論文の内容の要旨

論文題目: Special Lagrangian submanifolds and mean curvature flows
(特殊ラグランジュ部分多様体と平均曲率流について)
氏名: 山本 光

本論文の主な研究対象は特殊ラグランジュ部分多様体と平均曲率流である．本論文は 4 つの独立した Part から構成されており, 大まかに言えば, Part I, II, III, IV と進むにつれて, 研究の対象が, 特殊ラグランジュ部分多様体, ラグランジュ平均曲率流, リッチ平均曲率流, 自己相似解と変遷していく．まず, 特殊ラグランジュ部分多様体について述べる．特殊ラグランジュ部分多様体は Harvey-Lawson [3] により定義された, Calabi-Yau 多様体の中の極小なラグランジュ部分多様体であり, 近年ではミラー対称性との関連も見出され注目されている．特殊ラグランジュ部分多様体は局所的には偏微分方程式の解として与えられているため, 大域的な具体例を構成することは難しい．しかし, 外の空間が $\mathbb{C}^m$ の場合は Harvey-Lawson [3] や Joyce [5] により, いくつかの具体例が構成されている．

本論文の Part I ([8] 参照) では Harvey-Lawson や Joyce の $\mathbb{C}^m$ 内での特殊ラグランジュ部分多様体の構成法の特徴だけを抽出し, それをトーリック佐々木多様体の錐に対して拡張した．Harvey-Lawson や Joyce の具体例はよく見ると, $\mathbb{C}^m$ がトーリック多様体であることと, $\mathbb{C}^m$ が奇数次元球面 S^{2m-1} の錐であるという性質だけを利用しているため, 彼らの構成法はトーリック佐々木多様体の錐に対しても同様に適応可能である．外の空間を $\mathbb{C}^m$ ではなく, トーリック佐々木多様体の錐にすると, そのトポロジーは複雑になるため, 構成される特殊ラグランジュ部分多様体のトポロジーも複雑になる．実際, 外の空間の複素次元を 3 次元として Part I の構成法を適用すると, 任意の種数 $g \geq 1$ に対して, $\Sigma_g \times \mathbb{R}$ (Σ_g は種数 g の閉曲面) を特殊ラグランジュ部分多様体として持つようなトーリック概 Calabi-Yau 多様体 M_g が存在することが示される．さらに, Part I では Joyce-Lee-Tsui [6] によって $\mathbb{C}^m$ 内で構成されたラグランジュ自己相似解という部分多様体の構成法も一般化しており, 上と同様に外の空間の複素次元を 3 次元とすれば, 任意の種数 $g \geq 1$ に対して, $\Sigma_g \times S^1$ をラグランジュ自己縮小解として持つようなトーリック概 Calabi-Yau 多様体 M_g が存在することが示される．ラグランジュ自己縮小解の重要性については, 他の段落で述べることにする．

Part I の内容は特殊ラグランジュ部分多様体の具体的構成に主眼をおいているが, もう少し抽象的に特殊ラグランジュ部分多様体を構成する方法がある．それが「ラグランジュ平均曲率流」である．ラグランジュ平均曲率流とは Calabi-Yau 多様体の中を動くラグランジュ部分多様体の 1 パラメーター族 L_t であって, その動く方向が各時刻で平均曲率ベクトル場 $H(L_t)$ に一致しているという条件, すなわち $\frac{\partial}{\partial t}L_t = H(L_t)$ を満たす幾何学的フローである．一般に $\frac{\partial}{\partial t}L_t = H(L_t)$ を満たす部分多様体の 1 パラメーター族 L_t のことを平均曲率流と呼ぶ．ラグランジュ平均曲率流は特殊ラグランジュ部分多様体を構成する方法として近年注目されている．その理由を以下で述べる．まず, ラグランジュ部分多様体という条件を外した一般の平均曲率流の基本的な指導原理として, 「もし平均曲率流 L_t が時間無限大まで解を持てば (しかるべき条件のもとで) 最後には極小部分多様体に収束する」というものがある．そして, 平均曲率流とラグランジュ部分多様体の相性の良さを象徴する定理として「(Calabi-Yau 多様体の中で) 最初の部分多様体 L_0 がラグランジュ部分多様体であれば, その後の L_t は自動的にラグランジュ部分多様体となる」というものがある．従って, Calabi-Yau 多様体の中で, まず「特殊」とは限らない一般のラグランジュ部分多様体を一つ持ってきて, それを平均曲率流で変形し, もしその変形が時間無限大間まで解を持てば, 最後には極小なラグランジュ部分多様体, つまり特殊ラグランジュ部分多様体が手に入る (であろう) という話である．

本論文の Part II ([9] 参照) ではラグランジュ平均曲率流の具体例をトーリック概 Calabi-Yau 多様体

の中に構成している．この構成法は Lee-Wang [7] の $\mathbb{C}^m$ 内でのラグランジュ平均曲率流の具体例の拡張になっている．この拡張に関して特筆すべき点は, Lee-Wang の $\mathbb{C}^m$ 内でのラグランジュ平均曲率流の具体例は途中で特異点を 1 度だけ形成するが, 外の空間をトーリック概 Calabi-Yau 多様体にすることで, Part II で構成されたラグランジュ平均曲率流の具体例は特異点を何度 (有限回) も形成し, さらに特異点を形成する前後でラグランジュ部分多用多様体のトポロジーが変わるという現象を捉えている点である．これはちょうど, リッチフローが特異点を形成した場合に, 手術をして, そのトポロジーを変えながらさらにフローを前進させるという方法を想起させる．

上で述べたラグランジュ平均曲率流を用いて特殊ラグランジュ部分多様体を構成する方法は有力ではあるが, そう簡単に話は進まない．その一つの問題は, リッチフローの場合と同様に, フローが途中で特異点を形成してしまうことである．この現象は Part II の具体例でも捉えている．従って, 上記のラグランジュ平均曲率流を用いた特殊ラグランジュ部分多様体の構成法を前進させるためには, リッチフローの場合と同様に, 「もし途中で特異点を形成するならば, その特異点はどのようなものであるか？」を明らかにする必要がある．実はこの問題に関して, 外の空間が $\mathbb{R}^m$ の場合には Huisken [4] によって部分的な回答が与えられている．その主結果は「平均曲率流が I 型と呼ばれる特異点を途中で形成するならば, その特異点の近傍を拡大すると, 自己縮小解と呼ばれるある種のソリトン解が得られる」というものである．この結果は平均曲率流の研究においては非常に有名で重要な結果である．

本論文の Part III ([10] 参照) では, 上記の Huisken の結果の拡張を行った．Huisken の結果は外の空間が $\mathbb{R}^m$ であるが, 上記のラグランジュ平均曲率流を用いて特殊ラグランジュ部分多様体を構成する方法を前進させるには, その結果を外の空間がより一般的性の高いリーマン多様体の場合に拡張する必要がある, というのが Part III のモチベーションである．Huisken の結果の証明において最も重要な道具は「単調性公式」と呼ばれる微分不等式である．そこで Part III では逆に, その「単調性公式」に類似の微分不等式を許容する外の空間は何か？ということを考察した．その結果として, 少なくとも, 外の空間が「縮小勾配リッチソリトン」から構成されたリッチフローであれば, Huisken の $\mathbb{R}^m$ の結果を拡張できるという結果を得た．すなわち Part III では外の空間のリーマン計量はリッチフローであり, 時間が変わるごとに変化している．その中で同時に平均曲率流を考える．このようにリッチフローと平均曲率流 (mean curvature flow) を同時に考えることを, リッチ平均曲率流 (Ricci-mean curvature flow) と呼び, 近年様々な研究者によって研究され始めている．従って Part III の主結果を一言で述べると「Huisken の $\mathbb{R}^m$ 内の平均曲率流の結果を勾配縮小リッチソリトンから構成されるリッチフロー内のリッチ平均曲率流に対して拡張した」と言うことができる．

本論文の Part IV ([11] 参照) では, Part III の結果として得られるリッチ平均曲率流の自己縮小解について研究を行っている．自己相似解という解 (部分多様体である) の概念は従来は $\mathbb{R}^m$ 内でしか定義されていなかったが, Part III では縮小勾配リッチソリトン内に対して拡張された意味での自己縮小解が得られる．$\mathbb{R}^m$ 内の自己相似解に対しては多くの先行研究が存在する．すると, 自然な興味として, それらの先行研究が縮小勾配リッチソリトン内に対して拡張された意味での自己相似解に対しても同様に成立するか？というものが湧き上がる．これに関して Futaki-Li-Li [2] による $\mathbb{R}^m$ 内の自己相似解に対する直径の評価は, 縮小勾配ケーラーリッチソリトン内に対して拡張された意味でのラグランジュ自己縮小解に対しても同様に成立するということを証明した．さらに, Cao-Li [1] の Proposition 5.3 も拡張した．具体的には, 以下を証明した．複素 m 次元縮小勾配ケーラーリッチソリトン (N, g) のスカラー曲率 $R(g)$ が $R(g) > 2m$ を満たすときは, N 内にコンパクトラグランジュ自己縮小解は存在しない．また, $R(g) < 2m$ のときはコンパクトラグランジュ自己拡大解は存在しない．そして, $R(g) = 2m$ のときは全てのラグランジュ自己相似解は実は極小部分多様体になる．

参考文献

[1] H.-D. Cao and H. Li. A gap theorem for self-shrinkers of the mean curvature flow in arbitrary codimension. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 46(2013), no. 3-4, 879–889.

[2] A. Futaki, H. Li and X.-D. Li. On the first eigenvalue of the Witten-Laplacian and the diameter of compact shrinking solitons. *Ann. Global Anal. Geom.*, 44(2013), no. 2, 105–114.

[3] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr. Calibrated geometries. *Acta Math.*, 148(1982), 47–157.

[4] G. Huisken. Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow. *J. Differential Geom.*, 31(1990), no. 1, 285–299.

[5] D. Joyce. Special Lagrangian m-folds in $\mathbb{C}^m$ with symmetries. *Duke Math. J.*, 115(2002), no. 1, 1–51.

[6] D. Joyce, Y.-I. Lee, and M.-P. Tsui. Self-similar solutions and translating solitons for Lagrangian mean curvature flow. *J. Differential Geom.*, 84(2010), no. 1, 127–161.

[7] Y. I. Lee and M.-T. Wang. Hamiltonian stationary cones and self-similar solutions in higherdimensions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(2010), no. 3, 1491–1503.

[8] H. Yamamoto. Special Lagrangians and Lagrangian self-similar solutions in cones over toric Sasaki manifolds. arXive:1203.3934

[9] H. Yamamoto. Weighted Hamiltonian stationary Lagrangian submanifolds and generalized Lagrangian mean curvature flows in toric almost Calabi-Yau manifolds. to appear in Tohoku Math. Journal.

[10] H. Yamamoto. Ricci-mean curvature flow in gradient shrinking Ricci solitons. arXive:1501.06256.

[11] H. Yamamoto. Lagrangian self-similar solutions in gradient shrinking Kähler-Ricci solitons. arXive:1505.05222.