-N曲線関連パラメータ)

$$\begin{aligned}\ell &= 1, \quad \sigma_1 = 392 \text{ (MPa)}, \quad \beta_1 = 14.0 \\ S_1 &= 392 \text{ (MPa)}, \quad S_2 = 98 \text{ (MPa)}\end{aligned}$$

(動荷重パラメータ) (分布は一様分布を採用)

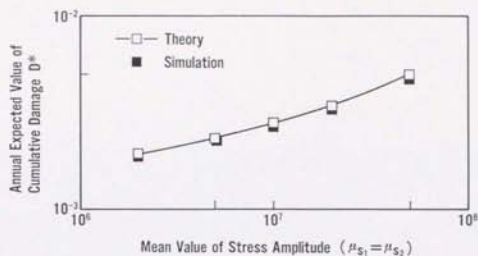
$$\begin{aligned}b_1 &= b_2 = b_3 = 1.0 \\ \delta_g &= \delta_f = 800 \text{ (cm}^2/\text{s}^3) \\ \lambda_1 &= \lambda_2 = 0.1 \text{ (1/year)} \\ \mu_{d_1} &= \mu_{d_2} = 3.17 \times 10^{-7} \text{ (year)} (=10\text{sec})\end{aligned}$$

(その他の諸定数)

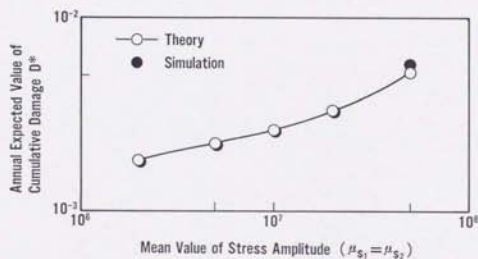
$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_1 &= \hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_3 = 1.0 \\ \Omega_R &= 0.9, \quad T = 20 \text{ (year)}, \quad \eta = 9.18 \times 10^3\end{aligned}$$

以上の諸定数をベースにして疲労損傷による破壊確率  $P_f(T)$  を計算したものが図5.5及び図5.6であり、横軸はいずれも耐用年数を表わしている。図5.5は破壊確率に及ぼす動荷重平均発生率の影響を示したものであり、図5.6では動荷重平均継続時間の破壊確率への影響度合を示している。これら両図より入力としての動荷重を特徴づけるパラメータ(発生率、継続時間)が破壊確率へ及ぼす影響の増加割合は、少なくとも本節で使用了諸定数、諸条件を有する系の場合については耐用年数に関係なくほぼ一定であることがわかる。

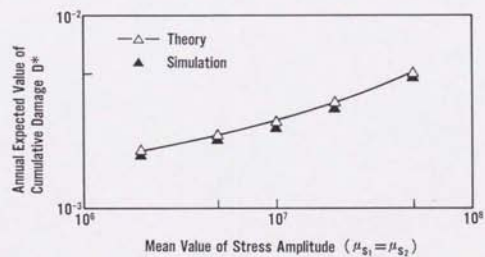
一方、不確定性指数  $\Omega_R$  の破壊確率への影響を標準ケースについて求めたものが図5.7であるが、同図より  $\Omega_R$  の破壊確率へ与える影響はかなり大きい(たとえば  $\Omega_R$  が  $0.7 \rightarrow 0.45$  で破壊確率は1桁減少)様である。このため(5.6)式を実機に適用するに際しては Ang らが提案する  $\Omega_R$  に対して実機構造の不確定性を如何に精度良く適合させるかが重要な課題となるものと思われる。



(a) 確率分布形=正規分布

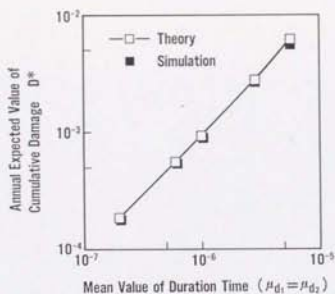


(b) 確率分布形=指数分布

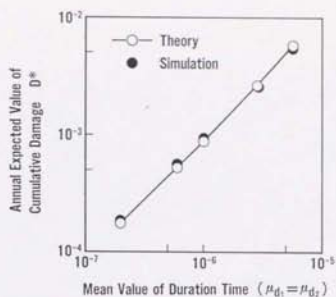


(c) 確率分布形=一様分布

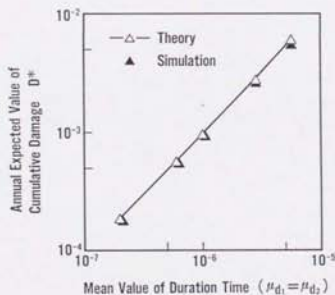
図5.2 年間累積疲労損傷期待値と応力振幅平均値の関係



(a) 確率分布形 = 正規分布

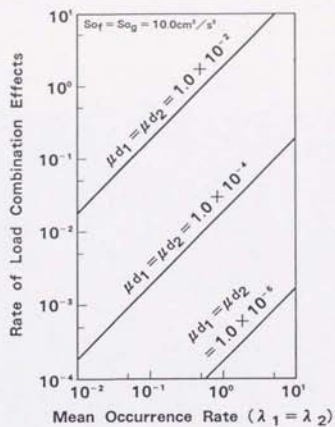


(b) 確率分布形 = 指数分布

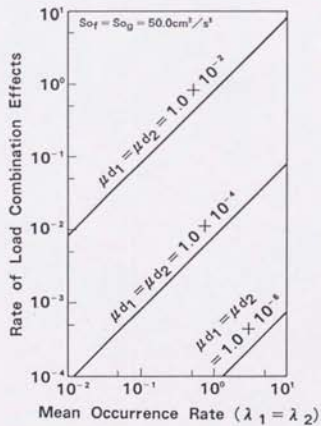


(c) 確率分布形 = 一様分布

図5.3 年間累積疲労損傷期待値と継続時間平均値の関係



(a) case 1



(b) case 2

図5.4 疲労損傷評価における荷重組合せ効果の寄与度



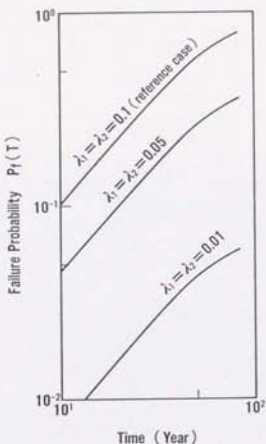


図5.5 破壊確率に及ぼす動荷重平均発生率の影響

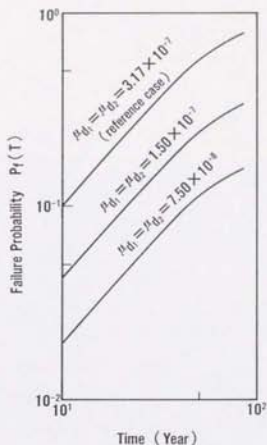


図5.6 破壊確率に及ぼす平均継続時間の影響

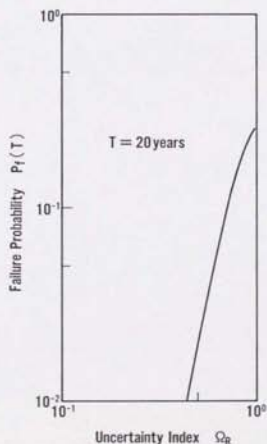


図5.7 破壊確率と不確定性指数の関係  
- 211 -



### 5.3 まとめ

本章では荷重組合せを考慮した動的信頼性解析の理論展開として、複数種の動的荷重を受ける多自由度履歴系構造物の疲労破壊問題を取り上げ、これを評価するための解析手法について検討した。

この節では上記検討結果より明らかになった点をまとめておく。

- (1) 疲労による破壊確率を推定するには通常累積疲労損傷期待値を算出する必要がある。しかし入力となる動荷重の確率論的な荷重組合せを考慮する場合には、その応答量に対する累積疲労損傷期待値の導出に際しても荷重組合せ効果を考慮することになるため取り扱いが複雑となり現在まで有効な手法が見当たらない。そこで本章においては荷重組合せ問題にも対応可能な累積疲労損傷期待値の推定法を新たに提案した。また本推定法の妥当性を検討するため別途モンテカルロシミュレーションを実施し、手法の有用性を確認した。
- (2) 従来解析困難とされて来た複数の動的荷重の同時発生効果及び構造の振動特性を考慮した非線形（弾塑性）構造物の疲労信頼性評価が可能となった。すなわち弾塑性復元力特性を示す数学モデルを含む多自由度非線形構造系に対して、Fokker-Planck 法、マイナー則を適用することにより疲労損傷による破壊確率を評価しうる理論的解析手法を開発した。
- (3) 一自由度弾塑性構造物の荷重組合せを考慮した疲労損傷問題を取り上げ、この構造物の年間当りの累積疲労損傷期待値を種々のパラメータについて求めた。更に結果を比較・検討することにより疲労問題における荷重組合せ現象考慮の必要性を明らかにするとともに、当該荷重組合せ現象を把握するために本章で開発した解析手法が有効であることを示した。
- (4) 本章で開発した解析手法を用いて、三自由度履歴系構造物に対する疲労破壊確率を具体的に算出するとともに、動荷重の平均発生率及び平均継続時間が破壊確率に及ぼす影響を定量的に把握した。更にモデル化や製作上の誤差から発

生する不確定性を示すパラメータについては、その破壊確率への影響度を  
示すことにより実機適用に際してはパラメータの推定精度向上が重要な課題  
あることを明らかにした。

## 参考文献（第5章）

- [1] Ang, A.W-S. and Munse, W.H., Practical Reliability Basis for Structural Fatigue, ASCE National Structural Engineering Convention, Preprint 2494, (1975).
- [2] Shinozuka, M. and Yang, J.-N., Peak Structural Response to Non-Stationary Random Excitations, Journal of Sound and Vibration, Vol.16, No.4, (1971), 505.
- [3] Wen, Y.K., Stochastic Dependencies in Load Combination, Proc. 3rd ICOSSAR, (1981), 89.

## 第 6 章

### 入力の平均値及び材料強度のばらつき・ 経年変化による強度低下を考慮した 場合の取り扱い

- 6.1 基本式の導出
- 6.2 数値計算例
- 6.3 まとめ

平均値を有する不規則入力を受ける非線形構造物の、材料強度のばらつき及び経年変化による強度低下現象を考慮した、初通過破壊に関する動的信頼性評価手法について述べる。

## 6.1 基本式の導出

第3～5章では荷重組合せを考慮した動的信頼性評価のための基本的な取り扱い方法について述べた。本節では、第3～5章で対象外とした問題のうち、ケースによっては重要なファクタとなる可能性もある非線形問題における入力平均値、材料強度のばらつき及び経年変化による強度低下現象について、これらを考慮した場合の信頼性への影響を概略評価するために、非線形一自由度系を取り上げて、これに対する定式化を行う。

### (I) 非線形構造物の不規則応答解析

一般に不規則外乱  $w(t)$  を受ける非線形一自由度系の運動方程式は次の様に表わされる。

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = w(t) \quad (6.1)$$

(6.1) 式を  $x = X_1$ ,  $\dot{x} = X_2$  として状態変数表示すると、

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= -f(X_1, X_2) + w(t) \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

となるので (6.2) 式において  $w(t)$  を確率過程と考えれば (6.2) 式は  $(X_1, X_2)$  を状態確率変数とする確率微分方程式となる。(6.2) 式における非定常確率過程  $w(t)$  を平均値を含んだ形で次の様に仮定する。

$$w(t) = \bar{w} + e(t)n(t) \quad (6.3)$$

ここで  $\bar{w}$  は  $w(t)$  の平均値で時間に不変な正の確定値とし、 $e(t)$  は時間とともにゆっくり変化する確定関数でありまた  $n(t)$  は次の特性を有する正規性ホワイトノイズとする。

$$\left. \begin{aligned} E[n(t)] &= 0 \\ E[n(t)n(t+\tau)] &= 2\pi\bar{S}_0\delta(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

$E[\quad]$  : アンサンブル平均

$\bar{S}_0$  :  $n(t)$  のパワースペクトルの強度

$\delta(t)$  : デルタ関数

この時状態確率変数  $X = (X_1, X_2)^T$  はマルコフベクトル成分と考えられるので Fokker-Planck 法を利用することにより  $X_1, X_2$  に関する非定常確率密度関数  $P(X_1, X_2; t)$  は次式を満たすことが示される<sup>[11]</sup>。

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -X_2 \frac{\partial P}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2} [P \{ f(X_1, X_2) - \bar{\omega}_1 \} + \pi \bar{S}_0 |e(t)|^2] \frac{\partial^2 P}{\partial X_2^2} \quad (6.5)$$

(6.5) 式について部分積分操作を繰返せばモーメント方程式が得られる。次に (6.5) 式の具体的表現を得るため (6.1) 式の実数項  $f(x, \dot{x})$  について考える。具体的な非線形形としてここでは Duffing 振動子を取り上げることになればこの時

$$f(x, \dot{x}) = a_1 \dot{x} + a_2 (x + \varepsilon x^3) \quad (6.6)$$

であるのでこれを (6.5) 式に代入することにより非定常確率密度関数  $P$  が満たすべき方程式が以下の通り導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & -X_2 \frac{\partial P}{\partial X_1} + a_1 X_2 \frac{\partial P}{\partial X_2} + a_2 X_1 \frac{\partial P}{\partial X_2} + a_2 \varepsilon X_1^3 \frac{\partial P}{\partial X_2} \\ & - \bar{\omega} \frac{\partial P}{\partial X_2} + a_1 P + \pi \bar{S}_0 |e(t)|^2 \frac{\partial^2 P}{\partial X_2^2} \end{aligned} \quad (6.7)$$

故に (6.7) 式を用いることにより Duffing 振動子に対するモーメント方程式を以下の様に求めることができる<sup>[11]</sup>。

$$\frac{\partial}{\partial t} E[X_1] = E[X_2] \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E[X_2] = -a_1 E[X_2] - a_2 E[X_1] - a_2 \varepsilon E[X_1^3] + \bar{\omega} \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E[X_1^2] = 2E[X_1 X_2] \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[X_2^2] = & -2a_1 E[X_2^2] - 2a_2 E[X_1 X_2] - 2a_2 \varepsilon E[X_1^2 X_2] + 2\bar{w} E[X_2] \\ & + 2\pi S_0 \{e(t)\}^2 \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E[X_1 X_2] = E[X_2^2] - a_1 E[X_1 X_2] - a_2 E[X_1^2] - a_2 \varepsilon E[X_1^2] + \bar{w} E[X_1] \quad (6.12)$$

しかし上式には高次モーメント  $E[X_1^3]$ ,  $E[X_1^2 X_2]$ ,  $E[X_1^4]$  を含むため閉じた方程式群とならずこのままでは解が得られない。

閉じた方程式群を得るためには種々の方法があるがここでは第2.4節で述べたキュムラント打ち切り手法を利用することにより高次モーメントの近似化を行う。

本節では3次及び4次のキュムラントの打ち切りが必要である。すなわち3次及び4次のキュムラントを0とすることにより一般的な次の関係式が得られる。

$$0 = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)(X_k - \mu_k)] \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} 0 = & E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)(X_k - \mu_k)(X_a - \mu_a)] \\ & - E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]E[(X_k - \mu_k)(X_a - \mu_a)] \\ & - E[(X_i - \mu_i)(X_k - \mu_k)]E[(X_j - \mu_j)(X_a - \mu_a)] \\ & - E[(X_i - \mu_i)(X_a - \mu_a)]E[(X_j - \mu_j)(X_k - \mu_k)] \end{aligned} \quad (6.14)$$

ただし,

$$\mu_a = E[X_a] \quad ; \quad a = i, j, k, \ell$$

上式は  $i, j, k, \ell$  の重複組合せについて成立するが、特にここでは (6.13) 式については以下の2ケース

$$\circ (i, j, k) = (1, 1, 1)$$

$$0 = E[(X_1 - \mu_1)^3] \quad (6.15)$$

$$\circ (i, j, k) = (1, 1, 2)$$

$$0 = E[(X_1 - \mu_1)^2(X_2 - \mu_2)] \quad (6.16)$$

また (6.14) 式については次の 2 ケース

$$\circ (i, j, k, \ell) = (1, 1, 1, 1)$$

$$0 = E[(X_1 - \mu_1)^4] - 3\{E[(X_1 - \mu_1)^2]\}^2 \quad (6.17)$$

$$\circ (i, j, k, \ell) = (1, 1, 1, 2)$$

$$0 = E[(X_1 - \mu_1)^3(X_2 - \mu_2)] - 3E[(X_1 - \mu_1)^2]E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] \quad (6.18)$$

が近似化に必要な関係式となる。すなわち (6.15) 式を整理することにより、

$$E[X_1^2] = 3\mu_1 E[X_1^2] - 2\mu_1^2 \quad (6.19)$$

が得られる。同様に (6.16) 式より

$$E[X_1^2 X_2] = 2\mu_1 E[X_1 X_2] + \mu_2 E[X_1^2] - 2\mu_1^2 \mu_2 \quad (6.20)$$

となる。(6.17) 式については展開形の中に  $E[X_1^3]$  が含まれるため (6.19) 式を利用することで次式が得られる。

$$E[X_1^4] = 3\{E[X_1^2]\}^2 - 2\mu_1^4 \quad (6.21)$$

(6.18) 式についても展開形の中に  $E[X_1^3 X_2]$  が含まれるため (6.20) 式を利用することにより次の関係式が得られる。

$$E[X_1^3 X_2] = 3E[X_1^2]E[X_1 X_2] - 2\mu_1^3 \mu_2 \quad (6.22)$$

故に (6.19) (6.21) 及び (6.22) 式を利用することにより (6.8)~(6.12) 式に対応した閉じたモーメント方程式群が以下の形で求まる。

$$\frac{\partial}{\partial t} E[X_1] = E[X_2] \quad (6.23)$$



$$\frac{\partial}{\partial t} E[X_2] = -a_1 E[X_2] - a_2 E[X_1] - 3\mu_1 a_2 \varepsilon E[X_1^2] + 2\mu_1^2 a_2 \varepsilon + \bar{w} \quad (6.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E[X_1^2] = 2E[X_1 X_2] \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[X_2^2] = & -2a_1 E[X_2^2] - 2a_2 E[X_1 X_2] - 6a_2 \varepsilon E[X_1^2] E[X_1 X_2] \\ & + 4\mu_1^2 \mu_2 a_2 \varepsilon + 2\bar{w} E[X_2] + 2\pi \bar{S}_0 |e(t)|^2 \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[X_1 X_2] = & E[X_2^2] - a_1 E[X_1 X_2] - a_2 E[X_1^2] - 3a_2 \varepsilon |E[X_1^2]|^2 \\ & + 2\mu_1^2 a_2 \varepsilon + \bar{w} E[X_1] \end{aligned} \quad (6.27)$$

(6.23)~(6.27) 式の連立方程式を解くことにより各モーメントの非定常応答解を求めることができるが本節では特に定常解に注目して解析を行うこととする。すなわち  $e(t)$  を単位ステップ関数  $1(t)$  と考えた時、十分に時間が経過した後の定常状態においては (6.23)~(6.27) 式の左辺は 0 であり  $e(t) = 1$  であることから各モーメントは次の形で表わされる。

$$E[X_1] = -3\mu_1 \varepsilon E[X_1^2] + 2\mu_1^2 \varepsilon + \frac{\bar{w}}{a_2} \quad (6.28)$$

$$E[X_2] = 0 \quad (6.29)$$

$$E[X_1^2] = \frac{-(a_1 a_2^2 + 3\mu_1 \varepsilon a_1 a_2 \bar{w}) + \sqrt{G}}{6a_1 a_2^2 \varepsilon} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} G = & (a_1 a_2^2 + 3\mu_1 \varepsilon a_1 a_2 \bar{w})^2 + 12a_1 a_2^2 \varepsilon |2\mu_1^3 \mu_2 a_2^2 \varepsilon| \\ & + a_2 \pi \bar{S}_0 + 2\mu_1^4 \varepsilon a_1 a_2^2 + 2\mu_1^2 \varepsilon a_1 a_2 \bar{w} + a_1 (\bar{w})^2 \end{aligned}$$

$$E[X_2^2] = \frac{\pi \bar{S}_0}{a_1} \quad (6.31)$$

$$E[X_1 X_2] = 0 \quad (6.32)$$

上式において (6.28), (6.30) 両式は連成しているのでこれは反復法等により解を求めることになる。

なお, (6.30) 式における  $G$  は通常の 2 次方程式における根の判別式に対応する部分であり, ここでは  $G$  を示す式の右辺第 2 項が正であることが, 正の実

数としての二次モーメント  $E[X_1^2]$  が存在するための条件となっている。

以上により各モーメントが得られるのでこれらの値を用いて  $x$  及び  $\dot{x}$  に関する分散値  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_{\dot{x}}^2$  と共分散値  $\kappa_{x\dot{x}}$  が次の様に求められる。

$$\sigma_x^2 = E[X_1^2] - \{E[X_1]\}^2 \quad (6.33)$$

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = E[\dot{X}_1^2] \quad (6.34)$$

$$\kappa_{x\dot{x}} = 0 \quad (6.35)$$

## (2) 初通過破壊問題

ある時刻  $t$  において振動変位が正の傾きをもってある一定レベル  $a$  を単位時間当りに交差する回数の期待値  $\nu_a^+(t)$  は応答が定常である時信頼性理論により<sup>[2]</sup>,

$$\nu_a^+(t) = \int_0^\infty \dot{x} P(a, \dot{x}) d\dot{x} \quad (6.36)$$

で与えられるので (6.36) 式における定常確率密度関数  $P(x, \dot{x})$  の形がわかれば  $\nu_a^+(t)$  が求められる。なお (6.36) 式では応答が定常であるにもかかわらず左辺は時間の関数となっているがこれは材料の経年変化による強度低下現象を考慮しており  $a$  が時間の関数となっているためである。

ところで  $x$  は応答変位であるが最終的な信頼性評価は一般に応力レベルで行われるので  $S=bx$  ( $S$  は応力を示す) なる比例関係が成立するものと考えた場合には、ヤコビアン  $|J|$  を用いた次の変換公式

$$P(S, \dot{S}) = P(x, \dot{x}) |J| \quad (6.37)$$

を利用することにより応力レベルでの単位時間当りの超過回数期待値  $\nu_S^+(t)$  が求まる。具体例として (6.36) 式での  $P$  の形として近似的にガウシアン確率密度関数が仮定できる場合には、 $\nu_a^+(t)$  は (6.35) 式を考慮しつつ文献[1]の結果を利用することにより次の様な解析的表現が可能となる。

$$\nu_s^+(t) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sigma_k}{\sigma_x} \right) \exp\left(-\frac{S^2}{2b^2\sigma_x^2}\right) \quad (6.38)$$

なお、上式における  $(\sigma_k/\sigma_x)$  の項は系が線形一自由度系の場合には良く知られている様に系の固有円振動数に等しくなる。

(6.38) 式において閾値すなわち  $S$  の値が確定値であれば (6.33), (6.34) 両式を用いて  $\nu_s^+(t)$  の値を計算することができるがここでは不確定量であるため直接には求められない。また (6.38) 式は応答に平均値を含まない場合において導出されているものであり本節で取り扱っている平均値を有する応答に関してはそのまま成立するものではないがこの点の補正については次項にて述べる。

### ③ 材料のばらつき及び経年変化による強度低下特性の考慮

応力レベルでのある閾値  $R$  を通過する単位時間当りの超過回数期待値  $\nu_R^+(t)$  は (6.38) 式により求められるが、 $R$  が不確定量の場合には確率密度関数を  $f_R(t)$  とすれば材料強度のばらつきを考慮した超過回数期待値  $\overline{\nu^+(t)}$  として次式

$$\overline{\nu^+(t)} = \int_{Q_R} \nu_R^+(t) f_R(t) dR \quad (6.39)$$

による評価を行う必要がある。ここで  $Q_R$  は変数  $R$  の存在領域を示す。 $f_R(t)$  の形は数値計算を行うため任意のもので良いが、ここでは理論的な見通しをつけ易い様にするため解析解が得られる正規分布を取り上げることとし、更に材料の強度低下モデルとしては種々のものが提案されているが<sup>[13]~[15]</sup>ここではもっとも簡単なモデルとして次の形を仮定する。

$$f_R(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_R} \exp\left\{-\frac{(R - \bar{R}')^2}{2\sigma_R^2}\right\} \quad (6.40)$$

ただし  $\bar{R}'$  は  $R$  の平均値でありこの値を、荷重履歴には依存せず単に材料の経年変化による強度低下モデルとして

$$\bar{R}' = R_0 \exp(-\alpha t) \quad (6.41)$$

の形でモデル化する。(6.40)式における  $\sigma_R$  は  $R$  の標準偏差でありこの値は時間に対して不変と仮定する。(6.40)、(6.41)及び(6.38)式を(6.39)式に代入することにより  $\bar{\nu}^+(t)$  が求まる。ただしこの値は前項でも述べた如く平均値を含まない応答の場合について有効であり平均値を含む場合には何らかの修正が必要となる。これは応力レベルでの応答平均値相当分を材料強度の平均値から差引くことで今までの定式化に何らの修正をも加えること無しに応答平均値の効果を反映することが可能となる。すなわち(6.41)式の代わりとして次式

$$\bar{R}' = \bar{R}' - bE[X_I] = R_0 \exp(-\alpha t) - bE[X_I] \quad (6.42)$$

を用いることにより応答平均値の効果を含んだ超過回数期待値を以下の様に求めることができる。

$$\bar{\nu}^+(t) = \frac{\sqrt{\pi} \sigma_X}{\sqrt{A} (2\pi)^{3/2} \sigma_X \sigma_R} \exp\{\lambda(e^{-\alpha t} - \frac{b}{R_0} E[X_I])^2\} \quad (6.43)$$

ただし

$$A = \frac{1}{2b^2 \sigma_X^2} + \frac{1}{2\sigma_R^2} + \frac{1}{2b^2 \sigma_X^4 \sigma_R^2}$$

$$\lambda = \frac{R_0^2}{4A\sigma_R^4} - \frac{R_0^2}{2\sigma_R^2}$$

次に信頼度について考える。一般に材料強度は正側と負側で同じ特性を示すと考えて良いが今の場合は応答に平均値分 ( $>0$ ) を含むため正側の超過回数期待値  $\bar{\nu}^+(t)$  については(6.43)式で示される様に  $E[X_I]$  を含む項で修正を行っており、同様の修正を負側の超過回数期待値  $\bar{\nu}^-(t)$  についても行うことにより、両側初通過問題としての、ある時刻  $t$  までに応答応力が材料強度を超えない確率 (信頼度)  $P_S(t)$  及び超える確率 (破壊確率)  $P_F(t)$  をポアソン近似を仮定することにより以下の通りに求めることができる。

$$\begin{aligned}
P_S(t) &= \exp\left[-\int_0^t \{\overline{\nu^+(t)} + \overline{\nu^-(t)}\} dt\right] \\
&= \exp\left[-\frac{\sqrt{\kappa} \sigma_R}{\sqrt{A} (2\pi)^{3/2} \sigma_X \sigma_R} \int_0^t \left\{ \exp\left[\lambda(e^{-\sigma t} - \frac{b}{R_0} E[X_1])^2\right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \exp\left[\lambda(e^{-\sigma t} + \frac{b}{R_0} E[X_1])^2\right] \right\} dt\right] \quad (6.44)
\end{aligned}$$

$$P_F(t) = 1 - P_S(t) \quad (6.45)$$

ただし、応答の平均値分が正であることから  $\overline{\nu^+(t)} > \overline{\nu^-(t)}$  であることは明らかであり、このため安全側の評価としては  $\overline{\nu^-(t)}$  が  $\overline{\nu^+(t)}$  に等しいと考えて (6.44) 式を次の様に近似化することも可能である。

$$\begin{aligned}
P_S(t) &\cong \exp\left\{-2 \int_0^t \overline{\nu^+(t)} dt\right\} \\
&= \exp\left[-\frac{\sqrt{\kappa} \sigma_R}{\sqrt{A} (2\pi)^{3/2} \sigma_X \sigma_R} \int_0^t \exp\left[\lambda(e^{-\sigma t} - \frac{b}{R_0} E[X_1])^2\right] dt\right] \quad (6.46)
\end{aligned}$$

なお、第6.2節の数値計算例における破壊確率の算出時においては (6.46) 式を (6.45) 式に代入したものをを用いている。

## 6.2 数値計算例

本節では前節で定式化を行った解析手法を用いて一自由度非線形構造物の初通過破壊問題に対する解析例を示すとともに、シミュレーション計算結果との比較による解析手法の妥当性の確認についても述べる。

解析対象としては図6.1に示す様に非線形復元力を有する一自由度系が風や波浪の様な平均値を含む不規則外乱を常時受ける場合についての初通過破壊問題を考える。

運動方程式は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x + \varepsilon x^3) = F \quad (6.47)$$

で表わされるので

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{m} (\equiv 2\gamma\omega_0) &= a_1 \\ \frac{k}{m} (\equiv \omega_0^2) &= a_2 \\ \frac{F}{m} &= w(t) \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

と考えれば(6.1)式及び(6.6)式で記述される Duffing 振動系となり前節で述べてきた方法により初通過破壊確率を算出することができる。

数値計算において標準ケース (reference case) として使用した諸定数は次の通りである： $\gamma=0.01$ ,  $\omega_0=20(1/s)$ ,  $\bar{S}_0=65(\text{cm}^2/\text{s}^3)$ ,  $\sigma_R=19.6(\text{MPa})$ ,  $R_0=470(\text{MPa})$ ,  $\alpha=7.13 \times 10^{-3}(1/s)$  (50年後に初期強度の0.7倍に低下する値),  $\varepsilon=0.1$ ,  $b=88(\text{MPa}/\text{cm})$ ,  $\dot{w}=200(\text{cm}/\text{s}^2)$ 。図6.2は  $\bar{S}_0$  をパラメータとして応答モーメントを示したものであるが、図中には理論解析結果と同時に250波の模擬

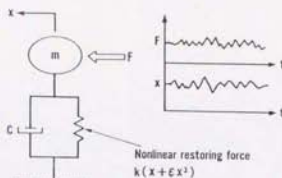


図6.1 1自由度非線形モデル

入力波を用いたモンテカルロ法による数値実験結果もプロットしている。両者は良く一致しており解析理論の妥当性を示しているものと言える。

耐用年数  $T$  を50年とした場合についての種々の計算結果を図6.3～図6.6に示す。図6.3及び図6.4は標準ケースにおける信頼度、破壊確率、単位時間当りの超過回数期待値及び中央安全率  $m(t)$  の変化状況を示すものである。本節では中央安全率として以下の定義を用いている。

$$m(t) = \frac{\text{材料強度の平均値}}{\text{応答応力の平均値}} = \frac{R_0 e^{-\alpha t}}{bE[X_1]} \quad (6.49)$$

図6.5及び図6.6は破壊確率の値に影響を及ぼす入力レベル  $\bar{S}_0$  及び強度低下特性パラメータ  $\alpha$  の寄与の度合を表わしたものである。これらの図よりパラメータ変化の影響は耐用期間が長くなる程顕著に表われることがわかる。

更に図6.6からはメンテナンス、品質管理等に関する重要な情報を引き出すことが可能である。すなわち計算に使用した諸定数が正しいものであると仮定し図6.6の結果が得られていたとすれば、20年程度から破壊確率の増加の割合が大きくなり特に reference case より大きなパラメータ値を有する  $\alpha=0.0139$  (50年後に初期強度の0.5倍に低下する値) のケースではその傾向が顕著であることから、構造物が破壊しない様にするには20年程度で部材を交換するか、あるいは強度低下特性パラメータ  $\alpha$  が reference case よりも小さい部材を選定することが望ましいことが分かる。以上の様に本章で取り扱った解析手法によれば材料選定や部材交換時期の設定に際して有力な判断資料を提供することが可能となる。



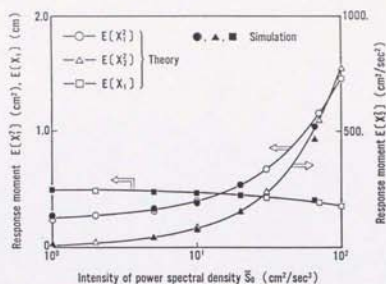


図6.2  $\bar{S}_0$ の応答モーメント量への影響

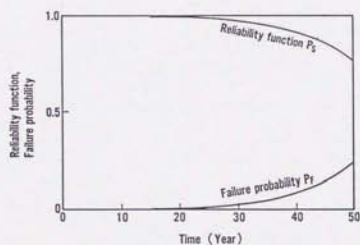


図6.3 信頼度と破壊確率（標準ケース）

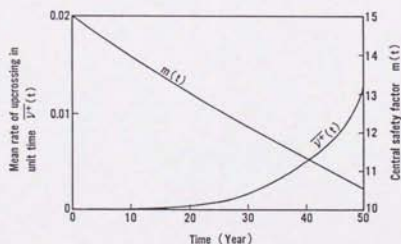


図6.4 単位時間当りの超過回数期待値と中央安全率（標準ケース）



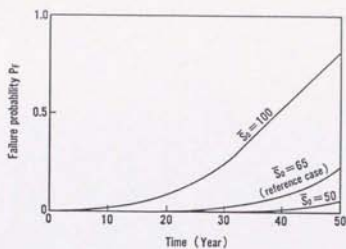


図6.5 破壊確率へ与える $S_0$ の影響

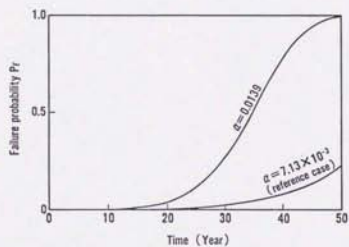


図6.6 破壊確率へ与える強度低下特性の影響

### 6.3 まとめ

本章では平均値を有する不規則入力を受ける非線形構造物に対し、材料強度のばらつき及び経年変化による強度低下現象を考慮した場合における動的信頼性評価への影響を、簡単な非線形一自由度系を例にとり検討した。

この節では上記検討結果より明らかになった点をまとめておく。

- (1) 不規則入力が平均値（直流分）を含む場合には、系が線形の時には重ね合わせ手法が有効なため平均値による応答は独立に評価できるが、非線形系の場合には重ね合わせ手法が利用できないため応答解析時には平均値分も同時に評価する必要があり、特に応答モーメント量の導出に際しては特別の工夫が要求される。そこで本章ではキュムラント打ち切り手法を反復使用することにより非線形構造物の初通過破壊問題を評価しうる解析手法を新たに開発した。なお本章では非線形系として一自由度 Duffing 振動系を取り上げこれに対する定式化を行っているが、開発した手法は多自由度系へも拡張可能な汎用性の高い手法と考えられる。
- (2) 前章までは動的信頼性解析の中でも比較的応答サイドに主眼を置いた検討を行って来たが、本章では構造物の耐力（強度）サイドについてもその特性に注目した検討を行った。すなわち材料強度のばらつき及び経年変化による強度低下特性を考慮する場合の初通過破壊問題評価への定式化を行い、それらのパラメータが動的信頼性評価へ与える影響を定量的に把握できることを示した。更に経年変化による強度低下特性を考慮した場合の動的信頼性における中央安全率の概念を新たに導入することにより従来の静的信頼性における中央安全率同様に構造安全性・信頼性評価上の指標の一つとなる可能性があることを示した。
- (3) キュムラント打ち切りの反復法を Fokker-Planck 法に適用することにより得られる応答モーメント量に関しては、別途モンテカルロ法による数値実験を行った。その結果、理論解析と数値実験による両者の値は良い一致を示しており本解析手法の妥当性が十分に確認できたものとする。

- (4) 入力レベル $\bar{S}_0$ 及び強度低下特性パラメータ $\alpha$ が破壊確率に及ぼす影響を定量的に把握するとともに、これらのパラメータを含んだ破壊確率を評価・検討することによりメンテナンス、品質管理等に対して有力な判断資料を提供できる可能性があることを示した。

## 参考文献（第6章）

- [1] 持尾隆士, 不規則外乱を受ける非線形構造系の動的信頼性解析, 日本機械学会論文集, Vol.49, No.445, (1983), 1455.
- [2] Rice, S.O., "Mathematical Analysis of Random Noise" in the selected papers on Noise and Stochastic Processes, Dover Publications Inc., (1954).
- [3] 小池武, 劣化構造物の動的信頼性解析, 土木学会論文報告集, No.280, (1978), 1.
- [4] Yang, J.-N. and Heer, E., Reliability of Random Excited Structures, AIAA J., Vol.9, No7, (1970), 1262.
- [5] 丹羽義次, 小樽治, 中川浩二, 三軸圧縮応力下のコンクリートの破壊過程, 土木学会論文報告集, No.185, (1971), 31.

## 第 7 章

### 動的信頼性評価手法の応用と今後の展開

- 7.1 荷重強度係数設計法への応用
- 7.2 確率論的地震リスク評価問題への応用
- 7.3 今後の展開と研究課題
- 7.4 まとめ

動的信頼性評価手法の実用面への応用例として、荷重強度係数設計法への展開と確率論的地震リスク評価問題への応用について述べるとともに、今後の重要な研究課題について述べる。

## 7.1 荷重強度係数設計法への応用

第3～5章では主に荷重組合せ問題に対する理論的解析手法の開発について述べたが、本節ではこの荷重組合せを考慮した動的信頼性解析の実用面への適用として荷重強度係数設計法への応用例について述べる。なお本節では破壊モードとしては初通過破壊を対象とする。

### (1) 必要コードフォーマットの選定への応用

荷重強度係数設計法 (Load and Resistance Factor Design ; 以下 L R F D 法と略す) は従来の許容応力設計法に代わる新しい構造設計法として注目されており、近い将来我国にも橋梁関係を中心に L R F D 法への移行が予想されている。

L R F D 法については多くの文献・解説書が存在するので<sup>[11]~[10]</sup>詳細は省略するが、概念的には以下の様な表現式となっている。

$$\sum_i \eta_{ji} G_i \leq \phi R \quad (7.1)$$

(j=1, 2, 3, \dots)

上式をより具体的に表現するため外力として死荷重と他の動的荷重2個を対象とする場合について考えてみる。この場合には基本的には以下の3つのコードフォーマット (設計規範式) が考えられる。

$$\zeta_1 D + \gamma_{11} Q_1 + \gamma_{12} Q_2 \leq \phi R \quad (7.2)$$

$$\zeta_2 D + \gamma_{21} Q_1 \leq \phi R \quad (7.3)$$

$$\zeta_3 D + \gamma_{32} Q_2 \leq \phi R \quad (7.4)$$

ここで,

- $R$  : 対象とする限界状態に対する構造物の抵抗値(応力, 変位 etc.)であり公称値で示される
- $D$  : 死荷重による構造応答としての荷重効果を示すものであり  $R$  と同次元の公称値
- $Q_1, Q_2$  : 動的荷重  $F_1, F_2$  による構造応答としての荷重効果を示すものであり  $R$  と同次元の公称値
- $\phi$  : 強度係数
- $\zeta_i$  :  $D$  に対する荷重係数
- $\zeta_{ij}$  :  $Q_1, Q_2$  に対する荷重係数

原則として (7.2) ~ (7.4) 式による安全性の照査はすべて実施する必要がある。しかし二つの動荷重  $F_1, F_2$  が偶発的かつ断続的に発生するケースを想定した場合、仮に両動荷重の同時発生による効果が全体の破壊確率(あるいは信頼度)に与える影響が小さい、すなわち無視できる程であれば (7.2) 式の照査はコードフォーマットとして規定する必要がなくなるため、設計サイドにとっては設計合理化・時間短縮化にもつながる重要な問題である。この必要コードフォーマット絞り込みの問題については従来定量的な検討があまりなされていない様であるが、本研究で提案する解析手法を援用することにより定量的な評価が可能となる。これを (7.2) ~ (7.4) 式のコードフォーマット群を対象とした場合について以下に述べる。

死荷重は常時作用する荷重であるから (7.3) (7.4) 式は原則として省略することはできない。一方 (7.2) 式は二つの動荷重  $F_1, F_2$  の同時発生の可能性を考慮したことにより現れている照査式であり、仮に現象的に二つの動荷重が同時に発生することは無い場合には (7.2) 式を考える必要は無い。また同時発生の可能性があっても同時発生現象による破壊確率が全体の破壊確率に比べ無視し得る程小さければやはり (7.2) 式は考慮する必要が無い。故に動荷重が同時発生する場合と単独発生時の破壊確率を個別に定量的に評価できれば (7.2) 式をコードフォーマットとして考慮せねばならないか否かを定量的に判断できることになる。なお、(7.2) ~ (7.4) 式のコードフォーマット群を対象とする場合においては、 $D$  が常時作用する死荷重による荷重効果であること

から(7.2)式を考慮するか否かの議論においては二つの動荷重による破壊確率の比較・検討を実施すれば良い。

本節では具体的な試計算のための解析モデルとして図7.1の様な一自由度線形モデルを取り上げ、これに平均値を含まない強制変位入力による荷重と平均値を含む一般外力の二種類の動的荷重が作用する荷重組合せ問題を想定し、更に応答量は変位ベースで表現することとした。

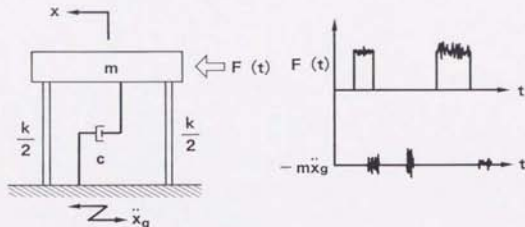


図7.1 一自由度線形モデルと動荷重特性

図7.1においては、 $x$  及び  $x_g$  は各々絶対変位、基部強制変位を示し、また  $m$ ,  $k$ ,  $c$  は質量、剛性、減衰係数を表している。相対変位  $x_r (= x - x_g)$  について運動方程式を示すと次式の様になる。

$$m\ddot{x}_r + c\dot{x}_r + kx_r = F(t) - m\ddot{x}_g \quad (7.5)$$

ここで平均値を含む一般外力  $F(t)$  のモデルとしては

$$F(t) = F_0 + F'(t) \quad (7.6)$$

の形を仮定する。すなわち確定値としての平均値分  $F_0$  と平均値を含まない確率過程  $F'(t)$  の線形和で  $F(t)$  がモデル化できる場合を想定する。更に確率過程としての  $F'(t)$  及び  $\ddot{x}_g$  は互いに独立な定常確率過程とし、次の様に仮定する。

$$\frac{F'(t)}{n} = n_f(t) \quad (7.7)$$



$$\dot{\bar{x}}_g = n_g(t) \quad (7.8)$$

ここで  $n_f(t)$  及び  $n_g(t)$  は次の特性を有する正規性ホワイトノイズとする。

$$\left. \begin{aligned} E[n_l(t)] &= 0 \\ E[n_l(t)n_l(t+\tau)] &= 2\pi S_{0l}\delta(\tau) \\ (l=f, g) \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

ただし、

$E[\quad]$  : アンサンブル平均  
 $S_{0l}$  :  $n_l(t)$  のパワースペクトル強度  
 $\delta(\tau)$  : デルタ関数

一方、図7.1の系における初通過破壊確率は(3.9)(3.10)(3.12)及び(3.13)式を用いることにより次の通りに表される。

$$P_f(T) = T\nu_f\mu_{d_f}\lambda_f + T\nu_g\mu_{d_g}\lambda_g + T\nu_{fg}\mu_{d_{fg}}\lambda_f\lambda_g(\mu_{d_f} + \mu_{d_g}) \quad (7.10)$$

ここで、

$\nu_l(l=f, g)$  : 荷重  $l$  のみが存在し、かつ発生した時、応答量が限界値を超過する単位時間当たりの条件付超過回数期待値 (1/sec)  
 $\nu_{fg}$  : 荷重  $f, g$  が存在し、かつ同時に発生した時、応答量が限界値を超過する単位時間当たりの条件付超過回数期待値 (1/sec)  
 $\lambda_l(l=f, g)$  : 荷重  $l$  の平均発生率 (1/year)  
 $\mu_{d_l}(l=f, g)$  : 荷重  $l$  の平均継続時間 (year)  
 $\mu_{d_l}(l=f, g), \mu_{d_{fg}}$  : 平均継続時間を秒で表現したもの (sec)  
 $T$  : 耐用期間 (year)

である。(7.10)式の右辺第1項は明らかに一般外力のみが存在する時の破壊確率を示しており、第2項が強制変位入力のみによる破壊確率、第3項は一般

外力と強制変位入力と同時に発生する事象に対する破壊確率を示している。故に(7.10)式右辺第3項の値が第1, 第2項に比べ十分に小さい場合には全体の破壊確率へ及ぼす影響が小さいということで(7.2)式による安全性照査は省略することが可能となる。

(7.10)式における $\nu_i (i=f, g)$ ,  $\nu_{fg}$ は、限界状態を相対変位 $x_r$ がある閾値 $d_{max}$ を超過するか否かで規定する場合、第3.2節での多自由度系に対する定式化を利用することにより容易に次の様に求められる。

$$\nu_f = \frac{w_0}{\pi} \exp\left\{-\frac{\xi w_0^3(d_{max}-d_0)^2}{\pi S_{of}}\right\} \quad (7.11)$$

$$\nu_g = \frac{w_0}{\pi} \exp\left(-\frac{\xi w_0^3 d_{max}^2}{\pi S_{og}}\right) \quad (7.12)$$

$$\nu_{fg} = \frac{w_0}{\pi} \exp\left\{-\frac{\xi w_0^3(d_{max}-d_0)^2}{\pi(S_{of}+S_{og})}\right\} \quad (7.13)$$

ここで,

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \xi = \frac{c}{2 \int m k}, \quad d_0 = \frac{F_0}{k}$$

ただし本節では荷重組合せ解析手法の荷重強度係数設計法への応用可能性を示すことが主眼であるため(7.11)～(7.13)式に現れる諸定数はすべて確定値と考えられる場合について次に適用例を示す。

#### [適用例]

荷重の同時発生による破壊確率が全体破壊確率値へ及ぼす影響を評価するには(7.11)～(7.13)式を(7.10)式に代入し、次の様に変形するのが容易い。

$$\begin{aligned} P_f(T) &= T(\nu_f \mu_{df} \lambda_f + \nu_g \mu_{dg} \lambda_g) \{1 + \frac{\nu_{fg} \mu_{df} \lambda_f \lambda_g (\mu_{df} + \mu_{dg})}{(\nu_f \mu_{df} \lambda_f + \nu_g \mu_{dg} \lambda_g)}\} \\ &= T(\nu_f \mu_{df} \lambda_f + \nu_g \mu_{dg} \lambda_g) \\ &\quad \times \left[ 1 + \frac{\mu_{df} \lambda_f \lambda_g (\mu_{df} + \mu_{dg}) \exp\left\{-\frac{\xi w_0^3(d_{max}-d_0)^2}{\pi(S_{of}+S_{og})}\right\}}{[\mu_{df} \lambda_f \exp\left\{-\frac{\xi w_0^3(d_{max}-d_0)^2}{\pi S_{of}}\right\} + \mu_{dg} \lambda_g \exp\left\{-\frac{\xi w_0^3 d_{max}^2}{\pi S_{og}}\right\}]} \right] \quad (7.14) \end{aligned}$$

①

前式における①は、荷重の同時発生効果を無視した場合の破壊確率を1とする時の、同時発生による破壊確率の割合を示している。故に①の値が1に比べてオーダ的にどの程度であるかを評価することにより同時発生現象を考慮する必要があるか否かを判断することが可能となる。

$\xi=0.01$  に固定し、 $\lambda_f(=\lambda_g)(1/\text{year})$  及び  $\mu_{df}(=\mu_{dg})(\text{year})$  をパラメータとして (7.14) 式の①の部分で、他の諸定数 ( $d_{\max}(\text{cm})$ ,  $d_o(\text{cm})$ ,  $w_o(\text{rad/sec})$ ,  $S_{of}(=S_{og})(\text{cm}^2/\text{sec}^2)$ ) の種々の組合せについて計算したものが図7.2～図7.9である。同図より  $d_{\max}$ ,  $d_o$ ,  $w_o$ ,  $S_{of}(=S_{og})$  については

$$\left\{ \begin{array}{ll} d_{\max} & \longrightarrow \text{大} \\ d_o & \longrightarrow \text{小} \\ w_o & \longrightarrow \text{大} \\ S_{of}(=S_{og}) & \longrightarrow \text{小} \end{array} \right.$$

となる時、荷重の同時発生効果の全体破壊確率へ及ぼす影響が大きくなることがわかる。諸定数が上記傾向にある場合はいずれも初通過破壊確率値は小さくなる方向にあり、このことは第4章で既に図4.5に関連しても述べた如く通常の設計目標とする低破壊確率領域での荷重組合せ考慮の重要性・必要性を示している。たとえば図7.9の結果が実際の現象として得られていると仮定した場合、 $\lambda_f=\lambda_g=1.0$  及び  $\mu_{df}=\mu_{dg}=2.0 \times 10^{-4}$  なる荷重特性に対しては、荷重組合せ効果を考慮しなければ破壊確率を2桁も低く非安全側に評価してしまうということになる。

ところで必要コードフォーマット選定の面から考えると、対象とすべき外荷重及び構造系を設定し (7.14) 式の①に従う図7.2～図7.9の様な種々のパラメータ計算を実施、検討することにより同時発生現象を考慮する必要があるか否かを判断することになる。この場合の (7.14) 式の①に対する目安となる値は構造解析法或使用データ等の不確定性を考慮に入れると  $10^{-1}$  のオーダ程度と考えられる。この値を仮に基準値として採用し、更にたとえば荷重特性が  $10^{-2} \leq \lambda_f(=\lambda_g) \leq 10^1$ , 及び  $2.0 \times 10^{-6} \leq \mu_{df}(=\mu_{dg}) \leq 2.0 \times 10^{-4}$  の様な領域にある場合に、検討結果が図7.8あるいは図7.9の形になったとすれば、この時には同時発生現象を考慮する必要があるということになり (7.2) 式は省略することはできないという判断を下すことが可能となる。

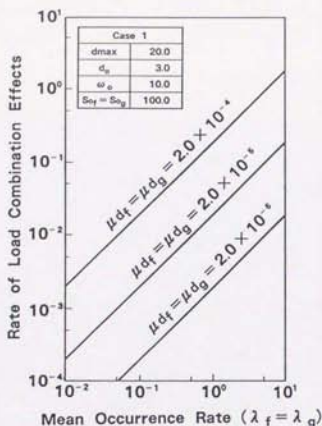


図7.2 荷重組合せ効果の寄与度 (case 1)

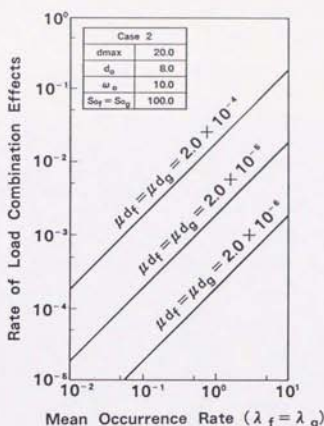


図7.3 荷重組合せ効果の寄与度 (case 2)

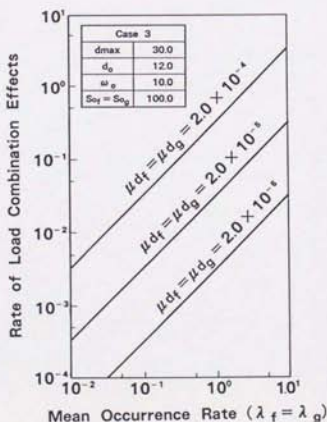


図7.4 荷重組合せ効果の寄与度 (case 3)

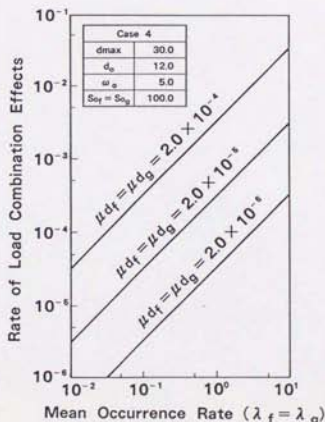


図7.5 荷重組合せ効果の寄与度 (case 4)

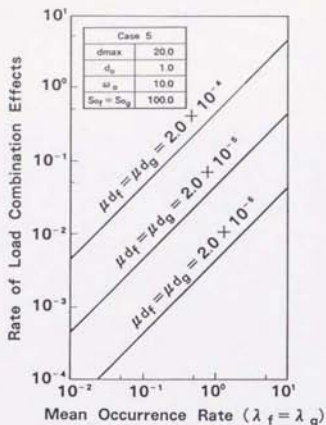


図7.6 荷重組合せ効果の寄与度 (case 5)

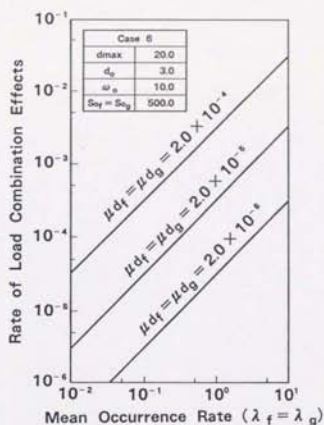


図7.7 荷重組合せ効果の寄与度 (case 6)

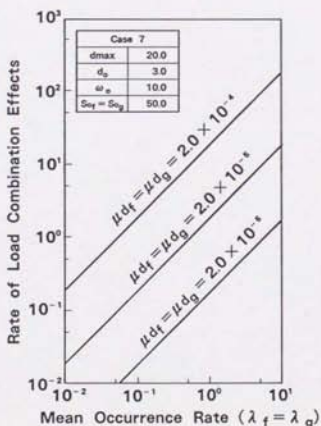


図7.8 荷重組合せ効果の寄与度 (case 7)

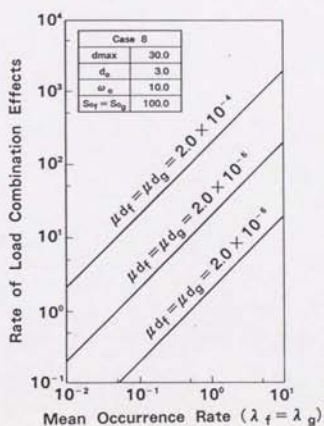


図7.9 荷重組合せ効果の寄与度 (case 8)

## ② 合理的な荷重係数設定への応用

L R F D法においては、たとえば前項の様な動的信頼性解析の利用により必要なコードフォーマットが絞り込まれたとして次の重要な課題は部分安全係数としての荷重係数及び強度係数を如何に合理的に設定するかという点である。この重要な問題はL R F D法なる概念の登場時期より現在まで多くの研究者により検討されて来ているがその方法は大別すると以下の3通りである。

- ① 2次モーメント法
- ② 評価関数法
- ③ キャリブレーション法

2次モーメント法は、強度や荷重の2次モーメントまでの量としての平均及び分散を用いて信頼性に関する不等号表現式を導出し、これと部分安全係数を含むコードフォーマットを対比させることにより部分安全係数を求める方法であり、L R F D法開発初期より用いられている代表的な方法である<sup>[11]~[13]</sup>。

評価関数法は概念的には部分安全係数をパラメータとする以下の様な評価関数 J を

$$J(\phi_1, \dots, \phi_j, \dots) = \sum_i (\log_{10}\theta_i - \log_{10}\theta_i^*)^2 \quad (7.15)$$

ただし、

- $\phi_j$  : 部分安全係数  
 $\theta_i$  : 指標の実現値  
 $\theta_i^*$  : 指標の設定目標値

最小化する様に  $\phi_j$  を決定するものであり、近年本方法による研究が増加しつつある。なお (7.15) 式の評価関数の形は一例であり種々のものが提案されている。更に  $\theta_i$  として何を対象とするかにより詳細な研究内容が異なってくる。 $\theta_i$  としては破壊確率を採用するもの<sup>[14]~[17]</sup>、安全性指標 ( $\beta$  値) を



対象とするケース<sup>[18][19]</sup>あるいは強度を用いたもの<sup>[20]</sup>等がある。

キャリブレーション法とは現行の許容応力設計法によって設計・施工された既存の構造物を対象として、これと同程度の断面形状がLRF D法により設計できる様に部分安全係数を設定しようとする方法である<sup>[21]</sup>。

以上いくつもの方法論が提案されているが、これらの中には静的信頼性理論をベースにしているものや、応答評価を避けて応答解析結果としての荷重効果と強度について議論しているものが多く、動的荷重を受ける柔構造物の様に本来動的信頼性解析による評価が必要と思われる分野については十分な検討がなされていない。そこで本項では動的信頼性理論に基づく部分安全係数設定のための一方法について以下に述べる。

本項では従来あまり検討がなされていない複数の動的荷重を受ける柔構造系に対するLRF D法への展開例として図7.1のモデルを用いた検討を行う。この場合の対象となるコードフォーマットは既に述べた如く(7.2)～(7.4)式であり、しかもこれらはいずれも必要コードフォーマット絞り込み作業の結果、残すべきコードフォーマット群として判断されたものと仮定する。ここでは複数の動荷重に対する方法論を示すことができる様に(7.2)～(7.4)式の中で(7.2)式を具体的な対象として取り上げる。更に(7.2)式においては、図7.1のモデルが水平方向加振の問題で死荷重による影響は無視できるケースに限定し、また荷重効果の不確定性に比較して強度のそれは小さく従って $\phi=1$ と仮定できる場合を想定すれば(7.2)式は次の様に縮小化した表現となる。

$$\gamma_F Q_F + \gamma_G Q_G \leq R \quad (7.16)$$

すなわち本項では最適荷重係数設定問題のみを取り扱う。

まず、荷重係数 $\gamma_F$ 、 $\gamma_G$ を適当な値に固定して(7.16)式を用いて図7.1の構造物の断面係数を決定する。(7.16)式における $Q_F$ 、 $Q_G$ は各々平均値を含む一般外力( $F_F$ )と平均値を含まない強制変位入力による荷重( $F_G$ )が作用した時の応答値(荷重効果)の特性値であるが、この値をここでは(平均値+標準偏差)で代表させ得るものとする。また構造物は片持梁タイプでモデル化できるものとしてその全長、ヤング率、断面2次モーメントを各々 $l$ 、 $E$ 、 $I$ で表す。更に応答値としては変位量を考え、(7.16)式は合理的(経済的)な設計となる様等号を採用することにすれば結局次式が得られる。

$$\frac{\ell^3}{3EI} \gamma_f (F_0 + \sigma_{F'}) + \frac{\ell^3}{3EI} \gamma_g \sigma_{g_g} = \eta \equiv \frac{a_b \ell^2}{3EI} \quad (7.17)$$

ただし,

$\sigma_{F'}, \sigma_{g_g}$  : 一般外力変動分及び入力加速度の標準偏差

$a_b$  : 構造物の許容応力

$\ell$  : 構造物の断面係数

(7.17) 式における  $\sigma_{F'}$ ,  $\sigma_{g_g}$  は,  $F'$  及び  $\ddot{x}_g$  を前項同様に正規性ホワイトノイズで仮定する時には理論上無限大となるが, 実際の現象では有限の周波数域にのみ存在する (すなわちピンクノイズ) ことを考えて (7.7) ~ (7.9) 式を参照して次の様に近似する。

$$\sigma_{F'} = \eta \sqrt{2\Omega_f S_{of}} \quad (7.18)$$

$$\sigma_{g_g} = \sqrt{2\Omega_g S_{og}} \quad (7.19)$$

ただし  $\Omega_f$ ,  $\Omega_g$  は各荷重に含まれる最大周波数を示す。(7.18) (7.19) 両式を (7.17) 式に代入することにより対象構造物の断面係数が以下の通りに求まる。

$$\ell = \left( \frac{\ell}{a_b} \right) \{ \gamma_f (F_0 + \eta \sqrt{2\Omega_f S_{of}}) + \gamma_g \sqrt{2\Omega_g S_{og}} \} \quad (7.20)$$

更に (7.20) 式を利用することにより構造物の固有円振動数  $\omega_0 (= \sqrt{k/\eta})$  も次の様に得られる。

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3EI}{a_b \ell^2} \{ \gamma_f \left( \frac{F_0}{\eta} + \sqrt{2\Omega_f S_{of}} \right) + \gamma_g \sqrt{2\Omega_g S_{og}} \}} \quad (7.21)$$

次に (7.21) 式で示される固有円振動数を有する図7.1の構造系に対する初通過破壊確率  $P(T)$  を動的信頼性理論により求める。これは対象としているコードフォーマットが (7.16) 式の二荷重同時発生現象に対するものであることから (7.10) (7.13) 両式を利用することにより次の様に求められる。

$$P(T) = \frac{T \mu_{d_g} \lambda_f \lambda_g (\mu_{d_f} + \mu_{d_g}) \omega_0}{\pi} \exp \left\{ - \frac{\xi \omega_0^3 (d_{max} - d_0)^2}{\pi (S_{of} + S_{og})} \right\} \quad (7.22)$$



ただし,

$$d_{\max} = R = \frac{a_b Z e^2}{3EI} \quad (7.23)$$

$$d_0 = \frac{F_0}{k} = \frac{1}{\frac{m}{m_0}} \left( \frac{F_0}{m} \right) \quad (7.24)$$

であり, また  $S_{of}$ ,  $S_{og}$  については第3.2節で述べた通り確率変数としての取り扱いも可能であるが, その場合には最終的な解を数式表現で示すことは非常に煩雑となるため, 本項では理論的な見通しをつけ易くするという観点から  $S_{of}$ ,  $S_{og}$  は確定値として (7.22) 式を導出している。

ところでコードフォーマットはできる限り種々の剛性, 質量を有する構造物に対して有効なものでなければならないため, 荷重係数  $\gamma_f$ ,  $\gamma_g$  の設定に際してもこの点を十分に考慮する必要がある。(7.22) 式において剛性及び質量に関係した項は各々  $\left( \frac{a_b Z e^2}{3EI} \right)_i$ ,  $\left( \frac{F_0}{m} \right)_j$  であることから, これらの種々の値に対して総合的に最適となる  $\gamma_f$ ,  $\gamma_g$  が設定できれば望ましい。そこで本項では次の様な評価関数を導入することとした。

$$J(\gamma_f, \gamma_g) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\log_{10} P^* - \log_{10} P_{ij}(T)}{\log_{10} P^*} \right\}^2 \quad (7.25)$$

ここで,

$P^*$  : ターゲットとしての破壊確率

$P_{ij}(T)$  : (7.22) 式において  $\left( \frac{a_b Z e^2}{3EI} \right)_i$ ,  $\left( \frac{F_0}{m} \right)_j$  を代入した時の値

故に (7.25) 式を最小とする  $\gamma_f$ ,  $\gamma_g$  を求めることができれば, その値が多くの構造物においてその破壊確率を目標値にもっとも近づける可能性の高い最適荷重係数  $\gamma_f^0$ ,  $\gamma_g^0$  ということになる。

#### 【適用例】

具体的な計算に際しては  $\left( \frac{a_b Z e^2}{3EI} \right)_i$  及び  $\left( \frac{F_0}{m} \right)_j$  のオダを推定する必要があるが, 厳密には対象とする製品や外力が決定されないと決まらないため, ここでは便宜上次の値を想定した。

$$\left(\frac{a_b Z \ell^2}{3EI}\right)_{\text{最小値}} = 30.0, \quad \left(\frac{a_b Z \ell^2}{3EI}\right)_{\text{最大値}} = 50.0 \quad (\text{cm})$$

$$\left(\frac{F_0}{m}\right)_{\text{最小値}} = 1.0, \quad \left(\frac{F_0}{m}\right)_{\text{最大値}} = 100.0 \quad (\text{cm/sec}^2)$$

上記値を6分割 ( $M=N=7$ ) することにより (7.25) 式を求めた。なお上記以外の値で本項では固定して使用した諸定数は次の通りである。

$$T = 20 \quad (\text{year})$$

$$\xi = 0.01$$

$$\Omega_f = \Omega_g = 3140.0 \quad (\text{rad/sec})$$

残りの定数である  $P^*$ ,  $S_{of}(=S_{og})$  ( $\text{cm}^2/\text{sec}^2$ ),  $\lambda_f(=\lambda_g)$  ( $1/\text{year}$ ) 及び  $\mu_{df}(=\mu_{dg})$  ( $\text{year}$ ) についてはパラメータとして種々のケースについて荷重係数と評価関数の関係を求めたものが図7.10～図7.15である。なお図中の曲線は  $\gamma_f, \gamma_g$  を各々40分割, 合計1600に分割されたメッシュ毎に計算されたJ値を用いて推定したものである。図中には得られた最適荷重係数の値及びその時の評価関数値も示されている。

図7.10～図7.15においてはいずれの場合も評価関数に極値が存在しており, これより種々の構造物の破壊確率を目標値にもっとも近づける可能性の高い荷重係数が定量的に設定できたことになる。ところで評価関数の最小値は各図で異なっているが, これは構造物破壊確率の目標値への接近度合が各ケースで相違しているためである。すなわち評価関数最小値が小さい程, 対象とした構造物/外力系については目標破壊確率  $P^*$  に近づく様な構造設計が可能ということになる。一方評価関数最小値が大きいものは現在のままの構造物/外力系では  $P^*$  に接近することは困難であり, この場合には構造物/外力系を変更する(具体的には構造様式の規定や施工環境(サイト)の制限)か, 構造物/外力系(の諸定数)が何らかの理由で変更できない時には  $P^*$  の値を再検討して修正することになる。

以上述べた如く, 評価関数法を用いれば最適荷重係数を定量的に推定し得るのみならず, 構造物/外力系と設定すべき目標破壊確率とのバランスの程度を定量的に評価し得るメリットを有している。

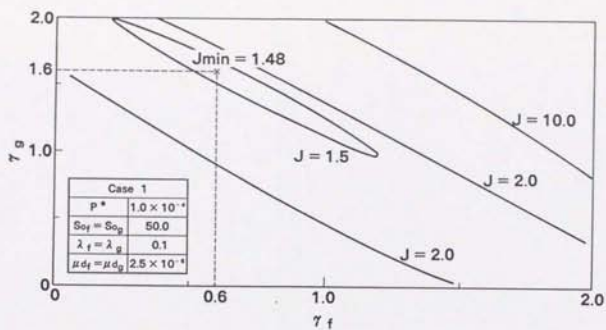


図7.10 最適荷重係数の探索 (case 1)

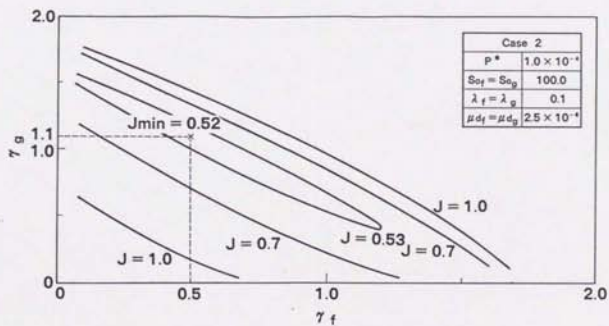


図7.11 最適荷重係数の探索 (case 2)

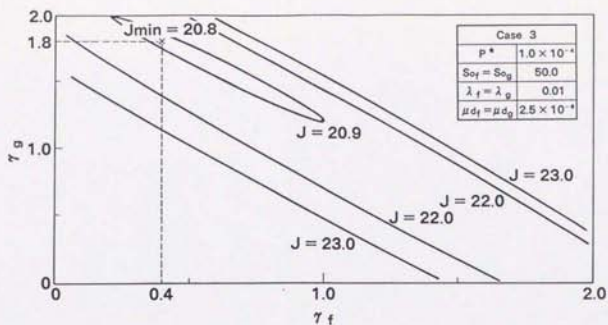


図7.12 最適荷重係数の探索 (case 3)

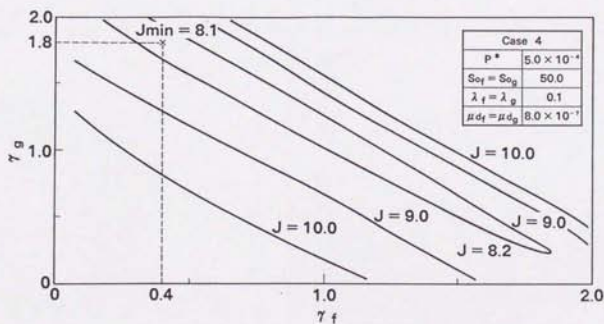


図7.13 最適荷重係数の探索 (case 4)

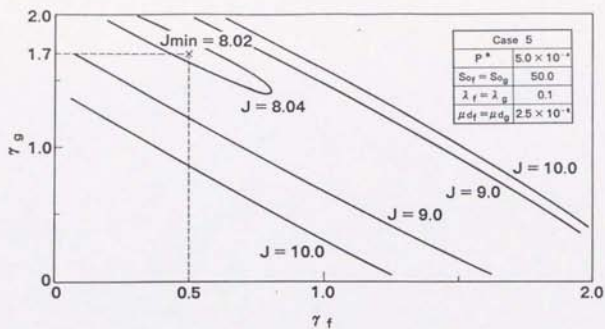


図7.14 最適荷重係数の探索 (case 5)

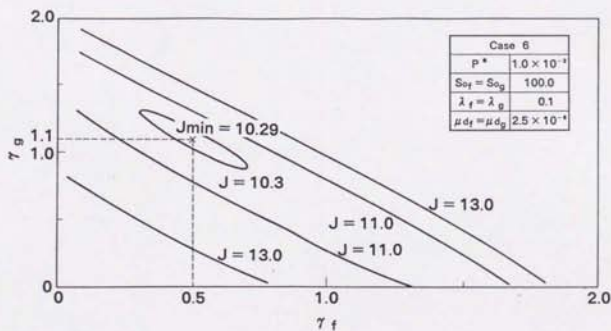


図7.15 最適荷重係数の探索 (case 6)

## 7.2 確率論的地震リスク評価問題への応用

第2～6章の理論展開においてはすべて構造諸元値は確定値とみなした解析を行っている。しかし対象とする問題によっては構造諸元のばらつきが大きいもの、あるいは信頼性評価上から構造諸元のばらつきの定量的評価が必要となるケースもある。そこで本節では構造諸元のばらつきを考慮した場合の動的信頼性解析手法を、構造物の確率論的地震リスク評価問題を具体例として述べる。

### (1) 構造物の確率論的地震リスク評価問題

地震時における構造物の耐震総合安全性・信頼性評価を行うことを目的として実施される確率論的地震リスク評価(Probabilistic Seismic Risk Assessment; 以下地震PRAと略す)は、現在まで原子力発電所や高層建築等の重要構造物を中心として活発に行われている<sup>[22][23]</sup>。特に原子力発電所については、地震のみならず他の外的事象に対しても取り扱い指針が公表されており<sup>[24]</sup>、近年PRAに関する膨大な文献、資料が報告されるようになっていく。

地震PRAの解析手法は大別するとモンテカルロ法をベースとしたSSMRP(Seismic Safety Margin Research Program)法<sup>[25]</sup>と、従来の確定論的耐震設計をベースにした安全係数法(Zion法とも呼ばれる)<sup>(註7.1)</sup>の2通りであるが、前者の方法は膨大な費用がかかるため民間ベースではほとんど後者の方法が採用されている。

ところで安全係数法では入力及びシステムに含まれる各種の不確定性は安全係数と呼ばれる量で表現するため安全係数の推定精度がそのまま全体のリスク評価へ影響を及ぼすこととなり、統計量としての安全係数を如何に精度良く求めるかが安全係数法実施上の重要な課題の一つとなっている。従来安全係数の設定は主にモンテカルロ法もしくは経験的に行われており、物理的見通しが得やすい解析的アプローチについてはほとんど実施されていない。そこで本節では構造諸元のばらつきを考慮した動的信頼性解析の例として、上記安全係数の一部を解析的に評価する一手法を新たに提案する。

② 不確定構造系の確率論的地震応答解析<sup>[26][27]</sup>

入力としての地震加速度のパワースペクトル密度が  $S_E(u)$  で与えられた時、一般の線形多自由度構造物における任意点 F の応答加速度パワースペクトル密度  $S_F(u)$  は、対象とするシステムが定常確率過程とみなせる場合には次の様に表される。

$$S_F(u) = G(u)S_E(u) \quad (7.26)$$

ここで  $G(u)$  は入力加速度に対する応答絶対加速度の周波数応答関数ゲインの2乗である。

次に構造諸元（ヤング率，ポアソン比，質量，減衰 etc） $X_k$  のばらつきを含む表現として本節では次の様な形を仮定する。

$$X_k = \bar{X}_k^0(1 + \alpha_k), \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (7.27)$$

ここで、

$\bar{X}_k^0$  :  $X_k$  の期待値

$\alpha_k$  : 期待値 0 の微小確率変数

構造諸元が (7.27) 式の様にばらつきを有する時には  $G(u)$  もゆらぐことになるがその形は摂動法を採用する場合には次式の通りとなる。

$$G(u) = G^0(u) + \sum_{k=1}^n G_k^I(u) \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n G_{kj}^{II}(u) \alpha_k \alpha_j + \dots \quad (7.28)$$

ただし、

$G^0(u)$  :  $X_k$  が期待値に等しい時の  $G(u)$

$G_k^I(u)$  :  $G(u)$  の  $\alpha_k$  に関する1次変動率

$G_{kj}^{II}(u)$  :  $G(u)$  の  $\alpha_k, \alpha_j$  に関する2次変動率



(7.28) 式を (7.26) 式に代入することにより  $S_F(u)$  の振動表現も以下の如くに示される。

$$S_F(u) = S_F^0(u) + \sum_{k=1}^n S_F_k^I(u) \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{d=1}^n S_F_{kd}^{II}(u) \alpha_k \alpha_d + \dots \quad (7.29)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} S_F^0(u) &= G^0(u) S_E(u) \\ S_F_k^I(u) &= G_k^I(u) S_E(u) \\ S_F_{kd}^{II}(u) &= G_{kd}^{II}(u) S_E(u) \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

ところで安全係数を算出する上で必要となる応答最大値分布の期待値  $\mu_{x_T}$  や分散値  $\sigma_{x_T}^2$  は、構造諸元が確定値であれば極値理論を用いてただちに求めることが可能であるが、不確定性を有する場合には通常取り扱いが極めて煩雑となる。本節ではこれを避けるため以下の様な確率構造における条件付表示式<sup>[28]</sup>

$$\mu_{x_T} = \tilde{E}[E[x_T | A = a]] \quad (7.31)$$

$$\sigma_{x_T}^2 = \tilde{E}[\text{Var}[x_T | A = a]] + \tilde{\text{Var}}[E[x_T | A = a]] \quad (7.32)$$

を利用することにより近似式を導出する。なお (7.31) (7.32) 両式において  $E[x_T | A = a]$ ,  $\text{Var}[x_T | A = a]$  は各々確率パラメータ  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}^T$  をある値に固定した時の条件付期待値及び条件付分散値を示しており、これらの値は通常の確定構造系に対する不規則振動理論と極値理論を用いることで求められる。一方、 $\tilde{E}[\cdot]$ ,  $\tilde{\text{Var}}[\cdot]$  は各々確率パラメータに関して期待値及び分散をとることを示している。

(7.31) (7.32) 両式を実際に計算するために FOSM 法 (First-Order Second-Moment Method)<sup>[29]</sup>を用いて確率パラメータの期待値のまわりで以下の様に近似化する。

$$\mu_{x_T} = E[x_T | A = 0] \equiv \mu_{x_T}^0 \quad (7.33)$$



$$\begin{aligned}\sigma_{x_T}^2 &= \text{Var}[x_T | A = 0] + \sum_{k=1}^n \sum_{A=0}^n \left( \frac{\partial g}{\partial \alpha_k} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial \alpha_A} \right) C_{\alpha_k \alpha_A} \\ &\equiv \sigma_{x_T}^2 + \sum_{k=1}^n \sum_{A=0}^n \left( \frac{\partial g}{\partial \alpha_k} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial \alpha_A} \right) C_{\alpha_k \alpha_A} \quad (7.34)\end{aligned}$$

ここで  $C_{\alpha_k \alpha_A}$  は確率パラメータ  $\alpha_k$  と  $\alpha_A$  の共分散値であることを示しており、また  $g$  は (7.31) (7.32) 両式から明らかな通り確率パラメータをある値に固定した時の応答最大値の期待値を示している。この  $g$  の形としては良く知られた Davenport 式<sup>130)</sup>をはじめとしてこれを改良したものも種々提案されているが<sup>131) 132)</sup>、本節での主目的は極値理論そのものの精度向上をめざすのではなく既存の極値理論を利用して安全係数を解析的に求め得ることを示すことにある。このため本節では  $g$  の形としてはもっとも実績のある次の Davenport 式を採用する。

$$g = E[x_T | A = a] = \sigma_x \left[ \sqrt{2 \ln \nu_0 T} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln \nu_0 T}} \right] \quad (7.35)$$

ここで、

$$\nu_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{m_2}{m_0} \right)^{1/2}$$

$$\sigma_x = \sqrt{m_0}$$

$$m_i = \int_0^\infty \omega^i S(\omega) d\omega \quad (i \text{ 次スペクトルモーメント})$$

$\gamma$  : オイラー定数 (=0.5772)

$T$  : 継続時間

(7.35) 式を (7.33) (7.34) 両式に代入し、実際に式を展開、整理することにより構造諸元のばらつきを考慮した  $\mu_{x_T}$ 、 $\sigma_{x_T}^2$  を以下の様に求めることができる。

$$\mu_{x_T} = \sqrt{m_0} \left[ \sqrt{2 \ln \left\{ \frac{T}{\pi} \left( \frac{m_2}{m_0} \right)^{1/2} \right\}} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln \left\{ \frac{T}{\pi} \left( \frac{m_2}{m_0} \right)^{1/2} \right\}}} \right] \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{XT}^2 = & \frac{\pi^2 m_0^2}{12 \ell n \left\{ \frac{T}{\pi} \left( -\frac{m_0^2}{m_0^0} \right)^{1/2} \right\}} + \left[ \frac{\ell n \left\{ \frac{T}{\pi} \left( -\frac{m_0^2}{m_0^0} \right)^{1/2} \right\} - \frac{1}{2}}{\sqrt{2 m_0^0 \ell n \left\{ \frac{T}{\pi} \left( -\frac{m_0^2}{m_0^0} \right)^{1/2} \right\}}} \right. \\
& + \frac{\gamma}{2 \sqrt{2 m_0^0 \ell n \left\{ \frac{T}{\pi} \left( -\frac{m_0^2}{m_0^0} \right)^{1/2} \right\}}} + \frac{\gamma}{2 \sqrt{m_0^0} [2 \ell n \left\{ \frac{T}{\pi} \left( -\frac{m_0^2}{m_0^0} \right)^{1/2} \right\}]^{3/2}} \left. \right]^2 C_{m_0 m_0} \\
& + \left[ \frac{m_0^0}{2 \sqrt{2 m_0^0 m_2^2} \ell n \left\{ \frac{T}{\pi} \left( -\frac{m_0^2}{m_0^0} \right)^{1/2} \right\}} - \frac{\gamma \sqrt{m_0^0}}{2 m_2^0 [2 \ell n \left\{ \frac{T}{\pi} \left( -\frac{m_0^2}{m_0^0} \right)^{1/2} \right\}]^{3/2}} \right]^2 C_{m_2 m_2} \\
& + 2 \left[ \frac{\ell n \left\{ \frac{T}{\pi} \left( -\frac{m_0^2}{m_0^0} \right)^{1/2} \right\} - \frac{1}{2}}{\sqrt{2 m_0^0 \ell n \left\{ \frac{T}{\pi} \left( -\frac{m_0^2}{m_0^0} \right)^{1/2} \right\}}} + \frac{\gamma}{2 \sqrt{2 m_0^0 \ell n \left\{ \frac{T}{\pi} \left( -\frac{m_0^2}{m_0^0} \right)^{1/2} \right\}}} \right. \\
& + \left. \frac{\gamma}{2 \sqrt{m_0^0} [2 \ell n \left\{ \frac{T}{\pi} \left( -\frac{m_0^2}{m_0^0} \right)^{1/2} \right\}]^{3/2}} \right] \\
& \times \left[ \frac{m_0^0}{2 \sqrt{2 m_0^0 m_2^2} \ell n \left\{ \frac{T}{\pi} \left( -\frac{m_0^2}{m_0^0} \right)^{1/2} \right\}} - \frac{\gamma \sqrt{m_0^0}}{2 m_2^0 [2 \ell n \left\{ \frac{T}{\pi} \left( -\frac{m_0^2}{m_0^0} \right)^{1/2} \right\}]^{3/2}} \right] C_{m_0 m_2} \quad (7.37)
\end{aligned}$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned}
C_{m_0 m_0} &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n m_{0k}^1 m_{0j}^1 C_{\sigma_k \sigma_j} \\
C_{m_2 m_2} &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n m_{2k}^1 m_{2j}^1 C_{\sigma_k \sigma_j} \\
C_{m_0 m_2} &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n m_{0k}^1 m_{2j}^1 C_{\sigma_k \sigma_j}
\end{aligned} \right\} \quad (7.38)$$

$$\left. \begin{aligned}
m_0^0 &= \int_0^\infty S_F^0(u) du, & m_2^0 &= \int_0^\infty u^2 S_F^0(u) du \\
m_{0k}^1 &= \int_0^\infty S_F^1_k(u) du, & m_{2k}^1 &= \int_0^\infty u^2 S_F^1_k(u) du
\end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

故に (7.30) 式から明らかな様に  $G^0(u)$ ,  $G_k^1(u)$  を求めることができれば (7.36) (7.37) 両式を計算することが可能となる。 $G^0(u)$  は通常の確定解析の枠内で容易に求められる。一方  $G_k^1(u)$  は構造が多自由度系である場合には、一般にかなり煩雑な計算を必要とするが、確率有限要素法<sup>13)</sup>の手法を援用することにより比較的簡単かつ効率的に  $G_k^1(u)$  を求めることができる(附7.2)。

### ③ 解析手法の妥当性の検討

前項で開発した解析手法の妥当性を確認するため図7.16の様な6自由度系(各質点で並進と回転の自由度を有する)の3質点曲げ剪断梁モデルを対象とした理論計算とモンテカルロ法による数値実験とを実施した。なお使用した入力加速度パワースペクトル密度  $S_E(u)$  の形は以下の金井/田治見式である。

$$S_E(u) = S_0 \frac{1 + 4\zeta_E^2(u/\omega_E)^2}{\{1 - (u/\omega_E)^2\}^2 + 4\zeta_E^2(u/\omega_E)^2} \quad (7.40)$$

ただし、

$$S_0 = 43.4 \quad (\text{cm}^2/\text{sec}^3)$$

$$\omega_E = 9\pi \quad (\text{rad/sec})$$

$$\zeta_E = 0.6$$

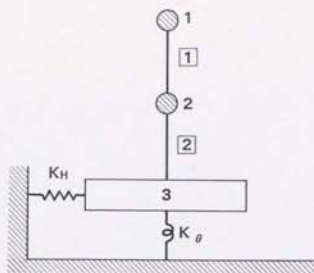
解析対象とした構造諸元ばらつきの量は次の2ケースである。

#### ① ケース1 (剛性にゆらぎがある場合)

建家のヤング率及び地盤ばね定数が (7.27) 式の様にゆらぐ。ただし  $\sigma_k$  に関する統計量は標準偏差0.1, 相関係数1 (完全相関) とする。

#### ② ケース2 (減衰にゆらぎがある場合)

建家及び地盤の減衰が (7.27) 式の様にゆらぐ。ただし  $\sigma_k$  に関する統計量は標準偏差0.1, 相関係数1 (完全相関) とする。



(建家データ)

質点 No.	質 量 (kg)	回転慣性 ( $\text{kg}\cdot\text{cm}^2$ )	梁要素 No.	A ( $\text{cm}^2$ )	I ( $\text{cm}^4$ )
1	$1.08 \times 10^8$	$7 \times 10^{10}$	①	$7.34 \times 10^6$	$6.75 \times 10^{13}$
2	$1.33 \times 10^8$	$7 \times 10^{10}$			
3	$1.33 \times 10^8$	$7.5 \times 10^{14}$	②	$1.02 \times 10^7$	$8.13 \times 10^{13}$

(建家材料定数)

材質	材料定数	ヤング率	ポアソン比
		E(MPa)	$\nu$
鉄筋コンクリート		$2.25 \times 10^4$	0.167

(地盤ばね定数)

水平ばね $K_H$ (N/cm)	回転ばね $K_\theta$ ( $\text{N}\cdot\text{cm}/\text{rad}$ )
$1.08 \times 10^{10}$	$1.67 \times 10^{17}$

(建家減衰定数)

材 質	減衰定数 (%)
鉄筋コンクリート	5

(地盤減衰定数)

減 衰 定 数 (%)	
水 平 ば ね	回 転 ば ね
10	5

図7.16 検証用モデルと確定データ

表7.1 理論値とシミュレーション結果との比較

		理 論 値	シミュレーション
(剛性ゆらぎ) ケース1	応答最大値の期待値 $\mu_{x_T(gal)}$	656	609
	応答最大値の標準偏差 $\sigma_{x_T(gal)}$	73	63
	応答最大値の変動係数	0.111	0.104
(減衰ゆらぎ) ケース2	応答最大値の期待値 $\mu_{x_T(gal)}$	657	612
	応答最大値の標準偏差 $\sigma_{x_T(gal)}$	79	70
	応答最大値の変動係数	0.121	0.114

前記の2ケースを特に図7.16での質点2の応答絶対加速度(並進成分)最大値について $T=20$ 秒間の理論計算とシミュレーションの結果を対比したものが表7.1である。

表7.1より理論値とシミュレーション値は比較的良く一致しておりまたケース1とケース2の傾向は理論解析とシミュレーションで同様であることから解析手法の妥当性は確認できたものとする。なお理論値の方がシミュレーション値を全体的に上回っているが、これは利用した極値理論(Davenport式;(7.35)式)が良く知られている様に本節で対象となっている狭帯域確率過程に対しては最大値を保守側(高目)に評価する傾向にあるためと思われる。またシミュレーション回数についてはゆらぎを考慮するパラメータ数の増加に従い増大させることが望ましいが現実的な計算費用の面からシミュレーション回数は制限せざるを得ず、本項では図7.17の収束状況を参考にしつつ入力地震波と構造ゆらぎの組合せ総数5000ケースを一様なランダムサンプリングにより抽出しシミュレーションを実施している。なおシミュレーション解を効率良く精度向上させる方法として近年種々の手法が提案されているが<sup>(124)-(126)</sup>、本節で対象としている狭帯域確率過程の極値問題に対してはどの手法がもっとも適したものであるのか、それを判断するための定量的な精度向上の度合いが現時点では必ずしも明確ではないことから本項では前述の効率的な手法によるシミュレーション計算は実施していない。

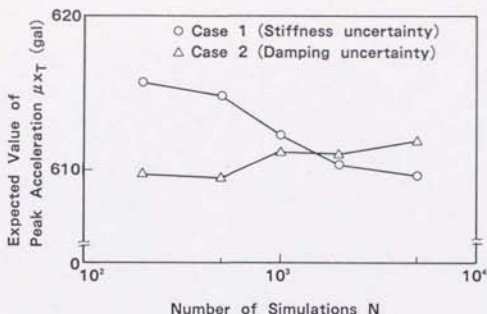


図7.17 シミュレーション値の収束状況

#### (4) 地震PRA解析における安全係数の算出

本項では安全係数のうち応答係数  $F_R$  の一部を不確定構造解析の結果を利用して解析的に求める方法について述べる。すなわち応答係数  $F_R$  の形が付録7.1の(付7.3)式で記述できるものと考え更に(付7.3)式の  $F_D$ ,  $F_{MS}$ ,  $F_{MF}$  が構造諸元のばらつきから発生する不確定性のみを表現しているものと仮定すれば、本節第2項の手法を用いて得られる結果は  $F_D$ ,  $F_{MS}$ ,  $F_{MF}$  を統合した形としての新たな応答係数  $F_{DM}$  の定義式

$$F_D \cdot F_{MS} \cdot F_{MF} \equiv F_{DM} = \frac{\text{確定的な設計用応答値}}{\text{確率論的解析より得られる応答値}} = \frac{x^D}{x_T} \quad (7.41)$$

における分母の値 ( $x_T$ ) に関する統計量を表している。

なお上述の考え方に従う場合には応答係数  $F_R$  の構成を

$$F_R = F_{SA} \cdot F_{DM} \cdot F_{MC} \cdot F_{SS} \cdot F_{EC} \quad (7.42)$$

と定義したことになる。ところで本節第2項の手法は解析入力として地震入力加速度のパワースペクトル密度を用いる周波数領域での解析が中心となっており、更に具体的な定式化においては入力のパワースペクトル密度の形として(7.40)式の金井/田治見式を用いている。このため本節第2項で開発した手法を本項での応答係数推定問題に適用するためには、与えられた設計応答スペクトルを満足する金井/田治見式のパラメータ推定が前提となっている。この方法には種々あるが本節では文献[37]に従い、設計応答スペクトル→一般パワースペクトル密度への変換については Vanmarcke の方法<sup>[38]</sup>を、一般パワースペクトル密度→金井/田治見式への変換については微分補正法<sup>[39]</sup>を利用してパラメータを推定している。

次に、本項で求めるべき応答係数  $F_{DM}$  も対数正規分布しているものとみなしその中央値  $\hat{F}_{DM}$  及び対数標準偏差  $\beta_{DM}$  を推定する。 $\hat{F}_{DM}$  及び  $\beta_{DM}$  は近似的に各々  $F_{DM}$  の期待値  $F_{DM}^0$  及び変動係数  $V_{DM}$  に等しいので(7.41)式より  $x_T$  に関する期待値  $\mu_{x_T}$  及び標準偏差  $\sigma_{x_T}$  を用いて以下の様に示すことができる。

$$\hat{F}_{DM} \cong F_{DM}^0 = \frac{x^0}{\mu_{x_T}} \quad (7.43)$$

$$\beta_{DM} \cong V_{DM} = \frac{\sigma_{x_T}}{\mu_{x_T}} \quad (7.44)$$

以上により損傷度評価に必要となる応答係数の中央値及び対数標準偏差が解析的に得られることになるが、ここで簡単な数値例を最後に示しておく。すなわち図7.16の質点2の応答絶対加速度が今損傷度評価の対象になっているものと仮定し、構造物には剛性ゆらぎのみが存在するものとする。更に入力としての設計応答スペクトルを満足する金井/田治見式のパラメータが仮に(7.40)式で与えられたとすれば(7.43)(7.44)式における  $\mu_{x_T}$ ,  $\sigma_{x_T}$  は表7.1より

$$\left. \begin{aligned} \mu_{x_T} &= 656 \\ \sigma_{x_T} &= 73 \end{aligned} \right\} \quad (7.45)$$

となる。一方  $x^0$  は設計応答スペクトルを用いて通常の（確定的な）耐震設計により求められている筈でありこの値がたとえば  $x^0=720$  であるとすれば応答係数  $F_{DM}$  の中央値  $\hat{F}_{DM}$  及び対数標準偏差値  $\beta_{DM}$  は (7.43) (7.44) 両式より次の通りとなる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{F}_{DM} &= 1.1 \\ \beta_{DM} &= 0.11 \end{aligned} \right\} \quad (7.46)$$

ここで  $\beta_{DM}$  は、 $F_{DM}$  を構成する  $F_{MS}$ ,  $F_{MF}$  の対数標準偏差が通常システムの不確定性を示すものとして分類されるケースが多いことから、同様に  $\beta_{DM}$  についてもシステムの不確定性を示す対数標準偏差と考えるのが妥当な様に思われる。ただし厳密にはシステムの不確定性とランダム的な不確定性のより現実的な定義、区別をベースにした定量的な評価が必要であるが、本問題は地震 PRA 解析全体の問題であり今後の研究課題としたい。



### 7.3 今後の展開と研究課題

本節では、現在の技術動向から推定して当面は実現困難なため本研究では対象外とした動的信頼性研究上での未解決の重要なテーマを、今後の研究課題として以下に述べる。

#### (1) 種々の破壊様式に対する検討

本研究では構造要素のいずれか一個でも破壊状態に到達すると即それはシステム全体の破壊に直結すると考えるいわゆる直列システムの破壊モードのみを取り扱っている。しかし構造物の中には、いくつかの構造要素は破壊しても荷重の再配分により直ちにシステム全体の破壊とはならないもの、あるいは冗長系を有するものも存在し、これらの構造物の場合には一般に複数の破壊モードを有することになる。この破壊モードの量的な増加の問題とともに質的な増加のケースもある。たとえば耐震問題において耐震性向上のために付加した免震装置あるいは配管用スナバ等が故障することによりそれらを設置しない場合には見られなかった新たな破壊モードが追加されることになるケースや、橋梁の耐震問題において材料強度の劣化により竣工直後には考える必要がなかった座屈による破壊モードを考慮せねばなくなる場合等である。

以上の複数破壊モードの考慮、あるいは質的に異なる破壊モードの追加とそれに対する取り扱い、構造系の自由度が大きくなると静的信頼性の分野においても複雑で面倒な問題となる。動的信頼性では、外力及び応答の振幅や作用方向が時間的に、かつ現象によっては空間的にも変動することにより破壊モードを把握すること自体が困難となるため、これに上述の自由度の増大が加わると破壊確率の評価はさらに難しいものとなる。このため本分野の研究は重要であるにもかかわらず未開発の分野として残されている。しかし構造信頼性研究の最終目標の一つが終局強度に対する信頼度を評価することにあることから、動的信頼性研究においても種々の破壊様式に対する評価手法を開発することは今後のもっとも重要な研究課題の一つである。

(2) 荷重組合せ理論の共通要因故障解析への応用

(1)では作用する外力間の相関性については何も触れていないが、たとえば建家内にある機器・配管系の地震時における信頼度を評価する場合、機器・配管系に直接入力される地震力による破壊モードと建家もしくは周辺機器の破損による間接的な外力が機器・配管系に作用することにより発生する破壊モードとは明らかに強い相関性を有している。この様な現象の解析は一般に共通要因故障解析と呼ばれており動的信頼性解析においても荷重組合せ理論を用いることにより解析可能であることは既に第3.4節で述べた通りである。しかし第3.4節で対象とした破壊モードは直列システムを想定した単一モードのみであるが、種々の構造系を対象とする場合には一般に複数破壊モードを考慮する必要がある、しかも前項で述べた通り複数破壊モードの考慮は特に動的信頼性解析分野では未開発の研究領域として残されている。したがって前項の開発が進んだ段階で、その応用として前記テーマに関し、より汎用性が高くかつ精度良く信頼度を推定し得る評価手法を開発することが重要になるものと思われる。

(3) 構造諸元のゆらぎを考慮した多自由度非線形構造系の動的信頼性解析

構造諸元のゆらぎを考慮した多自由度線形構造系に対する動的信頼性評価を、確率有限要素法の利用により行う方法を前節に述べているがこれは弾性構造系に限って有効な手法である。一方現実問題としては非弾性域にある終局状態まで考慮する必要があるケースも多いが、このために必要となる基盤技術としての非線形確率有限要素法は現在まだ基礎研究段階にある。このため非線形確率有限要素法が実用段階に入る時点で、この技術を解析の中に取り込める新たな不確定構造系の動的信頼性解析手法の開発が必要になるものと思われる。

(4) LRF D法荷重係数設定問題における構造非線形性の影響評価

第7.1節でのLRF D法における荷重係数設定問題では荷重組合せ理論の応用可能性を示すことが主目的であったため構造は線形系に限定し更に構造諸元のゆらぎは無いものと仮定している。したがって実機に適用し得る精度の高い解析手法とするためには最終的には構造諸元のゆらぎや構造非線形性の影響を十分に把握・評価しておく必要がある。ただし本検討項目は前述(3)の研究課題に対する成果を反映する形で進められるのがもっとも効率的であろう。

(5) ヒューマンエラーの影響を考慮した動的信頼性解析

ヒューマンエラー研究の重要性への関心が近年、原子力発電所の運転・保守問題を中心に高まりつつあるが、これは本研究の動的信頼性解析についても同様であり今後の研究課題として示した前述の(1)～(4)の項目もすべてヒューマンエラーと関係している。ただし動的信頼性解析分野へのヒューマンファクタの導入については、現状、重要ではあるが未開発の領域として残されており、今後本問題を解決するには現在研究が鋭意進められているヒューマンエラー研究の手法の把握と、それを取り込める新たな動的信頼性解析の理論体系確立への展開が必要である。

#### 7.4 まとめ

本章では動的信頼性解析の実用面への応用として、荷重強度係数設計法における設計規範式の選定と荷重係数設定問題、及び確率論的地震リスクアセスメントにおける安全係数設定問題を取り上げ、これを評価するための解析手法について検討した。更に動的信頼性研究分野における今後の重要な研究項目について検討した。

この節では上記検討結果より明らかになった点をまとめておく。

(1) 荷重強度係数設計法により図7.1の様な複数種の外荷重に対する構造設計を行う場合、設計者が照査すべき設計規範式は複数あり、特に対象とすべき外荷重の数が多い時にはそれに従い設計規範式の数も増加するため設計に要する期間、費用も増大することになり、必要な設計規範式数の低減は設計者サイドの重要な問題となっている。ところで設計規範式の中には、そこで対象となっている外荷重について同時に構造に作用する事象の破壊確率が単独荷重発生時の破壊確率の大きさに比べ非常に小さいケースも含まれている可能性があり、この設計規範式については本来照査を省略することができる筈である。しかしこの省略可否の判断は当然定量的評価に基づいて行われるべきであり、このため不規則動荷重を受ける柔構造物系の様に動的な信頼性評価を必要とする複雑なケースについては従来あまり評価がなされていない。そこで本章では本研究で開発した荷重組合せを考慮した動的信頼性解析手法を適用することにより設計規範式の省略可否を定量的に評価し得ることを示し、更に具体例を示すことにより本動的信頼性解析手法の設計規範式選定への応用の有用性を明らかにした。

(2) 荷重強度係数設計法の展開においてもっとも重要な課題の一つは合理的な荷重係数の設定問題である。本問題については過去に種々の方法が提案されているが、その多くは静的信頼性理論の枠内で取り扱われており構造物の振動特性まで考慮して評価されたものは少ない。そこで本研究においては荷重組合せを考慮した動的信頼性手法を応用して評価関数法により最適な荷重係数を設定し

得る新たな評価手法を提案した。これにより構造物の動特性まで考慮して荷重係数を合理的に推定することが可能となった。また試計算を実施することにより本評価手法の有効性が明らかとなった。

- (3) 原子力発電所を中心として行われている確率論的地震リスクアセスメントにおける安全係数の設定は、一般に経験的に行われることが多いが、この値の推定精度は全体のリスク評価に大きく影響を及ぼす可能性があるため、より合理的かつ定量的な推定手法の確立が望まれている。このため本章では入力及び構造諸元の統計的ばらつき量を用いて、動的信頼性理論と確率有限要素法を援用することにより安全係数の一部を定量的に推定し得る手法を開発した。すなわち、まずスペクトル解析と極値理論及び確率有限要素法を用いて不確定構造系に対する確率論的地震応答解析法を開発し、モンテカルロシミュレーションにより解析手法の妥当性を確認した後、当該手法により得られている応答最大値の統計量を用いて安全係数の統計量を推定するものである。以上の方法により安全係数が従来の様に経験的ではなく合理的かつ定量的に推定することが可能であることを明らかにした。

- (4) 本研究で実施した研究範囲あるいは解析条件等を参考にして、本研究では対象外とした動的信頼性研究上での未解決の重要なテーマを今後の研究課題として示した。

# 参考文献 (第7章)

- [1] 藤野陽三, 確率論に基づく安全性照査法と構造設計, 土木学会誌, No.2, (1978), 38.
- [2] 土木学会編, 構造物の安全性・信頼性, 土木学会, (1976).
- [3] 星谷勝, 石井清, 構造物の信頼性設計法, 鹿島出版会, (1986).
- [4] 関西道路研究会, 限界状態設計法の基礎理論に関する調査研究, 道路橋調査研究委員会報告書, (1985).
- [5] 土木学会編, 構造物のライフタイムリスクの評価, 土木学会, (1988).
- [6] Galambos, T.V. et al., Probability Based Load Criteria : Assessment of Current Design Practice, J.Am.Soc.Civil Eng., Vol.108, No.ST5, (1982), 959.
- [7] Ellingwood, B., Safety Checking Formats for Limit States Design, J.Am.Soc.Civil Eng., Vol.108, No.ST7, (1982), 1481.
- [8] British Standards Institution, Steel, Concrete and Composite Bridges, Part 3 : Code Practice for Design of Steel Bridges, BS5400, Part 3, (1982).
- [9] Milford, R.V., Load Factors for Limit States Codes, J.Am.Soc.Civil Eng., Vol.113, No.ST9, (1986), 2053.
- [10] Edinger, J.A., Introduction to the Proposed AISC Load and Resistance Factor Design Specification, AISC Engineering Journal, Vol.21, No.1, (1984), 62.
- [11] Lind, N.C., Consistent Partial Safety Factors, J.Am.Soc.Civil Eng., Vol.97, No.ST6, (1971), 1651.
- [12] 白石成人, 吉田均, 中野正則, 2次モーメント法による信頼性設計法に関する二, 三の考察, 土木学会論文報告集, 第311号, (1981), 1.
- [13] Ayyub, B.M. and White, G.J., Reliability-Conditioned Partial Safety Factors, J.Am.Soc.Civil Eng., Vol.113, No.ST2, (1987), 279.
- [14] 北浦勝, 池本敏和, 若林真司, RC橋脚への荷重係数設計法の適用に関する研究, 第1回構造物の安全性および信頼性に関する国内シンポジウム論文集, (1987), 201.
- [15] Hwang, H. et al., Probability-Based Design Criteria for Nuclear Plant Structures, J.Am.Soc.Civil Eng., Vol.113, No.ST5, (1987), 925.



- [16] Schwartz, M.W. et al., Load Combination Methodology Development-Final Report, NUREG/CR-2087, (1981).
- [17] 森塚正宜, 久保雅邦, 限界状態確率に基づく設計荷重の組合せと荷重係数の一決定法, 土木学会論文集, 第386号, (1987), 301.
- [18] Siu, W.W., Parimi, S.R. and Lind, N.C., Practical Approach to Code Calibration, J.Am.Soc.Civil Eng., Vol.101, No.S7, (1975), 1469.
- [19] 木下誠也, 伊藤学, 藤野陽三, 信頼性アプローチによる鋼道路橋の荷重係数の評価, 土木学会第33回年次学術講演会講演概要集, 1-150, (1978), 286.
- [20] Ellingwood, B. et al., Probability Based Load Criteria: Load Factors and Load Combinations, J.Am.Soc.Civil Eng., Vol.108, No.S5, (1982), 978.
- [21] 根本桂明, 伊勢田敏, 依田照彦, 確率論的解釈に基づく荷重係数のキャリブレーション, 早稲田大学理工学研究所報告, 第113輯, (1985), 43.
- [22] 柴田碧 他, 原子力発電所の地震時危険度の確率論的評価, 日本原子力学会誌, Vol.28, No.1, (1986), 2.
- [23] 持尾隆士, 動的荷重に対する構造物の信頼性解析, 配管技術, Vol.31, No.8, (1989), 59.
- [24] ANS/IEEE, PRA Procedures Guide, NUREG/CR-2300, (1983).
- [25] Smith, P.D. et al., SSMRP Phase I Final Report-Overview, NUREG/CR-2015, (1981).
- [26] 持尾隆士, 関谷宏, 近藤充, 不確定構造系の確率論的地震応答解析法の開発, 第4回確率論的安全評価に関する国内シンポジウム論文集, (1989), 96.
- [27] 関谷宏, 石倉修一, 持尾隆士 他3名, ランダム荷重下における不確定構造の応答解析, 第2回計算力学講演概要集, No.890-69, (1989), 90.
- [28] Ditlevsen, O., Uncertainty Modeling, McGraw-Hill Inc., (1981).
- [29] Benjamin, J.R. and Cornell, C.A., Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers, McGraw-Hill Inc., (1970).
- [30] Davenport, A.G., Note on the Distribution of the Largest Value of a Random Function with Application to Gust Loading, Proc. of the Institution of Civil Engineers, Vol.28, No.6739, (1964), 187.

- [31] Kiureghian, A.D., Structural Response to Stationary Excitation,  
J. Am. Soc. Civil Eng., Vol.106, No. EM6, (1980), 1195.
- [32] Preumont, A., On the Peak Factor of Stationary Gaussian Processes,  
Journal of Sound and Vibration, Vol.100, No.1, (1985), 15.
- [33] 中桐滋, 久田俊明, 確率有限要素法入門, 培風館, (1985).
- [34] 津田孝夫, モンテカルロ法とシミュレーション, 培風館, (1977).
- [35] Law, A.M. and Kelton, W.D., Simulation Modeling and Analysis, McGraw-Hill Inc., (1982).
- [36] 岡村弘之, 板垣浩, 強度の統計的取扱い, 培風館, (1979).
- [37] Shinozuka, M., Mochio, T. and Samaras, E.F., Power Spectral Density Functions Compatible with NRC Regulatory Guide 1.60 Response Spectra, NUREG/CR-3509, (1988).
- [38] User's Manual, SIMQKE : A Program for Artificial Motion Generation, Department of Civil Engineering, MIT, (1976).
- [39] 持尾隆士, 耐震設計における非定常性・多次元相関を考慮した応答に関する基礎的研究, 東京大学大学院工学系研究科修士論文, (1975).



## 第 8 章

### 結 論

本研究で得られた成果を総括し、結論として述べる。

本研究は荷重組合せ現象が関与する動的信頼性問題について、構造物の振動特性を考慮して評価し得る解析手法を開発、応用することにより従来経験的あるいは主観的に決定せざるを得なかった荷重組合せに関する諸問題を、合理的かつ客観的に解決できるようにすることを主目的として行われたものである。

本研究の成果は各章毎に詳述されているが、ここでそれらを通して要約すれば以下の如くの結論が得られる。

第2章では動的信頼性を評価するために必要となる応答統計量の理論的推定法、特に非線形構造系に対する不規則振動応答推定のための理論展開を行い、次のような成果が得られた。

- (1) 動的信頼性問題で対象とする可能性がある非線形性大の不規則振動現象に対する解法としては、統計的等価線形化手法と Fokker-Planck 法が適していることを示すとともに、まず統計的等価線形化手法の応用例として材料非線形性を有する任意形状板構造の平面応力場問題を取り上げ、当該問題を解析するために統計的等価線形化、有限要素法、複素モーダルアナリシス法による理論展開を行った。これにより非定常不規則応答解析が実現できることを明らかにするとともに、具体例に対するシミュレーション結果との比較も行うことで提案した解析手法の妥当性ならびに有用性を示した。
- (2) Fokker-Planck 法の応用例として一般的非線形一自由度系の不規則振動問題を取り上げこれの定式化を行った。Fokker-Planck 法を用いて応答量に関するモーメント方程式を求める際には、系が非線形の場合通常高次モーメントを式中に含む場合が多くこれの処理が重要課題となる。そこで本研究ではキュムラント打ち切り手法を Fokker-Planck 法に援用することにより、種々の非線形系に適用できる汎用性の高い新たな方法を開発した。また別途実施したモンテカルロシミュレーションによる数値実験結果とも比較し本手法の妥当性を確認した。

- ③ 疲労評価において従来応答のピーク値に対する確率密度は既知であることを前提とした展開が多い様であるが、このためピーク値に対する確率密度の仮定がきわめて重要な解析精度の支配要因となる。この様な評価上のリスクを避けるため、本研究では応答のピーク値に対する確率密度を仮定することなしに、超過回数期待値から直接に累積疲労損傷期待値を推定できる手法を提案した。一方、初通過破壊の評価には本来超過回数期待値の量が用いられている訳であるから、これより初通過破壊と疲労破壊はいずれも超過回数期待値を経由して推定されることになるため、両者の解析精度はバランスがとれたものとなり、かつ統一的な動的信頼性評価が可能となる。

第3章では荷重組合せ現象の概要について述べるとともに、多自由度線形構造物を対象とした荷重組合せ効果を考慮し得る動的信頼性評価手法の開発を行い、次のような成果が得られた。

- (1) 動的信頼性解析上で有用な荷重組合せ則として Load Coincidence 法 (LC 法) を選定した。また多自由度系においては、導出が容易な (条件無) 単位時間当りの超過回数期待値を、系全体の等価的な超過回数期待値へ組み込むことが、解析実現のための重要なポイントとなるために、それを可能とする新たな近似関係式を提案した。そしてこの近似関係式と LC 法を利用することにより従来解析困難であった有限要素法をベースとした実機レベルでの、複数の動荷重の同時発生効果を考慮した動的信頼性評価 (初通過破壊問題) が可能となることを明らかにした。

更に具体的な定式化を、入力となる動的荷重のすべての組合せ (平均値有 + 平均値有, 平均値有 + 平均値無, 平均値無 + 平均値無) 及び 2 タイプの信頼性 (強度制限タイプ, 変位制限タイプ) の各々について系統的に行うことにより、荷重組合せ現象に対する統一的な把握と解釈が可能になることを示した。なお定式化に際しては標準的な荷重組合せである平均値有 / 平均値無のケースについてシミュレーションによる数値実験結果との比較を行い、解析手法の妥当性を確認した。

- ② 実機レベルの骨組構造物を対象とした試計算を行い、解析結果の解釈と利用法の例を示すことにより動的信頼性評価、更には荷重組合せ問題の解析を行うことの有用性を示した。

第4章では履歴復元力特性で代表される弾塑性構造物を対象とした、荷重組合せ効果を考慮し得る初通過破壊問題評価手法の開発を行い、次のような成果が得られた。

- ① Wen により提案された履歴復元力モデルを有する一自由度非線形構造系に対して、Fokker-Planck 法を適用、更に第2章で提案したキュムラント打ち切り手法を援用することにより初通過破壊問題を解析する理論的評価手法を開発した。
- ② 一自由度系で開発した手法を多自由度系に拡張することにより、従来解析困難であった複数の不規則な動的荷重の同時発生効果を考慮した、非線形（弾塑性）多自由度構造物に対する動的信頼性（初通過破壊問題）評価が可能となった。
- ③ 開発した一自由度系及び多自由度系の両者に対して、モンテカルロ法による数値実験結果との比較を行うことにより解析手法の妥当性を確認した。また一自由度系については動荷重の平均発生率及び耐用年数が破壊確率に及ぼす影響を定量的に把握するとともに、荷重組合せ効果を考慮することの必要性を、例題をもとに明らかにした。

第5章では履歴復元力特性で代表される弾塑性構造物を対象とした、荷重組合せ効果を考慮し得る疲労損傷評価手法の開発を行い、次のような成果が得られた。

(1) 荷重組合せ問題にも対応可能な累積疲労損傷期待値の推定法を新たに提案し、更に推定法の妥当性を検討するために、別途モンテカルロシミュレーションを実施することにより手法の有用性を確認した。また提案した推定法をベースとして Fokker-Planck 法及びマイナー則を援用することにより、従来未開発の分野であった複数の動的荷重の同時発生効果及び構造の振動特性を考慮した、非線形（弾塑性）多自由度構造物の疲労信頼性評価手法を開発した。これにより従来取り扱い困難とされて来た当該問題に対して定量的評価が可能となった。

(2) 一自由度弾塑性構造物の荷重組合せを考慮した疲労損傷問題を取り上げ、この構造物の年間当たりの累積疲労損傷期待値を種々のパラメータについて求め、更に比較検討することにより疲労問題における荷重組合せ現象考慮の必要性を明らかにするとともに、当該荷重組合せ現象を把握するために本章で開発した解析手法が有効であることを示した。

第6章では平均値を有する不規則入力を受ける非線形構造物の、材料強度のばらつき及び経年変化による強度低下現象を考慮した場合における初通過破壊に対する動的信頼性評価法の検討を行い、次のような成果が得られた。

(1) 不規則入力（直流分）を有する時には、非線形系の場合には重ね合わせ手法が利用できないため応答解析時に平均値分も同時に評価する必要がある。このためキュムラント打ち切り手法を反復使用することにより、非線形構造物の初通過破壊問題を評価し得る汎用性の高い解析手法を新たに開発した。また本手法は別途モンテカルロ法による数値実験結果と比較することによりその妥当性を確認している。

(2) 第5章までは動的信頼性解析の中でも比較的応答サイドに主眼を置いた検討を行ったが、本章では構造物の耐力（強度）サイドについてもその特性に注目した検討を行った。すなわち材料強度のばらつき及び経年変化による強度低下特性を考慮する場合の初通過破壊問題評価への定式化を行い、それらのパラメータが動的信頼性評価へ与える影響を定量的に把握できることを示した。

第7章では動的信頼性評価手法の実用面への応用例として、荷重強度係数設計法への展開と確率論的地震リスク評価問題への応用について検討するとともに、今後の重要な研究課題について述べた。本章での主な成果は次の通りである。

- (1) 荷重強度係数設計法における重要な研究課題である、必要最小限のコードフォーマット（設計規範式）の選定及び荷重係数の設定問題を、合理的、客観的にかつ構造物の振動特性を考慮して評価する場合に、本研究で開発した荷重組合せを考慮し得る動的信頼性評価手法が有効に利用できることを示した。更に具体例を示すことにより本動的信頼性解析手法の有用性を明らかにした。
- (2) 第6章まではすべて構造諸元値は確定値とみなして解析を行っているが、対象とする問題によっては構造諸元のばらつきが大きいもの、あるいは信頼性評価上からばらつきの定量的評価を必要とする場合がある。このため構造諸元のばらつきを考慮した時の動的信頼性解析手法を、構造物の確率論的地震リスク評価での安全係数設定問題を具体例として誘導した。また導出された解析手法はモンテカルロシミュレーションによりその妥当性を確認した。
- (3) 本研究で実施した研究範囲あるいは解析条件等を参考にして、本研究では対象外とした動的信頼性研究上での未解決の重要なテーマを、今後の研究課題として整理した。

以上を要するに、本研究は、構造物の振動応答が関与する動的信頼性問題において、従来、動荷重の種類、構造モデル化、破壊現象の種類等に関し、問題毎に部分的に取り扱われていた荷重組合せ問題及び関連諸問題の研究を統合し、かつ評価手法の開発を含む新たな理論体系化をはかることにより、従来経験的あるいは主観的に決定せざるを得なかった荷重組合せに関する諸問題を、合理的、かつ客観的に解決し得ることを可能にしたものであり、荷重組合せを考慮した動的信頼性の基礎研究分野における発展、及び実用面としての構造信頼性設計上での合理化と信頼度向上に、寄与できるものであると考える。



## 謝 辞

本論文の作成にあたり、終始ご指導、ご鞭撻を賜りました東京大学生産技術研究所 柴田碧教授に心から感謝の意を表します。

また、ご多忙中のところ、本論文の審査をして頂き、多くの貴重なご助言とご指摘を賜りました東京大学工学部 岡村弘之教授、藤野陽三教授、東京大学生産技術研究所 大野進一教授、藤田隆史教授に厚くお礼申し上げます。

東京大学生産技術研究所 中綱滋教授、東京大学先端科学技術研究センタ 久田俊明助教授には、確率有限要素法などに関し平素より有益なるご指摘、ご示唆を頂き、深く感謝致します。

著者が visiting scholar として米国 Columbia 大学に留学した際、指導教官をお引き受け頂いた Shinozuka 教授（現 Princeton 大教授）には、終始懇切なるご指導と励ましを賜りますとともに、荷重組合せ問題の研究に着手する機会を与えて頂きましたこと、ここに深く感謝する次第であります。また Brookhaven 国立研究所での構造信頼性に関する研究生活では原子力安全性グループの Dr. Hwang（現 Memphis 州立大教授）に、公私に渡り終始暖かいご指導とご助言を賜りました。ここに深謝致します。

Illinois 大学 Wen 教授には、荷重組合せ問題に関して多くの貴重なご助言とご指導を頂き感謝致します。また疲労損傷評価について有益なるご助言とご示唆を賜りました Stanford 大学 Cornell 教授、Texas A & M 大学 Yao 教授に厚くお礼申し上げます。

本研究の遂行にあたり、叱咤激励を頂きました東京都立大学工学部 鈴木浩平教授、山梨大学教育学部 渡辺武助教授に深く感謝致します。

本研究着手への機会となりました米国 Columbia 大学への留学をご許可頂きました三菱重工業㈱元長崎研究所所長 植田昭二氏（現技術本部長）に心から感謝申し上げます。また日頃より懇切なご指導とご支援を頂いております三菱重工業㈱現長崎研究所所長 朝鍋定生氏、振動研究室室長 江崎仁朗氏をはじめとする長崎研究所の諸先輩、関係諸氏に心より感謝の意を表する次第です。

## 付 録

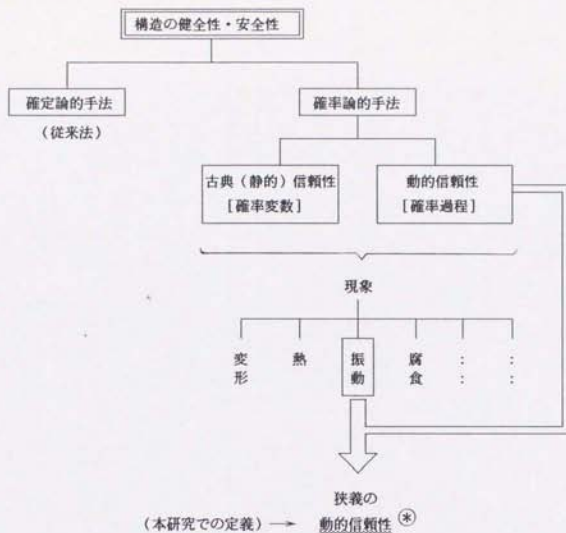
- 付録1.1 動的信頼性について
- 付録2.1 非線形構成方程式が示す応力／歪関係
- 付録3.1 2入力と同時に作用する時の応答共分散マトリックスの導出
- 付録3.2  $g_i(\mu_{d_j})$  の具体的表現
- 付録4.1 1自由度弾塑性構造物の定常応答モーメント方程式
- 付録4.2 3自由度弾塑性構造物の定常応答モーメント方程式
- 付録5.1  $D_{12k_j}$  の解析的表現
- 付録7.1 安全係数法による構造物の損傷度評価
- 付録7.2 線形多自由度系における  $G_k^1(u)$  の導出



## 付録1.1 動的信頼性について

通常“信頼性”とは、系、機器、部品などが、規定の条件の下で、意図する期間中、規定の機能を、遂行する確率であるが、このような信頼性を機械・構造物の全寿命を通じて維持し、管理していくためには、開発、設計、製造、使用の各段階を通じてメーカー及びユーザーの一致協力体制が必要となる。したがってその対象は広範囲に及ぶが大別すると次の二つである。一つは設計、製作時に考慮されるべきいわゆる固有信頼性であり、他方は、保全、環境、操作、保管等の使用条件に左右される使用信頼性である。これらの信頼性を総合的に評価することによりシステムのトータルの信頼性・安全性が確保されることになる。

ところで信頼性理論と言え一般には静的信頼性理論あるいは古典信頼性理論を意味し、これは確率変量として時間に無関係な確率変数を用いた確率統計理論であるが、この理論による場合には、信頼性問題における荷重組合せ問題や疲労破壊等を解析することが困難である。そこで近年不規則変量を確率過程とみなして時間要因を考慮した解析が行われる様になった。この理論を静的に対して動的信頼性理論と呼ぶ。ただし本研究で用いる動的信頼性の定義には前述の意味の他に更に振動による構造の動的応答効果も含まれる場合に限定して使用している。これを図示すれば付図1.1の様になる。



(\*) したがって、従来の振動問題の中で確率過程としての取り扱いが必要となるものはすべてここでの動的信頼性工学の分野に入る

#### ◎ 研究対象・範囲

振動問題に関連した

- ① 一般信頼性評価
- ② 従来法での安全率低減による安全余裕の確認
- ③ 荷重強度係数設計法・確率論的設計法に対する評価
- ④ 重要構造物の終局安全性評価
- ⑤ リスクアセスメント

付図1.1 動的信頼性の定義 (範囲)

非線形構成方程式の例として以下の6式を取り上げる。

$$\dot{\eta}_x = \frac{E_x}{1-\nu^2} [a_x \dot{\epsilon}_x + (1-a_x) Z_x(\dot{\epsilon}_x)] + \frac{E_x \nu_y}{1-\nu^2} \dot{\epsilon}_y \quad (\text{付2.1})$$

$$\dot{\eta}_y = \frac{E_y}{1-\nu^2} [a_y \dot{\epsilon}_y + (1-a_y) Z_y(\dot{\epsilon}_y)] + \frac{E_x \nu_y}{1-\nu^2} \dot{\epsilon}_x \quad (\text{付2.2})$$

$$\dot{\eta}_{xy} = G_{xy} [a_{xy} \dot{\epsilon}_{xy} + (1-a_{xy}) Z_{xy}(\dot{\epsilon}_{xy})] \quad (\text{付2.3})$$

$$\dot{Z}_x(\dot{\epsilon}_x) = A_x \dot{\epsilon}_x - \beta_x |\dot{\epsilon}_x| |Z_x(\dot{\epsilon}_x)|^{n_x-1} Z_x(\dot{\epsilon}_x) - \gamma_x \dot{\epsilon}_x |Z_x(\dot{\epsilon}_x)|^{n_x} \quad (\text{付2.4})$$

$$\dot{Z}_y(\dot{\epsilon}_y) = A_y \dot{\epsilon}_y - \beta_y |\dot{\epsilon}_y| |Z_y(\dot{\epsilon}_y)|^{n_y-1} Z_y(\dot{\epsilon}_y) - \gamma_y \dot{\epsilon}_y |Z_y(\dot{\epsilon}_y)|^{n_y} \quad (\text{付2.5})$$

$$\dot{Z}_{xy}(\dot{\epsilon}_{xy}) = A_{xy} \dot{\epsilon}_{xy} - \beta_{xy} |\dot{\epsilon}_{xy}| |Z_{xy}(\dot{\epsilon}_{xy})|^{n_{xy}-1} Z_{xy}(\dot{\epsilon}_{xy}) - \gamma_{xy} \dot{\epsilon}_{xy} |Z_{xy}(\dot{\epsilon}_{xy})|^{n_{xy}} \quad (\text{付2.6})$$

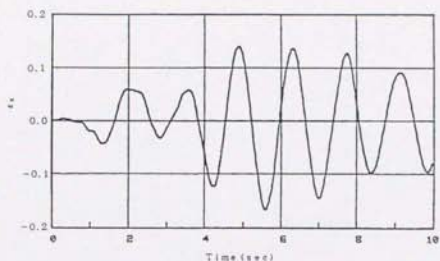
更に  $\dot{\eta}_x$  と  $\dot{\epsilon}_x$  の関係に特に注目してこれを図示することを考える。この時には上式の(付2.1)(付2.2)(付2.4)及び(付2.5)式を同時に考慮することになる。

(付2.4)(付2.5) 両式にオイラー法を適用し  $Z_x(\dot{\epsilon}_x)$ ,  $Z_y(\dot{\epsilon}_y)$  及び  $\dot{\epsilon}_y$  を消去することにより  $\dot{\eta}_y$  をパラメータとした  $\dot{\eta}_x$  と  $\dot{\epsilon}_x$  の関係を得ることができる。故に  $\dot{\epsilon}_x$  に任意の時間的変動を与えることにより  $\dot{\eta}_x$  が一意に決まるのでこれより  $\dot{\eta}_x/\dot{\epsilon}_x$  の関係を図示することができる。

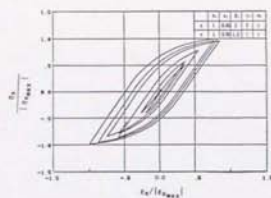
$\dot{\epsilon}_x$  の時刻歴として付図2.1を用い、下記のパラメータ値を設定して  $\dot{\eta}_x/\dot{\epsilon}_x$  の関係を図示したものが付図2.2～付図2.11である。

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_y = 2.0 \times 10^4 \text{ MPa} \\ \nu_y &= 0.3 \\ \eta_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{付2.7})$$

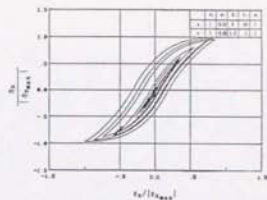
付図2.2～付図2.11より非線形パラメータをうまく選ぶことにより種々の非線形特性を表現できることが分かる。



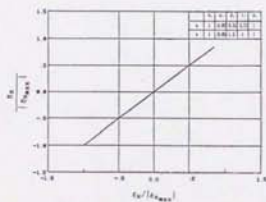
付図2.1 入力としての  $\varepsilon_X$  の時刻歴



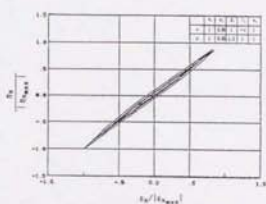
付図2.2



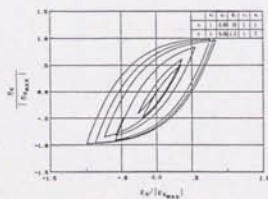
付図2.3



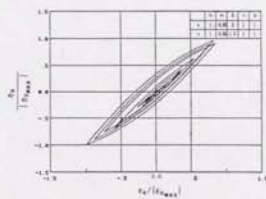
付図2.4



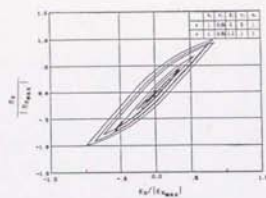
付図2.5



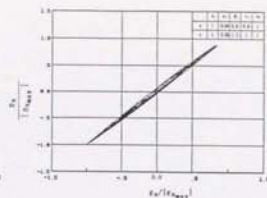
付図2.6



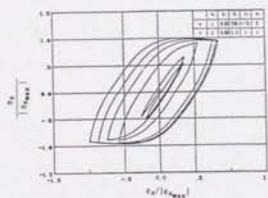
付図2.7



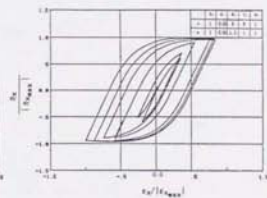
付図2.8



付図2.9



付図2.10



付図2.11

付録3.1 2 入力が同時に作用する時の応答共分散マトリックスの導出

変位に関する運動方程式は動的荷重の変動分を $F_i$ ,  $F_j$  とする時、以下の様に示される。

$$[N]\ddot{x} + [C]\dot{x} + [K]x = \{A_i\}F_i + \{A_j\}F_j \quad (\text{付3.1})$$

(付3.1) 式は線形系であるので、荷重 $F_i$ ,  $F_j$ に対する重ね合わせが可能である。更にモーダルアナリシスの手法を用いることにより $x$ が次の様に求まる。

$$x = [\Phi]q \quad (\text{付3.2})$$

$$q = [m']^{-1} \int_0^t [h(t-\tau)] [\Phi]^T \{A_i\}F_i(\tau) + \{A_j\}F_j(\tau) d\tau \quad (\text{付3.3})$$

ここで $[\Phi]$ はモーダルマトリックスであり、一方 $[m']$ 及び $[h(\cdot)]$ は各々モーダル質量及びインパルス応答関数を要素とする対角マトリックスである。

次に各要素の応答変位量と応答力の関係を考えるとこれは通常の有限要素法の理論により次の通りとなる。

$$\{\sigma\}^e = [B]^e [T] \{x\}^e = [B]^e [T] [\Phi] q \quad (\text{付3.4})$$

ここで $\{\sigma\}^e$ は部材 $e$ の部材座標系で表した部材端力ベクトルであり、 $[B]^e$ ,  $[T]$ ,  $[\Phi]$ は各々部材 $e$ の応力マトリックス、座標変換マトリックス、部材対応のモーダルマトリックスである。

今、初期応力及び荷重の平均値分が 0 であることを考慮すると、部材端力ベクトルに対する共分散マトリックス $C_{\{\sigma\}\{\sigma\}}$ は、(付3.2)～(付3.4) 式を用いて

$$\begin{aligned} C_{\{\sigma\}\{\sigma\}} &= E[\{\sigma\}^e \{\sigma\}^{eT}] \\ &= [B]^e [T] [\Phi] [m']^{-1} [J] [B]^e [T] [\Phi] [m']^{-1T} \end{aligned} \quad (\text{付3.5})$$

の形で表わされる。(付3.5) 式中のマトリックス $[J]$ の要素 $J_{mn}$ は以下の形をしてゐる。

$$J_{mn} = I_{mn} \hat{A}_{i_{mn}} + I_{jmn} \hat{A}_{j_{mn}} \quad (\text{付3.6})$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} I_{k_{mn}} &= \sum_p \sum_q \theta_{pm} \theta_{qn} \hat{A}_{kp} \hat{A}_{kq} \\ \hat{A}_{k_{mn}} &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h_m(t_1 - \tau_1) h_n(t_2 - \tau_2) E[F_k(\tau_1) F_k'(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 \\ &\quad (k=i, j) \end{aligned} \right\} \quad (\text{付3.7})$$

であり, また (付3.6) 式の導出に際しては荷重  $F_i, F_j$  間には相関が無いという仮定を用いている。更に応答が定常確率過程であり, 荷重変動分  $F_k$  はパワースペクトル強度  $S_k$  を有する正規性ホワイトノイズであると仮定できる場合には  $\hat{A}_{k_{mn}}$  は良く知られている通り次の様な形となる。

$$\hat{A}_{k_{mn}} = S_k \int_{-\infty}^{\infty} H_m(u) H_n^*(u) du \quad (\text{付3.8})$$

$$\begin{aligned} H_\ell(u) &= \frac{1}{u_\ell^2 - u^2 + 2i\xi_\ell u} \\ &\quad (\ell = m, n) \end{aligned} \quad (\text{付3.9})$$

(付3.8) 式は留数積分により求められるが,  $m, n$  のすべてについて複素計算を実施していれば計算量の増大になるため以下の様な近似化を行い計算量の低減をはかった。

すなわち共分散マトリックス  $C_{(i+j)(i+j)}$  の要素  $C_{k_{\lambda}}$  は一般に (付3.5) ~ (付3.8) 式より次の様な形をしているが,

$$C_{k_{\lambda}} = \sum_m U_{mk_{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} |H_m(u)|^2 du + \sum_m \sum_n V_{mnk_{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(u) H_n^*(u) du \quad (\text{付3.10})$$

(付3.10) 式において当然

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H_m(u) H_n^*(u) du \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H_m(u)| |H_n^*(u)| du \quad (\text{付3.11})$$

の関係が成立し, また次の仮定



(1) 減衰は小で  $|\mathbb{H}_m(u)|$  の形はするどいピークを有するためピークから離れると急激に値が低減する。

(2)  $m, n$  次の固有値は接近しておらずこのため  $|\mathbb{H}_m(u)|$  と  $|\mathbb{H}_n^*(u)|$  の積は非常に小さい。

が近似的に成立する場合には (付3.10) 式は以下の様になる。

$$C_{kA} \approx \sum_m U_{mKA} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbb{H}_m(u)|^2 du \quad (\text{付3.12})$$

故に共分散マトリックスの要素  $C_{kA}$  を求める場合にはマトリックス  $[J]$  の対角要素  $J_{mm}$  のみを計算すれば良いことになり全体の計算量を低減できる。 $J_{mm}$  の値は (付3.6) ~ (付3.9) 式を用い更に留数積分を応用することにより容易に求められるのでこれを (付3.5) 式に代入することにより  $C_{kA}$  が次の通りに求まる。

$$C_{kA} = S_i C_{iKA} + S_j C_{jKA} \quad (\text{付3.13})$$

$$\left. \begin{aligned} C_{iKA} &= \sum_{n=1}^L \frac{\pi |i_{im} E_{km} E_{Am}|}{2 \xi_m \omega_m^3} \\ C_{jKA} &= \sum_{n=1}^L \frac{\pi |j_{jm} E_{km} E_{Am}|}{2 \xi_m \omega_m^3} \end{aligned} \right\} \quad (\text{付3.14})$$

ここで、 $E_{km}$ 、 $E_{Am}$  はマトリックス  $[B]^* [T] [\Phi]^* [M']^{-1}$  の対応する要素を示している。

次に  $C_{i \pm 1, i \pm 1}$  を求める。 $C_{i \pm 1, i \pm 1}$  の計算は  $C_{i \pm 1, i \pm 1}$  とほとんど同じであるが異なるのは (付3.12) 式の被積分項が

$$C_{kA}^* \approx \sum_m U_{mKA} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 |\mathbb{H}_m(u)|^2 du \quad (\text{付3.15})$$

となる点である。これを考慮して  $C_{i \pm 1, i \pm 1}$  と同様の計算を行うことにより  $C_{kA}$  が以下の様に求まる。

$$C_{k,d} = S_i C_{i,k,d} + S_j C_{j,k,d} \quad (\text{付3.16})$$

$$\left. \begin{aligned} C_{i,k,d} &= \sum_{m=1}^L \frac{\pi I_{i,m} \varepsilon_{k,m} \varepsilon_{d,m}}{2 \xi_m \omega_m} \\ C_{j,k,d} &= \sum_{m=1}^L \frac{\pi I_{j,m} \varepsilon_{k,m} \varepsilon_{d,m}}{2 \xi_m \omega_m} \end{aligned} \right\} \quad (\text{付3.17})$$

次に  $C_{i \pm i \pm i}$  を求める。 $C_{i \pm i \pm i}$  の要素  $C_{i,k,d}$  は (付3.10) 式の類推より

$$C_{i,k,d} = \sum_m U_{m,k,d} \int_{-\infty}^{\infty} i \omega |H_m(\omega)|^2 d\omega + \sum_m \sum_n V_{mn,k,d} \int_{-\infty}^{\infty} i \omega H_m(\omega) H_n^*(\omega) d\omega \quad (\text{付3.18})$$

となるが (付3.18) 式の右辺第1項は留数積分を実施すれば明らかな様に 0 となる。更に第2項についても (付3.11) 式の関係を拡張することによりその絶対値は非常に小さくなることが期待できるので結局  $C_{i,k,d}$  の値は本節では近似的に 0 として取り扱うこととする。

付録3.2  $g_1(\mu_{d1})$  の具体的表現

以下の表に  $i=2, j=1$  の場合を示す。

遅延時間Tに関する分布形	$g_2(\mu_{d1})$
指数分布	$1 - \exp[-\lambda_2 \mu_{d1} - \frac{P_1 P_2 \rho}{\lambda_1} (\frac{a_2}{a_1 + a_2}) (1 - e^{-\mu_{d1}/a_2})]$
アーラン分布	$1 - \exp[-\lambda_2 \mu_{d1} - \frac{P_1 P_2 \rho}{\lambda_1 (a_1 + a_2)^2} \{a_2^2 (1 - e^{-2\mu_{d1}/a_2}) + \frac{2a_2}{(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2})} (1 - e^{-2\mu_{d1}/a_2}) - 2a_2 \mu_{d1} e^{-2\mu_{d1}/a_2}\}]$
正規分布	$1 - \exp[-\lambda_2 \mu_{d1} - \frac{P_1 P_2 \rho}{\lambda_1} \{ \Phi(\frac{\mu_{d1} - (a_2 - a_1)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}) - \Phi(\frac{(a_1 - a_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}) \}]$
一様分布	<p><math>a_2 &gt; a_1</math> の場合(逆の場合には以下の添字1,2を交換するのみ)</p> <p>i) <math>\mu_{d1} \leq 2(a_2 - a_1)</math></p> $1 - \exp[-\lambda_2 \mu_{d1} - \frac{P_1 P_2 \rho}{2\lambda_1 a_2} \mu_{d1}]$ <p>ii) <math>\mu_{d1} &gt; 2a_2</math></p> $1 - \exp[-\lambda_2 \mu_{d1} - \frac{P_1 P_2 \rho}{\lambda_1} (1 - \frac{a_1}{2a_2})]$ <p>iii) 上記以外</p> $1 - \exp[-\lambda_2 \mu_{d1} - \frac{P_1 P_2 \rho}{\lambda_1} \{ (1 - \frac{a_1}{a_2}) + \frac{1}{4} (\frac{1}{a_2} + \frac{2a_2 - \mu_{d1}}{2a_1 a_2}) (\mu_{d1} - 2a_2 + 2a_1) \}]$

ただし,

$\mu_{d1}$  : 荷重1の平均継続時間

$\lambda_k$  : 荷重kの平均発生率

$a_k$  : 荷重kにおける遅れ時間 $T_k$ の期待値

$\sigma_k$  : 荷重kにおける遅れ時間 $T_k$ の標準偏差

$P_k$  : parent point process が発生した時これに従属して荷重k  
が発生する確率

$\rho$  : parent point process の発生率

$\Phi(\cdot)$  : 標準正規確率分布関数

付録4.1 1 自由度弾塑性構造物の定常応答モーメント方程式

(4.18)~(4.23) 式において左辺を 0 とし, 更に (4.24) 式を利用することにより  
以下の6個のモーメント方程式が得られる。

$$0 = 2E[X_1 X_2] \quad (\text{付4.1})$$

$$0 = -4\xi\omega_0 E[X_1^2] - 2\alpha\omega_0^2 E[X_1 X_2] - 2(1-\alpha)\omega_0^2 E[X_2 X_3] + 2\pi(S_{ox} + S_{of}) \quad (\text{付4.2})$$

$$0 = 2AE[X_2 X_3] - \frac{8\beta\sigma_{x_2}}{3\sqrt{2\pi}} E[X_1^2] - \frac{16\beta}{3\sqrt{2\pi}\sigma_{x_2}} \{E[X_2 X_3]\}^2 - \frac{8\gamma\sigma_{x_3}}{\sqrt{2\pi}} E[X_2 X_3] \quad (\text{付4.3})$$

$$0 = E[X_1^2] - \alpha\omega_0^2 E[X_1^2] - 2\xi\omega_0 E[X_1 X_2] - (1-\alpha)\omega_0^2 E[X_1 X_3] \quad (\text{付4.4})$$

$$0 = AE[X_1^2] - (1-\alpha)\omega_0^2 E[X_1^2] - \alpha\omega_0^2 E[X_1 X_3] - 2\xi\omega_0 E[X_2 X_3] \\ - \frac{4\beta\sigma_{x_2}}{\sqrt{2\pi}} E[X_2 X_3] - \frac{4\gamma\sigma_{x_3}}{3\sqrt{2\pi}} E[X_1^2] - \frac{8\gamma}{3\sqrt{2\pi}\sigma_{x_3}} \{E[X_2 X_3]\}^2 \quad (\text{付4.5})$$

$$0 = AE[X_1 X_2] + E[X_2 X_3] - \frac{8\beta}{3\sqrt{2\pi}\sigma_{x_2}} E[X_1 X_2] E[X_2 X_3] - \frac{4\beta\sigma_{x_2}}{3\sqrt{2\pi}} E[X_1 X_3] \\ - \frac{4\gamma\sigma_{x_3}}{3\sqrt{2\pi}} E[X_1 X_2] - \frac{8\gamma}{3\sqrt{2\pi}\sigma_{x_3}} E[X_1 X_3] E[X_2 X_3] \quad (\text{付4.6})$$

付録4.2 3自由度弾塑性構造物の定常応答モーメント方程式

$N=3$ として、左辺を0とした(4.56)～(4.64)式に代入し、更に(4.65)式を利用することにより以下の45個のモーメント方程式が得られる。

$$0 = E[X_1 X_4] \quad (\text{付4.7})$$

$$0 = E[X_2 X_5] \quad (\text{付4.8})$$

$$0 = E[X_3 X_6] \quad (\text{付4.9})$$

$$0 = E[X_7 X_4] + E[X_1 X_5] \quad (\text{付4.10})$$

$$0 = E[X_3 X_4] + E[X_1 X_6] \quad (\text{付4.11})$$

$$0 = E[X_3 X_5] + E[X_2 X_6] \quad (\text{付4.12})$$

$$\begin{aligned} 0 = & -4\xi_1 w_1 E[X_1^2] + 4\rho_2 \xi_2 w_2 E[X_4 X_5] - 4\rho_2 \xi_2 w_2 E[X_1^2] - 2\sigma_1 w_1^2 E[X_1 X_4] + 2\sigma_2 \rho_2 w_2^2 E[X_2 X_4] \\ & - 2\sigma_2 \rho_2 w_2^2 E[X_1 X_4] - 2(1 - \sigma_1) w_1^2 E[X_4 X_7] + 2(1 - \sigma_2) \rho_2 w_2^2 E[X_4 X_8] + 2\pi(\text{Sog} + \text{Sof} b_1^2) \end{aligned} \quad (\text{付4.13})$$

$$\begin{aligned} 0 = & -4\xi_2 w_2 E[X_5^2] + 4\xi_2 w_2 E[X_4 X_5] + 4\rho_3 \xi_3 w_3 E[X_5 X_6] - 4\rho_3 \xi_3 w_3 E[X_5^2] - 2\sigma_2 w_2^2 E[X_2 X_5] \\ & + 2\sigma_2 w_2^2 E[X_1 X_5] + 2\sigma_3 \rho_3 w_3^2 E[X_3 X_5] - 2\sigma_3 \rho_3 w_3^2 E[X_2 X_5] - 2(1 - \sigma_2) w_2^2 E[X_5 X_8] \\ & + 2(1 - \sigma_3) \rho_3 w_3^2 E[X_5 X_9] + 2\pi(\text{Sog} + \text{Sof} b_2^2) \end{aligned} \quad (\text{付4.14})$$

$$\begin{aligned} 0 = & -4\xi_3 w_3 E[X_6^2] + 4\xi_3 w_3 E[X_5 X_6] - 2\sigma_3 w_3^2 E[X_3 X_6] + 2\sigma_3 w_3^2 E[X_2 X_6] - 2(1 - \sigma_3) w_3^2 E[X_6 X_9] \\ & + 2\pi(\text{Sog} + \text{Sof} b_3^2) \end{aligned} \quad (\text{付4.15})$$

$$\begin{aligned} 0 = & -2\xi_1 w_1 E[X_4 X_5] - 2\xi_2 w_2 E[X_4 X_5] + 2\xi_2 w_2 E[X_1^2] + 2\rho_2 \xi_2 w_2 E[X_5^2] + 2\rho_3 \xi_3 w_3 E[X_4 X_6] \\ & - 2\rho_2 \xi_2 w_2 E[X_4 X_5] - 2\rho_3 \xi_3 w_3 E[X_4 X_5] - \sigma_1 w_1^2 E[X_1 X_5] - \sigma_2 w_2^2 E[X_2 X_4] + \sigma_2 w_2^2 E[X_1 X_4] \\ & + \sigma_2 \rho_2 w_2^2 E[X_2 X_5] - \sigma_2 \rho_2 w_2^2 E[X_1 X_5] + \sigma_3 \rho_3 w_3^2 E[X_2 X_4] - \sigma_3 \rho_3 w_3^2 E[X_2 X_5] \\ & - (1 - \sigma_1) w_1^2 E[X_5 X_7] - (1 - \sigma_2) w_2^2 E[X_4 X_8] + (1 - \sigma_2) \rho_2 w_2^2 E[X_5 X_8] \\ & + (1 - \sigma_3) \rho_3 w_3^2 E[X_4 X_9] + 2\pi \text{Sog} \end{aligned} \quad (\text{付4.16})$$

$$\begin{aligned}
0 = & -2\xi_1\omega_1E[X_4X_6] - 2\xi_3\omega_2E[X_4X_6] + 2\xi_3\omega_3E[X_4X_5] + 2\rho_2\xi_2\omega_2E[X_5X_6] - 2\rho_2\xi_2\omega_2E[X_4X_6] \\
& - \sigma_1\omega_1^2E[X_1X_6] - \sigma_3\omega_2^2E[X_3X_4] + \sigma_3\omega_3^2E[X_2X_4] + \sigma_2\rho_2\omega_2^2E[X_2X_6] - \sigma_2\rho_2\omega_2^2E[X_1X_6] \\
& - (1-\sigma_1)\omega_1^2E[X_6X_7] - (1-\sigma_3)\omega_2^2E[X_4X_9] + (1-\sigma_2)\rho_2\omega_2^2E[X_6X_8] + 2\pi\text{Sog} \quad (\text{付4.17})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & -2\xi_2\omega_2E[X_5X_6] - 2\xi_3\omega_2E[X_5X_6] + 2\xi_2\omega_2E[X_4X_6] + 2\xi_3\omega_3E[X_5^2] + 2\rho_3\xi_3\omega_3E[X_6^2] \\
& - 2\rho_3\xi_3\omega_3E[X_5X_6] - \sigma_2\omega_2^2E[X_2X_6] + \sigma_2\omega_3^2E[X_1X_6] - \sigma_3\omega_3^2E[X_2X_5] + \sigma_3\omega_3^2E[X_2X_5] \\
& + \sigma_3\rho_3\omega_3^2E[X_3X_6] - \sigma_3\rho_3\omega_3^2E[X_2X_6] - (1-\sigma_2)\omega_2^2E[X_6X_8] - (1-\sigma_3)\omega_3^2E[X_5X_9] \\
& + (1-\sigma_3)\rho_3\omega_3^2E[X_6X_9] + 2\pi\text{Sog} \quad (\text{付4.18})
\end{aligned}$$

$$0 = 2A_1E[X_4X_7] - 2B_1a_{11}E[X_4^2]E[X_5^2] - 4B_1a_{11}E[X_4X_7]i^2 - 6\gamma_1a_{21}E[X_4X_7]E[X_5^2] \quad (\text{付4.19})$$

$$\begin{aligned}
0 = & 2A_2E[X_5X_6] - 2A_2E[X_4X_6] - 2B_2a_{12}E[X_6^2]E[X_6^2] - 4B_2a_{12}E[X_5X_9]i^2 \\
& + 4B_2a_{12}E[X_4X_5]E[X_6^2] + 8B_2a_{12}E[X_4X_6]E[X_5X_6] - 2B_2a_{12}E[X_4^2]E[X_6^2] \\
& - 4B_2a_{12}E[X_4X_6]i^2 - 6\gamma_2a_{22}E[X_5X_6]E[X_6^2] + 6\gamma_2a_{22}E[X_4X_6]E[X_6^2] \quad (\text{付4.20})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & 2A_3E[X_6X_9] - 2A_3E[X_5X_9] - 2B_3a_{13}E[X_6^2]E[X_6^2] - 4B_3a_{13}E[X_6X_9]i^2 \\
& + 4B_3a_{13}E[X_5X_6]E[X_6^2] + 8B_3a_{13}E[X_5X_9]E[X_6X_9] - 2B_3a_{13}E[X_6^2]E[X_6^2] \\
& - 4B_3a_{13}E[X_5X_9]i^2 - 6\gamma_3a_{23}E[X_6X_9]E[X_6^2] + 6\gamma_3a_{23}E[X_5X_9]E[X_6^2] \quad (\text{付4.21})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & A_1E[X_4X_8] + A_2E[X_5X_7] - A_2E[X_4X_7] - B_1a_{11}E[X_7X_8]E[X_4^2] - 2B_1a_{11}E[X_4X_7]E[X_4X_8] \\
& - B_2a_{12}E[X_7X_8]E[X_5^2] - 2B_2a_{12}E[X_5X_7]E[X_5X_8] + 2B_2a_{12}E[X_4X_5]E[X_7X_8] \\
& + 2B_2a_{12}E[X_4X_7]E[X_5X_6] + 2B_2a_{12}E[X_4X_8]E[X_5X_7] - B_2a_{12}E[X_7X_8]E[X_4^2] \\
& - 2B_2a_{12}E[X_4X_7]E[X_4X_8] - \gamma_1a_{21}E[X_4X_8]E[X_5^2] - 2\gamma_1a_{21}E[X_4X_7]E[X_7X_8] \\
& - \gamma_2a_{22}E[X_5X_7]E[X_6^2] - 2\gamma_2a_{22}E[X_5X_8]E[X_7X_8] + \gamma_2a_{22}E[X_4X_7]E[X_6^2] \\
& + 2\gamma_2a_{22}E[X_4X_8]E[X_7X_8] \quad (\text{付4.22})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & A_1E[X_4X_9] + A_2E[X_6X_7] - A_2E[X_5X_7] - B_1a_{11}E[X_7X_9]E[X_4^2] - 2B_1a_{11}E[X_4X_7]E[X_4X_9] \\
& - B_2a_{12}E[X_7X_9]E[X_6^2] - 2B_2a_{12}E[X_6X_7]E[X_6X_9] + 2B_2a_{12}E[X_5X_6]E[X_7X_9] \\
& + 2B_2a_{12}E[X_5X_7]E[X_6X_9] + 2B_2a_{12}E[X_5X_9]E[X_6X_7] - B_2a_{12}E[X_7X_9]E[X_5^2] \\
& - 2B_2a_{12}E[X_5X_7]E[X_5X_9] - \gamma_1a_{21}E[X_4X_9]E[X_5^2] - 2\gamma_1a_{21}E[X_4X_7]E[X_7X_9] \\
& - \gamma_2a_{22}E[X_6X_7]E[X_6^2] - 2\gamma_2a_{22}E[X_6X_9]E[X_7X_9] + \gamma_2a_{22}E[X_5X_7]E[X_6^2] \\
& + 2\gamma_2a_{22}E[X_5X_9]E[X_7X_9] \quad (\text{付4.23})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & A_2 E[X_5 X_9] - A_2 E[X_4 X_9] + A_3 E[X_6 X_9] - A_3 E[X_5 X_9] - \beta_{2012} E[X_8 X_9] E[X_5^2] \\
& - 2\beta_{2012} E[X_5 X_8] E[X_5 X_9] + 2\beta_{2012} E[X_4 X_5] E[X_8 X_9] + 2\beta_{2012} E[X_4 X_8] E[X_5 X_9] \\
& + 2\beta_{2012} E[X_4 X_9] E[X_5 X_8] - \beta_{2012} E[X_8 X_9] E[X_4^2] - 2\beta_{2012} E[X_4 X_8] E[X_4 X_9] \\
& - \beta_{3013} E[X_8 X_9] E[X_6^2] - 2\beta_{3013} E[X_6 X_8] E[X_6 X_9] + 2\beta_{3013} E[X_5 X_6] E[X_8 X_9] \\
& + 2\beta_{3013} E[X_5 X_8] E[X_6 X_9] + 2\beta_{3013} E[X_5 X_9] E[X_6 X_8] - \beta_{3013} E[X_8 X_9] E[X_5^2] \\
& - 2\beta_{3013} E[X_5 X_8] E[X_5 X_9] - 7\gamma_{2022} E[X_5 X_9] E[X_6^2] - 2\gamma_{2022} E[X_5 X_8] E[X_6 X_9] \\
& + 7\gamma_{2022} E[X_4 X_9] E[X_6^2] + 2\gamma_{2022} E[X_4 X_8] E[X_8 X_9] - 7\gamma_{2022} E[X_6 X_8] E[X_6^2] \\
& - 2\gamma_{2022} E[X_6 X_9] E[X_8 X_9] + 7\gamma_{2022} E[X_5 X_8] E[X_6^2] + 2\gamma_{2022} E[X_5 X_9] E[X_8 X_9] \quad (\text{付4.24})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & E[X_4^2] - 2\xi_1 \omega_1 E[X_1 X_4] + 2\rho_2 \xi_2 \omega_2 E[X_1 X_5] - 2\rho_2 \xi_2 \omega_2 E[X_1 X_4] - \sigma_1 \omega_1^2 E[X_1^2] \\
& + \sigma_2 \rho_2 \omega_2^2 E[X_1 X_2] - \sigma_2 \rho_2 \omega_2^2 E[X_1^2] - (1 - \sigma_1) \omega_1^2 E[X_1 X_7] + (1 - \sigma_2) \rho_2 \omega_2^2 E[X_1 X_8] \quad (\text{付4.25})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & E[X_4 X_5] - 2\xi_2 \omega_2 E[X_1 X_5] + 2\xi_2 \omega_2 E[X_1 X_4] + 2\rho_3 \xi_3 \omega_3 E[X_1 X_6] - 2\rho_3 \xi_3 \omega_3 E[X_1 X_5] \\
& - \sigma_2 \omega_2^2 E[X_1 X_2] + \sigma_2 \omega_2^2 E[X_1^2] + \sigma_3 \rho_3 \omega_3^2 E[X_1 X_3] - \sigma_3 \rho_3 \omega_3^2 E[X_1 X_2] - (1 - \sigma_2) \omega_2^2 E[X_1 X_8] \\
& + (1 - \sigma_3) \rho_3 \omega_3^2 E[X_1 X_9] \quad (\text{付4.26})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & E[X_4 X_6] - 2\xi_3 \omega_3 E[X_1 X_6] + 2\xi_3 \omega_3 E[X_1 X_5] - \sigma_3 \omega_3^2 E[X_1 X_3] + \sigma_3 \omega_3^2 E[X_1 X_2] \\
& - (1 - \sigma_3) \omega_3^2 E[X_1 X_9] \quad (\text{付4.27})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & E[X_5 X_4] - 2\xi_1 \omega_1 E[X_2 X_4] + 2\rho_2 \xi_2 \omega_2 E[X_2 X_5] - 2\rho_2 \xi_2 \omega_2 E[X_2 X_4] - \sigma_1 \omega_1^2 E[X_2 X_1] \\
& + \sigma_2 \rho_2 \omega_2^2 E[X_2^2] - \sigma_2 \rho_2 \omega_2^2 E[X_2 X_1] - (1 - \sigma_1) \omega_1^2 E[X_2 X_7] + (1 - \sigma_2) \rho_2 \omega_2^2 E[X_2 X_8] \quad (\text{付4.28})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & E[X_5^2] - 2\xi_2 \omega_2 E[X_2 X_5] + 2\xi_2 \omega_2 E[X_2 X_4] + 2\rho_3 \xi_3 \omega_3 E[X_2 X_6] - 2\rho_3 \xi_3 \omega_3 E[X_2 X_5] - \sigma_2 \omega_2^2 E[X_2^2] \\
& + \sigma_2 \omega_2^2 E[X_2 X_1] + \sigma_3 \rho_3 \omega_3^2 E[X_2 X_3] - \sigma_3 \rho_3 \omega_3^2 E[X_2^2] - (1 - \sigma_2) \omega_2^2 E[X_2 X_8] \\
& + (1 - \sigma_3) \rho_3 \omega_3^2 E[X_2 X_9] \quad (\text{付4.29})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & E[X_5 X_6] - 2\xi_3 \omega_3 E[X_2 X_6] + 2\xi_3 \omega_3 E[X_2 X_5] - \sigma_3 \omega_3^2 E[X_2 X_3] + \sigma_3 \omega_3^2 E[X_2^2] - (1 - \sigma_2) \omega_2^2 E[X_2 X_8] \\
& + (1 - \sigma_3) \rho_3 \omega_3^2 E[X_2 X_9] \quad (\text{付4.30})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & E[X_6 X_4] - 2\xi_1 \omega_1 E[X_3 X_4] + 2\rho_2 \xi_2 \omega_2 E[X_3 X_5] - 2\rho_2 \xi_2 \omega_2 E[X_3 X_4] - \sigma_1 \omega_1^2 E[X_3 X_1] \\
& + \sigma_2 \rho_2 \omega_2^2 E[X_3 X_2] - \sigma_2 \rho_2 \omega_2^2 E[X_3 X_1] - (1 - \sigma_1) \omega_1^2 E[X_3 X_7] + (1 - \sigma_2) \rho_2 \omega_2^2 E[X_3 X_8] \quad (\text{付4.31})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & E[X_6 X_5] - 2\xi_2 \omega_2 E[X_3 X_5] + 2\xi_2 \omega_2 E[X_3 X_4] + 2\rho_3 \xi_3 \omega_3 E[X_3 X_6] - 2\rho_3 \xi_3 \omega_3 E[X_3 X_5] \\
& - \sigma_2 \omega_2^2 E[X_3 X_2] + \sigma_2 \omega_2^2 E[X_3 X_1] + \sigma_3 \rho_3 \omega_3^2 E[X_3^2] - \sigma_3 \rho_3 \omega_3^2 E[X_3 X_2] - (1 - \sigma_2) \omega_2^2 E[X_3 X_8] \\
& + (1 - \sigma_3) \rho_3 \omega_3^2 E[X_3 X_9] \quad (\text{付4.32})
\end{aligned}$$



$$0 = E[X_6^2] - 2\xi_3\omega_3 E[X_3X_6] + 2\xi_3\omega_3 E[X_3X_5] - \sigma_3\omega_3^2 E[X_3^2] + \sigma_3\omega_3^2 E[X_3X_2] - (1-\sigma_3)\omega_3^2 E[X_3X_9] \quad (\text{付4.33})$$

$$\begin{aligned} 0 = & -2\xi_1\omega_1 E[X_4X_7] + 2\rho_2\xi_2\omega_2 E[X_5X_7] - 2\rho_2\xi_2\omega_2 E[X_4X_7] - \sigma_1\omega_1^2 E[X_1X_7] + \sigma_2\rho_2\omega_2^2 E[X_2X_7] \\ & - \sigma_2\rho_2\omega_2^2 E[X_1X_7] - (1-\sigma_1)\omega_1^2 E[X_7^2] + (1-\sigma_2)\rho_2\omega_2^2 E[X_7X_8] + A_1 E[X_7^2] \\ & - 3\beta_1\alpha_{11} E[X_4X_7] E[X_7^2] - \gamma_1\alpha_{21} E[X_4^2] E[X_7^2] - 2\gamma_1\alpha_{21} E[X_4X_7]^2 \end{aligned} \quad (\text{付4.34})$$

$$\begin{aligned} 0 = & -2\xi_1\omega_1 E[X_4X_8] + 2\rho_2\xi_2\omega_2 E[X_5X_8] - 2\rho_2\xi_2\omega_2 E[X_4X_8] - \sigma_1\omega_1^2 E[X_1X_8] + \sigma_2\rho_2\omega_2^2 E[X_2X_8] \\ & - \sigma_2\rho_2\omega_2^2 E[X_1X_8] - (1-\sigma_1)\omega_1^2 E[X_7X_8] + (1-\sigma_2)\rho_2\omega_2^2 E[X_8^2] + A_2 E[X_4X_5] - A_2 E[X_4^2] \\ & - \beta_2\alpha_{12} E[X_4X_8] E[X_5^2] - 2\beta_2\alpha_{12} E[X_4X_5] E[X_5X_8] + 2\beta_2\alpha_{12} E[X_5X_8] E[X_4^2] \\ & + 4\beta_2\alpha_{12} E[X_4X_5] E[X_4X_8] - 3\beta_2\alpha_{12} E[X_4X_8] E[X_4^2] - \gamma_2\alpha_{22} E[X_4X_5] E[X_8^2] \\ & - 2\gamma_2\alpha_{22} E[X_4X_8] E[X_5X_8] + \gamma_2\alpha_{22} E[X_4^2] E[X_8^2] + 2\gamma_2\alpha_{22} E[X_4X_8]^2 \end{aligned} \quad (\text{付4.35})$$

$$\begin{aligned} 0 = & -2\xi_1\omega_1 E[X_4X_9] + 2\rho_2\xi_2\omega_2 E[X_5X_9] - 2\rho_2\xi_2\omega_2 E[X_4X_9] - \sigma_1\omega_1^2 E[X_1X_9] + \sigma_2\rho_2\omega_2^2 E[X_2X_9] \\ & - \sigma_2\rho_2\omega_2^2 E[X_1X_9] - (1-\sigma_1)\omega_1^2 E[X_7X_9] + (1-\sigma_2)\rho_2\omega_2^2 E[X_8X_9] + A_3 E[X_4X_5] - A_3 E[X_4X_5] \\ & - \beta_3\alpha_{13} E[X_4X_9] E[X_5^2] - 2\beta_3\alpha_{13} E[X_4X_5] E[X_5X_9] + 2\beta_3\alpha_{13} E[X_4X_5] E[X_5X_9] \\ & + 2\beta_3\alpha_{13} E[X_4X_5] E[X_5X_9] + 2\beta_3\alpha_{13} E[X_4X_9] E[X_5X_6] - \beta_3\alpha_{13} E[X_4X_9] E[X_5^2] \\ & - 2\beta_3\alpha_{13} E[X_4X_5] E[X_5X_9] - \gamma_3\alpha_{23} E[X_4X_5] E[X_5^2] - 2\gamma_3\alpha_{23} E[X_4X_9] E[X_5X_9] \\ & + \gamma_3\alpha_{23} E[X_4X_5] E[X_5^2] + 2\gamma_3\alpha_{23} E[X_4X_9] E[X_5X_9] \end{aligned} \quad (\text{付4.36})$$

$$\begin{aligned} 0 = & -2\xi_2\omega_2 E[X_5X_7] + 2\xi_2\omega_2 E[X_4X_7] + 2\rho_3\xi_3\omega_3 E[X_6X_7] - 2\rho_3\xi_3\omega_3 E[X_5X_7] - \sigma_2\omega_2^2 E[X_2X_7] \\ & + \sigma_2\omega_2^2 E[X_1X_7] + \sigma_3\rho_3\omega_3^2 E[X_3X_7] - \sigma_3\rho_3\omega_3^2 E[X_2X_7] - (1-\sigma_2)\omega_2^2 E[X_7X_8] \\ & + (1-\sigma_3)\rho_3\omega_3^2 E[X_7X_9] + A_1 E[X_4X_5] - \beta_1\alpha_{11} E[X_5X_7] E[X_4^2] - 2\beta_1\alpha_{11} E[X_4X_5] E[X_4X_7] \\ & - \gamma_1\alpha_{21} E[X_4X_5] E[X_7^2] - 2\gamma_1\alpha_{21} E[X_4X_7] E[X_5X_7] \end{aligned} \quad (\text{付4.37})$$

$$\begin{aligned} 0 = & -2\xi_2\omega_2 E[X_5X_8] + 2\xi_2\omega_2 E[X_4X_8] + 2\rho_3\xi_3\omega_3 E[X_6X_8] - 2\rho_3\xi_3\omega_3 E[X_5X_8] - \sigma_2\omega_2^2 E[X_2X_8] \\ & + \sigma_2\omega_2^2 E[X_1X_8] + \sigma_3\rho_3\omega_3^2 E[X_3X_8] - \sigma_3\rho_3\omega_3^2 E[X_2X_8] - (1-\sigma_2)\omega_2^2 E[X_8^2] \\ & + (1-\sigma_3)\rho_3\omega_3^2 E[X_8X_9] + A_2 E[X_5^2] - A_2 E[X_4X_5] - 3\beta_2\alpha_{12} E[X_5X_8] E[X_5^2] \\ & + 2\beta_2\alpha_{12} E[X_4X_8] E[X_5^2] + 4\beta_2\alpha_{12} E[X_4X_5] E[X_5X_8] - \beta_2\alpha_{12} E[X_5X_8] E[X_4^2] \\ & - 2\beta_2\alpha_{12} E[X_4X_5] E[X_4X_8] - \gamma_2\alpha_{22} E[X_5^2] E[X_8^2] - 2\gamma_2\alpha_{22} E[X_5X_8]^2 \\ & + \gamma_2\alpha_{22} E[X_4X_5] E[X_8^2] + 2\gamma_2\alpha_{22} E[X_4X_8] E[X_5X_8] \end{aligned} \quad (\text{付4.38})$$

$$\begin{aligned}
0 = & -2\xi_2\omega_2E[X_5X_9] + 2\xi_2\omega_2E[X_4X_9] + 2\sigma_2\xi_2\omega_2E[X_6X_9] - 2\sigma_2\xi_2\omega_2E[X_5X_9] - \sigma_2\omega_2^2E[X_2X_9] \\
& + \sigma_2\omega_2^2E[X_1X_9] + \sigma_2\sigma_2\omega_2^2E[X_3X_9] - \sigma_2\sigma_2\omega_2^2E[X_2X_9] - (1-\sigma_2)\omega_2^2E[X_6X_9] \\
& + (1-\sigma_2)\sigma_2\omega_2^2E[X_5^2] + A_2E[X_5X_6] - A_2E[X_5^2] - \beta_2\sigma_{1,2}E[X_5X_9]E[X_6^2] \\
& - 2\beta_2\sigma_{1,2}E[X_5X_6]E[X_6X_9] + 2\beta_2\sigma_{1,2}E[X_6X_9]E[X_5^2] + 4\beta_2\sigma_{1,2}E[X_5X_6]E[X_5X_9] \\
& - 3\beta_2\sigma_{1,2}E[X_5X_9]E[X_5^2] - 7\sigma_{2,2,2}E[X_5X_6]E[X_5^2] - 27\sigma_{2,2,2}E[X_5X_9]E[X_6X_9] \\
& + 7\sigma_{2,2,2}E[X_5^2]E[X_6^2] + 27\sigma_{2,2,2}E[X_5X_9]^2
\end{aligned} \quad (付4.39)$$

$$\begin{aligned}
0 = & -2\xi_3\omega_3E[X_6X_7] + 2\xi_3\omega_3E[X_5X_7] - \sigma_3\omega_3^2E[X_3X_7] + \sigma_3\omega_3^2E[X_2X_7] - (1-\sigma_3)\omega_3^2E[X_7X_9] \\
& + A_1E[X_4X_6] - \beta_{1,1}E[X_6X_7]E[X_4^2] - 2\beta_{1,1}E[X_4X_6]E[X_4X_7] - 7\sigma_{1,2,1}E[X_4X_6]E[X_7^2] \\
& - 27\sigma_{1,2,1}E[X_4X_7]E[X_6X_7]
\end{aligned} \quad (付4.40)$$

$$\begin{aligned}
0 = & -2\xi_3\omega_3E[X_6X_8] + 2\xi_3\omega_3E[X_5X_8] - \sigma_3\omega_3^2E[X_2X_8] + \sigma_3\omega_3^2E[X_2X_8] - (1-\sigma_3)\omega_3^2E[X_8X_9] \\
& + A_2E[X_5X_6] - A_2E[X_4X_6] - \beta_{2,1,2}E[X_6X_8]E[X_5^2] - 2\beta_{2,1,2}E[X_5X_6]E[X_3X_8] \\
& + 2\beta_{2,1,2}E[X_4X_6]E[X_6X_8] + 2\beta_{2,1,2}E[X_4X_6]E[X_5X_8] + 2\beta_{2,1,2}E[X_4X_6]E[X_5X_6] \\
& - \beta_{2,1,2}E[X_6X_8]E[X_4^2] - 2\beta_{2,1,2}E[X_4X_6]E[X_4X_8] - 7\sigma_{2,2,2}E[X_5X_6]E[X_5^2] \\
& - 27\sigma_{2,2,2}E[X_5X_8]E[X_6X_8] + 7\sigma_{2,2,2}E[X_4X_6]E[X_6^2] + 27\sigma_{2,2,2}E[X_4X_8]E[X_6X_8]
\end{aligned} \quad (付4.41)$$

$$\begin{aligned}
0 = & -2\xi_3\omega_3E[X_6X_9] + 2\xi_3\omega_3E[X_5X_9] - \sigma_3\omega_3^2E[X_3X_9] + \sigma_3\omega_3^2E[X_2X_9] - (1-\sigma_3)\omega_3^2E[X_9^2] \\
& + A_2E[X_6^2] - A_2E[X_5X_6] - 3\beta_{2,1,2}E[X_6X_9]E[X_6^2] + 2\beta_{2,1,2}E[X_5X_9]E[X_6^2] \\
& + 4\beta_{2,1,2}E[X_5X_6]E[X_6X_9] - \beta_{2,1,2}E[X_6X_9]E[X_5^2] - 2\beta_{2,1,2}E[X_5X_6]E[X_5X_9] \\
& - 7\sigma_{2,2,2}E[X_6^2]E[X_9^2] - 27\sigma_{2,2,2}E[X_6X_9]^2 + 7\sigma_{2,2,2}E[X_5X_6]E[X_9^2] + 27\sigma_{2,2,2}E[X_5X_9]E[X_6X_9]
\end{aligned} \quad (付4.42)$$

$$\begin{aligned}
0 = & E[X_4X_7] + A_1E[X_1X_4] - \beta_{1,1,1}E[X_1X_7]E[X_4^2] - 2\beta_{1,1,1}E[X_1X_4]E[X_4X_7] \\
& - 7\sigma_{1,2,1}E[X_1X_4]E[X_7^2] - 27\sigma_{1,2,1}E[X_1X_7]E[X_4X_7]
\end{aligned} \quad (付4.43)$$

$$\begin{aligned}
0 = & E[X_4X_8] + A_2E[X_1X_5] - A_2E[X_1X_4] - \beta_{2,1,2}E[X_1X_8]E[X_5^2] - 2\beta_{2,1,2}E[X_1X_5]E[X_5X_8] \\
& + 2\beta_{2,1,2}E[X_1X_4]E[X_5X_8] + 2\beta_{2,1,2}E[X_1X_5]E[X_4X_8] + 2\beta_{2,1,2}E[X_1X_8]E[X_4X_5] \\
& - \beta_{2,1,2}E[X_1X_8]E[X_4^2] - 2\beta_{2,1,2}E[X_1X_4]E[X_4X_8] - 7\sigma_{2,2,2}E[X_1X_5]E[X_5^2] \\
& - 27\sigma_{2,2,2}E[X_1X_8]E[X_5X_8] + 7\sigma_{2,2,2}E[X_1X_4]E[X_5^2] + 27\sigma_{2,2,2}E[X_1X_8]E[X_4X_8]
\end{aligned} \quad (付4.44)$$

$$\begin{aligned}
0 = & E[X_4X_9] + A_2E[X_1X_6] - A_2E[X_1X_5] - \beta_{2,1,2}E[X_1X_9]E[X_6^2] - 2\beta_{2,1,2}E[X_1X_6]E[X_6X_9] \\
& + 2\beta_{2,1,2}E[X_1X_5]E[X_6X_9] + 2\beta_{2,1,2}E[X_1X_6]E[X_5X_9] + 2\beta_{2,1,2}E[X_1X_9]E[X_5X_6] \\
& - \beta_{2,1,2}E[X_1X_9]E[X_5^2] - 2\beta_{2,1,2}E[X_1X_5]E[X_5X_9] - 7\sigma_{2,2,2}E[X_1X_6]E[X_9^2] \\
& - 27\sigma_{2,2,2}E[X_1X_9]E[X_6X_9] + 7\sigma_{2,2,2}E[X_1X_5]E[X_9^2] + 27\sigma_{2,2,2}E[X_1X_9]E[X_5X_9]
\end{aligned} \quad (付4.45)$$

$$\begin{aligned}
0 = & E[X_5 X_7] + A_1 E[X_2 X_4] - \beta_{1011} E[X_2 X_7] E[X_4^2] - 2\beta_{1011} E[X_2 X_4] E[X_4 X_7] \\
& - \gamma_{1021} E[X_2 X_4] E[X_7^2] - 2\gamma_{1021} E[X_2 X_7] E[X_4 X_7] \quad (\text{付4.46})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & E[X_5 X_8] + A_2 E[X_2 X_5] - A_2 E[X_2 X_4] - \beta_{2012} E[X_2 X_8] E[X_5^2] - 2\beta_{2012} E[X_2 X_5] E[X_5 X_8] \\
& + 2\beta_{2012} E[X_2 X_4] E[X_5 X_8] + 2\beta_{2012} E[X_2 X_5] E[X_4 X_8] + 2\beta_{2012} E[X_2 X_8] E[X_4 X_5] \\
& - \beta_{2012} E[X_2 X_8] E[X_4^2] - 2\beta_{2012} E[X_2 X_4] E[X_4 X_8] - \gamma_{2022} E[X_2 X_5] E[X_8^2] \\
& - 2\gamma_{2022} E[X_2 X_8] E[X_5 X_8] + \gamma_{2022} E[X_2 X_4] E[X_8^2] + 2\gamma_{2022} E[X_2 X_8] E[X_4 X_8] \quad (\text{付4.47})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & E[X_5 X_9] + A_3 E[X_2 X_6] - A_3 E[X_2 X_5] - \beta_{3013} E[X_2 X_9] E[X_6^2] - 2\beta_{3013} E[X_2 X_6] E[X_6 X_9] \\
& + 2\beta_{3013} E[X_2 X_5] E[X_6 X_9] + 2\beta_{3013} E[X_2 X_6] E[X_5 X_9] + 2\beta_{3013} E[X_2 X_9] E[X_5 X_6] \\
& - \beta_{3013} E[X_2 X_9] E[X_6^2] - 2\beta_{3013} E[X_2 X_5] E[X_5 X_9] - \gamma_{3023} E[X_2 X_6] E[X_9^2] \\
& - 2\gamma_{3023} E[X_2 X_9] E[X_6 X_9] + \gamma_{3023} E[X_2 X_5] E[X_9^2] + 2\gamma_{3023} E[X_2 X_9] E[X_5 X_9] \quad (\text{付4.48})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & E[X_6 X_7] + A_1 E[X_2 X_4] - \beta_{1011} E[X_2 X_7] E[X_4^2] - 2\beta_{1011} E[X_2 X_4] E[X_4 X_7] \\
& - \gamma_{1021} E[X_2 X_4] E[X_7^2] - 2\gamma_{1021} E[X_2 X_7] E[X_4 X_7] \quad (\text{付4.49})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & E[X_6 X_8] + A_2 E[X_2 X_5] - A_2 E[X_2 X_4] - \beta_{2012} E[X_2 X_8] E[X_5^2] - 2\beta_{2012} E[X_2 X_5] E[X_5 X_8] \\
& + 2\beta_{2012} E[X_2 X_4] E[X_5 X_8] + 2\beta_{2012} E[X_2 X_5] E[X_4 X_8] + 2\beta_{2012} E[X_2 X_8] E[X_4 X_5] \\
& - \beta_{2012} E[X_2 X_8] E[X_4^2] - 2\beta_{2012} E[X_2 X_4] E[X_4 X_8] - \gamma_{2022} E[X_2 X_5] E[X_8^2] \\
& - 2\gamma_{2022} E[X_2 X_8] E[X_5 X_8] + \gamma_{2022} E[X_2 X_4] E[X_8^2] + 2\gamma_{2022} E[X_2 X_8] E[X_4 X_8] \quad (\text{付4.50})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & E[X_6 X_9] + A_3 E[X_2 X_6] - A_3 E[X_2 X_5] - \beta_{3013} E[X_2 X_9] E[X_6^2] - 2\beta_{3013} E[X_2 X_6] E[X_6 X_9] \\
& + 2\beta_{3013} E[X_2 X_5] E[X_6 X_9] + 2\beta_{3013} E[X_2 X_6] E[X_5 X_9] + 2\beta_{3013} E[X_2 X_9] E[X_5 X_6] \\
& - \beta_{3013} E[X_2 X_9] E[X_6^2] - 2\beta_{3013} E[X_2 X_5] E[X_5 X_9] - \gamma_{3023} E[X_2 X_6] E[X_9^2] \\
& - 2\gamma_{3023} E[X_2 X_9] E[X_6 X_9] + \gamma_{3023} E[X_2 X_5] E[X_9^2] + 2\gamma_{3023} E[X_2 X_9] E[X_5 X_9] \quad (\text{付4.51})
\end{aligned}$$

付録5.1  $\mathcal{D}_{12k_j}$  の解析的表現

(i)  $\beta_j = 2m$  の時

$$\mathcal{D}_{12k_j} = \frac{I + II + III + IV + V}{(a_j)^{2m}} \quad (\text{付5.1})$$

ここで

$$\begin{aligned} I &= \frac{-Am!}{4\pi\sigma_{12k}^4\eta\beta} [e^{-BS_j^2} \sum_{r=0}^m \frac{S_j^{2(m-r)}}{(m-r)!B^r} e^{-BS_{j+1}^2} \sum_{r=0}^m \frac{S_{j+1}^{2(m-r)}}{(m-r)!B^r}] \\ II &= \frac{\kappa_{12k\dot{1}2k}(2m+1)!!}{2\sqrt{2\pi}\sigma_{12k}^5\eta^3} \left\{ \sum_{r=1}^{m+1} \frac{1}{(2C)^r(2m-2r+3)!} |S_{j+1}^{2m-2r+3} e^{-CS_{j+1}^2} \right. \\ &\quad \left. - S_j^{2m-2r+3} e^{-CS_j^2} \right\} + \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{C}(2C)^{m+1}} \{ \text{Erf}(\sqrt{2C}S_{j+1}) - \text{Erf}(\sqrt{2C}S_j) \} \\ III &= \frac{\kappa_{12k\dot{1}2k}(2m-1)!!}{2\sqrt{2\pi}\sigma_{12k}^3\eta} \left\{ \sum_{r=1}^{m+1} \frac{1}{(2C)^r(2m-2r+1)!} |S_j^{2m-2r+1} e^{-CS_j^2} \right. \\ &\quad \left. - S_{j+1}^{2m-2r+1} e^{-CS_{j+1}^2} \right\} - \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_{12k}\eta}{(2C)^m} \{ \text{Erf}(\sqrt{2C}S_{j+1}) - \text{Erf}(\sqrt{2C}S_j) \} \\ IV &= \frac{-\kappa_{12k\dot{1}2k}^2}{2\pi\sigma_{12k}^4\eta^2A} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n(n+m+1)! \left( \frac{-\kappa_{12k\dot{1}2k}}{\sqrt{2}\sigma_{12k}\eta A} \right)^{2n}}{n!(2n+1)} \right. \\ &\quad \left. \times |e^{-CS_j^2} \sum_{r=0}^{n+m+1} \frac{S_j^{2(n+m+1-r)}}{C^r(n+m+1-r)!} e^{-CS_{j+1}^2} \sum_{r=0}^{n+m+1} \frac{S_{j+1}^{2(n+m+1-r)}}{C^r(n+m+1-r)!} \right] \\ V &= \frac{\kappa_{12k\dot{1}2k}^2}{2\pi\sigma_{12k}^2A} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n(n+m)! \left( \frac{-\kappa_{12k\dot{1}2k}}{\sqrt{2}\sigma_{12k}\eta A} \right)^{2n}}{n!(2n+1)} \right. \\ &\quad \left. \times |e^{-CS_j^2} \sum_{r=0}^{n+m} \frac{S_j^{2(n+m-r)}}{C^r(n+m-r)!} e^{-CS_{j+1}^2} \sum_{r=0}^{n+m} \frac{S_{j+1}^{2(n+m-r)}}{C^r(n+m-r)!} \right] \end{aligned}$$

(i)  $\beta_j = 2m+1$  の時

$$\mathcal{D}_{12k_j} = \frac{VI + VII + VIII + IX + X}{(\sigma_j)^{2m+1}} \quad (\text{付5.2})$$

ここで

$$VI = \frac{\Lambda(2m+1)!!}{2\pi\sigma_{u_{12k}}^4\eta^2} \left[ \sum_{r=1}^{m+1} \left\{ \frac{1}{(2B)^r(2m+3-2r)!!} \{S_{j+1}^{2m+3-2r} e^{-BS_{j+1}^2} - S_j^{2m+3-2r} e^{-BS_j^2}\} \right. \right. \\ \left. \left. - S_j^{2m+3-2r} e^{-BS_j^2} \right\} + \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{B}(2B)^{m+1}} \{ \text{Erf}(\sqrt{2B} S_{j+1}) - \text{Erf}(\sqrt{2B} S_j) \} \right]$$

$$VII = \frac{-\kappa_{u_{12k}u_{12k}}(m+1)!}{4\sqrt{2\pi}\sigma_{u_{12k}}^5\eta^3C} \left[ e^{-CS_j^2} \sum_{r=0}^{m+1} \frac{S_j^{2(m+1-r)}}{(m+1-r)!C^r} - e^{-CS_{j+1}^2} \sum_{r=0}^{m+1} \frac{S_{j+1}^{2(m+1-r)}}{(m+1-r)!C^r} \right]$$

$$VIII = \frac{\kappa_{u_{12k}u_{12k}}m!}{4\sqrt{2\pi}\sigma_{u_{12k}}^3\eta C} \left[ e^{-CS_j^2} \sum_{r=0}^m \frac{S_j^{2(m-r)}}{(m-r)!C^r} - e^{-CS_{j+1}^2} \sum_{r=0}^m \frac{S_{j+1}^{2(m-r)}}{(m-r)!C^r} \right]$$

$$IX = \frac{-\kappa_{u_{12k}u_{12k}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{u_{12k}}^5\eta^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n(2n+2m+3)!! \left( \frac{-\kappa_{u_{12k}u_{12k}}}{\sqrt{2}\sigma_{u_{12k}}\eta\Lambda} \right)^{2n+1}}{n!(2n+1)} \right. \\ \left. \times \left[ \sum_{r=1}^{n+m+2} \frac{1}{(2C)^r(2n+2m+5-2r)!!} \{S_{j+1}^{2n+2m+5-2r} e^{-CS_{j+1}^2} - S_j^{2n+2m+5-2r} e^{-CS_j^2}\} \right. \right. \\ \left. \left. - S_j^{2n+2m+5-2r} e^{-CS_j^2} \right\} + \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{C}(2C)^{n+m+2}} \{ \text{Erf}(\sqrt{2C} S_{j+1}) - \text{Erf}(\sqrt{2C} S_j) \} \right]$$

$$\begin{aligned}
X &= \frac{\kappa_{u_{12k} \bar{u}_{12k}}}{\sqrt{2} \kappa \sigma_{u_{12k}}^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n (2n+2m+1)!! \left( \frac{-\kappa_{u_{12k} \bar{u}_{12k}}}{\sqrt{2} \sigma_{u_{12k}}^2} \right)^{2n+1}}{n! (2n+1)} \right. \\
&\times \left[ \sum_{r=1}^{n+m+1} \frac{1}{(2C)^r (2n+2m+3-2r)!!} \{ S_{j+1}^{2n+2m+3-2r} e^{-CS_{j+1}^2} \right. \\
&\left. \left. - S_j^{2n+2m+3-2r} e^{-CS_j^2} \} + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{C} (2C)^{n+m+1}} \{ \text{Erf}(\sqrt{2C} S_{j+1}) - \text{Erf}(\sqrt{2C} S_j) \} \right] \right]
\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{\sigma_{u_{12k}}^2 \sigma_{\bar{u}_{12k}}^2 - \kappa_{u_{12k} \bar{u}_{12k}}^2} \\
B &= \left[ \frac{1}{2\sigma_{u_{12k}}^2 \eta^2} + \frac{\kappa_{u_{12k} \bar{u}_{12k}}^2}{2\sigma_{u_{12k}}^2 \eta^2 A^2} \right] \quad , \quad C = \frac{1}{2\sigma_{u_{12k}}^2 \eta^2} \\
n!! &\begin{cases} n(n-2) \cdots 3 \cdot 1 & (n=\text{奇数}) \\ n(n-2) \cdots 4 \cdot 2 & (n=\text{偶数}) \end{cases}
\end{aligned}$$

# 付録7.1 安全係数法による構造物の損傷度評価

安全係数法とは構造物の耐力を（付7.1）式で示される様に

$$A = F \cdot A_S \quad (\text{付7.1})$$

設計地震動の最大地動加速度  $A_S$ （確定値）に係数  $F$  をかけた地動加速度耐力  $A$  で表現するものであり、耐力が  $A_S$  に対してどの程度の耐震裕度を有しているかを  $F$  で表していることからこの  $F$  を安全係数と呼んでいる。更に  $F$  は次式のように応答係数  $F_R$  と耐力係数  $F_C$  から構成される。

$$F = \frac{\text{真の耐力値}}{\text{真の応答値}} = \left( \frac{\text{設計応答値}}{\text{真の応答値}} \right) \cdot \left( \frac{\text{真の耐力値}}{\text{設計応答値}} \right) \equiv F_R \cdot F_C \quad (\text{付7.2})$$

（付7.2）式における  $F_R$  及び  $F_C$  は更に種々の不確定性要因に対応する安全係数の積として表されるが、一般に以下の様な係数で表現される場合が多い。

$$F_R = F_{SA} \cdot F_D \cdot F_{MS} \cdot F_{MF} \cdot F_{MC} \cdot F_{SS} \cdot F_{EC} \quad (\text{付7.3})$$

ここで、

$F_{SA}$  : スペクトル応答係数（＝設計応答スペクトル／真の応答スペクトル）

$F_D$  : 減衰応答係数（減衰のばらつきによる応答スペクトル値のばらつき）

$F_{MS}$  : モード形応答係数（固有振動モードの不確定性による応答のばらつき）

$F_{MF}$  : モード振動数応答係数（固有振動数の不確定性による応答のばらつき）

$F_{MC}$  : モード合成応答係数（モード合成手法の不確定性）

$F_{SS}$  : 地盤／建家相互作用応答係数（相互作用効果の考慮とそれに伴う不確定性の評価）

$F_{EC}$  : 地震波成分の合成応答係数（地震波の3方向入力効果の考慮とそれに伴う不確定性の評価）

一方,

$$F_c = F_s \cdot F_\mu \quad (\text{付7.4})$$

ここで,

$F_s$  : 強度係数 (= 真の強度 / 設計応答値 ; 使用材料強度や部材強度変換時等における不確定性の評価)

$F_\mu$  : 塑性エネルギー吸収係数 (構造物の塑性変形能力の評価)

安全係数法では通常個々の安全係数は対数正規分布とみなすことが多くこの場合には地動加速度耐力  $A$  も次式で示される。

$$A = \hat{A} \epsilon_R \epsilon_U = (\hat{F} \epsilon_R \epsilon_U) A_s \quad (\text{付7.5})$$

ただし,

$\hat{A}$  : 地動加速度耐力の中央値

$\hat{F}$  : 安全係数の中央値

$\epsilon_R$  : ランダム的な不確定性を示す確率変数。中央値は1.0, 対数標準偏差  $\beta_R$  とする。

$\epsilon_U$  : システム的な不確定性を示す確率変数。中央値は1.0, 対数標準偏差  $\beta_U$  とする。

すなわち個々の安全係数の不確定量を統合すれば  $A$  の不確定量を評価できることになる。その値は対数正規分布の特性から

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= A_s \cdot \hat{F} = A_s \cdot \prod \hat{F}_i \\ \beta_R^2 &= \sum_i \beta_{Ri}^2, \quad \beta_U^2 = \sum_i \beta_{Ui}^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{付7.6})$$

となる。

(付7.6) 式を用いて最終的な構造物の損傷確率, すなわちある地動加速度  $a$  における構造物の損傷度  $P_f$  が以下の様に求まる。

$$P_f = \Phi[\{ \ln(a/\hat{A}) + \beta_U \Phi^{-1}(Q) \} / \beta_R] \quad (\text{付7.7})$$

ここで,

$Q$  : 非超過確率

$\Phi$  : 標準正規確率分布関数



付録7.2 線形多自由度系における  $G_k^1(u)$  の導出

対象とするモデルは付図7.1の様な地盤ばねを含む建家/基礎系モデルとし、建家は曲げ剪断梁要素で有限要素モデル化する。すなわち要素剛性マトリックス  $k$  とし

$$k = \frac{EI}{\ell^3(1+\phi)} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ (4+\phi)\ell^2 & -6\ell & (2-\phi)\ell^2 & \\ \text{Sym.} & 12 & -6\ell & \\ & & (4+\phi)\ell^2 & \end{bmatrix} \quad (\text{付7.8})$$

ただし、

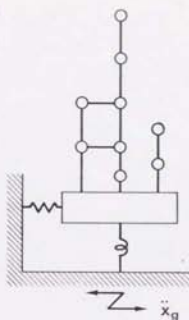
$$\phi = \frac{12EI}{GA\ell^2}$$

$\ell$  : はり要素長さ

$A$  : 剪断断面積

$E$  : ヤング率,  $G$  : 横弾性係数

$I$  : 断面2次モーメント



付図7.1 解析モデル

を採用する。一方質量マトリックスについては回転慣性モーメントを考慮した集中質量マトリックスとする。

全体の運動方程式は地震入力側所に対する相対変位  $x_r$  で記述すると以下の様になる。

$$[M]\ddot{x}_r + [C]\dot{x}_r + [K]x_r = -[M]\ddot{x}_g \quad (\text{付7.9})$$

ただし、

$[M], [C], [K]$  : 系全体の質量マトリックス, 減衰マトリックス, 剛性マトリックス

$\{E\}$  : 地震入力に対する単位ベクトル

$\ddot{x}_g$  : 地震入力加速度

(付7.9)式において減衰マトリックスが固有モードで直交化できるものと仮定すればモーダルアナリシスの手法を用いることにより任意点  $F$  の絶対応答加速度  $\ddot{x}_F$  は次の様に得られる。

$$\ddot{x}_F = \sum_j \phi_{Fj} \ddot{q}_j + \ddot{x}_g \quad (\text{付7.10})$$

ただし  $\phi_{Fj}$  は F 点における j 次の固有モードであり、 $q_j$  は次式の解である。

$$\ddot{q}_j + 2\zeta_j \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = -\beta_j \ddot{x}_g \quad (\text{付7.11})$$

ここで、

$\zeta_j$  : j 次モーダルダンピング

$\omega_j$  : j 次固有円振動数

$\beta_j$  : j 次刺激係数

(付7.10) (付7.11) 両式を利用することにより入力加速度に対する任意点 F の絶対応答加速度の周波数応答関数  $H_F(u)$  が以下の如く求められる。

$$H_F(u) = 1 - u^2 \sum_j \frac{\phi_{Fj} \beta_j}{(u^2 - \omega_j^2 - 2\zeta_j u j - \omega_j^2)} \quad (\text{付7.12})$$

故に (7.26) 式における  $G(u)$  の形も次の様に求められる。

$$\begin{aligned} G(u) &= |H_F(u)|^2 \\ &= 1 - 2u^2 \sum_j \frac{\phi_{Fj} \beta_j (u^2 - \omega_j^2)}{\{(u^2 - \omega_j^2)^2 + 4\zeta_j^2 u_j^2 u^2\}} + u^4 \sum_j \frac{\phi_{Fj}^2 \beta_j^2}{\{(u^2 - \omega_j^2)^2 + 4\zeta_j^2 u_j^2 u^2\}} \\ &\quad + u^4 \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} \frac{\phi_{Fi} \phi_{Fj} \beta_i \beta_j \{(u^2 - \omega_i^2)(u^2 - \omega_j^2) + 4\zeta_i \zeta_j u_i u_j u^2\}}{\{(u^2 - \omega_i^2)^2 + 4\zeta_i^2 u_i^2 u^2\} \{(u^2 - \omega_j^2)^2 + 4\zeta_j^2 u_j^2 u^2\}} \quad (\text{付7.13}) \end{aligned}$$

したがって  $G_k^1(u)$  は (付7.13) 式右辺を実際に偏微分することにより導出することができる。なお  $G_k^1(u)$  を求める上で最終的に必要となる次の諸量

$$\left( \frac{\partial \phi_{Fj}}{\partial \sigma_k} \right)_{A=0}, \quad \left( \frac{\partial \beta_j}{\partial \sigma_k} \right)_{A=0}, \quad \left( \frac{\partial \omega_j}{\partial \sigma_k} \right)_{A=0}, \quad \left( \frac{\partial \zeta_j}{\partial \sigma_k} \right)_{A=0}$$

は通常の確率有限要素法の手法<sup>[付1]</sup>に従い求められる。

[付1] 中桐滋, 久田俊明, 確率有限要素法入門, 培風館, (1985)。

