論文審査の結果の要旨

氏　名　鈴木　拓也

本博士論文では有界関数型空間や有界平均振動関数空間 BMO などの端点型空間での、高階楕円型作用素やストークス作用素が生成する半群について考察している。高階楕円型作用素が生成する半群とは、非等方的な媒質での拡散現象を表す高階放物型方程式の解作用素であり、ストークス半群とは流体の流速の挙動を記述するナヴィエ・ストークス方程式の線形化であるストークス方程式の解作用素である。

本研究の目的は様々な非有界領域が与えられたときに流体力学の偏微分方程式を取り扱うための基礎となる線形理論の構築であり、これら二つの偏微分方程式の解作用素を研究対象としている。発展方程式の解は初期値からある時刻の解を対応させる解作用素がなす半群として扱うことができて作用素の半群論により解析される。解作用素がなす半群の重要な性質として熱方程式の解の平滑化作用を数学的に定式化した解析的半群性があげられる。L^p 空間においては、高階楕円型作用素により生成される半群の解析性について宮崎 (2006) により一様 C^1 級領域上で示され、ストークス半群においてはガイサート-ヘック-ヒーバー-澤田 (2012) により L^p ヘルムホルツ分解がある領域でソレノイダルな L^p_σ 空間で最大正則性まで示されておりナヴィエ・ストークス方程式の解の挙動の考察にも応用されている。しかし、L^∞ 空間のような端点型空間においては領域が滑らかではない場合や L^p ヘルムホルツ分解が無い領域などの場合に線形の問題であってもいまだに数学的な困難があり未解決の問題が数多く存在する。本博士論文は次の問題を研究し、それぞれ画期的な成果をあげている。

1. 一様 C^1 級領域上の有界関数空間での発散型高階放物型方程式の解作用素の解析性
2. L^p-ヘルムホルツ分解がない扇状領域上の有界関数空間でのストークス半群の解析性
3. 圧力の重み付きノルムが、境界の渦度の大きさで評価されるような許容領域上のストークスレゾルベント評価と筒状領域上の有界関数空間でのストークス半群の解析性

4. 許容領域上の BMO 空間でのストークス半群の解析性
5. ヘルムホルツ分解がない扇形領域におけるストークス半群の L^p_σ 空間での解析性
6. 熱方程式の BMO 型空間での解作用素の解析性への応用
7. ストークス半群やナヴィエ・ストークス方程式解の BMO 空間での時間大域挙動
8. 発散型高階楕円型作用素により生成される半群の L^p 空間でのガウス評価、最大正則性

この中で 1 を除いて共同研究である。内容は多岐にわたるが、申請者の貢献が非常に大きい部分についてのみ詳しく述べる。

1. 一様 C^1 級領域上の L^∞ 空間での発散型高階放物型方程式の解作用素の解析性
   非線形解析の手法であるふくらまし法と背理法を組み合わせた弱解の L^∞ レゾルベント評価を考察することで問題の解決を図った。増田-スチュワートの方法では関数解析的手法によるためその分境界が十分な滑らかさを持つことが必要になってしまう。そこでふくらまし法と背理法を組み合わせた L^∞ レゾルベント評価を行う際に弱解を考えて変分法的な解析手法を導入することで一様 C^1 級領域において結果を得た。

2, 5. L^p-ヘルムホルツ分解がない扇状領域上の有界関数空間でのストークス半群の解析性
   阿部-儀我 (2013), (2014) により有界領域や外部領域、摂動半空間上の有界関数型空間でストークス半群の解析性は示されたが L^p-ヘルムホルツ分解がない領域においては不明であった。無限遠での減衰に注意が必要だが適切な関数空間で解を考え、ノイマン境界値問題の評価を座標変換などを駆使して空間局所的に導出し極限を考えることで圧力項を制御し問題を考察した。本研究により L^p-ヘルムホルツ分解がストークス方程式の解作用素の有界関数の空間や L^p での解析性を得るためにこれまで必要不可欠と信じられていたが必ずしもそうとは限らないことが判明した。この L^p 解析性を示すために BMO 空間での解析性を論じた。（第 4 項）

その他、筒状領域等においてもストークス半群の解析性を示した。特にレゾルベント評価に対して増田-Stewart 法ではなく、新たにふくらまし法による手法を導入したところが画期的であった。

よって、論文提出者 鈴木拓也は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。