

不十分な解答の検討はいかに問題解決へ影響を与えるか:

平面図形の証明問題での検討から

大越健斗 (東京大学)

Does Considering "Insufficient Solution" Facilitate Problem Solving?:

An Experimental Study on Plane Geometry Tasks

Kento Okoshi

Authors' Note

Kento Okoshi is a Ph. D Student, Graduate School of Education, The University of Tokyo and Takayuki Koike is a Graduate Student, Graduate School of Education, The University of Tokyo.

This research was supported by a grant, Young Scholar Training Program from Center for Advanced School Education and Evidence-Based Research (CASEER), Graduate School of Education, The University of Tokyo

Abstract

This study investigated the effects of students' consideration on "insufficient solution" to problem solving. To experimentally evaluate the effects of the consideration, the author randomly assigned 68 students and sorted them into four groups. Three of the four groups were each given different tasks and the fourth group was the control group that was not given a task. The three tasks given to the intervention groups were followings: (a) not setting any sub-goals, (b) being able to set sub-goals and modify them, but not being able to develop them, (c) setting sub-goals, but not being able to modify nor develop them. In Analysis 1, the rises in the problem solving levels were compared. As a result, students in the intervention groups had set their sub-goals that were related to similarity. And the students in Group (b) and (c) were able to develop their sub-goals. To identify the reasons of the rises, Analysis 2 and 3 were carried out. In Analysis 2, the details of the writings between students whose level in their problem solving rose and not were compared. At the result, the factors of the rises in problem solving level were identified. In Analysis 3, the description of each factor was compared among intervention groups. As a result, the relations between "insufficient solution's" content and the factors were identified. These findings suggested that potential mechanisms behind the benefit of considering "insufficient solution" and the way to support effective use for learning.

Keywords : problem solving, sub-goal, insufficient solutions, proof, junior high student

不十分な解答の検討はいかに問題解決へ影響を与えるか:

平面図形の証明問題での検討から

1. 問題と目的

1.1. 「多様性をはぐくむ」授業

子どもの成長発達に寄与する授業では、各々の生徒の考えの独自性が保障され、同時にその考えの深化・変容が促されることが重要である。その際、正解か否かに関わらず自分の考えを持ち、その考えをもとに、多様な他者の考えと対峙し、自分の考えを深化・変容させることが必要である。

しかし、数学教育においては、一般性への志向や効率性への志向、また正否の明確さという性格から、最も一般的で効率的である解答（以下、模範解答とする）が是とされがちである。そのため、誤答や結論まで到達していない不十分な解答は学びにおいて重要視されにくい。よって、数学教育において、正解か否かに関わらず自身の考えを持ったうえで、模範解答だけでなく他者の多様な考えと対峙し、自身の考えを深化・変容させることを支援することが必要である。そのような研究を行っている研究分野として複数解法研究がある。

1.2. 複数解法研究の概観

複数解法の研究は、一般性や効率性の高い模範解答と合わせて、模範解答以外の解答を検討することで学びを深めることを検討する研究である。これまでの複数解法の研究では主に

(1) 複数解法の検討が学びにおいて効果を持ったための条件、(2) 複数解法の検討によりもたらされる学びの効果が検討されている。

複数解法が学習者の理解深化に寄与するための条件として、(a) 対象領域におけるある程

度の既有知識 (e.g., Rittle-Johnson et al., 2009; Heemsoth & Heinze, 2014), (b) 自身の解法の意味理解 (河崎, 2006) (c) 別解法と模範的解法の比較関連付け (Star & Rittle-Johnson, 2009) が指摘されている。そして、この条件を達成するための方法として非模範解答を個人で検討した後、ペアで検討する方法が有効であることが指摘されている (河崎・白水, 2011)。

また、複数解法研究の学習者への効果としては (a) 意味理解の深化 (e.g., 河崎, 2007; 河崎・白水, 2011), (b) 手続きの習得 (e.g., 河崎, 2010; Durkin & Rittle-Johnson, 2012, 藤村・太田, 2002), (c) 能動的な参加の促進 (e.g., 森田・稲垣, 1997; Inagaki et al., 1998) が指摘されている。

1.3. 複数解法の課題

これまでの複数解法で検討されている解法は、別解、非一般解法、誤答が主である (e.g., Rittle-Johnson & Star, 2007; 藤村・太田, 2002; 森田・稲垣, 1997)。しかし、生徒の生成し得る解答はこの3種類だけではない。「不十分な解答」も生成され得るだろう。ここでの「不十分な解答」とは、解答として「完結」していないものを指す。例えば、途中までの解答や自分の解決過程をただ記述したものなどが当てはまる。模範解答以外の学びへの寄与の多様な可能性を検討するにあたり「不十分な解答」も複数解法の研究として扱っていくことが必要である。

また、複数解法の研究では、『模範解答』のみと『模範解答』と『模範解答以外の解

答』の2群比較から、『模範解答』と『模範解答以外の解答』の学習における効果の検証やメカニズムの推察が行われている (e.g., 河崎・白水, 2011)。ただし複数解法研究では「模範解答と合わせて提示される模範解答以外の解法」の違いが生徒の学びへどのように影響するのかについての検討が行われていないことが課題として指摘されている (河崎, 2013)。よって今後、『模範解答』のみと『模範解答』と『模範解答以外の解答』の2群比較ではなく、『模範解答』のみと『模範解答』と『模範解答以外の解答 A』, 『模範解答』と『模範解答以外の解答 B』というように「模範解答以外の解法」群同士の比較を行えるようにすることで、「模範解答と合わせて提示される模範解答以外の解法」の違いが生徒の学びへどのように影響するのかを明らかにすることが必要である。

1.4. 本研究の目的

本研究では次の2つを目的とする。一つは、「不十分な解答」の生徒の学びへ影響とそのあり方である。もう一つは、「模範解答と合わせて提示される模範解答以外の解法の違い」がもたらす生徒の学びへの影響の違いである。

1.5. プロジェクトテーマ（「多様性をはぐくむ」）との関係

「複数解法」の研究の発展に寄与する本研究は、1.1. での議論から生徒自身の考えの提示を促し、それにより生徒の独自性が保障、深化・変容することを支援することにつながる。各々の生徒に対して「生徒の独自性」が保障されることは、「生徒の多様性をはぐくむ」ことにつながる。したがって、本研究はプロジェク

トテーマ「多様性をはぐくむ」に対して、それ（「多様性をはぐくむこと」）を促進するという形で関係する。

2. 方法

2.1. 対象

関東地方の私立中等教育学校の中学3年生68名を対象に、201X年の10月から11月に実験を実施した。協力校の生徒は中学1年の3学期から中学2年の2学期にかけて相似、五心の性質を学習していた。本研究は平日の放課後に行われた。実験は1日のみ行われ、時間は約50分であった。群の分け方はランダムに実施日ごとに割り振った。協力校の中学3年生全員に協力を呼びかけた。その呼びかけに対し、協力の意思を示し、かつ対象期間の放課後に実験への協力が可能であった生徒が実験の協力者である。

また、下校時刻との兼ね合いで介入B群の4名、介入C群の4名は「不十分な解答」の検討までを実験室で行い、その後のポストテスト、ポストテストの「教訓帰納」、アンケートを指定された時間にて自宅で実施してもらった。この8名のうち5名は翌日にワークシートの提出があり、実施のあり方の確認において不備が報告されなかったためサンプルに加えた。一方、残りの3名は提出がなかったためサンプルから外した。また、介入B群の内の一人は説明を聞き逃していたことがワークシートから確認されたため、対象から外した。その結果、サンプル数は統制群18人、介入A群16人、介入B群16人、介入C群14人となった。

介入A群、B群、C群の介入内容の詳細については2.4.3.にて説明する。また、ここでの「教訓帰納」とは、自分自身の解答作成終了後

に、自身の解答を振り返り「どのようなことに気を付ければこの問題を解くことができたか」を検討するものである。

2.2. 課題

プレテスト、ポストテストで用いる課題は難易度の高い課題を設定した。その理由は、問題へのアプローチの仕方に注目するためである。簡単な問題ではアプローチ方法を意識化するまでもなく、既知の解法の当てはめにより解くことができる。よって、アプローチの仕方について意識化して考える必要性を持たせるため、知っている解法の当てはめでは解くことのできないような難易度の高い課題を用いた。

2.3. 倫理的配慮

本研究を行うにあたり、協力校の副校長および教科主任、学年主任に研究内容に関する説明を行い、了解を得た。また、協力者に対しても、①本実験は成績に関係のないこと、②個人が特定できる情報は外部に提示しないこと、③途中で協力の取り下げができることを説明し、同意が得られた上で実験を行った。

2.4. 実験デザイン

2.4.1. 実験デザインの決め方

1.2.で述べた通り、複数解法は常に学習者の理解の深化に有効に機能するとは限らない。自身の解法以外の検討が学習の理解深化に寄与するのは、(a) 自身の解法を十分に理解し（河崎, 2006）、(b) ペアで提示された解法を検討する場合（河崎・白水, 2011）であることが指摘されている。そのため「教訓帰納」により自身の解法についての理解を深める時間を取り、「不十分な解答」の検討は個別での検討とペアでの検討の両方の時間を設けた。

2.4.2. 実験の流れ

実験は次の流れで行われた。また実際に提示した課題や文章については資料 1~9 に記載した。

1) 三角形の五心の復習（約 2 分）;資料 D.1

三角形の五心の定義と性質が書かれたプリントを配布し、読む時間を取った。また、このプリントは問題解決中、手元に置かせた。

2) ワークシートの書き方の説明（約 2 分）;資料 D.1

例題とその解答がワークシートに書かれているプリントを配布し、読む時間を取ったのち、筆者が上から読み上げた。

3) プレテストの実施（約 7 分）;資料 D.2

プレテストの問題に個人で取り組ませた。その際、解答はワークシートへ記述させた。

4) プレテストの下位目標・他の下位目標の記述（約 5 分）;資料 D.3

3) で行っていたプレテストに対する下位目標と、その下位目標で解けなかった場合に設定する下位目標を記述させた。

5) プレテストの解答の配布と「教訓帰納」の記述（約 5 分）;資料 D.4

個人で模範解答を読んだのち、自身のプレテストに対する「教訓帰納」（「どのようなことに気を付ければこの問題を解くことができたか」）を記述させた。

6) 不十分解答の個人での検討（介入 A・B・C 条件）（約 8 分）;資料 D.5 (1)

プレテストに対する「不十分な解答」を提示し、その回答者が次に似たような問題を解くときに助けとなるアドバイスを記述させた。このアドバイスは「不十分な解答」を書いたとされる子ども（たかし君）に向けて書くように問題

文に記載していた。

7) 不十分解答のペアでの検討 (介入 A・B・C 条件) (約 8 分); 資料 D.5 (2)

6) についてペアで共有し、再度、「不十分な解答」の回答者が次に似たような問題を解くときに助けとなるアドバイスを記述させた。ここでもアドバイスは「不十分な解答」を書いたとされる子ども (たかし君) に向けて書くように問題文に記載していた。ちなみに、話し合いながらアドバイスを書くか、話し合いの後でまとめて書くかについては指定していない。

8) ポストテストの実施 (約 7 分); 資料 D.6

ポストテストの問題に個人で取り組ませた。その際、解答はワークシートへ記述させた。

9) ポストテストの下位目標・他の下位目標の記述 (約 5 分); 資料 D.7

8) で行っていたプレテストに対する下位目標と、その下位目標で解けなかった場合に設定する下位目標を記述させた。

10) ポストテストの回答の配布と「教訓帰納」の記述 (約 5 分); 資料 D.8

個人で模範解答を読んだのち、自身のポストテストに対する「教訓帰納」を記述させた。

11) ペアでの話し合いにおけるアンケートの記述 (約 1 分); 資料 D.9

7) でのペアでの話し合いに対する評価 (ペアでの話し合いがうまくいったかどうかを 5 件法で尋ねた) とその理由について記述させた。

2.4.3. 介入群の説明

実際の授業での活用を考慮すると、検討する「不十分な解答」は (a) 実際に生徒が生成する可能性が高く、かつ、(b) 検討しがいのある「不十分な解答」であることが必要である。そのため、平面図形の証明問題における解決過程

を質的に検討し、解決過程における停滞について検討した大越 (2016) を参考に「不十分な解答」を設定した。

大越 (2016) は中学 2 年生の平面図形の証明問題における解決過程を質的に分析し、そこでのつまずきや停滞の生じ方を検討している。本研究における「不十分な解答」は誤答とは異なり、単に完結していない解答を指す。そのため、停滞の生じ方についての知見を特に参考にした。その結果、大越 (2016) より、停滞の要因として①下位目標を設定しないこと、②下位目標を発展しないこと、③下位目標を修正しないことが示唆された。そのため、①～③の要素に注目して、「不十分な解答」を作成した。

A 群の「不十分な解答」は下位目標の設定、発展、修正のいずれも行えず、停滞に陥った解答に設定した。具体的には、問題文から思いつく条件を無目的に記述し、その後何をすればいいのかわからなくなり、問題解決が終わるというものである。

B 群の「不十分な解答」は下位目標を設定し、さらに問題文の条件から下位目標を吟味し、下位目標の修正は行えたものの、その後、下位目標の発展が行えず、停滞に陥った解答に設定した。具体的には次のようなものである。下位目標を設定後、問題文から条件を生成し、その後、その下位目標では解決が困難であると判断し、下位目標を修正する。しかし、その下位目標の途中で下位目標を発展させることができずに、問題解決が終わる。

C 群の「不十分な解答」は下位目標を設定するが、その後、下位目標の発展、修正が行えず、停滞に陥る解答を設定した。具体的には次のようなものである。下位目標を設定後、問題文から条件を生成する。しかし、その後下位目

標の修正を行うことができずに、問題解決が終わる。

実際に提示された「不十分な解答」の文章は資料 D.5 に記載している。

2.5. 問題解決の水準

証明問題の解決過程における水準の設定は次のように定義した。

水準 0 は下位目標を設定せずに、求まる条件を求めている段階とした。また、下位目標として相似条件を述べていても、単に二角相等や二辺比挟角相当と述べるにとどまり具体的にどこどこが等しいことを示すのかを記述していない場合、水準 0 に分類している。これは、下位目標は具体的に意識されてこそ役に立つと考えるためである。

水準 1 は相似条件をもとに、示すものを具体的に記述している状態である。例えば、 $\angle BAI = \angle PAF$ が既に求まっていて、二角相当で相似であることを示そうとしていることから、 $\angle ABI = \angle APF$ を示すと下位目標を設定していた場合、水準 1 に分類している。

水準 2 は下位目標を水準 1 の状態から発展させている場合のものを分類した。例えば、 $\angle ABI = \angle APF$ を示すために、 $\angle ABI = \angle CBI$ を用いて、 $\angle CBI = \angle APF$ を示すといった下位目標を設定した場合、水準 2 に分類される。また、

$\angle AIB = \angle AFP$ を示すために $\angle BIP = \angle PFC$ を下位目標として設定した場合も水準 2 に分類される。

水準 3 は課題が達成できた場合のものを分類した。

また、エラーは誤った条件を用いて議論を進めたものを分類している。誤った条件をもとに議論が進んでしまうと、正確に問題を読み取り議論を進めた場合と、下位目標の設定・発展の難しさに差が生じる。そのため、解決水準の向上における分析の対象は、エラーを一つも含まない生徒とした。各水準の説明と例を表 1 に整理した。

また、証明問題の解決における水準は主にワークシートへの記述（資料 D.2）と下位目標の記述（資料 D.3 (1)）への書き込みを基に同定した。その際、「教訓帰納」場面（資料 D.4）の記述とほかの下位目標に関する記述（資料 D.3 (2)）も解釈の際の参考にした。水準同定の評定者間一致率は 89.8%であった。しかし、生徒の記述した問題解決過程は複雑であり、そこから水準の同定を行う際、記述の見落としがある可能性も予想される。そのため、水準同定の根拠とした記述箇所を提示し、再度一致率をとった。それによる評定者間一致率は 94.5%であった。不一致箇所は協議の上、水準を決定した。

表 1 解決水準の定義と例

水準	定義	例
水準 0	具体的な下位目標を設定しない。	具体的な目的や命題の証明と明確につながった下位目標とは関係なく条件をもとめる。
水準 1	相似条件に対応する下位目標を具体的に述べる（示す角や辺を	（ $\angle BAI = \angle CAI$ が求まっており、相似条件の二角相当を使うという意図のもと） $\angle ABI = \angle APF$ を示すと記述

	明示する)。	する。
水準 2	水準 1 の下位目標を他の条件と組み合わせて発展させる (元の下位目標を発展させた新たな下位目標を設定する)。	($\angle BAI = \angle CAI$ が求まっており、相似条件の二角相当を使うという意図のもと $\angle ABI = \angle APF$ を示すと記述した状態で,) $\angle ABI = \angle CBI$ を踏まえ、 $\angle CBI = \angle APF$ を示すことを下位目標に設定する。
水準 3	証明を達成する。	証明を達成する。
エラー	誤った条件を用いる。	点 O,G,H を一直線上にあるものとして議論を進める。

3. 結果と考察

3.1. 分析方法

本研究では 3 つの分析を行う。分析 1 では、各群における解決水準の推移を比較する。分析 2 では、解決水準が上昇した生徒と上昇しなかった生徒のワークシートへの記述を質的に検討し、比較する。それにより、解決水準の向上と関連のある記述内容を同定する。分析 3 では、分析 2 で得られた記述内容の記述割合を各群において比較する。それによりそれぞれの「不十分な解答」と検討時に記述される記述内容の関係について検討する。

分析 1 にて、どの群において (1) 下位目標の設定 (水準 1)、(2) 下位目標の発展 (水準 2) への向上が多いかを検討する。その後、分析 2 にて下位目標の設定、下位目標の発展と関係する記述内容の同定を、分析 3 にて各群における記述内容の同定を行う。分析 2、分析 3 の結果から分析 1 の結果の背景を推察する。これにより本研究の目的の 1 つである「不十分な解答」の検討の生徒への学びの影響のあり方を明らかにする。

次に、分析 3 の各群の記述内容の同定の結果の背景を推察することを通じて、本研究の目的の 2 つ目である「模範解答と合わせて提示される模範解答以外の解法」の違いが生徒の学びへ与える影響を明らかにする。

3.2. 各群の水準移行の比較 (分析 1)

次の (い)、(ろ)、(は) の生徒の人数を表 2 にまとめた。(い) プレテストで水準 0 であった生徒のうち、ポストテストで水準 1 以上になった生徒の人数、(ろ) プレテストで水準 1 であった生徒のうち、ポストテストで水準 2 以上になった生徒の人数、(は) プレテストで水準 2 であった生徒のうち、ポストテストで水準 3 になった生徒。ただし、プレテスト、ポストテストの少なくともいずれか一方でエラーに分類された生徒は水準の推移を検討できないためここでのカウントの対象から除外している。

表 2 より、水準 0 から水準 1 以上への推移の割合が統制群に比べて介入群合計で多いことが確認できる。ただし、対象となる生徒の人数の少なさからそれぞれの介入群ごとの比較は検討が困難であった。また、同様に、水準 1 から水準 2 以上へのプレテスト推移の割合が統制群、介入 A 群に比べて介入 B 群、C 群で多いことが確認できる。一方、水準 2 から水準 3 への推移は、そもそも対象となる生徒の人数が極端に少ないため、検討が困難であると判断し、本研究では分析を行わない。

水準推移において、(い)(ろ)(は)のように分類した理由について説明する。それは介入箇所での検討によって克服した要素に注目する

ためである。今回は水準が水準 0 から水準 3 の 4 段階ある。水準 0 から水準 1 に至るために克服しなければならない要素を a, 水準 1 から水準 2 に至るために克服しなければならない要素を b, 水準 2 から水準 3 に至るまでに克服しなければならない要素を c とおく。このとき、水準 0 から水準 1 へ推移した生徒が介入箇所での検討で克服した要素は a である。また、水準 0 から水準 2 へ推移した生徒の場合は、介入箇所での検討で克服したと十分に言うことのできる要素は a だけである。b も克服された可能性は持つものの、b はもともとプレテストの段階で克服されていた（問題となっていなかった）可能性も考えられる。要素 a,b,c は包含関係には

ないことから、要素 a でつまづいている生徒であっても、要素 b や要素 c ではつまづいていないということも十分考えられる。介入箇所での検討で克服した要素に注目する場合、(い), (ろ), (は) のように分類することが適切であると考え、(い), (ろ), (は) にて分類し、人数のカウント、比較を行った。ちなみに、各群のプレテストでの証明問題の解決の水準とポストテストでの証明問題の解決の水準の推移をまとめた表を資料 A に記載した。また、水準の推移と克服された要素の関係をまとめた表を資料 B に記載した。

表 2 各群での水準 1 への上昇、水準 2 への上昇

群	プレテストからポストテストにおける水準変化		
	水準 0 から水準 1 以上	水準 1 から水準 2 以上	水準 2 から水準 3 以上
統制群	5 人中 0 人 (0%)	8 人中 1 人 (12.5%)	1 人中 0 人 (0%)
介入 A 群	3 人中 2 人 (66.6%)	5 人中 0 人 (0%)	1 人中 0 人 (0%)
介入 B 群	3 人中 1 人 (33.3%)	5 人中 2 人 (40.0%)	2 人中 0 人 (0%)
介入 C 群	3 人中 1 人 (33.3%)	4 人中 3 人 (75.0%)	2 人中 1 人 (50.0%)
介入群の合計	9 人中 4 人 (44.4%)	14 人中 5 人 (35.7%)	5 人中 1 人 (20.0%)

3.3. 水準向上の要因の検討（分析 2）

3.3.1. 水準 0 からの向上

「教訓帰納」（資料 4）と「たかし君の不十分な解答への説明」（資料 5（1）,（2））における記述内容を水準 0 から水準 1 以上へ移行した生徒と水準 0 にとどまった生徒の間で比較する。それにより、水準 0 からの向上と関連の高い記述を同定する。

分析は次の 4 ステップにて行った。1) 水準 1,2 の要素を踏まえ、生徒のワークシートへの

記述内容の分類観点を生成した。2) 次に 1) を加味しつつ、「教訓帰納」（資料 4）と「たかし君の不十分な解答への説明」（資料 5）における生徒の記述内容からボトムアップ的に生徒のワークシートへの記述内容のカテゴリを作成した。3) 各群、各記述場所（「教訓帰納」「不十分解答（個人）」「不十分解答（ペア）」）にて生徒の記述を 2) のカテゴリに分類し、カウントした。4) 3) の結果を水準 0 から向上した生徒と水準 0 にとどまった生徒の記述において比

較し、水準 0 からの向上をもたらす記述内容を同定した。

水準 1 の要素は「相似条件」「下位目標の具体的な記述」である。水準 2 の要素は「条件の組み込みによる下位目標の発展」である。よって、「相似条件」「下位目標の具体性」「下位目標への条件の組み込み」に着目してカテゴリを作成する。

次に、生徒の記述からカテゴリをボトムアップ的に生成した。ただし、先ほど水準の要素から導き出された観点を加味してカテゴリを作成している。その結果、18 カテゴリが作成された。それぞれのカテゴリの定義を表 3 に載せた。また、例を載せた説明は参考資料 C に提示した。

次に、それぞれの記述場所（「教訓帰納」「不十分解答（個人）」「不十分解答（ペア）」）、群（A 群、B 群、C 群）において、各カテゴリをカウントした。ただし、これらのカテゴリは全てが独立の関係にあるわけではない。例えば相似（具体）と下位（具体）は包含関係にある（相似（具体）は下位（具体）に含まれる）。相似（具体）カテゴリがあると判断されるためには相似条件についての記述に加え、示すべき対象とその関係について記述されていることが必要であるのに対し、下位目標（具体）カテゴリがあると判断されるためには、示すべき対象とその関係についての記述のみが必要であるためである。そのほか、包含関係にあるカテゴリ

として、相似（方針・注目なし）と下位（方針・注目なし）、相似（方針・注目あり）と下位（方針・注目あり）、相似（方針・注目なし）と相似（方針・注目あり）、下位（方針・注目なし）と下位目標（方針・注目あり）、下位（具体）と下位（文字）、下位（具体）と下位（条件組み込み）が挙げられる。

2 つのカテゴリを満たす場合、より小さいカテゴリにのみカウントし、大きいカテゴリにはカウントしなかった。具体的には、相似条件についての記述に加え、示すべき対象とその関係について記述されている場合、相似（具体）にカウントし、下位（具体）としてはカウントしていない。

最後に、各カテゴリの集計結果を水準 0 にとどまった生徒と水準 0 から向上した生徒の間で比較した。その結果、水準 0 にとどまった生徒では“相似（具体）”を含む記述が 5 人中 1 人（20. 0%）であったのに対し、水準 0 から水準 1 以上へ向上した生徒では 4 人中 4 人（100%）であった。ちなみに“相似（具体）”を含む記述は、「相似（具体）」、「下位目標（具体）かつ相似条件に関する記述」、「相似（方針・注目箇所あり）」、「下位目標（方針・注目箇所あり）かつ相似に関する記述」とした。ここから“相似（具体）”を含む要素が水準 0 からの向上と相関の高いと判断した。

表 3 生徒の記述内容のカテゴリ

カテゴリ	定義
文字	角度の大きさや辺の長さを文字でおくことを指摘する記述をする。
条件	問題文から導くことのできる数学的条件を書くことを指摘する記述をする。
条件から式を作る	問題文から導くことのできる数学的な条件を用いて立式する（関係式を作成する）ことを促す記述をする。
問題文から条件を生成する	問題文から導くことができる条件について検討することを促す記述をする。
補助線	補助線を引くことを指摘する記述をする。
注目箇所	注目する箇所についての指摘する記述をする。
相似条件設定促進	用いる相似条件を何にするか考えることを促す記述をする。
相似（天下り）	天下り的に相似条件を記述する。
相似（理由なし）	用いる相似条件を理由なしで記述する。
相似（理由あり）	用いる相似条件を理由とともに記述する。
相似（方針・注目なし）	相似条件と共にその後の方針について記述する。ただし、具体的な注目箇所については記述しない。
相似（方針・注目あり）	相似条件と共にその後の方針について記述する。ただし、具体的な注目箇所について記述する。
相似（具体）	相似条件と共に示すべき対象とその関係を記述する。
下位（方針・注目なし）	その後の方針について記述する。ただし、具体的な注目箇所については記述しない。
下位（方針・注目あり）	その後の方針について記述する。ただし、具体的な注目箇所について記述する。
下位（具体）	示すべき対象とその関係を記述する。
下位（文字）	示すべき対象とその関係を文字を含んだ形で記述する。
下位（条件組み込み）	示すべき対象とその関係を条件を用いた形で記述する。

3.3.2. 水準 1 から水準 2 への向上
同様に水準 1 からの向上と関連の高い記述を

同定する。そのための方法は 3.3.1. と同様である。そのため、3.3.1 で得られた結果を用い

る。

3.3.1 で得られた各群，各記述箇所（「教訓帰納」「不十分解答（個人）」「不十分解答（ペア）」）における生徒の記述内容の分類結果を水準 1 から向上が見られなかった生徒と水準 1 から水準 2 以上へ向上した生徒の間で比較した。その結果，水準 1 から向上しなかった生徒では“条件を含む下位目標”を含む記述が 11 人中 0 人（0%）であったのに対し，水準 1 から向上した生徒では 5 人中 5 人（100%）であった。ちなみに「下位目標（文字）」と「下位目標（条件組み込み）」を“条件を組み込んだ下位目標”とした。ここから“条件を含む下位目標”が水準 1 からの向上と関連の高い記述内容であると判断した。

3.3.3. 分析 2 の解釈

プレテスト終了後の検討場面で水準 1，水準 2 に該当する内容（それぞれ“相似（具体）”，“条件を含む下位目標”）を記述したことで，記述内容が内化され，その記述内容がその後のポストテストの解決過程に反映されたと考え

る。

3.4. 各群のワークシートへの記入内容の違い（分析 3）

3.4.1. “相似（具体）”の記述場所，群間比較

分析 2 にて，水準 0 からの水準の向上に相関があるとされた“相似（具体）”の記述の割合を群間，記述場所（「教訓帰納」と「不十分な解答」の検討場面）のそれぞれにおいて比較した。ただし，「不十分な解答」の検討場面（ペア）においては個人で書いた記述を書き直さない生徒も存在することが予想される。そのため，「不十分な解答」の検討場面（ペア）における記述内容のカウントは「不十分な解答」の検討場面（個人）の記述も含めて行った。すなわち，カウントの対象において「不十分な解答」の検討場面（ペア）と「不十分な解答」の検討場面（個人）は包含関係にある。また，カウントは個人ごとに行った。それぞれにおける記述の割合は表 4 の通りである。

表 4 “相似（具体）”記述の人数

群	記述箇所		
	「教訓帰納」場面	「不十分解答」の検討場面 （個人）	「不十分解答」の検討場面 （ペア）
統制群	1/18 (5.6%)	—	—
A 群	0/16 (0%)	3/16 (12.5%)	6/16 (37.5%)
B 群	1/17 (5.9%)	3/16 (18.8%)	4/16 (25.0%)
C 群	1/14 (7.1%)	1/14 (7.1%)	5/14 (35.7%)
合計	2/46 (4.3%) ※	7/46 (25.2%)	15/46 (32.6%)

※「教訓帰納」場面における合計は「不十分解答」の検討場面（個人，ペア）との比較のため介入群のみの

合計を記述している。

表 4 から“相似（具体）”記述は「教訓帰納」部分よりも「不十分な解答」の検討場面（ペア）にて多く描かれていること（「教訓帰納」での記述率は 2/46 人（4.3%）, 「不十分な解答」の検討場面（ペア）での記述率は 15/47 人（31.9%）, A～C の群間では個人・ペアいずれにおいても記述割合に差がほとんどないことが確認できる。

3.4.2. “条件を組み込んだ下位目標”の記述箇所、群間比較

同様に、分析 2 にて、水準 1 からの水準の向上に相関があるとされた“条件を組み込んだ下位目標”の記述の割合を群間、記述場所（「教訓帰納」と「不十分な解答」の検討）場面のそれぞれにおいて比較した。それぞれにおける結果は表 5 の通りである。

表 5 “条件を組み込んだ下位目標”記述の人数

群	記述箇所		
	「教訓帰納」場面	「不十分な解答」の検討場面 (個人)	「不十分な解答」の検討場面 (ペア)
統制群	0/18 (0%)	—	—
A 群	0/16 (0%)	0/16 (0%)	0/16 (0%)
B 群	0/16 (0%)	3/16 (18.8%)	4/16 (25.0%)
C 群	0/14 (0%)	4/14 (28.6%)	6/14 (42.9%)
合計	0/64 (0%) ※	7/46 (25.2%)	10/46 (21.7%)

※「教訓帰納」場面における合計は「不十分な解答」の検討場面（個人、ペア）との比較のため介入群のみの合計を記述している。

表 5 から“条件を組み込んだ下位目標”記述は「教訓帰納」部分よりも「不十分な解答」の検討部分にて多く記述されていること、A 群よりも B・C 群で多く記述されていること、が確認できる。

3.4.3. 分析 3 の結果の解釈

“相似（具体）”記述と“条件を組み込んだ下位目標”記述について、(a)「教訓帰納」場面と「不十分な解答」の検討場面での生起割合の違い、

(b) 生起割合の群間差、について考察する。

3.4.3.1. “相似（具体）”について

「教訓帰納」場面よりも「不十分な解答」の検討場面（ペア）で“相似（具体）”の記述の割合が高かった理由について考察する。

まずは、「不十分な解答」の検討場面（個人）よりも「不十分な解答」の検討場面（ペア）において、“相似（具体）”記述が多かった理由を考察する。「不十分な解答」の検討場面（個人）にて、“相似（具体）”は完全には記述されずとも、「相

似」に関する条件（例えば、「相似（天下り）」「相似（理由なし）」「相似（理由あり）」など）は記述されていた（25/46 人; 54.3%）。また「不十分な解答」の検討の個人からペアにかけて“相似（具体）”を記述するようになった生徒 8 人（A 群+3/13 人, B 群+1/13 人, C 群+4/13 人）において、個人での検討段階で「相似」に関する記述を行ったのは 8 人中 8 人（100%）であった。このことから、統制群よりも介入群において“相似（具体）”の記述の割合が多い理由として、「不十分な解答」の検討場面（個人）において「相似」に関する記述を行った生徒が、その後のペアでの話し合いによって「具体性」が付与されたためと考えられる。

次に、「教訓帰納」場面ではあまり「相似」に関する記述が生成されず、「不十分な解答」の検討場面（個人）において「相似」に関する記述が相対的に多く生成された理由について推測する。

筆者が予想する理由は、自分への説明か他者への説明かの違いである。今回、「教訓帰納」においては「相似」についての記述が少なかった（「教訓帰納」場面において「相似」について 1 つでも記述があった生徒は 3/46 人（10.9%）（A 群 0/16 人；B 群 1/16 人；C 群 2/14 人）であり、「不十分な解答」の検討場面（個人）においては 25/46 人

（54.3%）（A 群 9/16 人；B 群 5/16 人；C 群 11/14 人）であった。自分の解答においては記述しなくとも相似条件や下位目標を意識していると思っ
ていることが多いだろう。一方、他者の解答では明確な記述がなければ生徒は「不十分な解答」において相似条件や下位目標を意識していないものと判断するだろう。そのため、自分の解答に対する「教訓帰納」場面では「相似」に関する記述が少なく、他者へのアドバイスである「不十分な解答」の検討場面では「相似」に関する記述が多か

ったのではないかと考察した。

したがって、他者への説明により解決過程において自明視しがちな相似条件についても意識化することが促され、さらにその後の他者との検討により、対象箇所を具体的に記述することが促されたため、統制群に比べて介入群において“相似（具体）”の記述が多かったと考えられる。

3.4.3.2. “条件を組み込んだ下位目標”について

「教訓帰納」場面よりも「不十分な解答」の検討場面で“条件を組み込んだ下位目標”の記述の割合が高く、特に B 群 C 群の「不十分な解答」の検討場面で他と比べて高かった理由について考察する。

筆者が推測する要因は 2 つある。一つは検討対象の内容の違いであり、もう一つは自分への教訓として記述するか他者への説明として記述するかという記述目的の違いである。それぞれを要因として推察する理由を下に記述する。

まずは検討対象の内容の違いを要因として考える理由を記述する。A 群が検討した「不十分な解答」では下位目標についての記述がない。一方、B 群 C 群が検討した「不十分な解答」では下位目標についての記述がある。生徒に想起され、記述が促されるのは検討対象と内容において直接つながりのあるものが主であるだろう。そのため下位目標についての記述の有無が、“条件を組み込んだ下位目標”記述の生成に寄与していると予想できる。

次に自分への教訓としての記述か、他者への説明としての記述かといった記述目的の違いを要因として考える理由を記述する。プレテストにて水準 1 であった生徒は「教訓帰納」にて「下位目標」の要素を含む自分の解答を検討対象としている。しかし、水準 1 にある生徒 22 人において「教訓帰納」にて“条件を含む下位目標”を記述した

生徒は 0 人である。また、介入群の生徒 46 人を対象としても「教訓帰納」で「条件を含む下位目標」を記述した生徒は 0 人である。一方、検討対象に「下位目標」を含む介入群（B 群、C 群）の生徒 30 人のうち「不十分解答の検討（個人）」にて“条件を含む下位目標”を記述した生徒は 7 人である（7/30 人; 23.3%）。このことから、ただ「下位目標」を要素として含む記述が検討対象にあるだけではなく、さらに他者へ説明するという目的のもと対象を検討し、記述する必要があることが予想される。

4. 総合考察

4.1. 総合考察

本研究の目的は「不十分な解答」の検討が生徒の学び、特に問題へのアプローチの仕方によどのように影響するかを検討することであった。そのために、分析 1 で問題解決過程を比較した。その結果、「不十分な解答」の検討が問題解決の水準を向上させることが示唆された。この理由を検討するため、分析 2 にて問題解決の水準の向上に寄与する要素の同定を、そして分析 3 にて分析 2 で同定された要素の生成が「不十分な解答」の内容によってどのように異なるのかの検討を行った。その結果、1)「不十分な解答」にて問題解決水準の向上要因が検討されている、またはそれに関連する要因が検討されている場合、その要因の記述が促されること、2)「不十分な解答」のペアでの検討により検討箇所が具体化されること、3)「不十分な解答」を作成した他者へのアドバイスという目的から、自明視している内容についても記述することが促され、意識化が促進されること、の 3 点を背景として、「不十分な解答」の検討が解決水準の向上に寄与することが示唆された。

本研究は次の 2 点において意義がある。1 点目

は、複数解法の研究においてこれまでほとんど検討されてこなかった「不十分な解答」の検討を扱い、その学びへの効果を明らかにしたことである。2 点目は、「不十分な解答」の検討の学びへの効果が、これまでの複数解法の研究において主に得られている学びへの効果（意味理解の深化、一般的な手続きの習得）以外にもあること（解決水準の向上）を確認したことである。

4.2. プロジェクトテーマとの関係

本研究にて「不十分な解答」によって生徒の問題へのアプローチの仕方を深められることと、そのための方法について知見が得られた。この知見は第 1 章で述べた形で「多様性をはぐくむ」ことに寄与する。

4.3. 今後の課題

今後の課題は次の 2 点である。

一つ目は、一般性の実証的な確認である。本研究は問題解決の様相を深くとらえるため少数のサンプルを対象としている。これにより「不十分な解答」の検討の学びへの寄与の在り方についての示唆は得られたものの、一般性の有無については検討できていない。今後、適切なサンプルサイズのもと、一般性を検証する必要がある。

二つ目は実際の授業場面での検討である。実際の授業においては実験室での検討とは異なる要素が多分に影響する。そのため、実験室では検討することのできない要素との関係について検討し、より実践へ寄与できる知見を提示する必要がある。また、その際、教師の支援との関係も検討することが必要である。

参考文献

大越健斗（2016）「中学校数学における協同問題解決過程の分析—平面図形問題のつまずきに注

- 目して一』『東京大学大学院修士学位論文』
- 河崎美保 (2006) . 「算数授業において自分と異なる解法を聞くことの効果—規範解法が使われなくなった事例の分析—」『京都大学大学院教育学研究科紀要』(52), 427-439.
- 河崎美保 (2007) . 「算数文章題の解法発表を聞く能力—他者発言の再生・評価と理解変化の関係—」『京都大学大学院教育学研究科紀要』(53), 338-351.
- 河崎美保, 白水始 (2011) . 「算数文章題の解法学習に対する複数解法説明活動の効果—込み具合比較課題を用いて—」『教育心理学研究』59, 13-26.
- 河崎美保 (2013) 『複数解法提示による算数の学習促進効果—込み具合比較課題を用いて—』ナカニシヤ出版
- 藤村宣之, 太田慶司 (2002) . 「算数授業は児童の方略をどのように変化させるか—数学的概念に関する方略変化のプロセス—」『教育心理学研究』50, 33-42.
- 森田英嗣, 稲垣佳世 (1997) . 「選択し提示の有無が算数での集団討論の過程と所産に及ぼす効果」『教育心理学研究』45, 129-139.
- Durkin, K., Rittle-Johnson, B. (2012) . The effectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude. *Learning and Instruction*, 22, 206-214
- Heemsoth, T., Heinze, A., (2014) . The impact of incorrect examples on learning fractions: A field experiment with 6th grade students. *Instructional Science*. 42, 639-657
- Rittle-Johnson, B., Star, R. J. (2007) . Does Comparing Solution Methods Facilitate Conceptual and Procedural Knowledge? An Experimental Study on Learning to Solve Equations. *Journal of Educational Psychology*, 99 (3) , 561-574
- Rittle-Johnson, B., Star, R. J. (2009) . Compared With What? The Effects of Different Comparisons on Conceptual Knowledge and Procedural Flexibility for Equation Solving. *Journal of Educational Psychology*, 101 (3) , 529-544
- Rittle-Johnson, B., Star, R. J., Durkin, K., (2009) . The Importance of Prior Knowledge When Comparing Examples: Influences on Conceptual and Procedural Knowledge of Equation Solving. *Journal of Educational Psychology*, 101 (4) , 836-852.

資料

資料 A

統制群の水準変化

プレテスト水準	ポストテスト水準					
	水準 0	水準 1	水準 2	水準 3	エラー	合計
水準 0	5 (27.8%)	—	—	—	1 (5.6%)	6 (33.3%)
水準 1	2 (11.1%)	5 (27.8%)	1 (5.6%)	—	—	8 (44.4%)
水準 2	—	—	1 (5.6%)	—	—	1 (5.6%)
水準 3	—	—	—	—	—	0 (0%)
エラー	—	1 (5.6%)	2 (11.1%)	—	—	3 (16.7%)
合計	7 (38.9%)	6 (33.3%)	4 (22.2%)	0 (0%)	1 (5.6%)	18 (100%)

介入 A 群の水準変化

プレテスト水準	ポストテスト水準					
	水準 0	水準 1	水準 2	水準 3	エラー	合計
水準 0	1 (6.3%)	1 (6.3%)	1 (6.3%)	—	1 (6.3%)	4 (25.0%)
水準 1	2 (12.5%)	3 (18.8%)	—	—	5 (31.3%)	10 (68.8%)
水準 2	—	1 (6.3%)	—	—	—	1 (0%)
水準 3	—	—	—	—	—	0 (0%)
エラー	—	1 (6.3%)	—	—	—	1 (6.3%)
合計	3 (18.8%)	5 (31.3%)	2 (12.5%)	0 (0%)	6 (37.5%)	16 (100%)

介入 B 群の水準変化

プレテスト水準	ポストテスト水準					
	水準 0	水準 1	水準 2	水準 3	エラー	合計
水準 0	2 (12.5%)	1 (6.3%)	—	—	2 (12.5%)	5 (31.3%)

水準 1	—	3 (18. 8%)	1 (6. 3%)	1 (6. 3%)	1 (6. 3%)	6 (37. 5%)
水準 2	—	—	3 (18. 8%)	—	—	3 (18. 8%)
水準 3	—	—	—	—	—	0 (0%)
エラー	2 (12. 5%)	—	—	—	—	2 (12. 5%)
合計	4 (25. 0%)	4 (25. 0%)	4 (25. 0%)	1 (6. 3%)	3 (18. 8%)	16 (100%)

介入 C 群の水準変化

プレテスト水準	ポストテスト水準					
	水準 0	水準 1	水準 2	水準 3	エラー	合計
水準 0	2 (14. 3%)	1 (7. 1%)	—	—	2 (14. 3%)	5 (35. 7%)
水準 1	1 (7. 1%)	—	3 (21. 4%)	—	2 (14. 3%)	6 (42. 9%)
水準 2	—	—	1 (7. 1%)	1 (7. 1%)	—	2 (14. 3%)
水準 3	—	—	—	—	—	0 (0%)
エラー	—	1 (7. 1%)	—	—	—	1 (7. 1%)
合計	3 (21. 4%)	2 (14. 3%)	4 (28. 6%)	1 (7. 1%)	4 (28. 6%)	14 (100%)

資料 B

水準の推移と克服された要素の関係

分類	水準推移位	克服された要素
(い)	水準 0 (プレ) → 水準 1 (ポスト)	a
	水準 0 (プレ) → 水準 2 (ポスト)	a, (b)
	水準 0 (プレ) → 水準 3 (ポスト)	a, (b), (c)
(ろ)	水準 1 (プレ) → 水準 2 (ポスト)	b
	水準 1 (プレ) → 水準 3 (ポスト)	b, (c)
(は)	水準 2 (プレ) → 水準 3 (ポスト)	c
なし	水準の上昇なし	なし

ただし、a は水準 0 から水準 1 に至るために克服しなければならない要素を意味する。

b は水準 1 から水準 2 に至るために克服しなければならない要素を意味する。

c は水準 2 から水準 3 に至るために克服しなければならない要素を意味する。

また、() でくくられた要素は克服された可能性はあるものの、そうであるとは十分には言えないものを意味する。

資料 C

生徒の記述内容のカテゴリ		
カテゴリ	定義	例
文字	角度の大きさや辺の長さを文字でおくことを指摘する記述をする。	$\angle BAC=2a$ とおく。
条件	問題文から導くことのできる数学的条件を書くことを指摘する記述をする。	$\triangle CFE$ は $CE=CF$ の二等辺三角形だから $\angle CEF=\angle CFE$ ということに気づく。
条件から式を作る	問題文から導くことのできる数学的な条件を用いて立式する（関係式を作成する）ことを促す記述をする。	大きさが同じであるということを、式を用いて表す。
問題文から条件を生成する	問題文から導くことができる条件について検討することを促す記述をする。	問題文から求められる条件を探す。
補助線	補助線を引くことを指摘する記述をする。	補助線を引く。
注目箇所	注目する箇所についての指摘する記述をする。	証明する三角形以外にも注目する。
相似条件設定促進	用いる相似条件を何にするか考えることを促す記述をする。	自分が今からどの相似条件を用いて証明を行うのかを考える。
相似（天下り）	天下り的に相似条件を記述する。	$\angle AFP=\angle AIB$ となる。よって、二角相等より $\triangle APF \sim \triangle ABI$ が証明された。
相似（理由なし）	用いる相似条件を理由なしで記述する。	この問題は二角相等を用いる。
相似（理由あり）	用いる相似条件を理由とともに記述する。	辺の比についての情報が少ないため、二角相等で示すことを考える。
相似（方針・注目なし）	相似条件と共にその後の方針について記述する。ただし、具体的な注目箇所については記述しない。	二角相等で示すために角度の関係について式を作る。
相似（方針・注目あり）	相似条件と共にその後の方針について記述する。ただし、具体的な注目箇所について記述する。	二角相当で示すために、 $\triangle APF$ と $\triangle ABI$ の角度に注目する。
相似（具体）	相似条件と共に示すべき対象とその関係を記述する。	二角相当で示すために、 $\angle AFP=\angle AIB$ となることを示すことを目標にする。
下位（方針・注目なし）	その後の方針について記述する。ただし、具体的な注目箇所については記述し	角度に注目する。

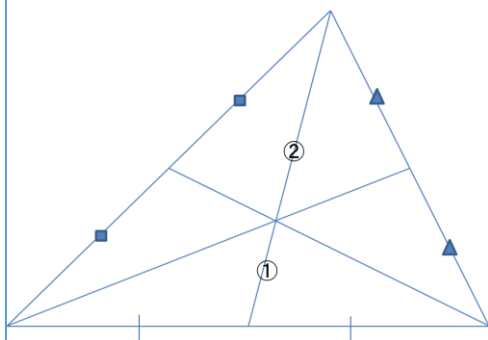
	ない。	
下位（方針・注目あり）	その後の方針について記述する。ただし、具体的な注目箇所について記述する。	$\triangle APF$ と $\triangle ABI$ の角度に注目する。
下位（具体）	示すべき対象とその関係を記述する。	$\angle AFP = \angle AIB$ となることを示すことを目標にする。
下位（文字）	示すべき対象とその関係を文字を含んだ形で記述する。	$\angle AIB = 90^\circ + c$ であるから、 $\angle AFP$ が $90^\circ + c$ となることを目指す。
下位（条件組み込み）	示すべき対象とその関係を条件を用いた形で記述する。	$\triangle CFE$ は二等辺三角形なので $\angle CFE$ が a と b で表せ、それを用いて $\angle AFP$ を求めることで $\angle AIB = \angle AFP$ を示す。

資料D

資料 1

三角形の重心、外心、垂心、内心の説明

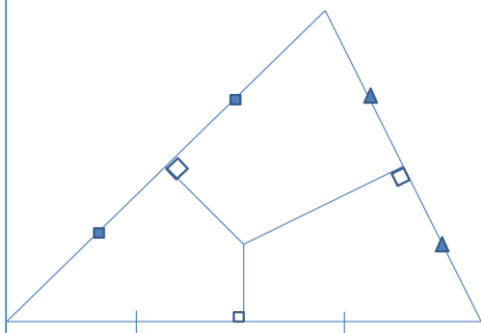
重心



三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ 3 つの線分は 1 点で交わる。この点のことを**重心**という。

また、それぞれの線分を**中線**といい、重心は中線を 2 : 1 の比で分割する。

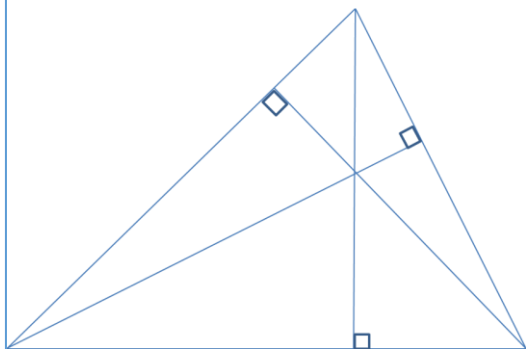
外心



三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。この点のことを**外心**という。

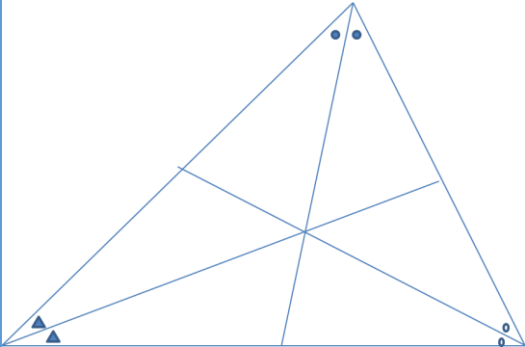
外心は 3 つの頂点から等距離であり、外心を中心として半径がその距離である円は 3 つの頂点を通る。この円のことを**外接円**という。

垂心



三角形の 3 つの頂点からそれぞれの対辺に引いた垂線は 1 点で交わる。この点のことを**垂心**という。

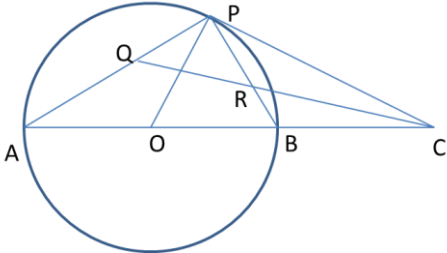
内心



三角形の 3 つの角の二等分線は一点で交わる。この点のことを**内心**という。

◆ワークシートの書き方の例

例題：右の図のように、線分 AB が直径となるような円 O に内接する△ABP がある。直径 AB の延長と点 P における円 O の接線との交点を C とする。また、∠ACP の二等分線と線分 AP、PB の交点をそれぞれ Q、R とする。このとき、△PQC≡△BRC であることを示せ。



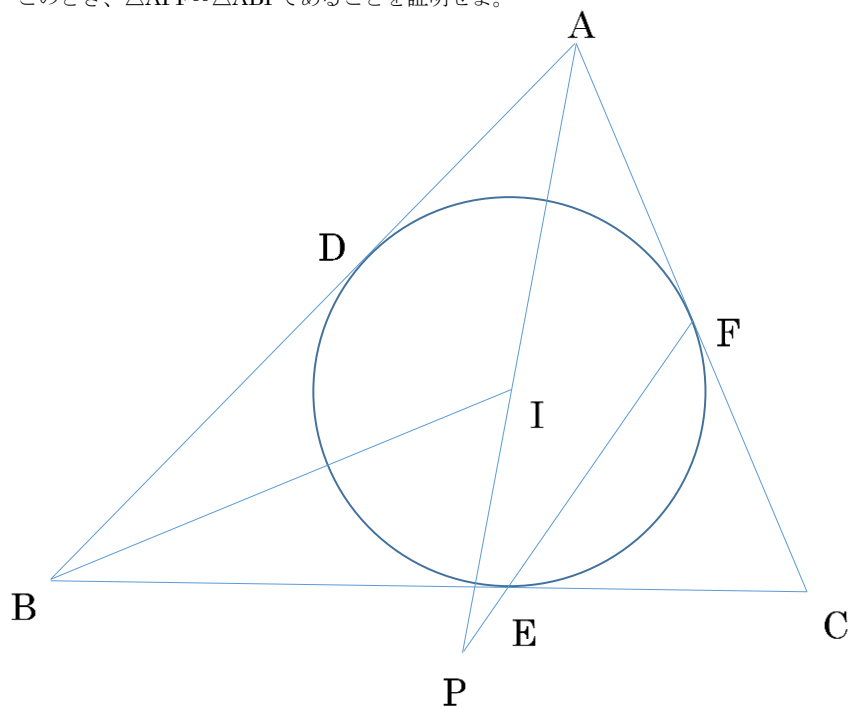
下位目標	求めた条件
<p>△PQC≡△BRC を示す。</p> <p>とりあえず、求まる条件をもとめる。</p> <p>2 組の角がそれぞれ等しいことを用いて相似を示す。</p> <p>⇒①∠PQC=∠CPB</p> <p>②∠CPQ=∠CBP</p> <p>を示す。</p> <p>⇒とりあえず、①を検討する。</p> <p>⇒見つからないので②を検討する。</p>	<p>仮定より ∠PCQ=∠ACQ・・・①</p> <p>円周角の定理より ∠APB=90°・・・②</p> <p>半直線 CP の延長上に点 S をとると</p> <p>接弦定理より ∠ABP=∠APS・・・③</p> <p>∠CPQ=180° - ∠APS・・・④</p> <p>∠CBP=180° - ∠ABP・・・⑤</p> <p>③、④、⑤より</p> <p>∠CPQ=∠CBP・・・⑥</p> <p>①、⑥より 2 組の角がそれぞれ等しいので</p> <p>△OAP≡△BOQ (終)</p>

資料 2 ■ 課題

＜検討課題＞

下の図のような $\triangle ABC$ がある。 $\triangle ABC$ の内心を I 、内接円と辺 AB 、 BC 、 CA の接点を、それぞれ D 、 E 、 F とする。また、 AI の延長と FE の延長の交点を P とする。

このとき、 $\triangle APF \sim \triangle ABI$ であることを証明せよ。



中学 3 年 組 () 名前

下位目標	求めた条件

資料 3 <下位目標の確認>

(1) あなたは先ほどの問題で「課題を解くのをやめてください」と言われた際、どんなことを行っていましたか？ またなぜそれを行っていたかについても書いてください。

(書き方の例:「〇〇を求めようとしていた。(なぜそれをおこなっていたか) □□を示そうと思ったから。」、「〇〇が△になるかどうかを確かめていた。(なぜそれをおこなっていたか) なんとなくきになったから。」、「特に目的を持っていなかった。(なぜそれをおこなっていたか) なし。」など)

<なぜそれをおこなっていたか>

<ほかの下位目標の確認>

(2) もし今求めている条件が求まらない場合、次はなにをもとめようと試みますか。理由も合わせて記述してください。

<理由>

中学 3 年 組 () 名前

資料 4 【解答】

$\triangle APF$ と $\triangle ABI$ において、

AI は $\angle BAC$ の二等分線であるから、 $\angle PAF = \angle BAI \cdots \textcircled{1}$

$\angle BAC = 2a$ 、 $\angle CBA = 2b$ 、 $\angle ACB = 2c$ とおくと、 $\triangle ABC$ において

$$2a + 2b + 2c = 180^\circ \quad \text{よって、} a + b + c = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

$\triangle CEF$ は、 $CE = CF$ の二等辺三角形であるから

$$\angle CFE = (180^\circ - 2c) \div 2 = 90^\circ - c$$

$$\text{よって、} \angle AFP = 180^\circ - (90^\circ - c) = 90^\circ + c \cdots \textcircled{3}$$

一方、 $\triangle ABI$ において、 $\angle BAI = a$ 、 $\angle ABI = b$ であるから、

$$\angle AIB = 180^\circ - (a + b)$$

②より、 $a + b = 90^\circ - c$ であるから、

$$\angle AIB = 180^\circ - (90^\circ - c) = 90^\circ + c \cdots \textcircled{4}$$

③、④より、 $\angle AFP = \angle AIB \cdots \textcircled{5}$

①、⑤より、2 組の角がそれぞれ等しいので $\triangle APF \simeq \triangle ABI$ □

(1) あなたはどのようなことに気を付ければこの問題を解くことができたでしょうか？特に問題へのアプローチの仕方（どのように問題を解き進めればよかったか、何に注意して問題を解き進めればよかったかなど）について書いてください。

中学 3 年 組 () 名前

資料 5 介入 A

たかしくんは上の問題をどのように解いたかを尋ねられ、次のように答えました。

点 I は内心だから、 $\angle BAI = \angle CAI$ 、 $\angle ABI = \angle CBI$ になる。

あと、対頂角より、 $\angle BEP = \angle CEF$ になる。

あとは、内接円の性質より、 $AD = AF$ 、 $CF = CE$ 、 $BE = BD$ になる。

あとは、、なにがあるんだろう。

(2) たかしくんはどのようなことに気を付ければこの問題を解くことができたでしょうか？特に問題へのアプローチの仕方について、たかしくんに説明してあげるつもりで記述してください。

(3) ペアの相手と相談して、(2) について考えを共有して整理してください。また、新たに気づいたことについて話し合ってください。そして、(2) の場合と同様に問題のアプローチの仕方について、たかし君に説明してあげるつもりで記述してください。

ペアの相手：

中学 3 年 組 () 名前

資料 5 介入 B

たかしくんは上の問題をどのように解いたかを尋ねられ、次のように答えました。

まず、相似を示せばよいから、①二角相等、②二辺比挟角相等、③三辺比相等を示せばよいと考えました。

とりあえず、点 I は内心だから、 $\angle BAI = \angle CAI$ 、 $\angle ABI = \angle CBI$ になることに気づきました。

あと、内接円の性質より、 $AD = AF$ 、 $CF = CE$ 、 $BE = BD$ になることに気づきました。

とりあえず、ここまで求めた条件から①二角相等、②二辺比挟角相等のどちらかで示せそうだと考えました。

二辺比挟角相等で示すには、 $AI : AB = AF : AP$ が示せればよいです。

$AD = AF = k$ 、 $CF = CE = m$ 、 $BE = BD = n$ とおくと、 $AB = k + m$ 、 $AF = l$ と書けます。

しかし、ここで二辺比挟角で示すことは難しそうだと考えました。

そのため、二角相等で示すことを考えました。二角相等で示すためには、 $\angle ABI = \angle APF$ または $\angle AIB = \angle AFP$ を示せばよいです。

とりあえず、 $\angle BAI = \angle CAI = a$ 、 $\angle ABI = \angle CBI = b$ と置いて、 $\angle AIB = 180^\circ - (a + b)$ となりました。

でも、そのあとが分かりません。

- (2) たかしくんはどのようなことに気を付ければこの問題を解くことができたでしょうか？特に問題へのアプローチの仕方について、たかし君に説明してあげるつもりで記述してください。

- (3) ペアの相手と相談して、(2) について考えを共有して整理してください。また、新たに気づいたことについて話し合ってください。そして、(2) の場合と同様に問題のアプローチの仕方について、たかし君に説明してあげるつもりで記述してください。

ペアの相手：

中学 3 年 組 () 名前

資料 5 介入 C

たかしくんは上の問題をどのように解いたかを尋ねられ、次のように答えました。

まず、相似を示せばよいから、①二角相等、②二辺比夾角相等、③三辺比相等のどれかを示せばよいと考えました。

とりあえず、点 I は内心だから、 $\angle BAI = \angle CAI$ 、 $\angle ABI = \angle CBI$ になることに気づきました。

あと、内接円の性質より、 $AD = AF$ 、 $CF = CE$ 、 $BE = BD$ になることに気づきました。

とりあえず、ここまで求めた条件から①二角相等、②二辺比夾角相等のどちらかで示せそうだと考えました。

②二辺比夾角相等で示すには、 $AI : AB = AF : AP$ が示せばよいです。

$AD = AF = a$ 、 $CF = CE = c$ 、 $BE = BD = b$ とおくと、 $AB = a + b$ 、 $AF = a$ と書けます。

でも、そのあとが分かりません。

(2) たかしくんはどのようなことに気を付ければこの問題を解くことができたでしょうか？特に問題へのアプローチの仕方について、たかし君に説明してあげるつもりで記述してください。

(3) ペアの相手と相談して、(2) について考えを共有して整理してください。また、新たに気づいたことについて話し合ってください。そして、(2) の場合と同様に問題のアプローチの仕方について、たかし君に説明してあげるつもりで記述してください。

中学 3 年 組 () 名前

資料 6 <事後課題>

点 O, G, H は鋭角三角形 ABC の外心 O 、重心 G 、垂心 H である。このとき、 $\triangle AHG$ と $\triangle DOG$ が相似であることを示せ。また、そのときの相似比を求めよ。

ただし、点 D は直線 AG と線分 BC の交点である。

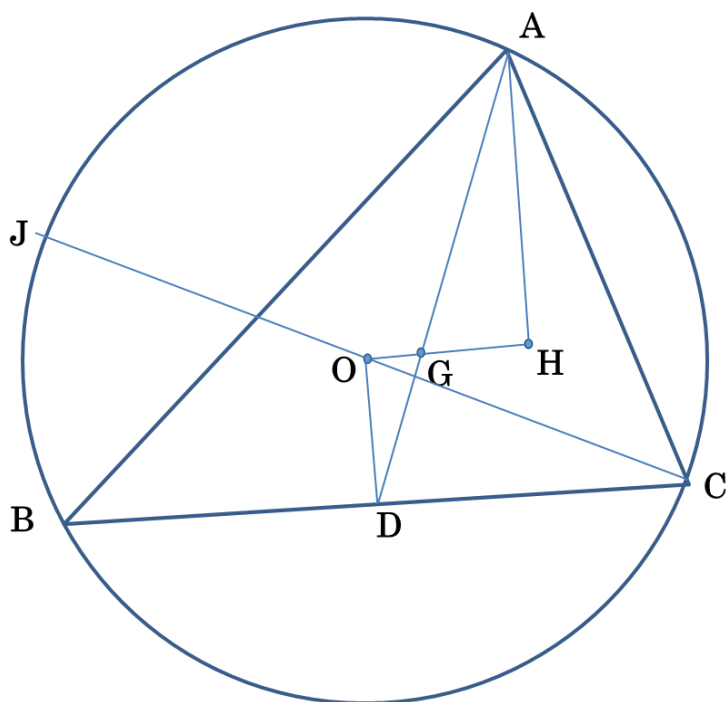
また、図にかかっている円は、 $\triangle ABC$ の外接円である。

また、線分 CJ は外接円の直径である。

また、点 H 、点 G 、点 O は一直線であるとは限らないことに注意せよ。

※問題を解くにあたり、解き方に次のような制限をつける。

点 H, G, O が一直線上にある（結んで一直線になる）ことを示してから、それを利用して $\triangle AHG$ と $\triangle DOG$ が相似であることが示すという方針では解きにくいので、この方針はとらないようにせよ。



中学 3 年 組 () 名前

左の問題に対して、解答が途中まで作成されている。この続きの解答を作成してください。

問：△AHG と△DOG が相似であることを示せ。また、そのときの相似比を求めよ

重心の性質より、 $BD=CD$ ・・・①
①より、外心の性質から、 $OD\perp BC$ ・・・②
頂点 A から線分 BC へ垂線を下したとき、その垂線と線分 BC との交点を E と置くと、
垂心の性質より、 $AE\perp BC$ ・・・③
②、③より、 $AE\parallel OD$ ・・・④
④より平行線の錯角は等しいので、 $\angle ODG=\angle HAG$ ・・・⑤
重心の性質より、 $AG:GD=2:1$ ・・・⑥
点 O は外心であるため、 $CO=OJ$ ・・・⑦
また、円周角の定理より、 $\angle JBC=90^\circ$ ・・・⑧、 $\angle JAC=90^\circ$ ・・・⑨
②、⑧より $OD\parallel JB$ ・・・⑩
①、⑦より、中点連結定理から $OD:JB=1:2$ ・・・⑪

下位目標	求めた条件

資料 7 <下位目標の確認>

(1) (1) あなたは先ほどの問題で「課題を解くのをやめてください」と言われた際、どんなことを行っていましたか？ またなぜそれを行っていたかについても書いてください。

(書き方の例: 「○○を求めようとしていた。(なぜそれをおこなっていたか) □□を示そうと思ったから。」、「○が△になるかどうかを確かめていた。(なぜそれをおこなっていたか) なんとなく気になったから。」、「特に目的を持っていなかった。(なぜそれをおこなっていたか) なし。」 など)

<理由>

<ほかの下位目標の確認>

(2) もし今求めている条件が求まらない場合、次はなにをもとめようと試みますか。理由の合わせて記述してください。(もし答えが求まった人は自分が今回求めた以外の方法で示すにはどこを求めようと思うかを書いてください。)

<理由>

中学 3 年 組 () 名前

資料 8 <事後課題>解答

重心の性質より、 $BD=CD$ ・・・①

①より、外心の性質から、 $OD \perp BC$ ・・・②

頂点 A から線分 BC へ垂線を下したとき、その垂線と線分 BC との交点を E と置くと、
垂心の性質より、 $AE \perp BC$ ・・・③

②、③より、 $AE \parallel OD$ ・・・④

④より平行線の錯角は等しいので、 $\angle ODG = \angle HAG$ ・・・⑤

重心の性質より、 $AG : GD = 2 : 1$ ・・・⑥

点 O は外心であるため、 $CO = OJ$ ・・・⑦

また、円周角の定理より、 $\angle JBC = 90^\circ$ ・・・⑧、 $\angle JAC = 90^\circ$ ・・・⑨

②、⑧より $OD \parallel JB$ ・・・⑩

①、⑦より、中点連結定理から $OD : JB = 1 : 2$ ・・・⑪

線分 JA と線分 BH を引く。

点 H は垂線なので直線 BH と線分 AC の交点を F とおくと、 $\angle BFC = 90^\circ$ ・・・⑫

⑨、⑫より $JA \parallel BF$ ・・・⑬

また、④、⑩より $AH \parallel JB$ ・・・⑭

⑫、⑬より $\square AJBH$ は平行四辺形・・・⑮

平行四辺形の対辺の長さは等しいので、⑭より $JB = AH$ ・・・⑯

⑪、⑯より、 $AH : OD = 2 : 1$ ・・・⑰

⑤、⑥、⑰より 2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle AHG \sim \triangle DOG$ (終)

(1) あなたはどのようなことに気を付ければこの問題を解くことができたでしょうか？特に問題へのアプローチの仕方(どのように問題を解き進めればよかったか、何に注意して問題を解き進めればよかったかなど)について書いてください。

中学 3 年 組 () 名前

資料 9

次の質問に答えてください。

質問 1. 先ほどのたかしくんの解答におけるペアでの検討はうまくいったとおもいますか。

1. とてもうまくいった
2. うまくいった
3. どちらともいえない
4. うまくいかなかった
5. まったくうまくいかなかった

質問 2. 質問 1 の回答のように考えた理由をかいてください。

ご協力ありがとうございました。

謝辞

本研究に協力いただいた学校の先生方，生徒の皆様，心より感謝申し上げます。また，研究を行うに

あたりご指導，ご助言いただきました秋田喜代美教授（東京大学大学院）に感謝申し上げます。また，本論文の作成にあたりコメントをいただきました秋田研究室の皆様，研究の相談に乗っていただきました秋田研究室の先輩である児玉佳一さんに心より感謝申し上げます。