

橢円軌道上における剛体の
回転運動の励起とその制御

川勝 康弘

楕円軌道上における剛体の回転運動の励起とその制御

川勝康弘

本論文を作成するにあたって、論文の内容や構成に関して終始懇切に御指導いただき、有用な御助言を頂戴した田辺徹教授、および中須賀真一助教授に感謝いたします。

目次

図目次	2
表目次	5
記号一覧	6
第1章 本研究の概観	8
第2章 楕円軌道上の剛体の姿勢運動	11
2-1 運動方程式	12
2-2 2次元運動と3次元運動	17
2-3 関連する過去の研究と本研究の立場	20
第3章 重力傾斜トルクによる回転運動の励起	25
3-1 楕円軌道上の姿勢運動の概観	26
3-2 LibrationとTumbling	31
3-3 1軌道周期の間の回転の強さの変化	36
3-4 複数軌道周期の間の回転の強さの変化	48
第4章 回転運動のプログラムと追従制御	82
4-1 回転運動のプログラムと追従制御の概念	83
4-2 回転運動のプログラム法	85
4-3 回転運動の追従制御法	90
第5章 Tethered OTVを用いた輸送システムへの応用	114
5-1 Tethered OTVの概念	115
5-2 Tethered OTVを用いた場合の軌道間輸送能力	119
5-3 Tethered OTVによる回転加速の運動シミュレーション	121
第6章 結論と今後の課題	132
6-1 結論	133
6-2 今後の課題	135
参考文献	137
Appendix A シミュレーションに用いた数値計算	141

図目次

Fig.2-1	基準座標系と機体座標系	23
Fig.2-2	軌道面内の姿勢運動	23
Fig.2-3	3次元運動の中の2次元運動	24
Fig.3-1	LibrationとTumbling	50
Fig.3-2	円軌道上の運動の例（静止）	51
Fig.3-3	円軌道上の運動の例（秤動）	52
Fig.3-4	円軌道上の運動の例（回転）	53
Fig.3-5	楕円軌道上の運動の例（秤動の励起）	54
Fig.3-6	楕円軌道上の運動の例（秤動の励起）（2軌道周期の間の運動）	55
Fig.3-7	楕円軌道上の運動の例（回転の励起）	56
Fig.3-8	楕円軌道上の運動の例（秤動→回転→秤動）	57
Fig.3-9	エネルギー・角運動量の保存（円軌道上の運動）	58
Fig.3-10	エネルギー・角運動量の保存（楕円軌道上の運動）	58
Fig.3-11	土星の衛星ハイペリオン	59
Fig.3-12	ハイペリオンの不規則な姿勢運動	59
Fig.3-13	Tumblingの励起（初期状態についての条件）	60
Fig.3-14	Tumblingを起こしにくい初期状態（模式図）	60
Fig.3-15	Tumblingの励起（初期状態についての条件。 k_y 一定、 e 変化）	61
Fig.3-16	Tumblingを起こす初期状態の割合	62
Fig.3-17	Tumblingの励起（初期状態についての条件。 e 一定、 k_y 変化）	63
Fig.3-18	パラメータ（ e, k_y ）と R_{tum}	64
Fig.3-19	θ_0 と \hat{a}_f の関係	65
Fig.3-20	$\hat{\theta}_0$ と \hat{a}_f の関係（極大値を揃えたグラフ）	66
Fig.3-21	分布割合（dispersion rate）の考え方	66
Fig.3-22	\hat{a}_f の分布割合	67
Fig.3-23	\hat{a}_0 と $\hat{a}_{f,max}$ 、 $\hat{a}_{f,ave}$	67
Fig.3-24	θ_0 と Δh の関係（重力の変化）	68
Fig.3-25	N_g の履歴（重力の変化）	68
Fig.3-26	N_g の履歴（重力の変化）	68
Fig.3-27	θ_0 と Δh の関係（重力の変化と軌道運動）	69
Fig.3-28	N_g の履歴（重力の変化と軌道運動）	69
Fig.3-29	θ の履歴（重力の変化と軌道運動）	69
Fig.3-30	非線形性の効果（ N_g の履歴）	70
Fig.3-31	θ_0 と \hat{a}_f の関係（重力の変化と非線形性）	70
Fig.3-32	N_g の履歴（重力の変化と非線形性）	70
Fig.3-33	θ_0 に敏感な部分（ θ の履歴）	71
Fig.3-34	θ_0 に敏感な部分（ N_g の履歴）	71

Fig.3-35	θ の履歴の密集 (重力の変化と非線形性)	71
Fig.3-36	$\hat{\theta}_0$ と \hat{a}_f の関係 (極大値を揃えたグラフ) (重力の変化と非線形性)	72
Fig.3-37	$\hat{\theta}_0$ と \hat{a}_f の関係 (極大値を揃えたグラフ) (軌道運動と非線形性)	72
Fig.3-38	θ の履歴の密集 (軌道運動と非線形性)	73
Fig.3-39	\hat{a}_0 と $\hat{a}_{f,max}$ の関係 (e の影響)	74
Fig.3-40	\hat{a}_0 と $\hat{a}_{f,ave}$ の関係 (e の影響)	74
Fig.3-41	$\hat{\theta}_0$ と \hat{a}_f の関係 ($e=0.2$)	75
Fig.3-42	$\hat{\theta}_0$ と \hat{a}_f の関係 ($e=0.5$)	75
Fig.3-43	$\hat{\theta}_0$ と \hat{a}_f の関係 ($e=0.8$)	75
Fig.3-44	\hat{a}_0 と $\hat{a}_{f,ave}$ 、 $\hat{a}_{f,max}$ (e の影響)	76
Fig.3-45	$\hat{\theta}_0$ と \hat{a}_f の関係 ($k_y=0.2$)	77
Fig.3-46	$\hat{\theta}_0$ と \hat{a}_f の関係 ($k_y=0.6$)	77
Fig.3-47	$\hat{\theta}_0$ と \hat{a}_f の関係 ($k_y=1.0$)	77
Fig.3-48	\hat{a}_0 と $\hat{a}_{f,ave}$ 、 $\hat{a}_{f,max}$ (k_y の影響)	78
Fig.3-49	初期状態量と複数周回後の回転の強さ (\hat{a}) の関係	79
Fig.3-50	初期状態量と複数周回後の回転の強さ ($\hat{\theta}$) の関係	79
Fig.3-51	初期状態量と複数周回後の回転の強さ (E_a) の関係	79
Fig.3-52	周回数と $\hat{a}_{f,max}$ 、 $\hat{a}_{f,ave}$	80
Fig.3-53	周回数と \hat{a}_f の分布	80
Fig.4-1	回転運動のプログラムと追従制御の概念	95
Fig.4-2	小さな制御力と非線形性の効果	96
Fig.4-3	等価初期状態の考え方	97
Fig.4-4	プログラム前の自由運動 ($\hat{\theta}$ の履歴)	97
Fig.4-5	θ_0 、 \hat{a}_0 と \hat{a}_f の関係	98
Fig.4-6	プログラム履歴のモデル	98
Fig.4-7	等価初期状態の到達可能範囲	98
Fig.4-8	プログラム履歴の例 (u の履歴)	99
Fig.4-9	プログラム後の運動 ($\hat{\theta}$ の履歴)	99
Fig.4-10	回転を加速するプログラム例	100
Fig.4-11	回転を減速するプログラム例	100
Fig.4-12	回転速度をほぼ一定に保つプログラム例	100
Fig.4-13	微小な外乱による実際の軌道のずれ	101
Fig.4-14	初期誤差がある場合の状態フィードバック制御 (μ の影響)	102
Fig.4-15	持続外乱がある場合の状態フィードバック制御 (μ の影響)	102
Fig.4-16	初期誤差がある場合の状態フィードバック制御 (初期誤差の影響)	103
Fig.4-17	持続外乱がある場合の状態フィードバック制御 (持続外乱の影響)	103
Fig.4-18	u に制限がある場合の制御 (初期誤差の影響)	104
Fig.4-19	u に制限がある場合の制御 (持続外乱の影響)	104
Fig.4-20	状態フィードバック制御と制御の追従性 (制御力 u が十分な場合)	105

Fig.4-21	状態フィードバック制御と制御の追従性 (制御力 u が不十分な場合)	105
Fig.4-22	初期誤差がある場合の状態量の観測 (姿勢角のみ観測)	106
Fig.4-23	初期誤差がある場合の状態量の観測 (姿勢角、姿勢角速度を観測)	106
Fig.4-24	持続外乱がある場合の状態量の観測 (姿勢角のみ観測)	107
Fig.4-25	持続外乱がある場合の状態量の観測 (姿勢角、姿勢角速度を観測)	107
Fig.4-26	状態量の観測と推定の追従性	107
Fig.4-27	観測値を元にした制御 (1 周期の間の運動)	108
Fig.4-28	観測値を元にした制御 (2 周期の間の運動)	109
Fig.4-29	e が大きい軌道での制御性	110
Fig.4-30	$\dot{\theta}$ が大きい場合の制御性	111
Fig.5-1	回転するテザーシステムからのペイロードの放出	125
Fig.5-2	Tethered OTV を用いたミッション例	125
Fig.5-3	Tethered OTV を用いた軌道間輸送ミッションのモデル	126
Fig.5-4	Tethered OTV と従来型 OTV の燃料消費比較 (ミッション Case 1)	127
Fig.5-5	Tethered OTV と従来型 OTV の燃料消費比較 (ミッション Case 2)	127
Fig.5-6	Tethered OTV と従来型 OTV の燃料消費比較 (ミッション Case 3)	127
Fig.5-7	リファレンス運動の例 (姿勢角速度履歴)	128
Fig.5-8	リファレンス運動の例 (テザー長履歴)	128
Fig.5-9	リファレンス運動の例 (必要電力履歴)	128
Fig.5-10	外乱がある場合の運動の例 (姿勢角速度履歴)	129
Fig.5-11	外乱がある場合の運動の例 (テザー長履歴)	129
Fig.5-12	外乱がある場合の運動の例 (必要電力履歴)	129
Fig.A-1	シミュレーション結果の刻み幅による違い (独立変数は r)	143
Fig.A-2	シミュレーション結果の刻み幅による違い (独立変数は φ)	144
Fig.A-3	複数周回にわたるシミュレーションにおける刻み幅による違い	145
Fig.A-4	複数周回にわたる運動における θ_0 と \hat{a}_f の関係の刻み幅による違い	145

表目次

Tab.3-1	6つのモデルで考慮に入れる要素	81
Tab.4-1	選ばれた誘導スケジュールの例	112
Tab.4-2	考慮した持続外乱の大きさ	112
Tab.4-3	Fig.4-22~25に用いた外乱のモデル、観測値	113
Tab.4-4	Fig.4-27~30に用いた外乱、レギュレータ、オブザーバのモデル	113
Tab.5-1	検討した軌道間輸送ミッションの3つのケース	130
Tab.5-2	Tethered OTVシステムに関する諸値	130
Tab.5-3	シミュレーションに用いた移行軌道	131
Tab.5-4	シミュレーションに用いたOTVのコンフィギュレーション	131
Tab.5-5	シミュレーションに用いた外乱モデル	131

記号一覧

a	軌道長半径
\hat{a}	回転強度パラメータ
\hat{a}_f	\hat{a} の終端値
$\hat{a}_{f,ave}, \hat{a}_{f,max}$	\hat{a}_f の平均値、最大値
$\hat{a}_{f1}, \hat{a}_{f2}$	軌道1周後、2周後の \hat{a}
\hat{a}_s	\hat{a} の e 、 k_y に対する正規化の規格
\hat{a}_0	\hat{a} の初期値
\tilde{a}	\hat{a}_s によって正規化された \hat{a}
C	基準座標系から機体座標系への変換行列
E	系の全エネルギー
E_a	姿勢運動に関するエネルギー
E_c	質量中心の運動に関するエネルギー
$\Delta E_a, \Delta E_c$	E_a 、 E_c の初期値からの変化量
e	離心率
h	剛体の角運動量ベクトル
h	系の全角運動量
Δh	角運動量の変化量(制御力の積分値)
Δh_{max}	角運動量の変化量の最大値
h_a	姿勢運動に関する角運動量
h_c	質量中心の運動に関する角運動量
$\Delta h_a, \Delta h_c$	h_a 、 h_c の初期値からの変化量
I	剛体の慣性テンソル
I_x, I_y, I_z	機体軸周りの慣性モーメント
K	系の運動エネルギー
k_x, k_y, k_z	慣性モーメント比
L	ラグランジェ関数
M	剛体にはたらくモーメントベクトル
m	剛体の質量
M_g	重力傾斜トルクによるモーメントベクトル
N_g	重力傾斜トルク
\bar{N}_g	重力傾斜トルクの振幅
P	OTV電力

R_{turn}	Tumblingを起こす割合
r	地心距離
SF	テザー強度の安全率
T	テザー張力
t	時間
t_a	遠地点通過時刻
t_{c0}, t_{cf}	制御期間の開始時刻、終了時刻
\bar{t}	制御能力に関する特性時間 $\Delta h_{\text{max}} / u_{\text{max}}$
U	系のポテンシャルエネルギー
u	制御力
u_{max}	制御力の最大値
v	持続外乱
w	観測誤差
X, Y, Z	基準座標系
x_B, y_B, z_B	機体座標系
δ_θ	姿勢角推定誤差
ε_θ	姿勢角誤差
γ_1, γ_2	オブザーバの極
μ	重力定数
μ_1, μ_2	レギュレータの極
ϕ	ロールオイラー角
θ	ピッチオイラー角 (軌道面内姿勢角)
θ_0	姿勢角初期値
$\Delta\theta_0$	θ_0 の変化量
θ_1	軌道1周後の θ
$\bar{\theta}$	リファレンス軌道の姿勢角
$\tilde{\theta}$	極大点を揃えるために移動された θ
ω	剛体の姿勢運動の角速度ベクトル
ψ	ヨーオイラー角
φ	真近点離角

第1章 本研究の概観

本研究では楕円軌道上の剛体の姿勢運動を扱う。この運動の運動方程式には重力傾斜トルクが非線形項として入ってくる。運動の非線形性の強さはこの項に含まれる2つのパラメータ、剛体の形状（慣性モーメント比）と軌道の離心率に依存する。離心率の大きい軌道上でも、慣性モーメント比が0に近い形状の剛体の場合、重力傾斜トルクの項は微小となり、線形方程式に対する微小擾乱として扱うことができる。この運動については多くの文献で楕円軌道上のスピン衛星の姿勢運動として扱われている。

一方、重力傾斜トルクの影響が大となる、慣性モーメント比の大きい剛体であっても、円軌道上にある場合には、第一種楕円積分の形の解があることが知られている。離心率が小さな楕円軌道上の運動は、方程式を離心率について展開することで近似解を求めることができる。

しかし、離心率が大きい軌道上の、慣性モーメント比が大きい剛体の姿勢運動は強い非線形性を有し、複雑な様相を示す。この条件下の姿勢運動を取り扱った研究の例は多くなく、このような条件下の周期解を探す試みが散見される程度である。しかし、この範疇の運動は非常に興味深く、中には回転運動を励起するような応用可能な運動があることがわかってきたので、本研究では、この領域の姿勢運動を取り扱う。

以下の構成は次の通りである。

第2章では、まず、運動を支配する運動方程式が導かれる。次に、一般の姿勢運動（3次元運動）と剛体の軌道面内に限定された姿勢運動（2次元運動）の定性的な性質を議論する。ここでは、2次元運動の中に、この興味深い運動の主要な要素が含まれていることが述べられ、第3章以降で運動の検討を2次元運動に限定することの妥当性の根拠が示される。最後に、関連する過去の研究の流れを示し、本研究が過去に詳しく取り上げられていない領域の運動を対象としていることを述べている。

第3章は、本論文のコアとなる章である。ここでは、重力傾斜トルク以外の外力トルクが作用しない、いわゆる自由運動について検討している。まず、楕円軌道上の姿勢運動を円軌道上の安定な姿勢運動と対比する形で示し、楕円軌道上の姿勢運動が不安定なものであることを示している。次に、その不安定さの顕著な例として、楕円軌道上では、重力傾斜トルク以外の外力が作用しないような状態でも、回転運動が励起されることを示し、楕円軌道上では回転運動こそ自然な運動であることを示している。続いて、軌道周回ごとの回転運動の変化に注目している。1軌道周期の間の回転の強さの変化が、初期状態に強く、複雑に依存することが示され、このふるまいが3つの要因、すなわち

1. 楕円軌道上の位置によって重力の強さが変化すること
2. 楕円軌道上の位置によって軌道角速度が変化すること
3. 重力傾斜トルクが姿勢角の非線形関数で表現されること

の相互作用によって生み出されることが示される。最後に、複数年軌道周期にわたる運動が取り上げられる。複数年軌道周期にわたる運動は、基本的には1軌道周期の運

動の繰り返しとなる。しかし、周回ごとの回転運動の強さの変化に着目すると非常に複雑な性質が現れる。初期状態と数周回後の運動の関係は、1軌道周期ごとの非線形な関係の繰り返しによってカオス的な様相を呈し、数周回後の運動が初期状態量に非常に敏感となることが示される。この結果、複数軌道周期にわたって、何らかの目的をもった運動を実現しようとする場合、自由運動の範囲内でその運動を実現することが困難であることがわかる。

第4章では、以上の結果をうけて、目的の運動を実現するために制御外力を加えることを検討している。本論文では「目的をもった運動を実現するために外力を加える」という操作を、大きく2つに区別し、それぞれに「プログラム」と「追従制御」という名称を用いている。まず初めに、プログラムについての議論がなされる。第3章で示したとおり、自由運動の範囲内で複数軌道周期にわたって何らかの目的をもった運動を実現することは困難である。そこで、周回ごとに制御力を加えることで、目的の運動を実現するような運動履歴を作り出すことを考える。本論文ではこのような形で制御力を加えることをプログラムと称し、ここではその方法を述べている。次に追従制御についての議論がなされる。プログラムにより作られた予定された運動と実際の運動のあいだに誤差があったり、運動に外乱が加わった場合、たとえそれが微小であっても、それが放置されると、数周回後の大きな運動の変化となって現れる。そこで、実際の運動が予定の運動から大きくずれないように制御力を加えることを考える。本論文ではこのような形で制御力を加えることを追従制御と称し、ここではその方法を述べている。

第5章では、第3章で示された回転運動が有意なものであるか、あるいは第4章で示された制御力が具体的にはどの程度のものであるかを検討するために、一つの例として、この運動をTethered OTVを用いた軌道間輸送へ応用することについて検討している。最初にTethered OTVの概念が説明され、続いてTethered OTVの概要を従来型のOTVを用いた場合と軌道間輸送能力を比較することで示している。最後に、前章までの結果を受けて、Tethered OTVの運動の主要な部分のシミュレーションがおこなわれ、前章までに示した運動が現実的なOTVの能力の範囲内で実現可能であることが示される。

第6章で結論をまとめ、今後の課題を示している。

以上が、本論文の概観である。

第2章 楕円軌道上の剛体の姿勢運動

2-1 運動方程式

2-1-1 本論文で用いるモデル

2-1-2 運動方程式の導出

2-2 2次元姿勢運動と3次元姿勢運動

2-2-1 3次元運動の中の2次元運動の位置付け

2-2-2 本研究の目的との関係

2-2-3 3次元運動の定性的考察

2-3 楕円軌道上の姿勢運動に関する過去の研究

2-3-1 過去の研究の概観

2-3-2 本研究が対象とする領域

第2章の図表

2-1 運動方程式

本節では、楕円軌道上の剛体の姿勢運動の方程式を導出する。

2-1-1 本論文で用いるモデル

本論文で用いる基本的なモデルについて説明する。

第一に、運動を考察する物体は、基本的に剛体であるとする。例外として、第4章で、制御トルクを発生させる方法の例として、「慣性モーメントを変化させる」という形で物体形状の限定的な変化を扱っている。

第二に、物体の質量中心の軌道は、原則として姿勢運動にかかわらず不変であると仮定している。現実には、角運動量保存則により物体の姿勢運動と軌道運動は連成しており、物体の姿勢運動が変化するにしたがって質量中心の軌道は変化する。しかし、姿勢運動の角運動量は、軌道運動の角運動量に比べて微小であり、姿勢運動の変化が軌道におよぼす影響はわずかであることが文献[1]などに示されている。本論文では姿勢運動に焦点をあて、ほとんどの部分で軌道の変化は無視している。軌道運動との連成については、2-1節、および3-1節の一部で取り上げている。姿勢運動と軌道運動の関係をくわしく扱った文献としては文献[16][17]がある。

第三に、物体にはたらく外力としては、基本的に重力のみを考慮に入れる。重力についても、逆二乗重力場と仮定し、 J_2 項以下は無視する。本論文で興味をもつ運動が、重力のみによって引き起こされるものであるということがその理由である。ただし、第4章においては、外乱・制御力として重力以外の外力を想定している。以上が本論文で採用したモデルである。次に、このモデル下の運動方程式を導出する。

2-1-2 運動方程式の導出

(1)剛体の姿勢運動

オイラーの方程式より

$$M = \dot{h} + \omega \times h \quad (2-1)$$

ここで

M :剛体にはたらくモーメント

h :剛体の角運動量

ω :剛体の姿勢運動の角速度

である。剛体の慣性テンソルを I とすれば、

$$h = I\omega \quad (2-2)$$

$$\dot{h} = I\dot{\omega} \quad (2-3)$$

(2-3)を(2-1)に代入し整理すると

$$I\dot{\omega} = M - \omega \times I\omega \quad (2-4)$$

ここで $(\dot{\quad})$ は d/dt をあらわす。

(2)楕円軌道上の剛体の姿勢運動

2つの座標系、基準座標系 (X, Y, Z系) および機体座標系 (x_B, y_B, z_B 系) を導入する (Fig.2-1)。基準座標系の座標軸については

Z:地心方向

Y:軌道面ベクトル方向

X:Y, Z軸と右手系をなす方向

にとる。機体座標系の座標軸は慣性主軸方向にとっている。

両座標系間の変換行列をCとすると

$$x_B = CX \quad (2-5)$$

ヨー (ψ) → ピッチ (θ) → ロール (ϕ) のオイラー角を用いれば (Fig.2-2)、

$$C = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\theta & \sin\psi \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\psi \sin\theta \sin\phi - \sin\psi \cos\phi & \sin\psi \sin\theta \sin\phi + \cos\psi \cos\phi & \cos\theta \sin\phi \\ \cos\psi \sin\theta \cos\phi + \sin\psi \sin\phi & \sin\psi \sin\theta \cos\phi - \cos\psi \sin\phi & \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

機体角速度とオイラー角変化の関係は

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\psi \cos\theta \\ \sin\psi \sin\theta \sin\phi + \cos\psi \cos\phi \\ \sin\psi \sin\theta \cos\phi - \cos\psi \sin\phi \end{bmatrix} \dot{\phi} \quad (2-7)$$

となる。ここで

$\dot{\phi}$:質量中心の軌道角速度

であり、楕円軌道上では時変である。

物体にはたらく重力傾斜トルクによるモーメントは

$$M_g = \frac{3}{r^3} \begin{bmatrix} \cos^2\theta \cos\phi \sin\phi (I_z - I_y) \\ -\cos\theta \sin\theta \cos\phi (I_x - I_z) \\ -\cos\theta \sin\theta \sin\phi (I_y - I_x) \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

ここで

r :物体質量中心の地心距離

I_x, I_y, I_z :機体軸まわりの慣性モーメント

である。 $r \gg$ (剛体のサイズ) として2次以下の項は無視している。また、先にも述べたとおり重力の J_2 項以下も無視している。

(2-4)における外力トルクとして重力傾斜トルク(2-8)のみを考えれば、運動方程式は

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ |\dot{\theta}| \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi \sec\theta & \cos\phi \sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin\psi \sec\theta \\ \cos\psi \\ \sin\psi \tan\theta \end{bmatrix} \dot{\varphi} \quad (2-9)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \frac{3}{r^3} \begin{bmatrix} k_x \cos^2\theta \cos\phi \sin\phi & k_x \omega_y \omega_z \\ -k_y \cos\theta \sin\theta \cos\phi & -k_y \omega_z \omega_x \\ -k_z \cos\theta \sin\theta \sin\phi & k_z \omega_x \omega_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

ここで

$$k_x = \frac{I_y - I_z}{I_x}, k_y = \frac{I_x - I_z}{I_y}, k_z = \frac{I_x - I_y}{I_z}$$

である。とくに、姿勢運動が質量中心軌道面内に限定されるとすれば (Fig.2-2)、 $\psi, \dot{\psi}, \phi, \dot{\phi} = 0$ とおくことができ、運動はピッチ運動の方程式

$$\ddot{\theta} = -\frac{3k_y}{r^3} \cos\theta \sin\theta - \ddot{\varphi} \quad (2-11)$$

だけで記述される。

(3) 姿勢運動と軌道運動の連成

前段でも述べたとおり、本論文では物体の質量中心の軌道は不変と仮定している。しかし実際には姿勢運動と軌道運動は連成しており、角運動量やエネルギーなどの保存は、両運動の総和として成立していることになる。後章ででてくる例のように、姿勢回転運動が激しくなり、姿勢運動についての角運動量やエネルギーが増加する場合、その分軌道運動についての角運動量やエネルギーが減少しているわけである。この段では、これらの点を明らかにするために、軌道運動まで含めた運動方程式を導いておく。

ここでは、姿勢運動が軌道面内に限定される2次元運動を考える。状態変数は r, φ, θ である。

このとき系の運動エネルギーは、

$$K = \frac{1}{2} I_y (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} \{ \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 \} \quad (2-12)$$

重力に対するポテンシャルエネルギーは、

$$U = -\frac{1}{r} + \frac{3}{2r^3} (I_x - I_z) \sin^2\theta - \frac{3}{4r^3} (3I_x - 3I_y + I_z) \quad (2-13)$$

となる。ここでは、前段と同じく $r \gg$ (剛体のサイズ) として3次以下の項は無視している。このときラグランジェ関数は、

$$L = K - U \quad (2-14)$$

となる。各状態変数についての運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (2-15)$$

を各々計算することにより、

$$\ddot{\theta} = -\frac{3k_y}{r^3} \cos\theta \sin\theta + \frac{2r\dot{\varphi}}{r} - \frac{3(I_x - I_z)}{r^3 r^2} \cos\theta \sin\theta \quad (2-16)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2r\dot{\varphi}}{r} + \frac{3(I_x - I_z)}{r^3 r^2} \cos\theta \sin\theta \quad (2-17)$$

$$\ddot{r} = \dot{\varphi}^2 r - \frac{1}{r^2} + \frac{3}{4r^4} \{3(I_x - I_z)(1 - 2\sin^2\theta) + I_y\} \quad (2-18)$$

となる。 r や φ の式には、軌道運動に関する項に加えて、 θ を含む項があり、姿勢運動によって r 、 φ も変化することがわかる。

また、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーをあわせた系の全エネルギーは

$$E = \frac{1}{2} I_y (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} \{ \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 \} - \frac{1}{r} + \frac{3}{2r^3} (I_x - I_z) \sin^2\theta - \frac{3}{4r^3} (3I_x - 3I_y + I_z) \quad (2-19)$$

であるが、これを姿勢運動に関する項 E_a と、質量中心の運動に関する項 E_c に分けると

$$E = E_a + E_c \quad (2-20)$$

$$E_a = \frac{1}{2} I_y (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 + \frac{3}{2r^3} (I_x - I_z) \sin^2\theta \quad (2-21)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \{ \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 \} - \frac{1}{r} - \frac{3}{4r^3} (3I_x - 3I_y + I_z) \quad (2-22)$$

となる。ここで、「姿勢運動に関する項」が意味する所は、「 θ を含む項」ということである。

さらに、系の全角運動量は、

$$h = I_y (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) + r^2 \dot{\varphi} \quad (2-23)$$

であるが、これを姿勢運動に関する項 h_a と、質量中心の運動に関する項 h_c に分けると

$$h = h_a + h_c \quad (2-24)$$

$$h_a = I_y (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \quad (2-25)$$

$$h_c = r^2 \dot{\varphi} \quad (2-26)$$

となる。ここで、「姿勢運動に関する項」が意味する所は、やはり「 θ を含む項」ということである。

(4)変数の無次元化

第3章以降では、これらの運動方程式を用いて諸解析が行われるが、諸量については以下の基準量で無次元化されている。

長さ	a (軌道長半径)
質量	m (剛体質量)
時間	$\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$ (μ は重力定数)
角速度	$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$
角加速度	$\frac{\mu}{a^3}$
速度	$\sqrt{\frac{\mu}{a}}$
加速度	$\frac{\mu}{a^2}$
力	$\frac{m\mu}{a^2}$
慣性モーメント	ma^2
角運動量	$m\sqrt{a\mu}$
トルク	$\frac{m\mu}{a}$

2-2 2次元姿勢運動と3次元姿勢運動

一般的に、剛体は3次元的な姿勢運動をおこなう。すなわち、剛体の姿勢に関する自由度は3である。これに対し、本論文では、次章以降の諸検討において2次元姿勢運動、すなわち、姿勢運動が剛体の質量中心の軌道面内に限定される場合の運動のみを扱う。本節では、本論文において、このような立場をとった理由を説明する。

2-2-1 3次元運動の中の2次元運動の位置付け

剛体の3次元姿勢運動とは剛体の姿勢の変化のことであるが、剛体の角運動量ベクトルの変化と考えることもできる。この角運動量ベクトルに変化を引き起こす要因は剛体にはたらくトルクであり、これもベクトル的に作用する。本研究では、このトルクとして、重力傾斜トルクのみを考えているが、重力傾斜トルクベクトルの方向は剛体の姿勢によって変化するので、角運動量ベクトルの方向も一般には変化することになる。つまり、本研究でとりあげている環境（質量中心が楕円軌道という平面運動をおこない、重力傾斜トルクのみを考慮する）においても、剛体の姿勢運動は一般に3次元的なものとなる。

2次元姿勢運動（軌道面内姿勢運動）とは、角運動量ベクトルが常に軌道面ベクトル方向を向いている運動のことである。これは一般の3次元姿勢運動の中の、特異点的な位置付けの運動である。剛体の慣性主軸の1つが軌道面ベクトルと同じ方向を向いていて、角運動量ベクトルも同じ方向を向いている場合には、重力傾斜トルクベクトルも軌道面ベクトルと同じ方向を向くので、角運動量ベクトルの向きが常に軌道面ベクトル方向に保たれるのである（Fig.2-3参照）。2次元姿勢運動では、姿勢の自由度は1となり、前節で示したとおり、1本の運動方程式で運動を記述することができる。また、3次元運動では3つのパラメータ（離心率と慣性モーメント比2つ）と6つの初期状態量によって運動が決定されるのに対し、2次元運動では2つのパラメータと2つの初期状態量だけで運動を決定することができる。つまり、2次元運動は、一般的な3次元運動の中で、運動を簡単に記述できる特殊な例である、といえる。

2-2-2 本研究の目的との関係

本研究では、楕円軌道上の剛体の重力傾斜トルクによる姿勢運動を取り扱うわけだが、その中の「回転運動の励起」に代表される不安定な運動に焦点をあてている。非線形の微分方程式で表わされる運動に対し、数値計算によって定量的な評価をおこない、その結果に対して、定性的な分析を加えるという方法で運動の性質を明らかにすることを目的としている。数値計算のみによって運動の性質を明らかにするのであれば、おこりうるすべての運動（この場合は、すべてのパラメータと初期状態の組み合わせ）を網羅的に調べつくす必要がある。この意味でいえば、すべての3次元運動の中の2次元運動だけを取り扱うということは、運動を簡単に記述でき

る特殊な例だけを取り出して、限られた領域の性質を明らかにするに過ぎないといえる。しかし、本論文では、数値計算の結果に定性的な分析を加えている。不安定な運動の性質に焦点をあてた分析の結果、次のような見通しが得られた。すなわち、2次元運動の範囲内で、「回転運動の励起」に代表される不安定な運動がおこるメカニズムは説明可能であり、3次元運動においても同様の運動がおこりえて、かつ、2次元運動で観察される運動の範疇を超えるような運動はおこらない、ということである。次に、この見通しの根拠を示す。

2-2-3 3次元運動の定性的考察

本研究で扱う剛体の姿勢運動は重力傾斜トルクのみによって引き起こされる。しかし、重力傾斜トルク自身が姿勢角の非線形関数として表わされること、および、剛体が楕円軌道上を運動しているため重力傾斜トルクが軌道運動の影響を受けることにより、複雑で不安定な運動が引き起こされることになる。この運動を引き起こす原因は3つあげることができ、

1. 楕円軌道上の位置によって重力の強さが変化すること
2. 楕円軌道上の位置によって軌道角速度（重力方向の変化率）が変化すること
3. 重力傾斜トルクが姿勢角の非線形関数で表現されること

である。

3次元姿勢運動を、質量中心の軌道面に対し、「面内運動」と「面外運動」にわけて考える。軌道面内運動については上記の3つの要素がすべて作用するのに対し、軌道面外運動には1,3の要素のみが作用する。重力方向の変化が軌道面内に限られるためである。

面内運動には不安定な運動を引き起こす要素がすべて含まれていることから、2次元運動の枠内で、これらの3つの要素が引き起こす運動を検討することが可能である。これに対し、面外運動には2番目の要素が作用しない分、面内運動より運動は単純になると考えられる。実際に、第3章で詳しく述べることになるが、2番目の要素は初期の姿勢運動が小さい時に、大きな運動を引き起こす要因となっており、この要素が作用しない場合、重力傾斜トルクによる運動は、かなり限定されたものになる。面内運動と面外運動を合わせた3次元運動を考えた場合、面内の大きな不安定運動が、より小さい面外運動によって完全に打ち消されることはないと考えられるので、軌道面内の2次元運動の解析で得られた不安定な運動が、大きさこそ変われ、3次元運動でもおこりうると考えられる。

逆に、面内運動と面外運動の相互作用によって、より大きな不安定運動がおこる可能性も少ない。なぜなら、両者は剛体にはたらく重力傾斜トルクを分けあう形になるので、不安定な面内運動をおこすための重力傾斜トルクが面外運動に用いられる分だけ、目減りすることになるためである。また、面内運動、面外運動と分けて考えたとしても、実際の姿勢運動は、ある1つの軸（角運動量ベクトル方向）のまわりの運動になっているため、2つの運動の共振という現象もおこらない。このこと

から、3次元運動においても、2次元運動の検討で得られる結果の範疇にはいらない運動は発生しないと考えられる。

以上の理由から、2次元運動の検討によって楕円軌道上の不安定な姿勢運動の説明は可能であると考えられる。また、3次元運動についても、パラメータや初期状態の組み合わせが多いため、これらの条件と運動を結び付ける関係が複雑になるという点はあるが、起こりうる運動自体は2次元運動でも発生する範囲のものになると考えられる。

2-3 楕円軌道上の姿勢運動に関する過去の研究

2-3-1 過去の研究の概観

楕円軌道上の姿勢運動についての研究が盛んであったのは、おもに1960年代のことである。これらの研究を振り返ってみることにする。

衛星の姿勢に対する重力傾斜トルクの影響を最初に取り上げたのは、Tsiolkovskyである。円軌道上のダンベル型剛体の重力傾斜に対する平衡点(鉛直と水平)を求め、その性質(動安定と静安定)を明らかにした。円軌道上のダンベル型剛体の姿勢「運動」を取り上げたのはSchindlerであろう(文献[8])。円軌道上の軌道面内姿勢運動については第一種楕円積分の形の解があることがKlempererにより明らかにされ(文献[9])、円軌道上の姿勢運動は、同じ運動が繰り返されるという意味で安定な性質をもつことが示された(本論文3-1参照)。

次に議論されたのは、離心率の小さい楕円軌道(近円軌道)上の姿勢運動である(文献[10][12])。この場合は、運動方程式を離心率 e に関して展開し、線形化することで近似解を得ることができる。慣性モーメント比 k_y について、 $k_y=1/3$ のときに姿勢運動と軌道運動が共鳴し振動が増幅されていく、という興味ある結果が得られている。これらの研究の主要な目的は、衛星の軌道が円軌道から少しずつれている場合に、重力傾斜トルクが運動を極度に不安定化することがないかを調べることにあったと思われ、 k_y の値が $1/3$ から遠いような形状にしてしておけばよいことがわかった時点で、目的が達せられたのだと推測する。

離心率が大きい楕円軌道上の姿勢運動は、一般に、運動方程式の近似解さえ得ることができないので、特解をさがすという限られた範囲の議論にとどまっている(文献[14])。これらの研究で焦点をあてられたのが周期解、すなわち軌道1周期の間の運動において、初期状態量、終端状態量が一致するような解である。 $e < 0.446$ の範囲では3つ、 $e > 0.446$ の範囲では1つの周期解が存在する、という興味ある結果が得られている(文献[3])。

一方、楕円軌道上の衛星であっても、 $k_y=0$ であれば重力傾斜トルクは作用しない。

また、 k_y が0に近い場合や、 k_y がある程度の値をもっている場合でも高速に回転している場合には重力傾斜トルクの影響は大きくない。この場合、重力傾斜トルクは姿勢運動に支配的な影響をおよぼすことはなく、微小な擾乱として取り扱われる。この運動を楕円軌道上のスピン衛星の運動としてとりあげている文献はある(文献[1])。過去の、楕円軌道上の姿勢運動に関する研究は以上の分野に分類され、次に述べる、本研究が対象とする領域は、これまでのところ本格的に取り上げたことがなかったことがわかる。ここでは、本研究の立場を述べる前に、本研究が対象とする領域が残されてきた理由を推定するという意味で、過去の研究の背景を推測してみる。

過去の研究の背景は大きく2つの面に分けられる。研究環境と、研究に対する要求

である。

まず第一に、研究環境について。非線形の微分方程式は通常、解析的に解くことはできない。計算機の力を借り、数値的に解く以外の方法がない場合がほとんどである。1960年代、計算機の能力も普及度も現在より極めて低かった。ある限られた条件下の解を求めるならともかく、パラメータ値をいろいろ変化させて、それぞれに対し非線形の運動方程式を数値的に解き、運動の性質を議論するという研究形態は考えられなかった。解析的に解がもとまる場合や、微小量について方程式を展開することで線形化できる場合に研究は限られてきた。

一方、研究に対する要求という点から見ると、楕円軌道上で重力傾斜の影響を強くうける形状の物体の運動を考える必要性はなかったといっても過言ではない。ほとんどの衛星は円軌道、あるいは少々ずれたとしても離心率が微小な近円軌道上にある。これらの衛星では、重力傾斜は通常、姿勢の安定のための使用が考えられるので、与えられた条件下で運動が不安定にならない条件さえわかれば十分であった

(過去の研究は十分この要求に答えている)。離心率が大きい楕円軌道上の衛星では、衛星の形状を、重力傾斜の影響を受けにくいようなものにしておけば、重力傾斜の影響は小さな制御用トルクで取り除くことができた。姿勢安定方式として重力傾斜安定方式を用いない以上、重力傾斜トルクは姿勢の安定に対する擾乱である。不安定な運動を引き起こす可能性があるような、重力傾斜の影響を受けやすい形状を選択する必要はなかったのである。

以上のような研究環境と、研究に対する要求の結果が、上述の過去の研究を生み出してきた背景であり、本研究の対象である領域がとり残されてきた理由であると考えられる。

2-3-2 本研究が対象とする領域

本研究で対象とする領域は、離心率 (e) が大きい楕円軌道上の、重力傾斜トルクの影響を受ける形状 (k_y) の剛体の姿勢運動である。この領域の研究をおこなう背景、すなわち、研究環境と研究に対する要求は以下のものである。

この運動を記述する運動方程式は非線形となり、真の解を、あるいは近似解さえも解析的に求めることはできない。運動方程式の解をもとめる手段は数値計算しかない。しかし、現在の研究環境は、いろいろなパラメータ値に対してシミュレーションを行い、その結果から運動の性質を議論するという研究手法を可能にする。数値計算の結果には、簡易モデル等を用いた定性的な考察が加えられ、結果の妥当性が吟味される。この点で、本研究は、単なる数値実験の結果の羅列ではないといえる。

研究に対する要求、直接的には第5章で示されるTethered OTVへの応用である。Tethered OTVの能力の推算には楕円軌道上のダンベル型剛体の運動の解析が不可欠であり、第3章、第4章の内容はTethered OTVの特徴である、反対質量なしでの回転運動の励起・増幅という運動の実現可能性を保証するものである。また、この研究を機に、楕円軌道上で姿勢回転運動が励起されるという運動の性質が明らか

にされ、この運動の新しい利用方法が提案されることが期待される。

以上が本研究をおこなう背景である。

本研究ではこの運動を以下の手法で解析する。運動の定量的な性質については運動方程式を数値的に解いた結果を用いる。さらに、数値計算の結果を保証する意味で、定性的な解釈を加える。そのためにいくつかの簡易運動モデルを用い、運動の結果の傾向を予測する。

以上が本研究の、この非線形運動に対するスタンスである。

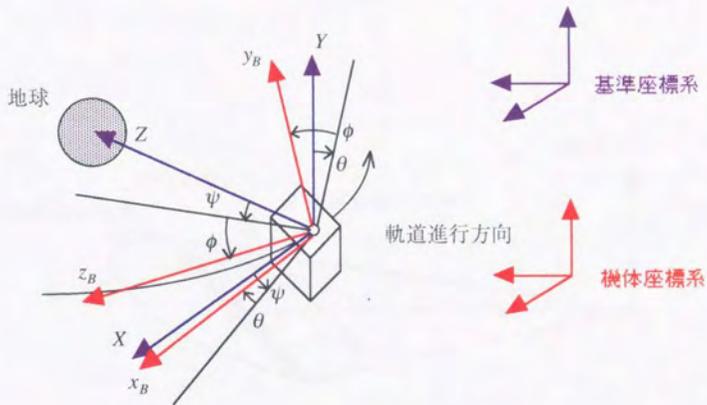


Fig.2-1 基準座標系と機体座標系

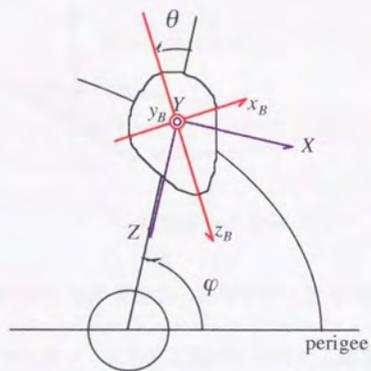
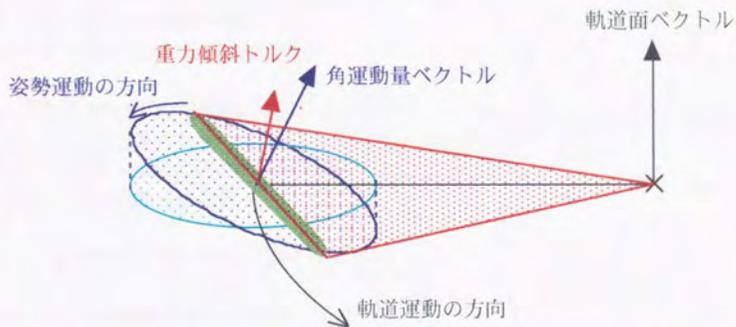
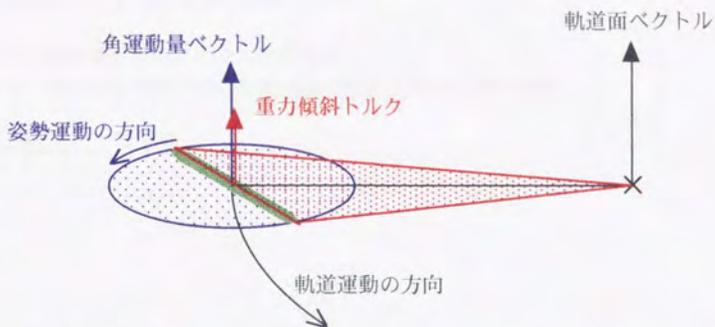


Fig.2-2 軌道面内の姿勢運動



(a)一般の3次元運動における軌道運動・姿勢運動・重力傾斜トルクの方法



(b)2次元運動における軌道運動・姿勢運動・重力傾斜トルクの方法

Fig.2-3 3次元運動の中の2次元運動

第3章 重力傾斜トルクによる回転運動の励起

3-1 楕円軌道上の姿勢運動の概観

- 3-1-1 運動方程式と回転の強さの指標
- 3-1-2 いくつかの運動の例
- 3-1-3 姿勢回転運動の源泉
- 3-1-4 天体における同様な運動

3-2 LibrationとTumbling

- 3-2-1 LibrationとTumblingの判定
- 3-2-2 Tumblingの励起

3-3 1軌道周期の間の回転の強さの変化

- 3-3-1 回転運動の強さの指標
- 3-3-2 1軌道周期の間の回転強度の変化と初期状態の関係
- 3-3-3 1軌道周期の間の回転強度の変化とパラメータの関係

3-4 複数軌道周期の間の回転の強さの変化

- 3-4-1 複数軌道周期にわたる運動履歴
- 3-4-2 複数軌道周期の間の回転強度の変化と初期状態の関係

第3章の図表

3-1 楕円軌道上の姿勢運動の概観

3-1-1 運動方程式と回転の強さの指標

本節で扱う姿勢運動は2次元の自由運動である。すなわち、姿勢運動は質量中心の軌道面内に限られ、重力傾斜トルク以外の外力がはたらかない、としたものである。この運動を支配する運動方程式は、2-1で示したように

$$\ddot{\theta} = -\frac{3k_y}{r^3} \sin\theta \cos\theta - \ddot{\varphi} \quad (3-1)$$

である。次の段では、この条件下のいくつかの運動例を示す。運動例は数値シミュレーションによって得られたものであるが、数値計算の妥当性についてはAppendix Aで示している。運動例については以下に示す値の履歴を見ていくことにする。まず、2つの状態量 (θ , $\dot{\theta}$) と重力傾斜トルク (N_g) である。 N_g は

$$N_g = -\frac{3k_y}{r^3} \sin\theta \cos\theta = -\bar{N}_g \sin 2\theta \quad (3-2)$$

で表現され、 $\pm\bar{N}_g$ の間を θ が変化するにしたがって振動することになる。

続いて、回転の強さを示す3つの指標の履歴を示している。その3つとは、姿勢運動に関する角運動量 (h_a)、姿勢運動に関するエネルギー (E_a)、そして、ここで導入する回転強度パラメータ \hat{a} である。それぞれについて述べる。

まず h_a は

$$h_a = I_y(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \quad (3-3)$$

で表わされる。この章で考える範囲では、 I_y は定数であるから、 h_a は慣性空間に対する姿勢角速度 ($\dot{\theta} + \dot{\varphi}$) を表わしているものと考えて差し支えない。「回転速度が速い運動」を「強い回転運動」であると考えれば、この h_a も回転の強さの一つの指標と考える。

次に、姿勢運動に関するエネルギー E_a である。これは2-1で述べたように、軌道運動まで含めた力学的エネルギーのなかで、姿勢運動に関連する項を取り出したものであり、

$$E_a = \frac{1}{2} I_y (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 + \frac{3}{2r^3} (I_x - I_z) \sin^2\theta \quad (3-4)$$

で表わされる。 E_a は姿勢角速度に関する第1項と、重力に対するポテンシャルを表わす第2項から構成されており、回転の強さを考える際に、姿勢角速度に加えて、重力に対するポテンシャルという要素を加味していることになる。最後に紹介するのが、ここで導入する回転強度パラメータ \hat{a} である。この \hat{a} の定義を述べる。円軌道上の剛体の軌道面内運動の方程式は、

$$\ddot{\theta} = -\frac{3k_v}{r^3} \sin\theta \cos\theta \quad (3-5)$$

円軌道上では r も一定なので第一積分

$$\dot{\theta}^2 + \frac{3k_v}{r^3} \sin^2\theta = \text{const.} \quad (3-6)$$

が得られる。この式は E_a の定義式(3-4)と非常に似た形をしているが、姿勢角速度に関する項が、 E_a では慣性空間に対する姿勢角速度 $\dot{\theta} + \dot{\varphi}$ であるのに対し、ここでは軌道運動とともに回転する基準座標系に対する姿勢角速度 $\dot{\theta}$ となっている。したがって、この式はエネルギー（すなわち E_a ）とは似て異なるものではあるが、 r や $\dot{\varphi}$ が定数という条件下での θ の運動についての不変量である。 r や $\dot{\varphi}$ が一定とならない楕円軌道では式(3-6)の左辺の値も一定とはならないが、 r と $\dot{\varphi}$ が等しい（すなわち軌道上同位置の）2つの運動状態の回転の強さを比較する指標として用いることはできる。その場合、この指標も E_a と同様に姿勢角速度と、重力に対するポテンシャルの両方を加味した回転の強さの指標ということになる。この式を

$$\dot{\theta}^2 + \frac{3k_v}{r^3} \sin^2\theta = \frac{3k_v}{r^3} \hat{a}^2 \quad (3-7)$$

と表わして回転強度ハラメータ \hat{a} の定義とする。 \hat{a} については、ここで示したような回転の強さを表わす以外に、3-2で示すように、Libration（秤動）とTumbling（回転）という2つの運動状態（Fig.3-1）を分けるための指標とも考えられるが、その点については3-2で述べる。

また、ここで示した回転の強さを示す3つの指標については3-3で再び議論することにして、ここではその定義にとどめることにする。

3-1-2 いくつかの運動の例

(1) 円軌道上の運動

3つの運動の例をFig.3-2～Fig.3-4に示す。それぞれ、円軌道（ $e=0.0$ ）上の $k_v=1.0$ の剛体の軌道1周期分の運動の履歴を示したものである。

Fig.3-2は、 $\theta_0=0.0$ 、 $\dot{\theta}_0=0.0$ の場合の運動の諸値の履歴である。(a)～(f)はそれぞれ θ 、 $\dot{\theta}$ 、 N_g 、 h_a/I_y 、 E_a/I_y 、 \hat{a} の履歴が示されている。良く知られるように、剛体は鉛直方向に静止したまま、円軌道上を運動することになる。 θ 、 $\dot{\theta}$ は常に0に保たれ、 N_g も常に0、 h_a 、 E_a 、 \hat{a} も一定値に保たれる。

次に剛体が秤動状態（Libration）にあるような例を示す（Fig.3-3）。 $\theta_0=0.0$ 、 $\dot{\theta}_0=0.2$ の場合の例である。この場合、 θ 、 $\dot{\theta}$ は単振動のように0のまわりを振動し、 θ の変化にしたがって N_g が発生する。姿勢角速度が変化するので h_a も変化する。ま

た、通常の単振動では、力学的エネルギーは保存され一定値であるが、ここの E_a は一定に保たれていない。これは E_a の運動エネルギーを定義する姿勢角速度が、慣性座標系に対する角速度であるためである。一方 \hat{a} は、その定義通り円軌道上では一定である。

最後に剛体が回転状態 (Tumbling) にあるような例を示す (Fig.3-4)。 $\theta_0=0.0$ 、 $\dot{\theta}_0=2.0$ の場合の例である。この場合、姿勢角速度こそ変化するが剛体は一定周期の回転運動を続けることがわかる。回転角速度の変化にしたがって h_a も変換し、 E_a も前例同様変化する。 \hat{a} は、その定義通り円軌道上では一定である。

Fig.3-2~3-4を通していえることは、円軌道上での姿勢運動は、静止であれ、秤動であれ、回転であれ、すべて安定であり、同じ様な運動を永久に続けるということである。次の段では、この円軌道上の安定な運動と対比する形で楕円軌道上の剛体の姿勢運動を示す。

(2)楕円軌道上の運動

まず第一に示すのが、 $e=0.2$ 、 $k_y=1.0$ 、 $\theta_0=0.0$ 、 $\dot{\theta}_0=0.0$ の例である (Fig.3-5)。遠地点を初期点として一軌道周期分の履歴が示されている。この運動のように初期点で鉛直に静止している剛体は、円軌道上ではそのままの姿勢を保っていた。それに対し楕円軌道上では、このように離心率が小さい場合でも、秤動をはじめることがわかる。引き起こされる秤動は、この範囲ではそれほど大きくなく、回転をはじめるとはならない。(c)の図中の緑線 (\bar{N}_g) は重力傾斜トルクのとりうる値の上下限を示しているが、近地点通過付近 (時刻 π 付近) で大きな値をとっており、重力傾斜トルクの影響が近地点付近で大きくなることわかる。この例ではあまり明瞭ではないが、 $\dot{\theta}$ 、 h_a 、 E_a も近地点付近での値の変化が大きくなっていることがわかる。

この各履歴が周期性のものでないことを示すために、軌道2周期分の履歴をFig.3-6に示す。同じ初期状態から始まった運動の2周期分の履歴が示されている。軌道2周目 (時刻 $2\pi \sim 4\pi$) の間の履歴は1周目のそれとは異なっており、この運動が周期的なものではないことを示している。

次に離心率がより大きい ($e=0.5$) 場合の履歴を示す。Fig.3-7は $e=0.5$ 、 $k_y=1.0$ 、 $\theta_0=0.0$ 、 $\dot{\theta}_0=0.0$ の場合の1周期分の履歴である。初期に鉛直に静止していた剛体は、運動を開始し、この場合には姿勢角が $\pi/2$ を超えて近地点通過後、回転状態 (Tumbling) に入っていることがわかる。(b)では、 $\dot{\theta}$ は近地点通過時に大きく変化しており、近地点通過付近の重力傾斜トルクが大きいことを示す(c)と対応している。 h_a 、 E_a とも近地点付近で大きく変化している。この場合は、鉛直静止状態の剛体に回転運動が励起されたと考えることができる。

一度引き起こされた回転運動は、永久に続くというわけではない。Fig.3-8は

$e=0.5$ 、 $k_y=1.0$ 、 $\theta_0=0.36$ 、 $\dot{\theta}_0=0.68$ の場合の2周期分の履歴である。(a)の θ の履歴でもわかるとおり、初期状態ではこの剛体は秤動状態にあったのが、1回目の近地点通過時に正方向の重力傾斜トルクを受け、回転運動を開始する。近地点通過後、次の近地点通過までの1周期の間は回転運動を続けるが、2回目の近地点通過時に負方向の重力傾斜トルクを受け姿勢角速度が減速され、秤動状態に戻る。結果、2周目の遠地点通過時には秤動状態に戻ってくることになる。つまり、この運動では秤動→回転→秤動という順に運動状態が変化していることがわかる。

以上、少ない例ではあるが、楕円軌道上の姿勢運動の例を見てきた。これらの結果から言えることは、楕円軌道上の剛体の運動は一般に不安定、ということである。円軌道上の運動のように、静止であれ、秤動であれ、回転であれ、同じ運動状態が永久に続くということはありません、秤動状態であればその振幅は毎回変化し、回転状態であればその回転角速度は回転ごとに変化し、極端な場合には秤動状態から回転状態へ、あるいは回転状態から秤動状態へ状態の変化が起こるわけである。運動の変化はすべて重力傾斜トルクのみによって引き起こされており、重力傾斜トルクが近地点付近で最大になることを考えれば、運動の大きな変化が近地点通過付近で起こることは容易に理解できよう。もちろん近地点付近での変化の大きさは、軌道の離心率 e や慣性モーメント比 k_y に依存するし、この重力傾斜トルクによって引き起こされる不安定さの度合も、この2つのパラメータ e 、 k_y に依存する。また、この2つのパラメータが同じ運動であっても、初期状態の差によってその後の運動が大きく異なったものになることも容易に理解できよう。以下の節では、この不安定運動についての解析を行っていくことになるわけである。

3-1-3 姿勢回転運動の源泉

前段で述べたような回転運動は重力傾斜トルクのみによって引き起こされたものである。軌道運動を含めた全系にわたって見れば、外力がはたらいたわけではないので、軌道運動を含めた場合の角運動量や、力学的エネルギーは保存されている。このことは2-1でも述べたとおりである。ここでは、このことをシミュレーション結果で確認する。

Fig.3-9(a)は、 $e=0.0$ 、 $k_y=1.0$ 、 $\theta_0=0.0$ 、 $\dot{\theta}_0=0.2$ の運動について、1軌道周期の間の姿勢運動に関するエネルギー E_a と質量中心の運動に関するエネルギー E_c の初期値からの変化量 ΔE_a 、 ΔE_c の履歴を示したものである。Fig.3-9(b)は、同じ運動について姿勢運動に関する角運動量 h_a と質量中心の運動に関する角運動量 h_c の初期値からの変化量 Δh_a 、 Δh_c の履歴である。 E_a が減少した分、 E_c が増加し、両者の和はいつに保たれていることがわかる。これは角運動量についても同様にいえることである。また、円軌道上の安定な運動とはいえ、エネルギーや角運動量から一部(すなわち姿勢運動に関する分)だけをとりだした場合には(E_a や h_a)、その値は一定に保たれないということも再確認できる。これは、「安定な運動」が、あくまで、軌

道運動とともに回転する基準座標系から見た運動状態であるのに対し、 E_a や h_a が慣性系に対する姿勢角速度 ($\dot{\theta} + \dot{\varphi}$) をもとにしているからである。

Fig.3-10は、 $e=0.5$ 、 $k_y=1.0$ 、 $\theta_0=0.0$ 、 $\dot{\theta}_0=0.0$ の運動について、 ΔE_a 、 ΔE_c 、および Δh_a 、 Δh_c の履歴を示したものである。Fig.3-7でも見たとおり、この運動は、最初の鉛直静止状態から回転が励起されるような運動であり、 E_a や h_a は近地点通過後に初期状態より増加している。しかし、その増加分は E_c や h_c の減少量とまったく一致しており、両者の和としてエネルギーや角運動量が保存されていることがわかる。以上に見てきたように、軌道運動のエネルギーや角運動量は姿勢運動によって変化するわけである。しかし実際には、姿勢運動によって引き起こされる変化量は、もとの軌道運動のエネルギーや角運動量からみれば微小であるため、軌道長半径や軌道角速度の大きな変化として現われるものではない。これが、本論文で、質量中心の軌道が姿勢運動にかかわらず不変であると仮定している根拠である。

3-1-4 天体における同様な運動

本論文で取り上げるような運動は、当然自然の天体でも起こりうるものである。地球の衛星である月の自転周期に不規則な変動があることは有名であるし、他の惑星の衛星でもその自転周期について、平衡点まわりの変動がおこっている（衛星の自転周期の平衡点は軌道周期との簡単な整数比で与えられることが多い）。しかし、多くの天体の軌道は離心率が小さくほぼ円形で、天体の形状もほぼ球形であるため、その姿勢運動が本論文で取り上げるほどの強い不安定性を有する例は少ない。その中で、土星の衛星であるヒペリオン (Fig.3-11) は離心率が約0.1という偏心的な軌道と、(380×290×230km)の「いびつ」な形状を有し、カオス的な不規則姿勢運動をしていることで知られている。1981年のボイジャー2号の土星接近時の撮影により、ヒペリオンの形状が明らかになった。そのいびつな形状と、円軌道から大きくずれた軌道 ($e \approx 0.1$) より、Wisdomらはその姿勢運動（すなわち自転運動）について、可能な運動の中で、安定な運動の領域が非常に小さいことを見出した。そして、その自転速度だけでなく、自転軸の方向までも短いタイムスパンで変化し、その運動はカオス的な不安定運動であると予測した。これを称して彼らは「ハイペリオンは転がる」と述べている（文献 [47]）。

その予測を元に、Klavetterは地上の天文台から、ハイペリオンの光度変化の観測を13週間にわたっておこなった。その結果、その光度変化がいかなる一定の自転周期にも一致せず、不規則な運動が起きていることを示したのである (Fig.3-12)

（文献[46][49]）。

軌道の離心率がより大きな天体（彗星や小惑星）の自転運動については、観測例がほとんどない。将来、観測される機会があれば、本論文で述べるような不安定な運動が観測されることになるであろう。

3-2 LibrationとTumbling

前節で示したとおり、楕円軌道上の剛体の姿勢運動の特徴を一言で言い表せば「不安定」である。本節では、この特徴を最も顕著に示す運動をとりあげる。

剛体の姿勢運動の状態は大きく2つに分けられる。Libration（秤動）とTumbling（回転）である（Fig.3-1）。円軌道上の剛体の運動は次の意味で安定である。最初にLibration状態にある剛体は、重力以外の外力がはたらかない限り、永久に同じ振幅のLibration状態にある（Fig.3-3）。一方、最初にTumbling状態にある剛体は、回転速度は時々刻々変化するものの、同じ周期で回転を続ける（Fig.3-4）。しかし、楕円軌道上の剛体では様相が異なる。軌道運動のために重力の強さは軌道上位置によって変化する。姿勢運動と軌道運動の連成の結果、重力傾斜トルクは複雑な挙動を示す。その結果、Libration状態にある剛体の振幅・振動速度は各振動ごとに変化し（Fig.3-5、Fig.3-6）、Tumbling状態にある剛体の回転速度・回転周期は各周回ごとに変化する（Fig.3-7）。そして、もっとも極端な表面上の運動の変化として、Libration状態にあった剛体がTumblingを始めたり、Tumblingしていた剛体がTumblingをやめLibration状態にうつったりという現象が見られる（Fig.3-8）。本節では、この現象をとりあげる。

3-2-1 LibrationとTumblingの判定

ここではLibrationとTumblingの状態の判定に、前節で導入した回転強度パラメータ \hat{a} を用いる。前節で定義したように、

$$\dot{\theta}^2 + \frac{3k_y}{r^3} \sin^2 \theta = \frac{3k_y}{r^3} \hat{a}^2 \quad (3-8)$$

である。このとき $\hat{a} > 1$ であれば、 $\theta = \pm\pi/2$ において $\dot{\theta}$ が値を持つことになり、剛体は回転状態（Tumbling）に入ることになり、 $\hat{a} < 1$ であれば、 $\theta = \pm\pi/2$ となることがなく剛体は秤動状態（Libration）にあることになる。すなわち、

$\hat{a} > 1$ のときTumbling

$\hat{a} < 1$ のときLibration

と判定することができる。前節でも述べたとおり、 \hat{a} の値は、運動状態をLibration、Tumblingの2つの状態に、2値的に分類する指標としてだけでなく、その値自身も回転運動の強さを示す指標と考えることができる。しかし、後者の役割については次の3-3節で議論することにする。本節では、運動状態については、単に「LibrationかTumbling」という2値的なとらえ方をすることにし、 \hat{a} はこれらを区別する指標として用いることにする。

円軌道上では、 \hat{a} の値は重力以外の外力がはたらかない限り、軌道上で常に一定である。しかし、楕円軌道上では、たとえ重力以外の外力が作用しなくても、 \hat{a} の値は時々刻々変化する。最初 $\hat{a} < 1$ にあるLibration状態の物体も、軌道運動との関連で変化し、 $\hat{a} > 1$ となってTumbling状態に移行してしまうことがある。ただ、円軌道の場合

合と違うのは、 $\hat{a} > 1$ となった場合、「この物体は将来的に必ず上下が逆転する」という意味でTumbling状態に入るわけではなく、「今の状態でその地点にとどまるとすれば、将来的に姿勢の逆転がおこるが、実際には軌道運動との関連があるので、どうなるかわからない」という意味になる。このように、楕円軌道上では \hat{a} の値は必ずしも物体の実際の運動を反映するものとは言えないが、ここでは、 \hat{a} を運動状態(LibrationかTumbling)を示す指標として用いることにする。

3-2-2 Tumblingの励起

重力以外の外力が作用しない運動を考える。重力傾斜トルク下の自由運動である。運動方程式は

$$\ddot{\theta} = -\frac{3k_y}{r^3} \cos\theta \sin\theta - \ddot{\varphi} \quad (3-9)$$

運動を決定するのは2つのパラメータ (e, k_y) と2つの状態量初期値 ($\theta_0, \dot{\theta}_0$) である。

前節でも示したとおり、パラメータの値や、状態量初期値によっては、初期状態においてLibration状態にある剛体が自由運動下でもTumbling状態に移行するような場合がある (Fig.3-7)。ここでは、Tumblingが励起される条件を考える。先にも述べたとおり、運動は2つのパラメータと2つの状態量初期値で決定されるので、これらの値がどのような条件を満足する時にTumblingが励起されるのかを検討する。ここでも、以下の節においても、遠地点を初期点とする1軌道周期の運動を考える。軌道上のどの点を初期点にとっても、1軌道周期の間に運動状態や回転の強さが変化するという現象は観察されるが、ここであえて遠地点を初期点とする理由を簡単に述べる。

3-1の運動例でわかるように、回転の強さ (あるいは運動状態) の時間変動には2つの要素、すなわち、

1. 1軌道周期の初期点・最終点の間での回転の強さの正味の変化分
2. 姿勢運動にしたがって生ずる振動的な変化分

である。このうち、本論文で特に注目したいのは第1の要素である。3-1の運動例でもみたように回転の強さは近地点付近で大きく変化する。すなわち、上記第1要素は近地点付近でもっとも大きく増加・減少し、第2要素の振動の振幅は近地点付近で最大になる。逆に遠地点付近では両要素とも大きく変化せず、遠地点は回転の強さが軌道上でもっとも安定する点となる。そこで、1軌道周期の間の第1要素の変化分をできる限りあますことなくとらえ、かつ、回転の強さの初期値・終端値から第2要素の影響をできるだけ除くという観点から、本節以下、遠地点を初期点とする運動を考えることにする。

様々なパラメータ (e, k_y) の値に対して初期状態量 ($\theta_0, \dot{\theta}_0$) (初期点は遠地点) の値を変化させてシミュレーションをおこなう。そして、1軌道周期の間ずっと Libration状態 ($\hat{a} < 1$) を維持したか、あるいは1軌道周期の運動の間に一瞬でも

Tumbling状態 ($\hat{a} > 1$) になったかを記録する。

このような区分をする理由を再確認する。円軌道上の運動では \hat{a} の値が一定で、運動状態も永遠に変化しないので、どの時点で運動状態を判定しても結果は変わらない。しかし楕円軌道上では、 \hat{a} の値が時々刻々変化するため、一度Tumbling状態に入りながら再びLibration状態に戻るような運動もあり、この種の運動は判定する時刻によって状態が変わることになる。ここでは、このような運動も不安定なTumbling状態に含めるという意味で、以上のような区分をしている。

さらに注意を喚起すれば、ここでの判定はあくまで一軌道周期の間の運動を対象としている。ここでLibration状態と判定された運動が軌道2周目以降も永遠にLibration状態にとどまるという保証はないのである。

(1) 初期状態 ($\theta_0, \dot{\theta}_0$) に関する条件

$e=0.3$, $k_y=1.0$ の場合の結果をFig.3-13に示す。横軸に θ_0 、縦軸に $\dot{\theta}_0$ をとり、1軌道周期の間Librationを維持した ($\theta_0, \dot{\theta}_0$) に印がつけられている。図中の3本の閉曲線は初期状態における \hat{a} の値 (\hat{a}_0) が一定 ($\hat{a}_0=0.2, 0.6, 1.0$) のラインである。 $\hat{a}=1.0$ がLibrationとTumblingの境界なので、シミュレーションは $\hat{a}_0=1.0$ のラインの内側の ($\theta_0, \dot{\theta}_0$) に対してのみ行っている (このラインの外側の ($\theta_0, \dot{\theta}_0$) は最初からTumbling状態にある)。 \hat{a}_0 が小さいほど、初期の振動が激しくないことを示している。このグラフから、Tumblingが励起される初期状態について以下の性質が得られる。

(a) 初期状態でTumblingに近い状態 (\hat{a}_0 が1に近い初期状態) にある方が

Tumblingを励起されやすい傾向がある。すなわち、 \hat{a}_0 一定のライン上でTumblingを起こす初期状態、起こさない初期状態を分類し、Tumblingを起こす初期状態の割合は、 \hat{a}_0 の変化するにしたがって、ほぼ連続的に変化する。

(b) ある \hat{a}_0 に対してTumblingが励起されるかどうかは、($\theta_0, \dot{\theta}_0$) に依存する。

(c) ある \hat{a}_0 に対しては、 $\theta_0, \dot{\theta}_0$ とも負である場合の方が、Tumblingを起こさない割合が高いという傾向がある。ただし、 $\dot{\theta}_0$ が0に近い領域では、 θ_0 についての傾向は崩れ、より複雑な挙動を示す。

重力傾斜トルクにより姿勢運動の角運動量 (角速度) が変化し \hat{a} の値を変化させる。 \hat{a} の \hat{a}_0 からの変化量は、剛体にはたらく重力傾斜トルクの履歴、すなわち運動の初期状態に依存することになる。このことから(b)は説明できる。もし、いろいろな ($\theta_0, \dot{\theta}_0$) に対する \hat{a} の \hat{a}_0 からの変化量の分布がほぼ一様であれば(a)も同時に説明することができる。しかし、この仮定 (\hat{a} の変化量の分布がほぼ一様) については、より詳しい検討が必要で、3-3節で再び取り上げられる。

(c)については次のように説明される (Fig.3-14)。円軌道上では、局所鉛直方向に慣性主軸を向け静止している物体は、その姿勢を保つ (重力傾斜安定)。一方、楕円軌道では軌道角速度が変化していくので、遠地点で局所鉛直方向に静止している物体でも、軌道運動にしたがって慣性主軸の方向は局所鉛直からずれてきて、剛体は振動をはじめることになる。この際、軌道角速度が遠地点で最小であることを考えると、慣性主軸は軌道角速度と反対向きにずれていく。すなわち、姿勢運動が軌道運動についていけなくなるような形になる。これに対し、遠地点において、軌道角速度と同じ方向に姿勢角速度を持っていたり、あるいは静止しているものの軌道角速度と同じ方向に傾いている場合、先程と同じように考えると、軌道運動に対する姿勢運動の遅れにより、より地球に近い地点で鉛直状態になる。同じ鉛直状態で考えれば、地球に近い点の方が重力傾斜が強い分、遠地点での鉛直静止よりも安定度が大いと考えられる。重力傾斜下の剛体の姿勢については「鉛直」という平衡点の他に、不安定ではあるが、「水平」という平衡点があり、こちらについても同様な議論が成立するとすれば、Fig.3-13の分布形状を説明することができる。

(2)パラメータ (e, k_y) に関する条件

まず、 k_y を固定して e を変化させる場合を考える。

Fig.3-13と同様のグラフを、 $k_y=1.0$ で、 $e=0.0\sim 0.9$ の場合について描いたのがFig.3-15である。これらのグラフから、以下の結果が得られる。

- (a) $e=0.0$ の円軌道においては、初期にLibration状態であれば、1軌道周期の間、Libration状態は維持される。
- (b)楕円軌道になると、離心率が小さい場合でも、初期状態でLibration状態にあるにもかかわらず、1軌道周期中にTumblingをはじめような運動が存在する。 e が大きくなるにしたがって、初期にLibration状態にありながらTumblingをおこす ($\theta_0, \dot{\theta}_0$) の割合は増加し、 $e=0.6$ になると、1軌道周期の間Librationを維持する ($\theta_0, \dot{\theta}_0$) はほとんどなくなる。

(c)Librationを維持する ($\theta_0, \dot{\theta}_0$) の分布の形状について、 e が小さいうちは、 $\dot{\alpha}_0$ が大きい方がTumblingしやすいという傾向のみが強く見られ、分布の方向性はあまり見られない。($e=0.1$ の図)。しかし、 e が大きくなると、分布に方向性が見られるようになる。また、その分布の形状はFig.3-13とほぼ同じである。

(a)については \hat{a} の定義から当然のことである。(c)については、前出のFig.3-13に対しておこなった考察の妥当性を示していると考えられる。

(b)に関連してはFig.3-16を用いて説明する。各 e に対して R_{um}

$$R_{\text{um}} = \frac{\text{Tumblingをおこした状態の数}}{\text{考慮した全初期状態の数}} \quad (3-10)$$

をプロットしたのがFig.3-16である。ここでは、もう一つのパラメータ k_y も変化さ

せて、 $k_y=0.2, 0.6, 1.0$ の場合についての結果を示している。

(a) k_y が小さいほど（重力傾斜の影響をうけにくい形状であるほど）Tumblingが励起されやすい。

(a)は次のように考えられる。Fig.3-13の考察でも述べたとおり、楕円軌道における軌道角速度の変化のため、最初に鉛直状態にある剛体の姿勢は鉛直状態から自然にずれてくる。重力傾斜トルクは、姿勢を安定状態にもどすようにはたらい、Libration状態に保とうとするが、軌道角速度が速くなって、軌道角速度の変化に鉛直状態を保とうとする姿勢の変化が追いつけなくなり、Tumbling状態に移行する、と考えられる。したがって、重力傾斜トルクによる復元力が弱くなる、 k_y が小さい形状の方がTumblingを励起されやすいと考えられる。ただ、注意しなければならないのは、Tumblingを励起しやすいということは、必ずしも、Tumbling発生後の回転が速度が速いこととは一致しないということである。このことについては3-2節で議論される。

次に e を固定して k_y を変化させる場合を考える。

Fig.3-13と同様のグラフを、 $e=0.2$ で、 $k_y=0.1\sim 1.0$ の場合について描いたのがFig.3-17である。これらのグラフから、以下の結果が得られる。

(a)初期にLibration状態にありながらTumblingをおこす $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ の割合は、 k_y が小さくなるにしたがって、増加し、 $k_y=0.2$ になると、1軌道周期の間Librationを維持する $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ はほとんどなくなる。

(b)Librationを維持する $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ の分布の形状については、 k_y が大きい場合はFig.3-13とほぼ同じ分布形状を示す。しかし、 k_y が小さくなると、分布は $\theta_0 < 0, \dot{\theta}_0 > 0$ の方向に移っていく。

(a)はFig.3-16で示した考察を裏づける結果と考えられる。(b)については、 k_y が大きい場合の分布形状の理由は前述の通りであると考えられるが、 k_y が小さい場合の分布形状を作り出す要因はわからない。

最後に、パラメータ (e, k_y) に対して、 R_{tum} の値を等高線で示したのがFig.3-18である。重ねて述べるが、「Tumblingを励起しやすい条件」と、次節で議論する「回転速度が速くなる条件」とは必ずしも一致しない。

Fig.3-18からえられる結論を述べて本節をしめくくる。

楕円軌道上の剛体では、Tumblingこそが自然な運動状態である。

3-3 1 軌道周期の間の回転の強さの変化

前節では、楕円軌道上での剛体の姿勢運動について、LibrationとTumblingという運動状態に焦点をあてて検討をおこない、その結果、楕円軌道上の剛体についてはTumblingこそが自然な運動状態であることがあきらかとなった。本節では、Tumblingという運動状態のなかで、回転運動の強さのちがいに焦点をあて、速い回転、遅い回転がどのような条件下で引き起こされるかを検討する。以下の小節では、遠地点を初期点とする1軌道周期の運動を考え、始点と終点の間の回転の強さの差が、パラメータ (e, k_y) 、初期状態量 (θ_0, \hat{a}_0) にどのように依存するかを検討する。

3-3-1 回転運動の強さの指標

回転の強さを表す指標として、3-1では3つの指標を導入した。すなわち、姿勢運動に関する角運動量 h_a 、姿勢運動に関するエネルギー E_a 、そして回転強度パラメータ \hat{a} である。以下の節では1軌道周期、あるいは複数軌道周期にわたる回転の強さの変化についての議論を行うわけであるが、その際に用いる回転の強さの指標について、ここで明記しておく。

最初に確認しておきたいことは、回転の強さを示す3つの指標のうち、どの指標を用いようが本質的な差はない、と筆者は理解しているということである。そもそも3つの指標の違いは、姿勢角速度と姿勢角という2つの状態量に対して、回転の強さをどのように定義するか、という点にある。姿勢角を考慮に入れた (E_a, \hat{a}) の場合でも姿勢角速度が大きい場合、姿勢角速度の項が支配的になるので、このような範囲では「回転速度が速いほど回転が強い」とおおまかに考えて差し支えない。以下の節で行われる回転の強さに関する諸議論についても、3つの指標のうちどの指標を用いようが、同様な議論が成り立つ。例えば

- ・1軌道周期の間の回転の強さの変化が、初期の回転の強さだけでなく、初期の姿勢角に依存すること。
- ・初期の回転の強さが大きくなるほど、1軌道周期の間の回転の強さの変化が小さくなっていくこと。
- ・複数軌道周期にわたる回転の強さの変化が初期の姿勢角に非常に敏感であること。

などの議論は、回転の強さの指標として3つのうちのどれを用いようが、同様に成り立つ定性的なものなのである。

このような状況のなかで、筆者が、以下の議論において3つの指標のうち回転強度パラメータ \hat{a} を用いる理由を、それが非常に些細なこだわりであることを承知で、ここで述べたいと思う。

Fig.3-3、Fig.3-4を再見してほしい。これは円軌道上の秤動・回転運動の諸値の履歴である。3-1でも述べたとおり秤動にしろ、回転にしろ、同じ運動を永久に続けるという意味で円軌道上の姿勢運動は安定であると筆者は考えている。この状態を筆

者は「回転の強さが一定で、秤動（回転）の位相が変化している」と考えたいのである。逆にいえば、位相が異なるだけで姿勢角速度などが異なる状態を「回転の強さが変化した」とはとらえたくないのである。しかるに、 h_x や E_x についていえば、1軌道周期の運動の初期点と終端点でその値は変化しているのである。つまり h_x や E_x という指標から見れば、このような運動であっても1周の間に回転の強さが変化していると考えられることになるのである。もっとも、これは3-1でも述べたとおり、 h_x や E_x が慣性系に対する姿勢角速度について定義されているのに対し、「安定な運動」というのが軌道運動とともに回転する基準座標系から見たとらえかたであることによるものである。一方で回転強度パラメータ \hat{a} （または運動方程式の第一積分、(3-6)）は、円軌道上の運動では一定の値をとるという性質をもっている。このことが、上記の筆者の運動のとらえ方にマッチしたということである。

もちろん実際の運動で、 \hat{a} が一定となるのは円軌道上の姿勢運動だけであり、楕円軌道上では \hat{a} の値は時々刻々変化する。しかし、軌道上の一点におけるいろいろな状態の回転の強さを \hat{a} によって比較・評価することは可能である。この際、円軌道上の姿勢運動に対するふるまいから類推して、 \hat{a} は「位相による変化分を除いた回転の強さ」を表わしていると考えているわけである。

次に、回転の強さの指標として、円軌道上の運動方程式の第一積分(3-6)そのものではなく、 \hat{a} を用いる理由を述べる。この \hat{a} は、3-2でも述べたとおり、LibrationとTumblingを分ける指標として用いることもできる。すなわち $\hat{a}>1$ であればTumbling、 $\hat{a}<1$ であればLibrationということである。これが非常に重要であると筆者は考えている。つまり $\hat{a}=1$ という回転の強さは離心率 e や慣性モーメント比 k_y 、軌道上位置 φ にかかわらず、ある一つの運動状態、すなわち「LibrationとTumblingの境界」という運動状態を表わしているのである。つまり、 \hat{a} を用いることによって e, k_y, φ が同じ場合の運動状態の回転の強さの比較だけでなく、 e, k_y, φ が異なるような運動状態の回転の強さの比較が「LibrationとTumblingの境界 $\Leftrightarrow \hat{a}=1$ 」という基準で可能になると考えている。

以上に述べたことが、以下の議論で回転の強さの指標として \hat{a} を用いる理由である。

3-3-2 1軌道周期の間の回転強度の変化と初期状態 (θ_0, \hat{a}_0) の関係

与えられたパラメータ (e, k_y) の軌道上の剛体について、初期状態量 (θ_0, \hat{a}_0) が1軌道周期の間の \hat{a} の変化に与える影響を考える。始点の \hat{a} (\hat{a}_0)と終点の \hat{a} (\hat{a}_f)を比較するため、ここでは初期状態量を (θ_0, \hat{a}_0) の組で与える。 (θ_0, \hat{a}_0) の組合わせに対応する $\dot{\theta}_0$ の値は正負の2つ考えられるが、ここでは正の値（軌道運動と同じ向きに回転している場合）のみを考える。

$e=0.5$ 、 $k_y=1.0$ の場合について、 $\hat{a}_0=1.0\sim 10.0$ のときの θ_0 と \hat{a}_f の関係を示したのが

Fig.3-19である。

(a) \hat{a}_f は \hat{a}_0 に対し一意に決まるわけではなく、初期姿勢角 θ_0 にも依存する。

(b) \hat{a}_0 によってグラフが大きく変化しているように見えるが、これは2つの要因、すなわち「グラフの形状の変化」と「グラフの位置 (θ 方向) の変化」によるものである。

(a)については、3-2でも述べたように、 \hat{a}_f を変化させる要因となる重力傾斜トルクが θ の関数となっており、 θ の履歴は、その初期値 θ_0 に依存するからである。

(b)の2つの要因のうちの後者については以下のように説明される。

\hat{a}_f を決定するのは1周の間の重力傾斜トルクの履歴であり、重力傾斜トルクは各時点の姿勢角 θ に依存する。 \hat{a}_0 の差が各時点の θ に与える影響をごく簡単に見積もる。

$\hat{a}_0 \doteq \hat{\theta}_0$ と考えて、1周の間 θ が変化しないとす。この場合 \hat{a}_0 の値が1変化すると近地点の θ は π 変化する。諸量は2-1で示した基準量で無次元化されており、1軌道周期が 2π だからである。始点 (遠地点) での \hat{a}_0 の値の変化が、1軌道周期中の各時点の θ に与える影響の平均を、近地点での θ の値の変化で代表すると、 \hat{a}_0 の値を1変化させることは各時点の θ を平均して π 変化させることになり、このことは各グラフ中で θ_0 を π 変化させることに相当する。 \hat{a}_0 の変化によってグラフが θ_0 方向に大きく移動することがこれで説明できる。

つづいて、「グラフの形状の変化」について詳しく検討するために、各 \hat{a}_0 に対するグラフの極大値をそろえた図をFig.3-20に示す。この図から以下の事項が読み取れる。

(a) \hat{a}_0 が大きくなるにしたがって、 \hat{a}_f の θ_0 に対する感度が小さくなる。すなわち、 θ_0 に対する \hat{a}_f の変化は小さくなる。

(b) \hat{a}_0 が大きくなるにしたがって、とりうる \hat{a}_f の最大値 ($\hat{a}_{f \max}$) は大きくなる。

(c) \hat{a}_0 がある値 (この場合6.0) より大きい場合、 \hat{a}_0 が大きくなるにしたがってグラフ全体が上昇する。 \hat{a}_0 がこの値より小さい範囲では、 \hat{a}_0 が大きくなったときに、グラフの中に、上昇する部分と下降する部分がある。

(d)(c)において、グラフが下降していく部分では、上昇する部分に比べて、 \hat{a}_f の θ_0 に対する感度が小さい。

これらの性質をよりはっきり示すために、別の観点から見た図を示す。

Fig.3-22は各 \hat{a}_0 に対する \hat{a}_f の分布を示したものである。

まず、この図の意味を説明する。各 \hat{a}_0 の1軌道周期の運動について、 \hat{a}_f の分布割合 (dispersion rate) を計算し、プロットしたものである。分布割合は次のように計算される (Fig.3-21参照)。各 \hat{a}_0 について θ_0 と \hat{a}_f の関係を示したグラフ (Fig.3-19

と同じもの) を考える。ある \hat{a}_f に対して $\hat{a}_f \pm$ 微小量の範囲内にあるグラフの部分を切り出し、各部分の θ_0 方向の長さを $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \dots$ とするとき、

$$\text{dispersion rate} = \frac{\sum \Delta\theta_i}{\pi} \quad (3-11)$$

で計算される。分布割合は、どれほどの割合の θ_0 が \hat{a}_f という終端値をとるかを表わしており、その積分値は1となる。

Fig.3-22から次のことがわかる。(c)で述べられたとおり、 \hat{a}_0 が6.0より大きい場合、 \hat{a}_0 が大きくなるにしたがって分布の山は右に (\hat{a}_f が大きい方に) 移動する。また、 \hat{a}_0 が6.0より小さい範囲では、分布の山は2つあり、1つは左へ、1つは右へ移動していることがわかる。さらに、左へ移動する山は高い。これは、グラフが下降していく部分では、同じ \hat{a}_f (正確に言えば、ある範囲の \hat{a}_f) をとる θ_0 の範囲が広く、 θ_0 に対する \hat{a}_f の感度が低いこと (上記(d)) を示している。

Fig.3-23は \hat{a}_0 に対する \hat{a}_f の最大値 ($\hat{a}_{f,\max}$) と、 \hat{a}_f の平均値 ($\hat{a}_{f,\text{ave}}$) を示した図である。(b)で述べられたとおり、 $\hat{a}_{f,\max}$ は \hat{a}_0 が大きくなるにしたがって、大きくなるのがわかる。また、(c)で述べたような動きの結果として、 $\hat{a}_0 < 4.0$ では、 \hat{a}_0 が大きくなるにしたがって $\hat{a}_{f,\text{ave}}$ は下がり、 $\hat{a}_0 > 4.0$ では、 \hat{a}_0 が大きくなるにしたがって $\hat{a}_{f,\text{ave}}$ も上がっていくことがわかる。また、 \hat{a}_0 と $\hat{a}_{f,\text{ave}}$ の関係を見ると、 $\hat{a}_0 > 3.0$ では $\hat{a}_0 > \hat{a}_{f,\text{ave}}$ であり、平均的にいって回転が遅くなっているのに対し、 $\hat{a}_0 < 3.0$ では $\hat{a}_0 < \hat{a}_{f,\text{ave}}$ で、平均的にいって回転が速くなるということもわかる。

以上、Fig.3-20、Fig.3-22、Fig.3-23から読みとれる性質が、どのような理由からおこるのかを説明する。

姿勢運動の要因は重力傾斜トルクのみである。しかし、剛体が楕円軌道上を運動していることにより、軌道運動と姿勢運動が干渉しあい、不安定な運動が引き起こされることになる。不安定な運動の原因となる干渉の具体的な要素は3つあり、

1. 楕円軌道上の位置によって重力の強さが変化すること。(重力の変化)
2. 楕円軌道上の位置によって軌道角速度(重力方向の変化率)が変化すること。(軌道運動)
3. 重力傾斜トルクが姿勢角の非線形関数で表現されること。(非線形性)

である。ここでは、1つ1つの要素がどのような効果をもつか、そして、それらを組み合わせることによってどのような相乗効果がでてくるか、を考えていくことを通して、これら3つの要素すべてが干渉しあう実際の運動の性質を明らかにしていく。Tab.3-1にこれから考える6つのモデルの構成要素を示し、以下、各モデルについての検討を続ける。

(1)モデル1：重力の変化のみ

もっとも簡単な場合として、「重力の変化」のみがある場合の運動を考える。楕円軌道上を運動する場合と同様に重力の強さが変化した場合の運動を考える。軌道運動も非線形性も考慮しないので、回転速度が一定($\dot{\theta}_0$)の状況下で、重力傾斜トルク

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 + \dot{\theta}_0 t \\ N_g &= -\frac{3k_v}{2(1+e\cos\varphi)} \sin 2\theta = -\bar{N}_g \sin 2\theta \end{aligned} \quad (3-12)$$

の、一軌道周期分の積分値を計算する。 $e=0.5$ 、 $k_v=1.0$ で $\dot{\theta}_0=2.0$ の場合の、姿勢角初期値 θ_0 に対する重力傾斜トルクの積分値 Δh をプロットしたのがFig.3-24である。

Δh はトルクの積分値であり、角運動量の変化分に相当し、姿勢角速度の変化分に比例することになる。姿勢角速度が大まかにいって回転強度 \hat{a} に比例すると考えれば、Fig.3-19と同じ性質のグラフであると考えられる。 Δh の値は初期姿勢角 θ_0 に依存して変化するが、 Δh の曲線は0を中心に上下に対称になっている。これは \hat{a}_0 が大きい範囲のFig.3-19のグラフと似た形状である。 \hat{a}_0 が大きくなり、姿勢角速度が大きくなると、軌道運動や非線形性の効果（これは姿勢角の変化に影響を及ぼす要素）が小さくなっていくからと考えられる。しかし、 \hat{a}_0 が小さい範囲のFig.3-19のグラフとは大きく性質を異にしており、この場合の運動は重力の変化のみでは説明できないことがわかる。

Fig.3-24の極大点、極小点（図中の赤丸）にあたる運動の重力傾斜トルクの履歴を示したのがFig.3-25である。これらの曲線が時間軸と囲む部分の符号つき面積の総和がFig.3-24の Δh となる。面積が正の部分と負の部分が打ち消しあっていくことを考えれば、もっとも重力傾斜トルクが強くなる地点（近地点に相当）でのトルクの正負が Δh の値に大きな影響を与えることがわかる。初期角速度が速くなった場合

($\dot{\theta}_0=6.0$)の極大点の重力傾斜トルクの履歴を示したのがFig.3-26である。Fig.3-25と比べて振動の周期が短くなり、近地点付近の山が細くなる。その結果、面積の総和が小さくなり Δh が小さくなる。Fig.3-19から得られた結果の(a)、すなわち、 \hat{a}_0 が大きくなるにしたがって、 θ_0 による \hat{a}_f の変化が小さくなる理由はこのことで説明できる。

(2)モデル2：重力の変化と軌道運動

モデル1の運動に軌道運動の効果を加える。重力の強さは楕円軌道上を運動する場合と同様に変化する。非線形性は考慮しないので、慣性空間に対する角速度は一定とするが、軌道角速度が時間変化する($\dot{\varphi}$)ので、時刻 t における局所垂直（重力方向）に対する姿勢角 θ は

$$\theta(t) = \theta_0 + (\dot{\theta}_0 + \dot{\varphi}_0)t - (\varphi(t) - \pi) \quad (3-13)$$

である。 $\dot{\theta}_0$ は初期の姿勢角速度、 $\dot{\varphi}_0$ は初期の軌道角速度である。

この θ を用いて重力傾斜トルクの、一軌道周期分の積分値を計算する。 $e=0.5$ 、 $k_y=1.0$ で $\dot{\theta}_0=2.0$ の場合の、姿勢角初期値 θ_0 に対する重力傾斜トルクの積分値 Δh をプロットしたのがFig.3-27である。グラフの形状は重力の変化のみを考えたFig.3-24と似ているが、 Δh のスケールがFig.3-24と比べて大きくなっている。Fig.3-27の極大点（図中の赤丸）にあたる運動の重力傾斜トルクの履歴を示したのがFig.3-28である。Fig.3-25と比べると近地点付近の山が太くなっていることがわかる。これは、大きな重力傾斜トルクがえられる姿勢をながい時間保っていることを示す。この運動の姿勢角の履歴をFig.3-29に示す。近地点付近で軌道角速度が大きくなった時に $\dot{\theta}$ が小さくなり（この場合は負の値にまでなっている）、大きな重力傾斜トルクがえられる姿勢角（ $\theta = -\pi/4$ ）付近に長くどまることがわかる。初期の姿勢角速度が大きくなると、軌道角速度の変化の $\dot{\theta}$ への影響が相対的に小さくなり、重力の変化のみを考える(1)の運動に近づく。

(3)モデル3：非線形性

次に非線形性の効果を考える。非線形性のみを考えるために、真円軌道上の姿勢運動を考え、重力の変化や軌道角速度の変化は考えない。ここでは、簡単な例をひとつ示す。Fig.3-30は2組の初期状態（ $\theta_0, \dot{\theta}_0$ ）から始まった2つの運動の重力傾斜トルクの履歴を示している。青線は姿勢角速度が一定の場合、赤線は姿勢角加速度が姿勢角自身の非線形関数である重力傾斜トルク

$$\ddot{\theta} = N_g = -3k_y \sin \theta \cos \theta \quad (3-14)$$

で与えられる場合、すなわち、ここでいう非線形性の効果を考えた場合である。重力傾斜トルクが正の場合（Fig.3-30.a）、重力傾斜トルクにより姿勢運動は加速され、重力傾斜トルクの変化も速くなる。結果的にいえば、重力傾斜トルクのはやせることになる。逆に、重力傾斜トルクが負の場合（Fig.3-30.b）、重力傾斜トルクにより姿勢運動は減速され、重力傾斜トルクの変化は遅くなり、重力傾斜トルクの谷は太ることになる。端的に言って、非線形性は、重力傾斜トルクの正の部分を減じ、負の部分を増す効果があるといえる。次に、非線形性が重力の変化や軌道角速度の変化といった他の要素と合わさったときの効果を考える。

(4)モデル4：重力の変化と非線形性

重力が変化し、非線形性の効果もある場合を考える。重力の強さは楕円軌道上を運動する場合と同様に変化することとするが、軌道角速度は一定とする。非線形性を考慮するので、姿勢角加速度は

$$\ddot{\theta} = N_g = -\frac{3k_y}{(1 + e \cos \varphi)^3} \sin \theta \cos \theta = -\bar{N}_g \sin 2\theta \quad (3-15)$$

で与えられることになる。姿勢角速度を考慮した運動方程式を積分することになるので、回転の強さは回転強度 \hat{a} で判断することになる。 $e=0.5$ 、 $k_y=1.0$ で $\hat{a}_0=2.0$ の場合の、姿勢角初期値 θ_0 に対する \hat{a}_f プロットしたのがFig.3-31である。非線形性を考慮しない場合のFig.3-24と比べると、 \hat{a}_0 を下回る \hat{a}_f になる領域（回転が遅くなる領域）が大きくなっていることがわかる。これは重力傾斜トルクの正の部分が減じ、負の部分を増す効果がある非線形性のためであると考えられる。Fig.3-19において、 \hat{a}_0 を下回る θ_0 の領域が広いこと、あるいは、Fig.3-23において、 $\hat{a}_0 > 3.0$ の領域で $\hat{a}_{f,ave}$ が \hat{a}_0 を下回ることはこのことから説明できる。

Fig.3-31の極大点・極小点（図中の赤丸）にあたる運動の重力傾斜トルクの履歴を示したのがFig.3-32である。極大点のグラフ（Fig.3-32.a）では、重力傾斜トルクの蓄積の結果、回転角速度が速くなり、近地点付近の山が細くなる。極小点のグラフ（Fig.3-32.b）では、負の重力傾斜トルクの蓄積の結果、回転速度が遅くなり、近地点付近の山が大きくなって、さらにその効果を増幅していることがわかる。

Fig.3-31には、 θ_0 の小さな変化に対し \hat{a}_f が大きく変化している部分（ $\theta_0=0.1$ 、 0.6 付近）がある。 $\theta_0=0.6$ 付近の2点（図中の水色×）について、姿勢角の履歴を示したのがFig.3-33である。2つ履歴は、最初ほとんど同じ曲線を描いていながら、 $t=0.2$ 付近から別れていくことがわかる。この時の姿勢角はほぼ $\pi/2$ である。Fig.3-34に示すように、 $\theta < \pi/2$ の場合、重力傾斜トルクは負の方向にはたらき、 θ が $\pi/2$ を超えると重力傾斜トルクは正の方向に働くことになる。 θ が $\pi/2$ に近づくにしたがって、重力傾斜トルクによって角速度が減少していく。 θ が $\pi/2$ に達する前に角速度が0になれば、その後振動は負の方向にかわり θ は減少する。もし θ が $\pi/2$ に達し、突破すると、その後重力傾斜は正の方向にかわり、 θ はますます大きくなる（この場合 $-\pi/2$ から大きくなっていく）。つまり、 $\pi/2$ に達するかどうかの小さな差がその後の運動の方向をかえ、結果として \hat{a}_f の大きな差となるわけである。

Fig.3-31では、ある範囲の θ_0 に対しては、 \hat{a}_f の値がほとんど変わっていない。この理由を説明するためにFig.3-35を示す。Fig.3-35は、いろいろな θ_0 に対する θ の時間履歴を1つの図に描いたものである。初期には、広い範囲の θ にわたって分布しているグラフが、近地点を通過する（ $r=0$ ）付近では、狭い範囲に集まってきていることがわかる。密集してくる理由を示す。最初、ほぼ等姿勢角速度で運動している各運動は、重力が強くなる近地点付近になって、角速度に変化を生じ始める。負の向きの重力傾斜トルクがはたらく、 $\theta > 0$ にあるような運動は、角速度を減じ、ついには負の向きの回転を始める。とくに $0 < \theta < \pi/4$ の範囲では、 θ が $\pi/4$ に近い運動ほど、大きな重力傾斜トルクがはたらくため、負の向きの角速度が大きくなり、急激に姿勢角が変化する。その結果、各運動間の姿勢角の差がちぢまり、グラフが密集する

ことになる。 $\theta > \pi/4$ では、 θ が大きくなるほど重力傾斜トルクが弱くなるので、角速度は負になるものの密集は起こらない。重力傾斜トルクが正となる $\theta < 0$ の範囲では、角速度が増加するのでグラフ間の間隔が開き、やはり密集は起こらない。つまり、運動の密集がおこるのは、負の重力傾斜トルクの蓄積により、姿勢角速度が小さくなっている状況で、 $0 < \theta < \pi/4$ の間にあるような運動においてであることがわかる。

運動の密集が起こると、なぜ \hat{a}_j の大きさがほぼ等しくなるのかを説明する。密集してきた各運動も、密集前の姿勢角の履歴は異なっており、大きな山を描くものもあれば、小さな山を描くものもある。大きな山を描く運動は、それだけ大きな負の重力傾斜トルクを蓄積するが、密集点通過後も負の角速度が大きいために、 $\theta < 0$ の範囲、すなわち、正の重力傾斜トルクを生ずる範囲に深くもぐりこむことになる。逆に、密集点前で小さな山を描く運動は、密集点通過時の負の角速度が小さいために、密集点通過後も θ があまり小さくならない。結果として、密集点前後の重力傾斜トルクの総和を比較すると、大きな山を描く運動も、小さな山を描く運動も、大きな差がないと考えられる。この密集している運動がFig.3-31の \hat{a}_j の θ_0 に対する感度が低い部分になっていると考えられる。

最後に、 \hat{a}_0 を2.0~4.0で変化させたときの、 θ_0 に対する \hat{a}_j を極大値をそろえてプロットしたのがFig.3-36である。Fig.3-20と比較すると、Fig.3-20の \hat{a}_0 が大きな範囲の動きと類似していることがわかる。しかし、Fig.3-20の、 \hat{a}_0 が小さい範囲のグラフの動きを説明するためには、軌道角速度の変化を考慮に入れる必要がある。

(5)モデル5：軌道運動と非線形性

軌道角速度が変化し、非線形性の効果もある場合を考える。重力の強さは一定とする。非線形性を考慮するので、姿勢角加速度は

$$\ddot{\theta} = N_g = -3k_g \sin \theta \cos \theta - \ddot{\varphi} \quad (3-16)$$

で与えられることになる。姿勢角加速度を考慮した運動方程式を積分することになるので、回転の強さは回転強度 \hat{a} で判断することになる。

\hat{a}_0 を1.0~2.0の範囲で変化させたときに、 θ_0 に対する \hat{a}_j の値をプロットしたのがFig.3-37である。 \hat{a}_j のスケールは別にして、グラフの形状はFig.3-20に似ている。

前段と同じように、 $\hat{a}_0 = 1.0$ の場合について、さまざまな θ_0 からはじまる運動の姿勢角履歴を同じ図上にプロットしたのがFig.3-38.aである。重力の変化と非線形性のみを考慮したFig.3-35と比較すると、グラフの密集度が高いことがわかる。このグラフの場合、 $\hat{a}_0 = 1.0$ であれば、どのような θ_0 をとっても、近地点付近の運動は、ほぼ同じになることがわかる。グラフが密集するメカニズムはFig.3-35で説明したとおりである。Fig.3-35では、姿勢角速度を減少させる要因が、負の重力傾斜トルクの蓄積しかなかったために、限られた範囲の運動しか角速度が負になることがな

く、密集が起こる範囲が限定されていることがわかる。これに対し、Fig.3-38.aでは、近地点付近で軌道角速度が大きくなるために、ほとんどの運動に対して姿勢角速度が負になり、密集に引き込まれていくことになる。

$\hat{\alpha}_0$ が1.0~2.0の範囲でFig.3-38.aと同様なグラフを描いたのがFig.3-38.b~fである。 $\hat{\alpha}_0$ が大きくなるにしたがって初期姿勢角速度が大きくなるため、近地点で軌道角速度が大きくなっても、姿勢角速度が負にならない運動が増えていく。すなわち、密集に引き込まれない運動が増え、密集が崩れていくのである。Fig.3-37中の各 $\hat{\alpha}_0$ に対するグラフの水平な部分に相当するのがFig.3-38中の密集部分である。Fig.3-37中の山を構成するのが、Fig.3-38中の密集からずれて、各運動が広く等間隔に分布している部分である。

Fig.3-20では、小さい $\hat{\alpha}_0$ に対して $\hat{\alpha}_f$ が大きくなり、 $\hat{\alpha}_0$ が大きくなるにしたがって $\hat{\alpha}_f$ が小さくなっていく、という動きが見られる。これに対してFig.3-37では、そのような動きが、あまりはっきりとはみられない。この動きを説明するための重要な要素として、Fig.3-38から次の特徴が読み取れる。 $\hat{\alpha}_0$ が大きくなるにしたがって、密集度が崩れていくと同時に、密集点が少しずつ右の方へずれていくことがわかる。初期姿勢角速度が大きくなるにつれて、軌道角速度の変化の影響が見かけ上小さくなり、姿勢角の差を縮める速度が小さくなり、密集が遅れるためだと考えられる。このことを念頭において、重力の変化を考慮にいった、実際の運動について考察する。

(6)モデル6：すべての要素を考慮した場合

ここまでの検討の結果を総合して、最後に、実際の運動における $\hat{\alpha}_f$ の動きを説明する。 $\hat{\alpha}_0$ が小さいとき、軌道角速度の変化によって、姿勢角速度が負になった各運動は非線形性によって密集する。密集点は $\hat{\alpha}_0$ が小さいほど速くおこり、密集後は重力傾斜トルクが正となる、 $\theta < 0$ の範囲に θ が変化していく。 $\hat{\alpha}_0$ がとくに小さい範囲では、密集は近地点通過前におこり、重力が最大となる近地点付近では、正の重力傾斜トルクを生み出す $\theta < 0$ の範囲を各運動が通過する。 $\hat{\alpha}_0$ が大きくなるにしたがって密集点の発生は遅れて、近地点付近、あるいは近地点通過後になる。この場合は、近地点通過時に重力傾斜トルクが負となる $\theta > 0$ の範囲を各運動が通過することになり、重力傾斜トルクの積分値は小さくなっていくことになる。これが、 $\hat{\alpha}_0$ が小さい範囲で、 $\hat{\alpha}_0$ が大きくなるにしたがって $\hat{\alpha}_f$ が減少していく原因である。

$\hat{\alpha}_0$ が大きくなると、密集からはずれる運動が増えてくる。これらの運動は、角速度の大きさこそ変われ、角速度が正であり続けて回転運動を続けるようになり、非線形性の影響が小さくなっていく。 $\hat{\alpha}_0$ が十分大きくなり、密集をつくるような運動がなくなると、状況は、モデル2で検討した、重力の変化と軌道運動の効果がある場合に近くなる。

さらに \hat{a}_0 が大きくなると、軌道運動の影響も無視できるようになり、モデル1で検討した重力の変化だけがあるようなモデルでも説明可能となる。

以上(1)~(6)の説明を通じて、Fig.3-20に対するa)~d)の性質の説明がついたと考えられる。重力傾斜トルクという単一のトルクのみがはたらく運動であっても、重力傾斜トルクを変化させる3つの要素の絡み合いにより、運動が複雑な様相を示すことがわかる。

さて、2-2では2次元運動と3次元運動の違いを論じた。本段の簡易モデルの検討結果を元に、その議論を振り返ってみる。要点は、軌道面外運動では、3つの要素のうち、軌道運動の効果がないということであった。これは、本段の議論でいえば、モデル4に相当する運動である。軌道運動の効果を伴うモデル6と比較すると、軌道運動の効果がないため、運動の密集が遅いことがわかる。このことは、重力傾斜トルクが強い近地点通過付近に、重力傾斜トルクが正となる $\theta < 0$ の領域を通過することができず、大きな角運動量増加を期待できないことがわかる。

ここでは、1軌道周期の回転強度の変化について、パラメータ (e, k_y) の値を固定して、初期状態に対する関係を考察した。次段では、パラメータに対して \hat{a} の変化がどのような動きを示すかを考察する。

3-3-3 1軌道周期の間の回転強度の変化とパラメータ (e, k_y) の関係

ここでは、1軌道周期の間の回転強度の変化が e や k_y と、どのような関係があるかを示す。Fig.3-39に、いろいろな e について、 \hat{a}_0 に対して \hat{a}_f の最大値を示す。Fig.3-40は同様に \hat{a}_0 に対する \hat{a}_f の平均値を示している。各 e に対するグラフは、大きさは違えども、ほぼ相似の形状をしており、 \hat{a} を何らかの基準でそろえることによって、スケールも含めてほぼ同じグラフで表わせることが推測される。

パラメータの値に対して \hat{a} を揃える(正規化する)ためには、各運動に共通する性質から導かれる規格を用いるのがよい。前節の検討の結果より、近地点付近での運動状態が重要であると考えられるので、次のような \hat{a} を考えることにする。

近地点での \hat{a} が1.0になるような運動を考える。 $\theta=0$ と仮定して $\dot{\theta}$ をもとめると

$$\dot{\theta}_{peri} = \frac{\sqrt{3k_y(1+e)^2}}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3-17)$$

重力傾斜トルクの積分値を0と仮定して、慣性空間に対する角運動量が保存されるとすると、遠地点での $\dot{\theta}$ は

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_{apo} &= (\dot{\theta}_{peri} + \dot{\psi}_{peri}) - \dot{\psi}_{apo} \\
 &= \frac{\sqrt{3k_y}(1+e)^{\frac{3}{2}} + (1+e)^2 - (1-e)^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{\sqrt{3k_y}(1+e)^{\frac{3}{2}} + 4e}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}
 \tag{3-18}$$

このときの \hat{a} は $\theta=0$ と仮定すると

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_s^2 &= \frac{(1-e^2)^3 \left(\sqrt{3k_y}(1+e)^{\frac{3}{2}} + 4e \right)^2}{3k_y(1-e)^3 (1-e^2)^3} \\
 &= \frac{\left(\sqrt{3k_y}(1+e)^{\frac{3}{2}} + 4e \right)^2}{3k_y(1-e)^3}
 \end{aligned}
 \tag{3-19}$$

であり、これを正規化の規格とする。

この \hat{a} の値を遠地点での初期値とする運動では、初期姿勢角によって途中の重力傾斜トルクの履歴、および、その積分値はいろいろ変化する。しかし、いろいろな運動の、重力傾斜トルクの積分値の平均が0と仮定すれば、近地点での \hat{a} の平均値が1.0になるということである。近地点での \hat{a} の平均値が1.0ということは、近地点までの重力傾斜トルクの積分値によって、近地点での \hat{a} が1.0より大きい運動と小さい運動がほぼ同じ程度存在することになる。この意味でこの規格は、すべての e, k_y に対して共通の性質を示す \hat{a} の値と考えられる。

この規格によって、各 e, k_y についての \hat{a} を正規化することで、ほぼ同じスケール、形状のグラフが得られることが期待できる。Fig.3-41~Fig.3-43には $k_y=1.0$ に対して、 $e=0.2, 0.5, 0.8$ とした場合の θ_0 に対する \hat{a}_f の値を、先程の規格を用いて正規化した \bar{a}_f で表わしている。各図では、同様に正規化した \bar{a}_0 の値で0.2から1.0の範囲で変化させ、それぞれの極大値をそろえたグラフで示している。グラフのスケールや、各グラフの動きについては、かなりよい一致を示している。しかし、各 e に対して、グラフの最下限にあたる \bar{a}_f の値は異なっており、この点については別の考え方が必要であると思われる。

Fig.3-44には $k_y=1.0$ 、 $e=0.2, 0.5, 0.8$ の場合について、 \bar{a}_f の最大値、平均値を \bar{a}_0 に対

してプロットしたグラフを示している。グラフのスケール、形状ともよい一致が得られている。各グラフの左方に独立した点として示されているデータは、実際の \hat{a} の値が1.0に満たない点である。これは、運動状態でいえばLibrationになっていることを示している。これらの結果は、Tumbling状態で作られる連続的な結果と別に扱う必要があると考えられる。LibrationはTumblingと比べると、単に \hat{a} が小さくなっただけではなく、取り得る姿勢角が制限されるので、Tumblingと同等に扱えない面がある。その結果が、各グラフ右方の連続部分と左方の離散部分の曲線形状の違いに現れていると考えられる。

Fig.3-45~Fig.3-47は、 $e=0.5$ 、 $k_y=0.2, 0.6, 1.0$ とした場合の θ_0 と \bar{a}_f の関係を、いろいろな \bar{a}_0 の場合について示し、極大値をそろえて示したものである。Fig.3-48には、同じく、 $e=0.5$ 、 $k_y=0.2, 0.6, 1.0$ とした場合の、 \bar{a}_0 に対する \bar{a}_f の最大値、平均値を示している。(3-14)で示される規格による正規化は k_y に対しても有効であることがわかる。

以上のことから、3-3-2で示された1軌道周期の間の回転強度の変化と状態量初期値の関係は、いろいろな e, k_y の範囲に対して、原則として成立すると考えられ、その正規化の規格としては(3-19)で示される \hat{a}_f が適当であることがわかる。つまり、Librationではない部分に関しては、 e, k_y にかかわらず、同じ性質の運動が起こっていることになる。

3-4 複数軌道周期の間の回転の強さの変化

前節では、1軌道周期の間の姿勢回転運動について、パラメータや状態量初期値が、1軌道周期の間の回転強度の変化にどのように影響するか、に焦点をあてて検討を行った。本節では、複数軌道周期の間の姿勢回転運動について、周回ごとに回転強度がどのように変化するかを検討する。

3-4-1 複数軌道周期にわたる運動履歴

複数軌道周期にわたる運動履歴の例はFig.3-6、Fig.3-8に示したとおりである。基本的には、複数軌道周期にわたる運動は、1軌道周期の間の運動の繰り返しであり、ある周回の終端状態量が次の周回の初期状態量になって、1周ごとの運動を繰り返すと考えてよい。

3-4-2 複数軌道周期の間の回転強度の変化と初期状態の関係

$e=0.8$ 、 $k_y=1.0$ の場合について、 $\hat{a}_0=1.0$ のときの θ_0 に対する軌道1周後の \hat{a}_f (\hat{a}_{f1})、および、軌道2周後の \hat{a}_f (\hat{a}_{f2})をプロットしたのがFig.3-49(a)(b)である。2周にわたる運動を行った場合、 θ_0 と \hat{a}_f の関係は非常に複雑になることがわかる。これは、1周目の終端状態量の差が、2周目の運動の間に大きく増幅されるためであると考えられる。周回を重ねるにしたがって、 θ_0 と \hat{a}_f の関係はより複雑なものになる。

この複雑な関係が、回転の強さの指標の選び方に因を発するものでないことを示すために、他の指標を用いた場合の同様なグラフをFig.3-50、Fig.3-51に示す。

Fig.3-50は $\hat{\theta}_0=1.5$ のときの θ_0 に対する軌道1周後、2周後の $\hat{\theta}$ をプロットしたものの、Fig.3-51は $E_{a0}/I_y=0.27$ のときの θ_0 に対する軌道1周後、2周後の E_a/I_y をプロットしたものである。 $\hat{\theta}_0$ 、 E_{a0}/I_y の値はFig.3-49~Fig.3-51がほぼ同じ程度の回転の強さを表すように選んでいる。指標の選び方にかかわらず、初期状態と複数周回後の回転の強さの間には複雑な関係あることがわかる。

Fig.3-52には、 $e=0.8$ 、 $k_y=1.0$ 、 $\hat{a}_0=1.0$ の場合について、各周回ごとの \hat{a}_f の最大値と平均値を示している。周回を増すごとに、 $\hat{a}_{f,max}$ は大きくなっていくが、 $\hat{a}_{f,ave}$ はある値に落ち着くことがわかる。これは、 \hat{a} が一定の値に近づくわけではなく、 \hat{a} の分布が一定であることを示す。

Fig.3-53には、 $e=0.8$ 、 $k_y=1.0$ 、 $\hat{a}_0=1.0$ の場合について、1周目から5周目までの \hat{a}_f の分布を示している。1周目には、 $\hat{a}_f=30.0$ の付近に分布が集まっているのに対し、周回を重ねるにしたがって、 \hat{a}_f は広い範囲に、ほぼ均等に分布するようになる。

これらの結果から、複数軌道周期の間の姿勢運動について、次のことがわかる。周回を重ねるにしたがって、運動は初期状態量に対して非常に敏感になるので、初期状態量の微小な差によって、複数周回後の運動が大きく異なったものになる可能性があり、このことは複数周回後の \hat{a}_j にもあてはまる。また、複数周回後の \hat{a}_j は広い範囲に、ほぼ均等に分布している。つまり、重力傾斜トルクのみがはたらく自由運動においては、初期状態量の微小な差が、複数周回後にどのような影響を与えるかを予測することは困難だということである。このことは、複数周回にわたって何らかの目的を持った姿勢運動を引き起こすことを考えた場合、初期状態量の設定だけでその運動を実現することが困難であることを示している。なぜなら、初期状態量の微小な範囲のなかに、その後の複数周にわたる多種多様な運動が含まれているからである。したがって、複数周回にわたった運動を実現する現実的な方法としては、1周ごとに目的の運動を実現するような外力を加えるということになる。また、周回ごとに外力を加えることで、目的をもった運動が実現できるとなっても、計画された運動と実際の運動の間に、たとえ微小でも差がある場合、それが放置されていると、複数周回後には、予定の運動とは大きく異なった運動になってしまう。したがって、各周回ごとに実際の運動と予定された運動との差を修正する必要がある。

このように、複数周回にわたって、何らかの目的を持った運動を実現することを考えるならば、まず、そのような運動を引き起こすために加えるべき外力の履歴を作ること（プログラム）、さらに、計画された運動を正確に実行するために、誤差を修正するような外力を加えること（追従制御）が必要となることがわかる。次章では、このような目的で加える外力（プログラムと追従制御）についての検討を行う。

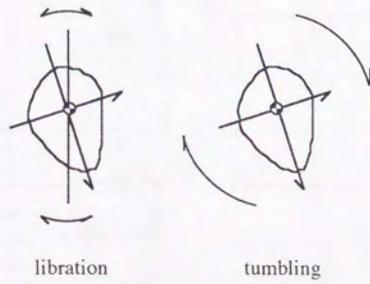
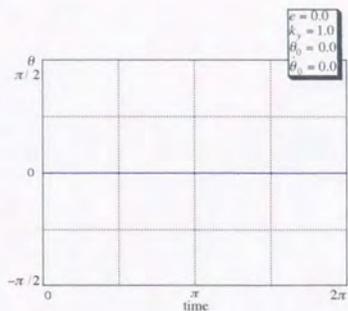
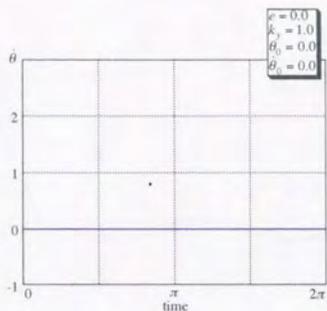


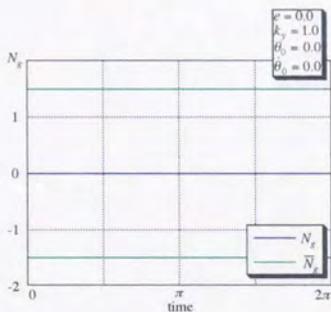
Fig.3-1 LibrationとTumbling



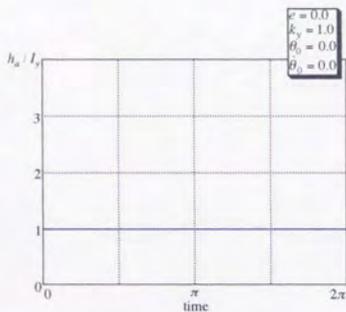
(a) θ の履歴



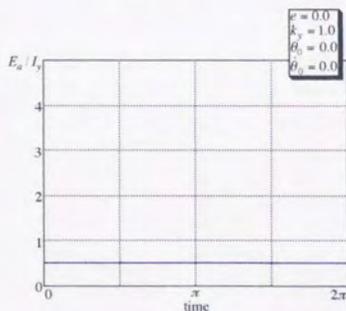
(b) $\dot{\theta}$ の履歴



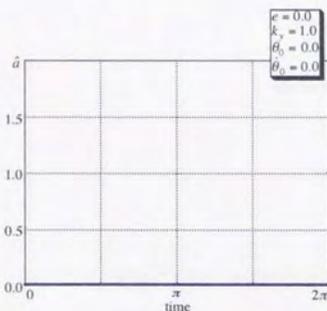
(c) N_g の履歴



(d) h_a の履歴

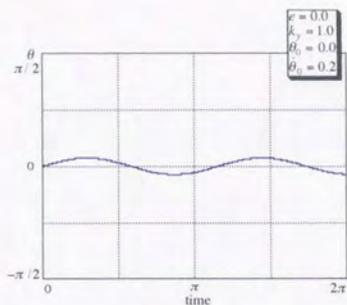


(e) E_a の履歴

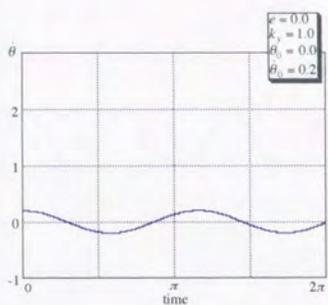


(f) \hat{a} の履歴

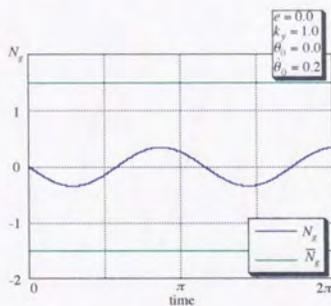
Fig.3-2 円軌道上の運動の例 (静止)



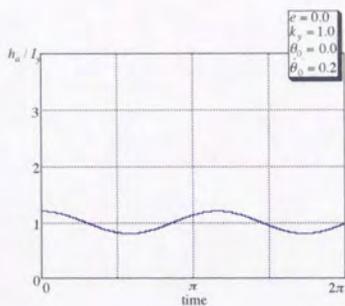
(a) θ の履歴



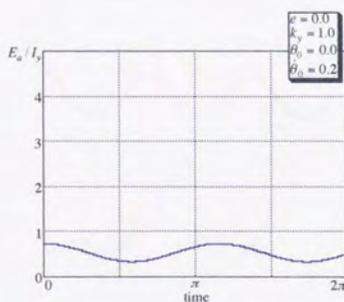
(b) $\dot{\theta}$ の履歴



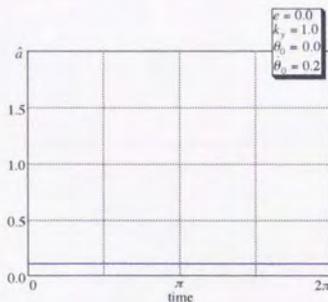
(c) N_g の履歴



(d) h_a の履歴

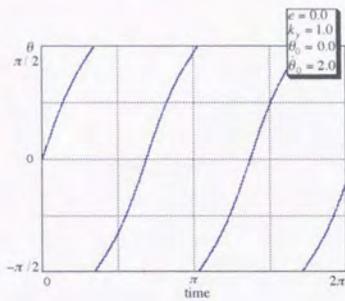


(e) E_a の履歴

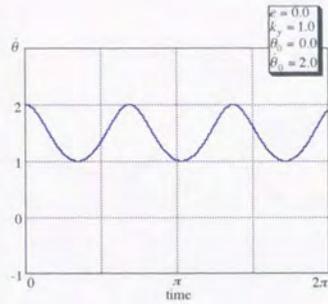


(f) \hat{a} の履歴

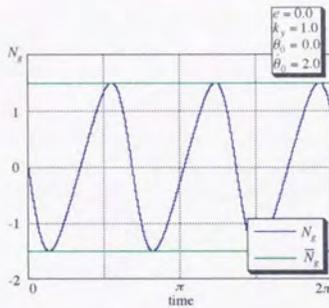
Fig.3-3 円軌道上の運動の例 (秤動)



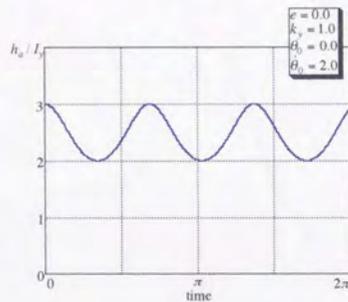
(a) θ の履歴



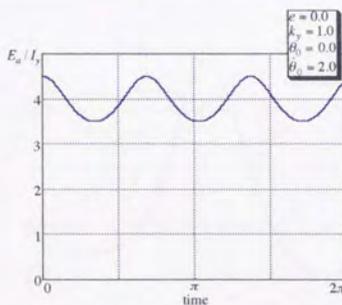
(b) $\dot{\theta}$ の履歴



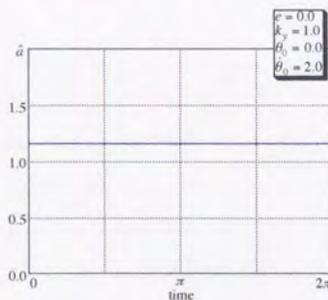
(c) N_g の履歴



(d) h_a の履歴

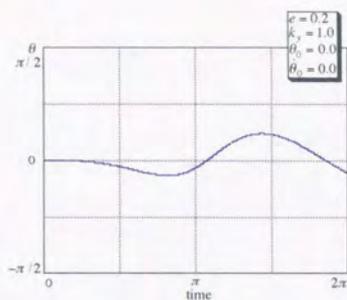


(e) E_a の履歴

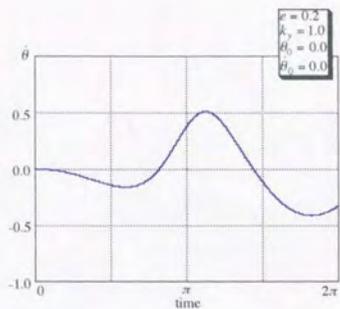


(f) \dot{a} の履歴

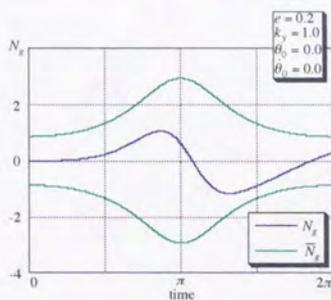
Fig.3-4 円軌道上の運動の例 (回転)



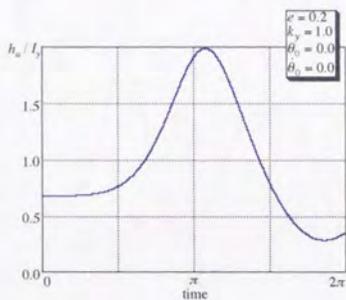
(a) θ の履歴



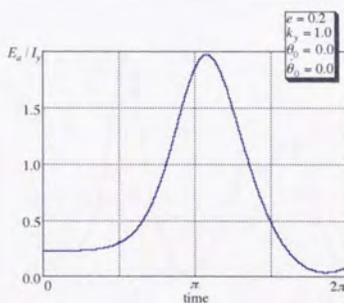
(b) $\dot{\theta}$ の履歴



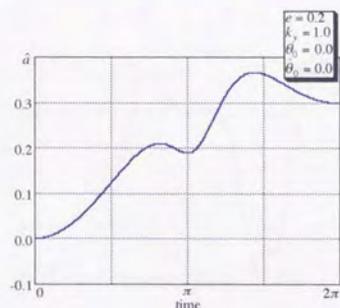
(c) N_g の履歴



(d) h_a の履歴

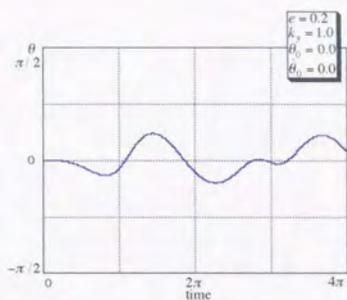


(e) E_a の履歴

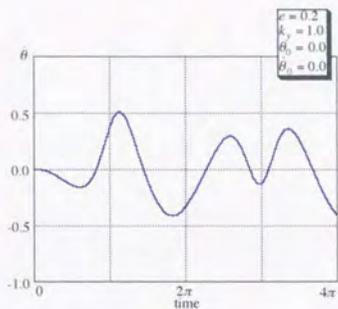


(f) \dot{a} の履歴

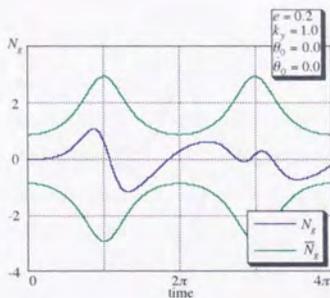
Fig.3-5 楕円軌道上の運動の例 (秤動の励起)



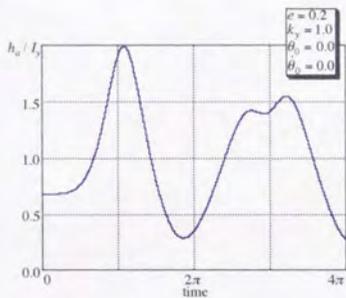
(a) θ の履歴



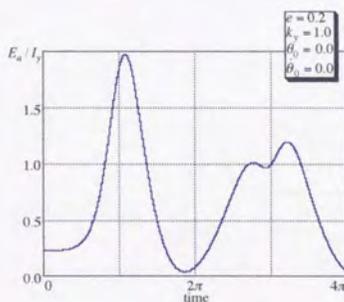
(b) $\dot{\theta}$ の履歴



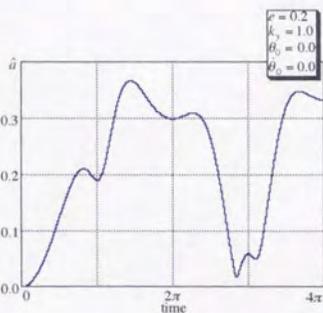
(c) N_g の履歴



(d) h_a の履歴

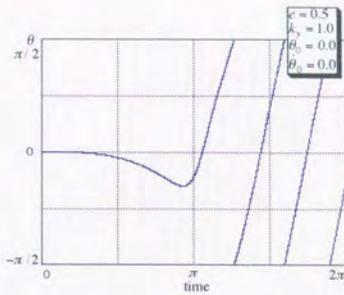


(e) E_a の履歴

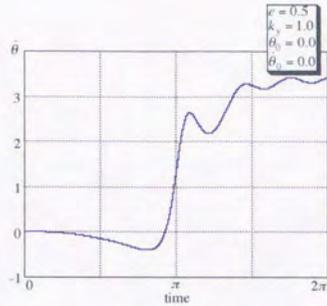


(f) \hat{a} の履歴

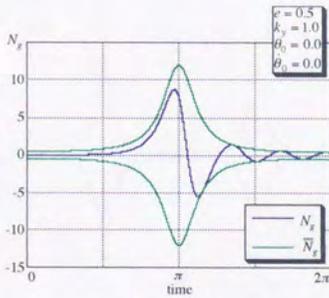
Fig.3-6 楕円軌道上の運動の例 (秤動の励起)
(2 軌道周期の間の運動)



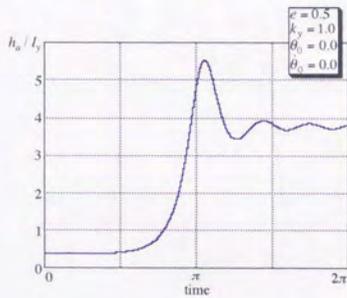
(a) θ の履歴



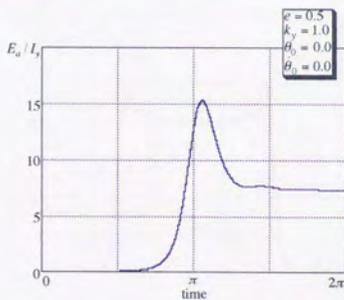
(b) $\dot{\theta}$ の履歴



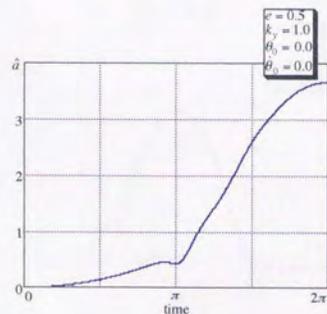
(c) N_g の履歴



(d) h_a の履歴

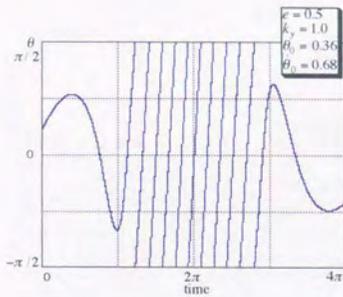


(e) E_a の履歴

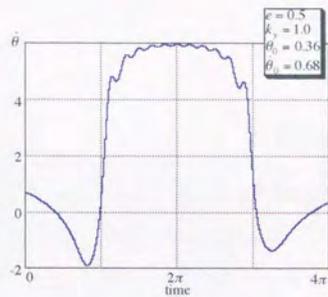


(f) \hat{a} の履歴

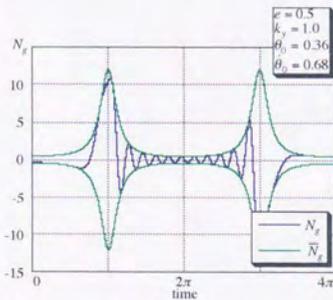
Fig.3-7 楕円軌道上の運動の例 (回転の励起)



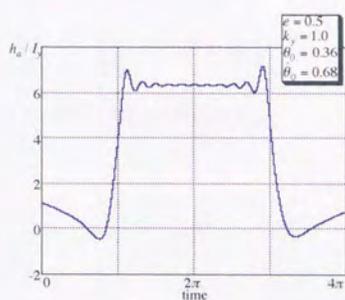
(a) θ の履歴



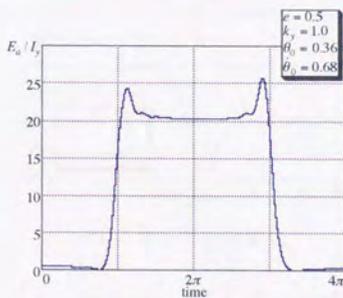
(b) $\dot{\theta}$ の履歴



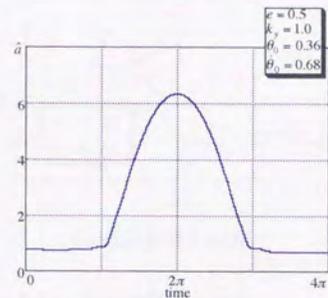
(c) N_g の履歴



(d) h_a の履歴

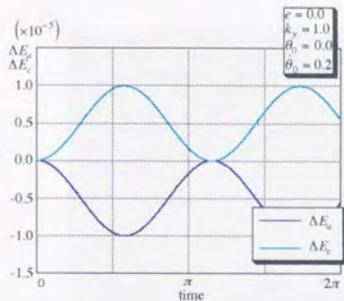


(e) E_a の履歴

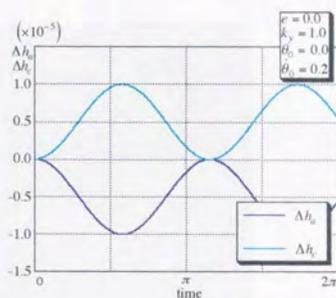


(f) \hat{a} の履歴

Fig.3-8 楕円軌道上の運動の例 (秤動→回転→秤動)

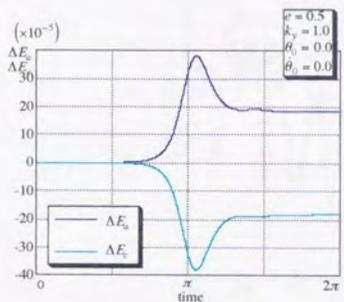


(a)エネルギーの保存

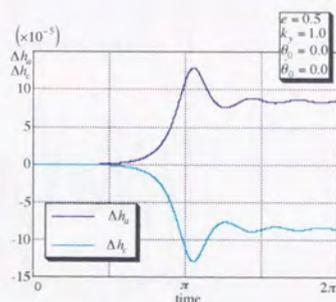


(b)角運動量の保存

Fig.3-9 エネルギー・角運動量の保存（円軌道上の運動）



(a)エネルギーの保存

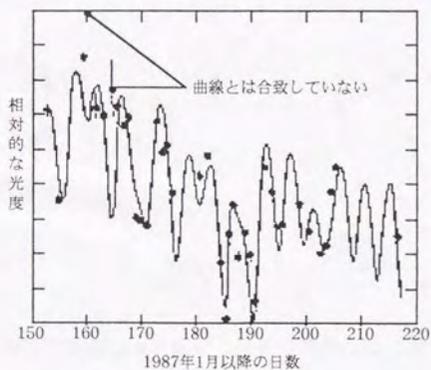


(b)角運動量の保存

Fig.3-10 エネルギー・角運動量の保存（楕円軌道上の運動）



Fig.3-11 土星の衛星ハイペリオン (文献[45]より)



ヒペリオンの光度を60日以上にわたってプロットしたところ、周期性のあるいかなる曲線とも一致しない、不規則なパターンが得られた。ジェームズ・クラベッター提供。

Fig.3-12 ハイペリオンの不規則な姿勢運動 (文献[45]より)

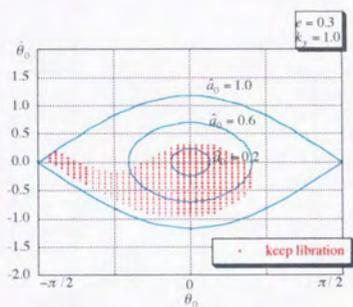


Fig.3-13 Tumblingの励起 (初期状態についての条件)

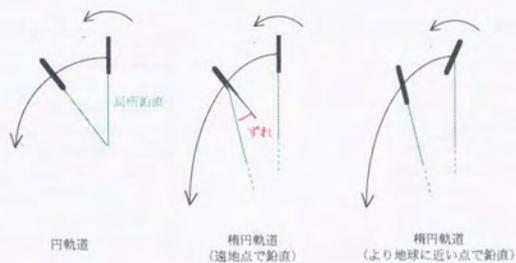
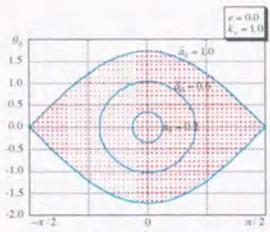
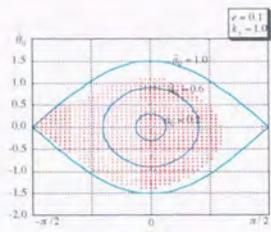


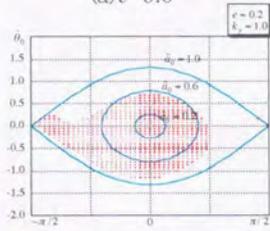
Fig.3-14 Tumblingを起こしにくい初期状態 (模式図)



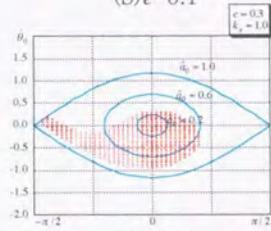
(a) $e=0.0$



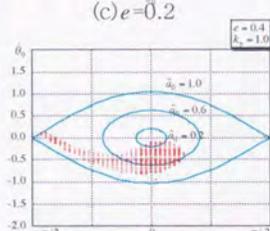
(b) $e=0.1$



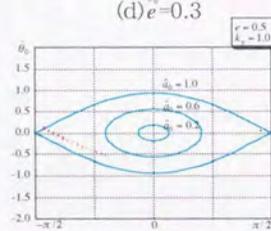
(c) $e=0.2$



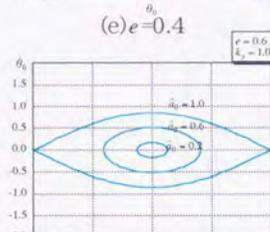
(d) $e=0.3$



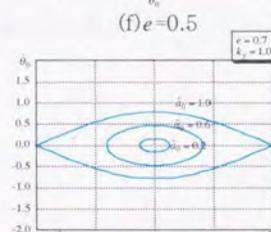
(e) $e=0.4$



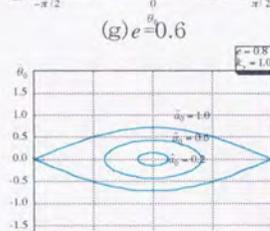
(f) $e=0.5$



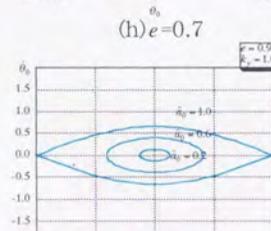
(g) $e=0.6$



(h) $e=0.7$



(i) $e=0.8$



(j) $e=0.9$

Fig.3-15 Tumblingの励起 (初期状態についての条件。 k_y 一定、 e 変化)

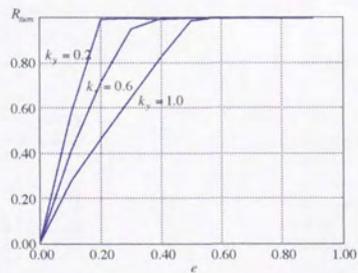
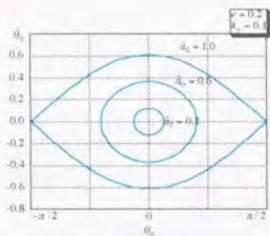
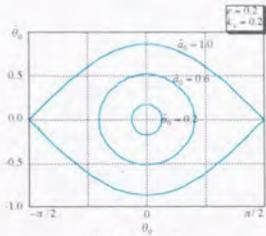
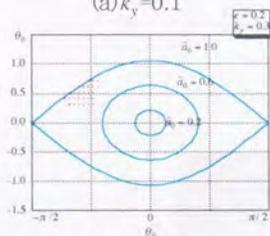
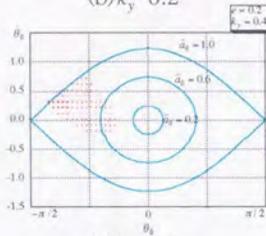
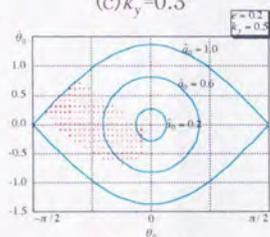
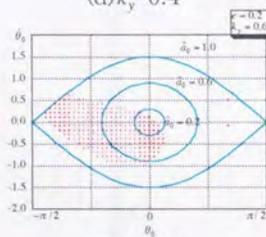
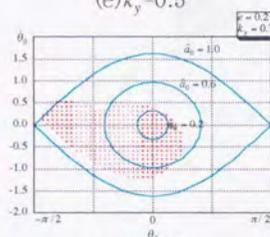
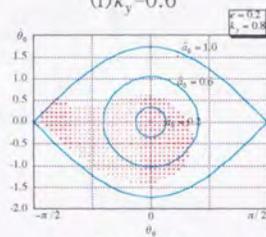
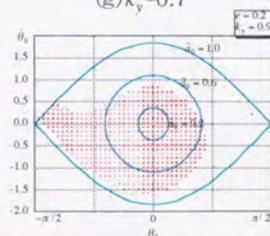
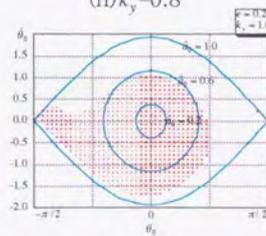


Fig.3-16 Tumblingを起こす初期状態の割合

(a) $k_y = 0.1$ (b) $k_y = 0.2$ (c) $k_y = 0.3$ (d) $k_y = 0.4$ (e) $k_y = 0.5$ (f) $k_y = 0.6$ (g) $k_y = 0.7$ (h) $k_y = 0.8$ (i) $k_y = 0.9$ (j) $k_y = 1.0$ Fig.3-17 Tumblingの励起 (初期状態についての条件。e一定、 k_y 変化)

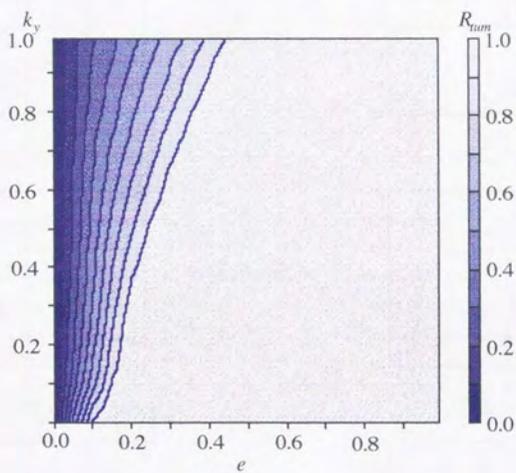
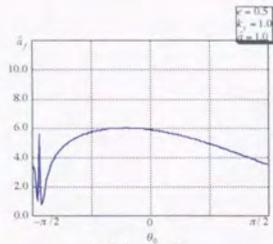
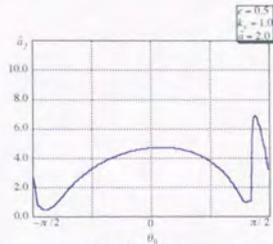


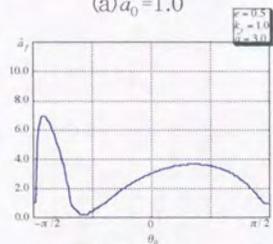
Fig.3-18 パラメータ (e, k_y) と R_{num}



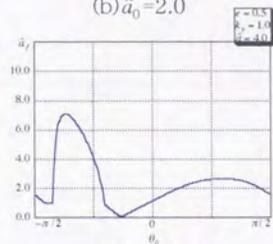
(a) $\hat{a}_0 = 1.0$



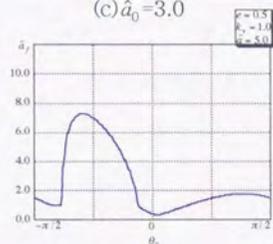
(b) $\hat{a}_0 = 2.0$



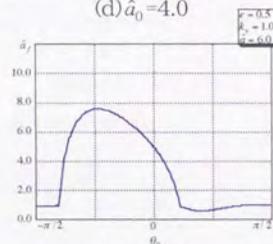
(c) $\hat{a}_0 = 3.0$



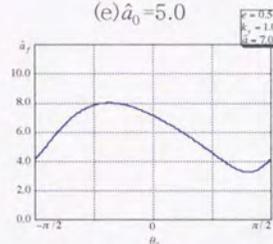
(d) $\hat{a}_0 = 4.0$



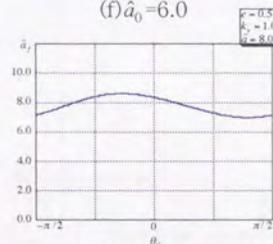
(e) $\hat{a}_0 = 5.0$



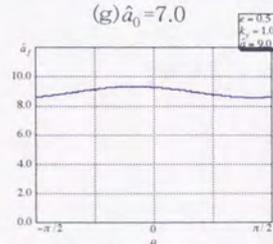
(f) $\hat{a}_0 = 6.0$



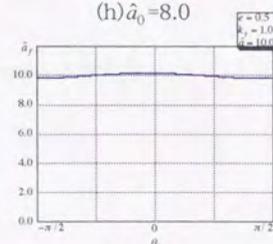
(g) $\hat{a}_0 = 7.0$



(h) $\hat{a}_0 = 8.0$



(i) $\hat{a}_0 = 9.0$



(j) $\hat{a}_0 = 10.0$

Fig.3-19 θ_0 と \hat{a}_j の関係

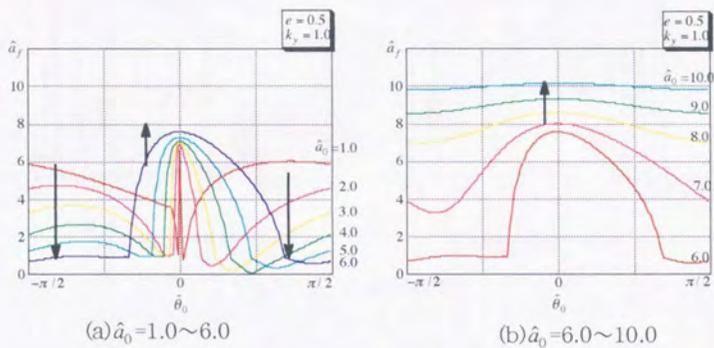


Fig.3-20 $\hat{\theta}_0$ と \hat{a}_f の関係 (極大値を揃えたグラフ)

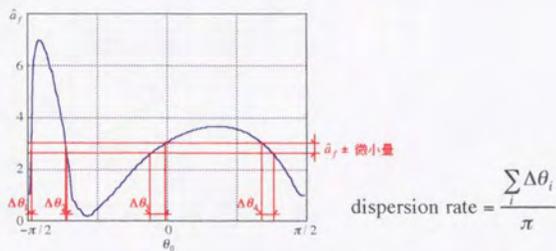
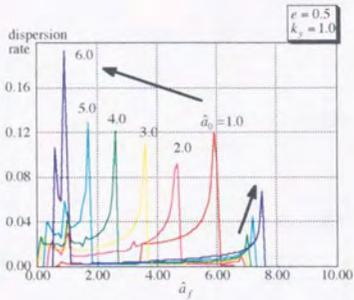
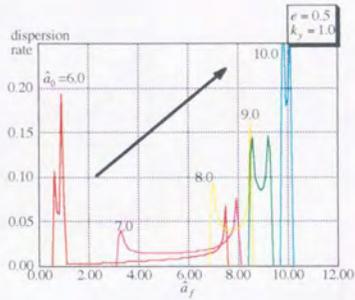


Fig.3-21 分布割合 (dispersion rate) の考え方



(a) $\hat{a}_0 = 1.0 \sim 6.0$



(b) $\hat{a}_0 = 6.0 \sim 10.0$

Fig.3-22 \hat{a}_f の分布割合

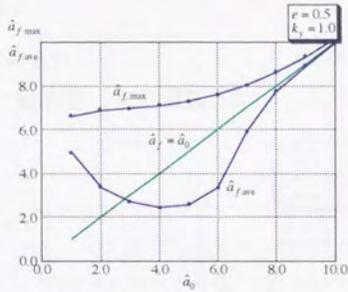


Fig.3-23 \hat{a}_0 と $\hat{a}_{f,max}$ 、 $\hat{a}_{f,ave}$

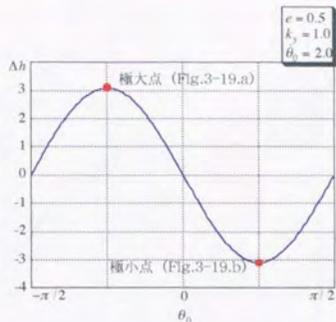
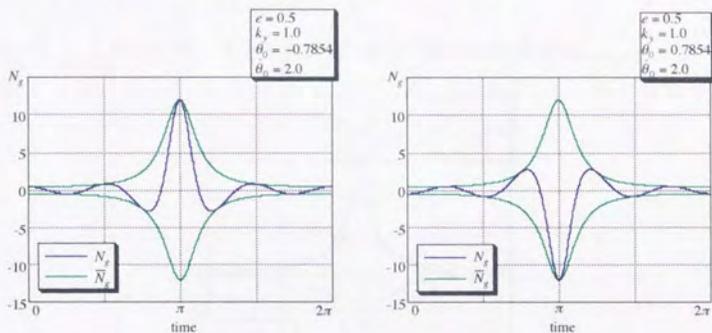


Fig.3-24 θ_0 と Δh の関係 (重力の変化)



(a)極大値の場合

(b)極小値の場合

Fig.3-25 N_g の履歴 (重力の変化)

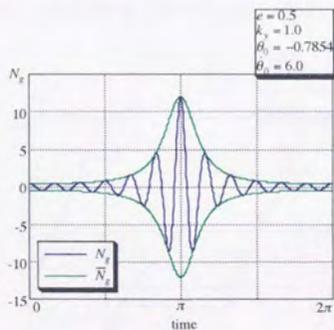


Fig.3-26 N_g の履歴 (重力の変化)

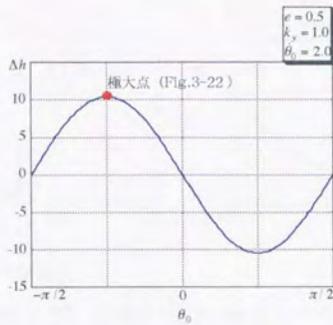


Fig.3-27 θ_0 と h の関係 (重力の変化と軌道運動)

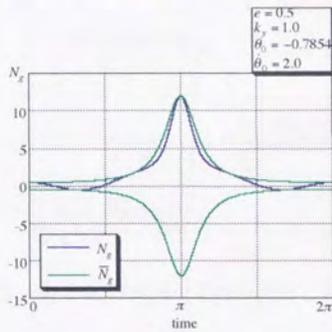


Fig.3-28 N_g の履歴 (重力の変化と軌道運動)

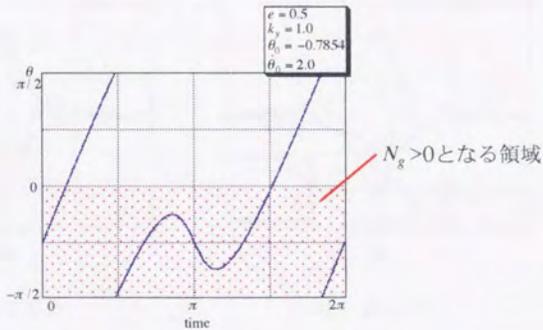
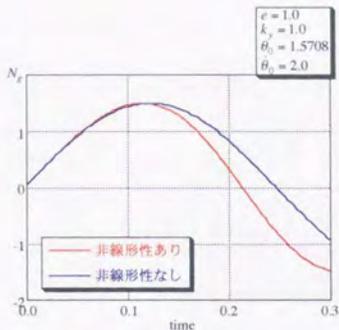
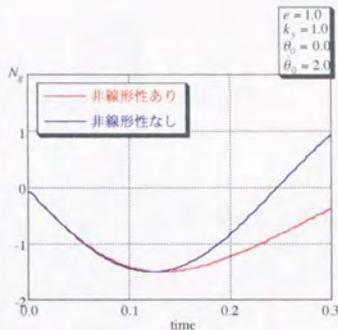


Fig.3-29 θ の履歴 (重力の変化と軌道運動)



(a) $N_g > 0$ の場合



(b) $N_g < 0$ の場合

Fig.3-30 非線形性の効果 (N_g の履歴)

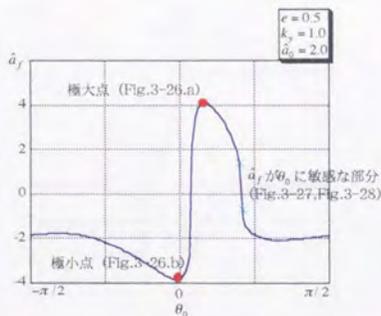
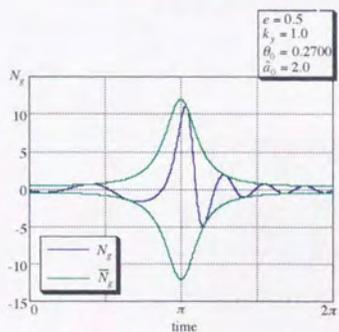
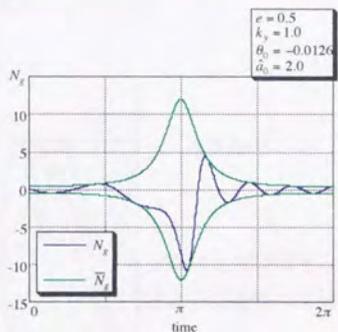


Fig.3-31 θ_0 と \hat{a}_j の関係 (重力の変化と非線形性)



(a) 極大値の場合



(b) 極小値の場合

Fig.3-32 N_g の履歴 (重力の変化と非線形性)

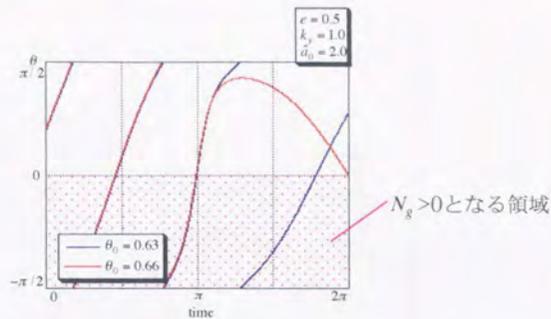


Fig.3-33 θ_0 に敏感な部分 (θ の履歴)

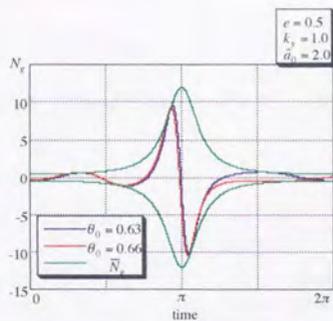


Fig.3-34 θ_0 に敏感な部分 (N_g の履歴)

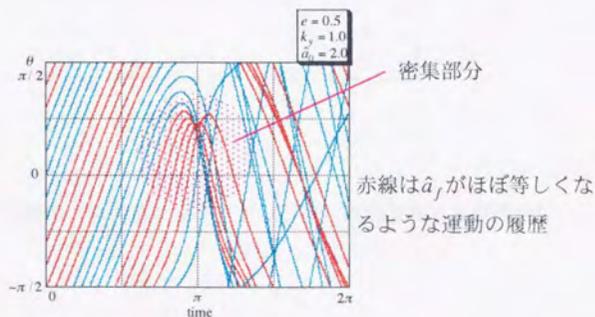


Fig.3-35 θ の履歴の密集 (重力の変化と非線形性)

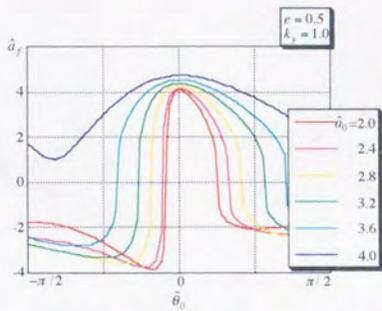


Fig.3-36 $\tilde{\theta}_0$ と \tilde{a}_f の関係（極大値を揃えたグラフ）（重力の変化と非線形性）

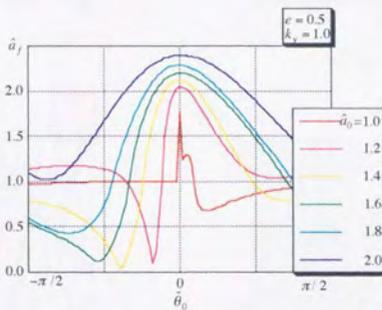
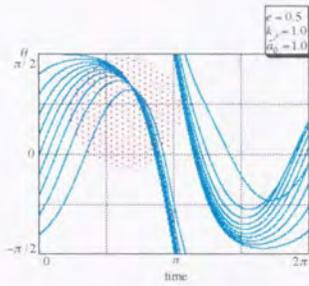
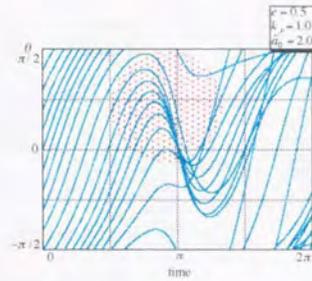


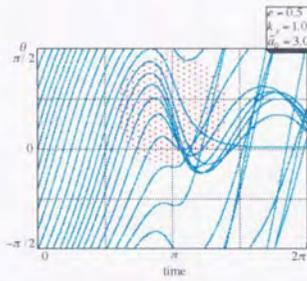
Fig.3-37 $\tilde{\theta}_0$ と \tilde{a}_f の関係（極大値を揃えたグラフ）（軌道運動と非線形性）



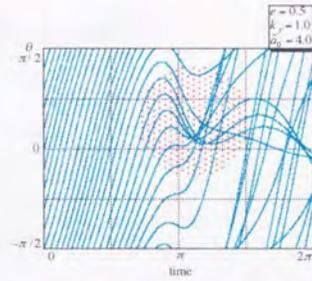
(a) $\hat{a}_0 = 1.0$



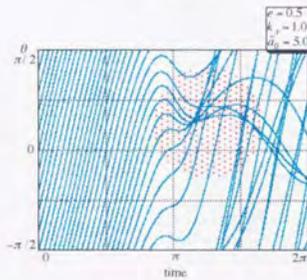
(b) $\hat{a}_0 = 1.2$



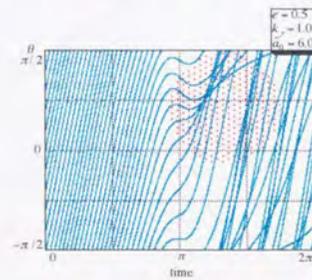
(c) $\hat{a}_0 = 1.4$



(d) $\hat{a}_0 = 1.6$



(e) $\hat{a}_0 = 1.8$



(f) $\hat{a}_0 = 2.0$

Fig.3-38 θ の履歴の密集 (軌道運動と非線形性)

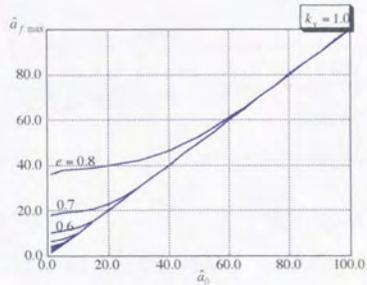


Fig.3-39 \hat{a}_0 と $\hat{a}_{f, \max}$ の関係 (e の影響)

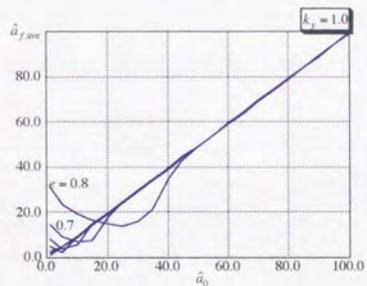
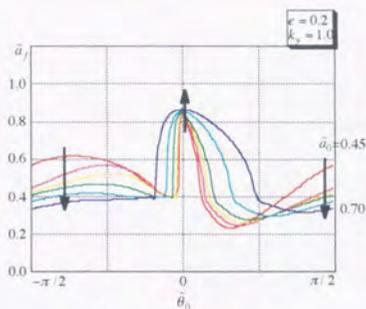
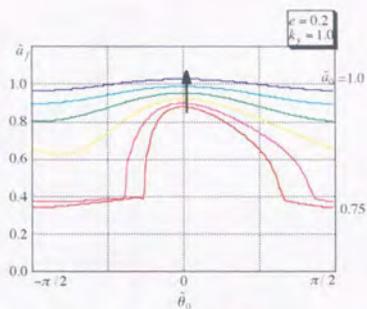


Fig.3-40 \hat{a}_0 と $\hat{a}_{f, \text{ave}}$ の関係 (e の影響)

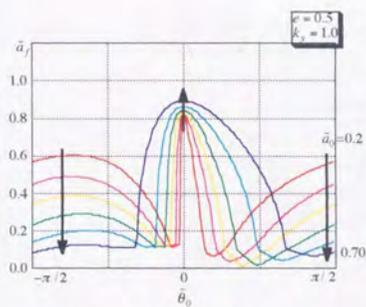


(a) ($\tilde{a}_0=0.2\sim 0.7$)

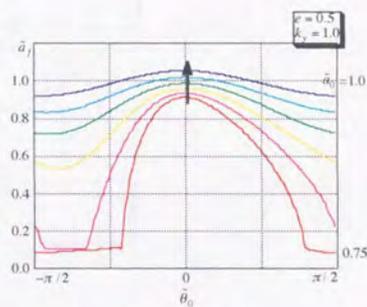


(b) ($\tilde{a}_0=0.7\sim 1.0$)

Fig.3-41 $\tilde{\theta}_0$ と \tilde{a}_j の関係 ($e=0.2$)

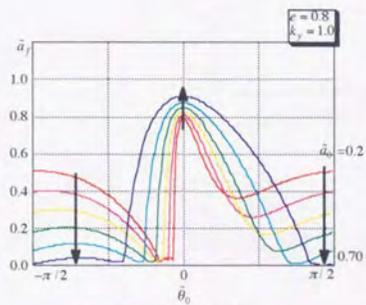


(a) ($\tilde{a}_0=0.2\sim 0.7$)

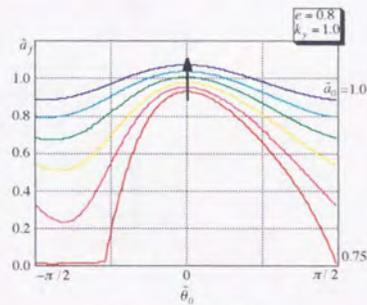


(b) ($\tilde{a}_0=0.7\sim 1.0$)

Fig.3-42 $\tilde{\theta}_0$ と \tilde{a}_j の関係 ($e=0.5$)

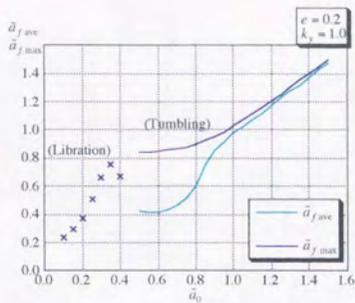


(a) ($\tilde{a}_0=0.2\sim 0.7$)

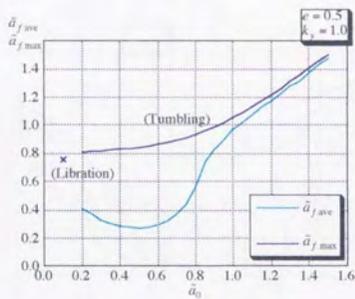


(b) ($\tilde{a}_0=0.7\sim 1.0$)

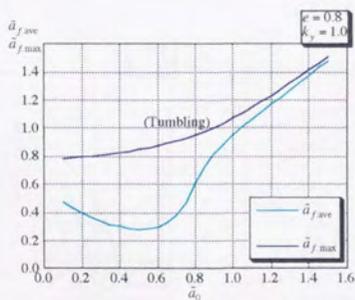
Fig.3-43 $\tilde{\theta}_0$ と \tilde{a}_j の関係 ($e=0.8$)



(a) $e=0.2$



(b) $e=0.5$



(c) $e=0.8$

Fig.3-44 \bar{a}_0 と $\bar{a}_{f,ave}$ 、 $\bar{a}_{f,max}$ (e の影響)

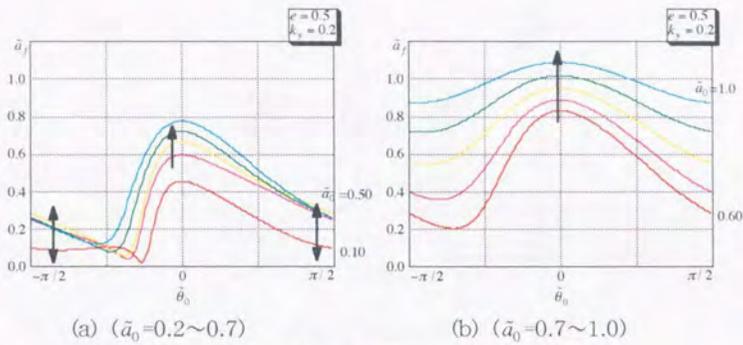


Fig.3-45 $\bar{\theta}_0$ と \bar{a}_j の関係 ($k_y=0.2$)

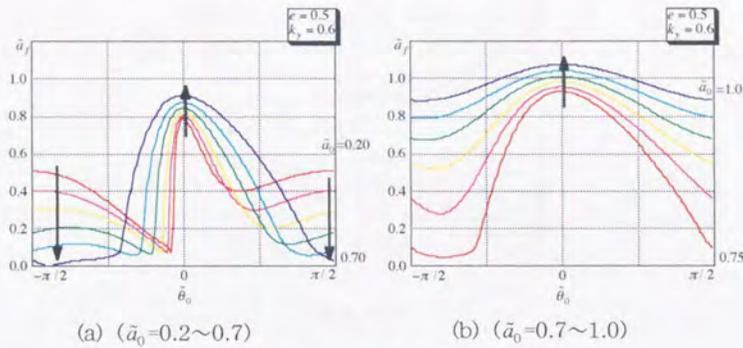


Fig.3-46 $\bar{\theta}_0$ と \bar{a}_j の関係 ($k_y=0.6$)

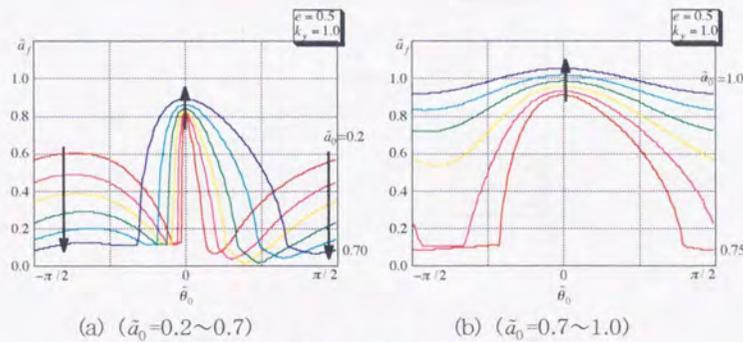
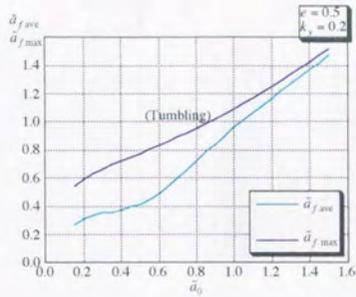
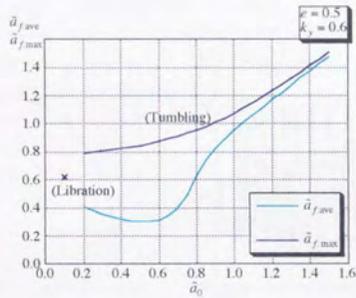


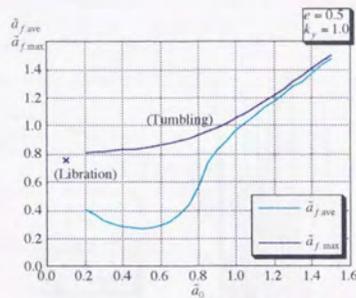
Fig.3-47 $\bar{\theta}_0$ と \bar{a}_j の関係 ($k_y=1.0$)



(a) $k_y=0.2$

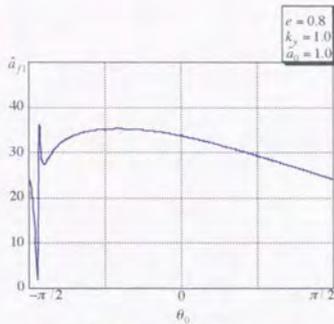


(b) $k_y=0.6$

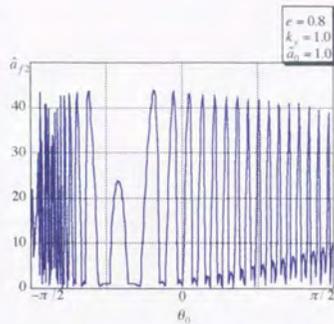


(c) $k_y=1.0$

Fig.3-48 \bar{a}_0 と $\bar{a}_{f,ave}$ 、 $\bar{a}_{f,max}$ (k_y の影響)

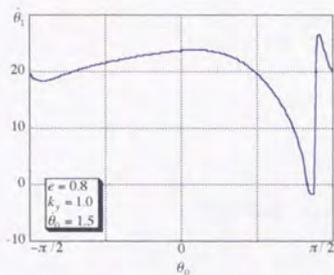


(a) 1 軌道周期の θ_0 と \hat{a}_{f1} の関係

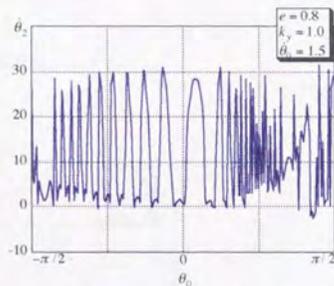


(b) 2 軌道周期の θ_0 と \hat{a}_{f2} の関係

Fig.3-49 初期状態量と複数周回後の回転の強さ (\hat{a}) の関係

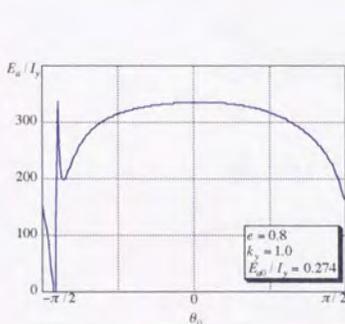


(a) 1 軌道周期の θ_0 と $\hat{\theta}_1$ の関係

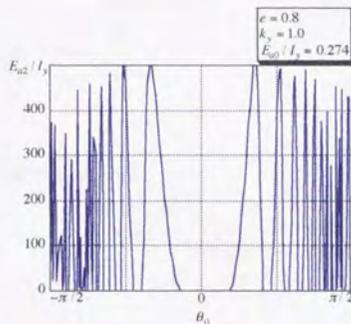


(b) 2 軌道周期の θ_0 と $\hat{\theta}_2$ の関係

Fig.3-50 初期状態量と複数周回後の回転の強さ ($\hat{\theta}$) の関係



(a) 1 軌道周期の θ_0 と E_{a1} の関係



(b) 2 軌道周期の θ_0 と E_{a2} の関係

Fig.3-51 初期状態量と複数周回後の回転の強さ (E_a) の関係

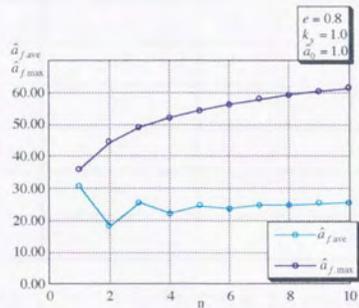


Fig.3-52 周回数と $\hat{a}_{f,max}$ 、 $\hat{a}_{f,ave}$

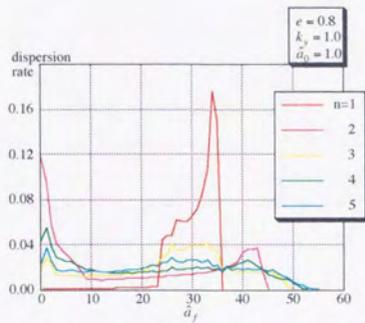


Fig.3-53 周回数と \hat{a}_f の分布

モデル	考慮に入れる要素		
	重力の変化	軌道運動	非線形性
モデル1	○	×	×
モデル2	○	○	×
モデル3	×	×	○
モデル4	○	×	○
モデル5	×	○	○
モデル6	○	○	○

Tab.3-1 6つのモデルで考慮に入れる要素

第4章 回転運動のプログラムと追従制御

4-1 回転運動のプログラムと追従制御の概念

4-2 回転運動のプログラム法

- 4-2-1 等価初期状態
- 4-2-2 プログラム履歴の作成方法
- 4-2-3 回転運動のプログラムの作成
- 4-2-4 回転運動のプログラムの例

4-3 回転運動の追従制御法

- 4-3-1 回転運動の追従制御のモデル
- 4-3-2 状態フィードバック制御
- 4-3-3 状態量の観測
- 4-3-4 観測値を元に追従制御をおこなう場合の運動

第4章の図表

4-1 回転運動のプログラムと追従制御の概念

第3章では、重力傾斜トルク以外の外力がはたらかない場合の姿勢運動（自由運動）を取り扱った。本章では、重力傾斜トルク以外の外力が働く場合の運動を取り扱う。何らかの目的を持った姿勢運動を実現することを考える。目的の運動が、自由運動とはまったく異なった運動である場合には、外力なしでその運動を実現することは当然不可能である。しかし、目的の運動が単なる自由運動の繰り返しで、理論的には可能である場合でも、それが複数周回にわたる運動である場合、現実的には初期状態量の設定だけでその運動を実現することが困難であることは3-4で述べたとおりである。本章では、小さな外力トルクを加えることで、このような自由運動から大きくはずれない複数周回にわたる運動を実現することを考える。運動方程式としては、制御角加速度 u を加えた

$$\ddot{\theta} = -\frac{3k_y}{r^3} \cos\theta \sin\theta - \ddot{\varphi} + u \quad (4-1)$$

を考えることになる。ここで u は制御角加速度一般を表わし、

・外力

・ I_y の変更で現れる項 $-\frac{\dot{I}_y}{I_y}(\dot{\theta} - \dot{\varphi})$ (4-2)

・ k_y を Δk_y 変更することによる項 $-\frac{3}{r^3} \cos\theta \sin\theta \cdot \Delta k_y$ (4-3)

など、あるいはこれらの組み合わせを表わすことになる。

本論文では「目的をもった運動を実現するために外力を加える」という操作を、大きく2つに区別し、それぞれに「プログラム」と「追従制御」という名称を用いている。本論文で意図している「プログラム」と「追従制御」の概念をここに示す。第一は「プログラム」である。本研究では複数周回にわたって何らかの目的をもった運動を実現するような運動履歴をつくることをプログラムと称している。この場合、目的の運動については、上にも述べたように、自由運動から大きくはずれない運動を対象とし、その実現のために小さな制御外力を加えることを許すことにする。外力を加えない自由運動でも、目的の運動を達成できるようなものは、理論的には存在する。自由運動が初期状態量によって決定されることを考えれば、目的の運動を達成するような初期状態量の組み合わせが存在するということである。しかし、現実的には、3-4で述べた通り、複数周回にわたっての運動は初期状態量に非常に敏感になる。したがって、自由運動の範囲内で目的の運動を達成するためには、初期値を微小に変更しながら目的の運動を探す必要がある。周回数が増えると、初期状態量に対する感度が非常に大きくなるので、探索の刻みも細かくする必要があり、現実的には非常に困難な作業になる。これに対し、一軌道周期の運動の初期状態量に対する感度は、複数周回の運動のそれと比べるとそれほど強くない。したがって、一周ごとに初期状態量を自由に決定できるのであれば、複数周回にわたる目的をもった運動を実現することはそれほど困難ではない。複数周回にわたる運動は、基本的には一軌道周期ごとの自由運動の繰り返しであるが、ある周回の終端状

態量が次の周回の初期状態量になるので、各周回ごとの初期状態量を自由に決定することはできない。そこで、各周回の終端状態量が次の周回にとってのぞましい初期状態量になるように制御外力を加えることにする。このように、目的の運動を引き起こすための制御外力の履歴を作ることを、本研究ではプログラムと称している。

第二は「追従制御」である。いまプログラムによって作られた履歴にしたがって周回ごとに制御外力を加えることで、あるいは自由運動でも、目的の運動を実現できることがわかったとする。この場合でも、計画された運動と現実の運動の間に差がある場合、その差がたとえ微小であっても、そのまま放置されていると、複数周回後には計画された運動とはまったく異なる運動を引き起こすことになってしまう。したがって、計画された運動を忠実に実行するためには、各時点で運動の誤差を修正し、少なくとも誤差が増幅することを防ぐような外力を加えることが必要となる。このように、プログラムによって生成された状態量履歴と実際の運動の誤差を修正するように外力を加えることを、本研究では追従制御と称している。

Fig.4-1に「プログラム」と「追従制御」の概念図を示す。

以下の2節では、プログラムと追従制御の方法について述べる。

4-2 回転運動のプログラム法

複数軌道周期にわたって目的をもった運動を起こすことを考える。目的の運動が自由運動から大きくはずれた運動の場合、その運動を引き起こすためには大きな制御力が通常は必要である。しかし、ここでは運動の非線形性のために、小さな制御力によって大きな運動の変化が起こる場合に注目する。Fig.4-2に一例をあげる。

Fig.4-2は $e=0.5$ 、 $k_y=1.0$ の場合の初期状態 $\theta_0=-1.2$ 、 $\dot{\theta}_0=5.0$ から始まった運動の諸値の履歴である。(a)は姿勢角、(b)は姿勢角速度の履歴である。青線は何の制御力も加えない場合、赤線は(c)で示される履歴で制御トルクを加えた場合の履歴である。加えた制御トルクの積分値(制御トルクによる角速度変化)は0.05である。重力傾斜トルクが弱く、非線形性が弱い間は2つの運動の姿勢角速度の差は小さいが、姿勢角の差は長い時間を経て広がっていく。そして、重力傾斜トルクが強い近地点を通過する際の両者の姿勢角の違いによって、近地点通過後の両者の姿勢角速度には大きな差が生じ、両者の間に角速度にして約4の差(加えた制御トルクによる角速度変化の約80倍)が出ている。この比はパラメータ(e, k_y)に依存すると考えられるが、小さな制御力で大きな運動の変化を引き起こされることはわかるであろう。しかし、当然のことながら、この方法によって実現できる運動の範囲は限定される。継続的に大きな制御トルクを加え続けるわけではないので、制御を加えた運動も自由運動と大きく異なるものにはならない。したがって、自由運動とはかけ離れた運動(例えば、常にいつの姿勢角を保つ、など)を実現することは、限定された制御力の範囲内では不可能である。つまり、ここで考える方法は、制御力を加えることで、ある自由運動から別の自由運動に移るようなものと考えてよい。また、制御力に関する制約によっては、移ることができる自由運動の範囲も制限されることになる。この方法で考える運動の性質上、目的の運動として考えられるものも限定される。軌道上のある地点での状態量を規定するものや、一軌道周期全体に関する量(回転角速度の平均値・最大値など)を規定するものなどである。たとえば、

- ・周回ごとに回転を速くする(遅くする)
- ・周回ごとの回転速度をある範囲に保つ

というような運動が考えられる。本論文では、上に述べたような範囲内の目標の運動を引き起こすために必要な制御力の履歴を作ることをプログラムと称している。以下、回転運動のプログラムの方法を示す。

4-2-1 等価初期状態

プログラムの目的は、目標の(現在とは異なる)自由運動に、限られた制御能力の範囲内で、移行するような制御力履歴を作成することである。Fig.4-2からわかるように、運動の小さな差が大きく増幅されるのは近地点付近なので、近地点通過以前に目標の自由運動に移行しておく必要がある。したがって、近地点通過以前の一軌道周期の間の制御入力によって、目標の自由運動に移行させることになる。パラ

メータ (e, k_y) が与えられた場合、自由運動は初期状態のみで決定されるので、自由運動を移行させるということは、制御入力によって初期状態を移すことと考えてよい。初期点としては、近地点通過以前のどの時点も指定してもよいが、ここでは便宜的に遠地点を初期点と考えることにする。これは制御期間を遠地点以前に限定するという意味ではなく、遠地点通過後の制御も、遠地点にさかのぼって初期状態の変化に換算することができる (Fig.4-3)。この意味で、すべての制御入力は遠地点での状態量の変更に換算することができるので、この換算された初期状態を等価初期状態と呼ぶことにする。結局、問題は、制御をしない場合の初期状態 (制御なしで自由運動を続けた場合の遠地点での状態量) を、制御入力を用いて、移動することに帰着される。

4-2-2 プログラム履歴の作成方法

制御力の履歴については次のように考えることにする。Fig.4-2や3-2節での検討結果からわかるように、運動が強い非線形性を有するのは、近地点付近においてである。逆に、近地点付近を除いた部分では、小さな運動の差が大きな運動の差に増幅されないという意味で、運動は近似的に線形に扱える。この場合、制御力履歴 $u(t)$ による初期状態量の変化量は

$$\Delta \hat{\theta}_0 = \int_{t_{c0}-t_a}^{t_{cf}-t_a} u(t) dt \quad (4-4)$$

$$\Delta \theta_0 = \int_{t_{c0}-t_a}^{t_{cf}-t_a} \left(\int_{t_{c0}-t}^{t_{cf}-t} u(s) ds \right) dt \quad (4-5)$$

と表わせる。ここで

t_{c0} : 制御期間の開始時刻

t_{cf} : 制御期間の終了時刻

t_a : 遠地点通過時刻

とする。まず、(4-4)、(4-5)を用いて目標の初期状態を実現するような制御力の履歴を求めると、この結果は近似的に線形化された式を元に得られた履歴なので、実際非線形モデルにその制御力履歴をそのまま用いても、目標の初期状態は一般に実現できない。そこで、その結果を元に、非線形モデルのシミュレーションを用いたイタレーションによって、目標の初期状態を厳密に実現する制御力の履歴を決定し、それをプログラム履歴とする。制御期間から近地点付近の非線形性が非常に強い領域を除いておけば、線形化近似式の精度はかなり良く、非線形モデルのための制御履歴の変更はわずかで済む。

以上の方法を用いて、プログラム履歴を作る例を次に示す。

4-2-3 回転運動のプログラムの作成 (周回ごとに回転を加速していくプログラム)

$e=0.5$ 、 $k_y=1.0$ 、 $\hat{a}_0=0.0$ 、 $\theta_0=0.0$ の自由運動を考える。Fig.4-4に、この運動の2周

にわたる回転角速度の履歴を示す。1周目には回転運動が励起され、1周後の遠地点通過時の $(\dot{\theta} + \dot{\varphi})$ は約23 (\hat{a} は約32) になっているが、このままの状態では2周目も自由運動を続けると、2周目の遠地点通過時には回転角速度が遅く ($(\dot{\theta} + \dot{\varphi})$ は約12、 \hat{a} は約17) になってしまうことがわかる (3-2節の議論を思い起こすと、このようなケースは稀なものではないことがわかる)。ここでは、1周目の遠地点通過前後 (2回目の近地点通過前) に制御力を加えることによって、2周目の自由運動を回転角速度が速くなるような運動に変更するようなプログラムを考える。

Fig.4-5に自由運動の場合の初期状態量に対する1周後の \hat{a} (\hat{a}_j) の等高線グラフを示す。ここで考えているケースの、1周目の遠地点通過時の状態量 (\hat{a} は約32) の周辺を切り出している。図中では

- ・ $\hat{a}_j < \hat{a}_0$ となる部分 (白い部分)
- ・ $\hat{a}_j > \hat{a}_0$ となる部分 (緑の部分)
- ・ 等高線の尾根 (赤い線)

に区分けしている。与えられた初期状態のままでは、 $\hat{a}_j < \hat{a}_0$ (回転が遅くなる) になってしまうことがわかる。制御期間は $t_a \pm t_c$ とし、制御力 u についてはその最大値 u_{\max} と、制御量の積分値

$$\Delta h = \int_{t_a - t_c}^{t_a + t_c} u(t) dt \quad (4-6)$$

の最大値 Δh_{\max} が制限されているものとする。前段で述べたような線形に近似したモデルで考える場合には、Fig.4-6.bに示すような時間履歴で u を変化させる場合を考えれば十分で $t_1 \dots t_5$ ($\sum_{i=1}^5 t_i = 2t_c$) を決定すればよいことになる。

このとき、等価初期状態の存在範囲は、 $\bar{r} = \Delta h_{\max} / u_{\max}$ として、

$$\Delta \dot{\theta}_{\max} = \bar{r} u_{\max} \quad \Delta \dot{\theta}_{\min} = -\bar{r} u_{\max} \quad (4-7)$$

$$0 \leq \Delta \dot{\theta} \leq \Delta \dot{\theta}_{\max} \text{ において } \begin{cases} \Delta \theta_{\max} = \Delta h_{\max} (2t_c + \bar{r}) - \frac{1}{2u_{\max}} (\Delta \dot{\theta})^2 \\ \Delta \theta_{\min} = -\Delta h_{\max} (2t_c + \bar{r}) + \frac{1}{2u_{\max}} (\Delta \dot{\theta})^2 + \bar{r} \Delta \dot{\theta} \end{cases} \quad (4-8)$$

$$\Delta \dot{\theta}_{\min} \leq \Delta \dot{\theta} \leq 0 \text{ において } \begin{cases} \Delta \theta_{\max} = \Delta h_{\max} (2t_c + \bar{r}) - \frac{1}{2u_{\max}} (\Delta \dot{\theta})^2 - \bar{r} \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \theta_{\min} = -\Delta h_{\max} (2t_c + \bar{r}) + \frac{1}{2u_{\max}} (\Delta \dot{\theta})^2 \end{cases} \quad (4-9)$$

となる。 $u_{\max} = 0.2$ 、 $\Delta h_{\max} = 0.2$ の場合の実現しうる等価初期状態の範囲を図示したの

がFig.4-7である (a (軌道長半径) = 20000kmの場合の u_{\max} の有次元量は $1.0 \times 10^8 \text{ m/s}^2$ である)。この中から、 \hat{a}_f が最大となるような初期状態を選びだし、対応する $t_1 \dots t_3$ をプログラム履歴とすればよい。Fig.4-7の場合を例にとりて、等価初期状態として $\theta_0 = 1.48$ 、 $\hat{a}_0 = 32.20$ を選べば、その時の $t_1 \dots t_3$ の例として Tab.4-1 に示すような値が得られる。この値をもとに、非線形モデルのシミュレーションを用いたイタレーションによって $t_1 \dots t_3$ を微調整して、Fig.4-8 に示すようなプログラム履歴が決まる。このプログラム履歴にしたがって外力を作用させた場合の運動の姿勢角速度の履歴を Fig.4-9 に示す。このようなプログラムをおこなった結果、2 周目にも回転が加速されていることがわかる。加速の程度は、自由運動で得られる範囲のものに限定されるので、初期姿勢角速度がある程度大きくなっている 2 周目には、それほど大きなものはとれないことになる (3-2 節参照)。

制御能力が小さい場合 ($u_{\max}, \Delta h_{\max}$ が小さい場合)、到達できる等価初期状態の範囲も限定されるので、もとの初期状態によっては、与えられた制御能力の範囲内では、どのようなプログラム履歴を作っても、2 周目に回転を加速できない場合もありうる。 $u_{\max}, h_{\max}, u_{\max}, \Delta h_{\max}$ とも小さい (制御能力が小さい) 場合には、その制御能力、および 1 周目の初期状態の範囲内では、どのようなプログラム履歴を作っても、2 周目に回転を加速することができないことがわかる (この場合には 1 回目の近地点通過前に制御力を加え、1 周目の遠地点通過時の状態量を変更する必要がある)。また、実現できる \hat{a}_f の最大値は、もとの初期状態の周辺の \hat{a}_f の最大値と一致する。ここで考えているプログラム法では、初期状態量、とくに初期姿勢角を大きく変更しているにすぎないためである。つまり、このプログラム方法の範囲内では制御能力をいくら大きくしても、得られる回転速度の限度はほぼ決まっている。

4-2-4 回転運動のプログラムの例

前段で示したような方法で作られたプログラムをいくつか示す。

Fig.4-10 は $e = 0.8$ 、 $k_y = 1.0$ 、 $\theta_0 = 0.0$ 、 $\hat{a}_0 = 0.0$ の初期状態からの周回ごとに回転を加速していくようなプログラム (前段の例と同じ) を 5 周にわたっておこなった場合の履歴である。初期点は楕円軌道の遠地点である。制御力についての制約は $u_{\max} = 0.2$ 、 $\Delta h_{\max} = 0.2$ としている。(a) に示すような履歴で制御力を加えることで (b) に示すように、周回ごとに回転を加速していくような運動を達成することができる。

Fig.4-11 は、前とは逆に周回ごとに回転を減速していくようなプログラムの例である。 $e = 0.8$ 、 $k_y = 1.0$ 、 $\theta_0 = 0.0$ 、 $\hat{a}_0 = 50.0$ である。制御力についての制約は $u_{\max} = 0.2$ 、 $h_{\max} = 0.2$ としている。(a) に示すような履歴で制御力を加えることで (b) に示すように、周回ごとに回転を減速していくような運動を達成することができる。この場合

は、周回ごとに、与えられた制御力の範囲で到達しうる等価初期状態のなかで、 \hat{a}_f が最小となるような点を選び、その初期状態を実現するようなプログラムを作っている。

Fig.4-12は $e=0.8$ 、 $k_y=1.0$ 、 $\theta_0=0.0$ 、 $\hat{a}_0=15.0$ において、遠地点通過時の \hat{a} を常に15近辺に保つようにプログラムした結果である。制御力についての制約は $u_{\max}=0.2$ 、 $\Delta h_{\max}=0.2$ としている。(a)に示すような履歴で制御力を加えることで(b)に示すような姿勢角速度の履歴が得られる。この場合は、与えられた制御力の範囲で到達しうる等価初期状態のなかで、 \hat{a}_f が15にもっとも近い点を選び、その初期状態を実現するようなプログラムを作っている。姿勢角速度の値が周回ごとに必ずしも同じ値にならない理由は、制御力に制限があるためと考えられる。また、この場合の目標となる \hat{a} の値は、制御力に制限がある場合には、自由にとれるわけではなく、 \hat{a}_f の分布が \hat{a}_0 に近い領域に固まっているような \hat{a} に限定されることになる。 $e=0.8$ 、 $k_y=1.0$ である今の場合は、 $\hat{a}=15$ あたりがこの \hat{a} に該当する。

4-3 回転運動の追従制御法

前節で示した方法によりプログラム履歴を作ったとしても、その履歴通りの制御力を加えるだけでは目的の運動は実現できないだろう。なぜなら、実際の運動では諸々の外乱によりプログラムされた運動との誤差が生じ、その誤差を放置しておくとな線形性の影響により大きな誤差に成長していくからである。

一例をFig.4-13に示す。図中の青線は $e=0.8$ 、 $k_y=1.0$ 、 $\theta_0=0.0$ 、 $\dot{\theta}_0=0.0$ の自由運動の姿勢角速度の履歴である。今、この運動を目標として（リファレンス軌道として）同じ初期状態から始めた実際の運動を考える（図中赤線）。ただし、こちらの運動には、 $\dot{\theta}$ 、 $\ddot{\theta}$ にそれぞれ平均値0、分散 0.01^2 の持続外乱を加えている。最初の1周こそ、リファレンス軌道と実際の軌道はほぼ一致しているように見えるが、2回目の近地点通過以降は、実際の軌道は、リファレンス軌道とはまったく異なったものになっている。これは持続外乱による微小な状態量の差が、近地点通過時の強い非線形性によって増幅された結果であると考えられることができる。

このようなことを考慮すると、目的の運動を実現するためには、実際の運動とプログラムされた運動の誤差を修正していくような制御をおこなう必要がある。本論文では、このような目的で制御力を加えることを前節の「プログラム」と区別して「追従制御」と称している。本節では、この追従制御について検討する。本節での具体的な検討項目としては、

- a)このような目的で制御アルゴリズムを組むことが可能であること
- b)制御にあたって過大な制御力が必要でないこと
- c)状態量の観測にあたって過度に厳密な観測精度が必要ないことを確認することである。

4-3-1 回転運動の追従制御のモデル

ここでは、本論文で考える制御のモデルを示す。ここでは、計画されていた運動によって作られる軌道（状態量の履歴）をリファレンス軌道と呼ぶことにする。リファレンス軌道は前節の方法で作られたプログラム履歴に基づく軌道とするが、自由運動の場合の軌道と考えても本質的な差はないので、本節の例では、ある自由運動の軌道をリファレンス軌道としている。実際の軌道の、リファレンス軌道からの誤差は微小であると仮定して、運動方程式をリファレンス軌道のまわりに展開し、線形化する。運動への外乱としては、状態量の初期誤差、および、白色ガウス雑音の形で与えられる持続外乱を考える。制御力はトルクとし、その最大値が制限されている場合も考える。状態量の観測については、1)姿勢角のみが観測可能な場合、2)姿勢角および姿勢角速度が観測可能な場合、を考える。状態量の観測における誤差としては、状態量の初期推定誤差と白色ガウス雑音の形で与えられる観測誤差を考える。以上をまとめると、線形化システムの状態方程式（状態変数はリファレンス軌道からの誤差）、および観測方程式は

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{v} \quad (4-10)$$

$$y = Cx + w \quad (4-11)$$

と表わされる。ここで

$$x = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\theta} \\ \varepsilon_{\dot{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta - \bar{\theta} \\ \dot{\theta} - \bar{\dot{\theta}} \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0] \quad \text{または} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

$$v = \begin{bmatrix} v_{\theta} \\ v_{\dot{\theta}} \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_{\theta} \\ w_{\dot{\theta}} \end{bmatrix} \quad (4-14)$$

$$g(t) = -\frac{3k_y}{(1 + e \cos \varphi)^3} \cos(2\bar{\theta}) \quad (4-15)$$

$\bar{\theta}, \bar{\dot{\theta}}$: リファレンス軌道の状態量

である。以下の段では次の順序で議論を進めていく。4-3-2では真の状態量が観測可能として、リファレンス軌道からの誤差を0にするようなレギュレータの構成について検討する。これは状態フィードバック制御をおこなっている場合に相当する。4-3-3では状態量の観測について検討する。ここでは、諸々の観測誤差のもとでも、オブザーバによって運動の推定が可能であるかを検討する。これらの結果を元にして、観測・制御の両方を考慮に入れた(4-10)、(4-11)で示されるモデルを用いた場合の検討を4-3-4でおこなう。前2段では、リファレンス軌道として1種類のものを考え、レギュレータ、あるいはオブザーバの諸パラメータ、あるいは外乱・誤差のレベルについての検討をおこない、最後の段(4-3-4)でいろいろなリファレンス軌道について、前2段の結果を用いた制御・観測系について、望ましい追従制御が可能であることを示す。

4-3-2 状態フィードバック制御

ここでは、状態量の真の値が得られるという状況下で、リファレンス軌道からの誤差を0にするようなレギュレータを考える。ここでは、レギュレータの極を設定してレギュレータを構成する。最適レギュレータを用いない理由は次の2点である。まず第一に、システムが時変(重力傾斜トルクの項が時変)であるため、各時点で最適レギュレータから得られる制御力が、必ずしも全体にわたっての最適とならないこと、第二に、制御力 u の最大値が制限されている場合も考えるので、最適レギュレータの評価関数に含めなくても、制御力はある範囲内に限定されてしまうこと、である。外乱としては、状態量の初期誤差、および、白色ガウス雑音の形で与えられる持続外乱を考える。それぞれの外乱のレベルについてはTab.4-2に示す。表内でも、以下の議論でも諸量は無次元化量で示されているが、参考のために軌道長半径 a を10000km、20000kmとした場合のそれぞれに対応する有次元量を示す。これに

よって、ここで採用した外乱のレベルがどの程度であるかのイメージが伝わると考える。以下、制御力の大きさに制限を設けない場合と制御力の大きさに制限を設ける場合に分けて議論を続ける。

(1) 制御力 u の大きさに制限がない場合

Fig.4-14、Fig.4-15に、レギュレータの極を $\mu_1 = \mu_2 = -2, -4, -6$ とした場合の誤差の収束の様子を示す。リファレンス軌道は、 $e=0.5, k_y=1.0, \theta_0=0.0, \dot{\theta}_0=2.0$ の自由運動の軌道とする。Fig.4-14は、初期状態量誤差 $\varepsilon_{\theta_0}=0.1, \varepsilon_{\dot{\theta}_0}=0.1$ を与えた場合の結果である。(a)~(c)はそれぞれ $\varepsilon_{\theta}, \varepsilon_{\dot{\theta}}$ および u の履歴を示している。極が小さいほど（極の絶対値が大きいほど） ε_{θ} の収束は速いが、 $\varepsilon_{\dot{\theta}}$ での振れ幅が大きくなっており、制御力 u も大きくなっていることがわかる。Fig.4-15は、持続外乱 $v_{\theta}, v_{\dot{\theta}}$ が加わった時の誤差の履歴を示している。持続外乱については平均0、分散が $V[v_{\theta}]=0.01^2, V[v_{\dot{\theta}}]=0.01^2$ としている。(a)~(c)は先程と同様に $\varepsilon_{\theta}, \varepsilon_{\dot{\theta}}$ および u の履歴を示している。それぞれについて極による違いはFig.4-14程大きくないが、やはり極が小さいほうが反応が速いことがわかる。

次に、外乱のレベルをかえた場合のレギュレータの応答を考える。レギュレータの極は先程の結果を元に、 -2 に固定している。Fig.4-16に $\varepsilon_{\theta_0}=0.1, 0.3, 0.5$ の初期状態量誤差がある場合の応答、Fig.4-17には、分散がそれぞれ $(V[v_{\theta}], V[v_{\dot{\theta}}]) =$

$(0.01^2, 0.01^2), (0.01^2, 0.1^2), (0.1^2, 0.1^2)$ の持続外乱 $v_{\theta}, v_{\dot{\theta}}$ がある場合の応答を示している。それぞれの図の(a)~(c)はそれぞれ $\varepsilon_{\theta}, \varepsilon_{\dot{\theta}}$ および u の履歴を示している。このように、制御力に制限がない場合には、初期状態量誤差は0に収束し、持続外乱による誤差も大きく増幅せず、ある程度の範囲に抑えられることがわかる。

(2) 制御力 u の大きさに制限がある場合

次に、制御力 u の大きさに制限がある場合の制御を考える。 $|u|$ に上限値 u_{\max} を設け、レギュレータから送られる制御命令の大きさが u_{\max} を超えた場合には、制御力の大きさを強制的に u_{\max} にすることとする。とくに u_{\max} が設けられたことを加味したレギュレータを組むわけではない。以下の議論では、レギュレータの極は -2 としている。

Fig.4-18は、 $u_{\max}=0.2, 0.1, 0.05$ という制限が設けられた場合の、初期状態量誤差 $\varepsilon_{\theta_0}=0.1, \varepsilon_{\dot{\theta}_0}=0.1$ に対する制御履歴を示している。Fig.4-19は、持続外乱（平均0、分散 $V[v_{\theta}]=0.1^2, V[v_{\dot{\theta}}]=0.1^2$ ）がある場合の制御履歴である。(a)~(c)はそれぞれ $\varepsilon_{\theta}, \varepsilon_{\dot{\theta}}$ および u の履歴を示している。どちらの場合も、 u の大きさに対する制限が $u_{\max}=0.2, 0.1$ の場合には、状態量誤差の履歴は、 u に制限がない場合と比べて大き

な差はない。制御力 u の履歴を示す、それぞれの(c)のグラフを見ればわかる様に、 u_{\max} の制限によって u が飽和(saturation)を起こしているにもかかわらず、最終的には ε_{θ} 、 $\varepsilon_{\dot{\theta}}$ ともある程度の範囲に収まっている。 u の大きさに制限がない場合のグラフ(Fig.4-14.c, Fig.4-15.c)の近地点通過付近において u が大きくなるのは、近地点付近において実際的非線形の運動と、制御系内で線形化されているモデルとの差が大きくなるためであると考えられる。レギュレータはその誤差を修正するために、大きな制御入力を要求するわけである。しかし、この差は、近地点付近からはなれて、実際的非線形の運動と線形モデルの差が小さくなるにしたがって自然と小さくなっていくので、近地点付近で大きな制御力を用いて無理に誤差を抑えなくても、近地点付近からはなれていくにしたがって自然に小さいレベルに戻るものと考えられる。したがって、近地点付近の大きな制御入力要求が実現できないようなレベルに u_{\max} が制限されていても、 u に制限がないような場合と同様にリファレンス軌道への追従が可能であるのだと考えられる。しかし、Fig.4-18, Fig.4-19のどちらの場合も $u_{\max}=0.05$ に設定されたケースは、終端での状態量の誤差も $u_{\max}=0.1$ 、 0.2 の場合に比べてかなり大きくなっている。 u の大きさがあまりにきびしく制限されると、良い制御成績が収められないことがわかる。

最後に初期状態量誤差 $\varepsilon_{\theta 0}=0.1$ 、 $\varepsilon_{\dot{\theta} 0}=0.1$ 、および平均0、分散 $V[v_{\theta}]=0.1^2$ 、

$V[v_{\dot{\theta}}]=0.1^2$ の持続外乱を与え、レギュレータの極を-2とした場合の θ 、 $\dot{\theta}$ (状態量の真の値)の履歴をリファレンス軌道の θ 、 $\dot{\theta}$ の履歴とともに示したのがFig.4-20、Fig.4-21である。Fig.4-20は $u_{\max}=0.1$ の場合、Fig.4-21は $u_{\max}=0.02$ の場合である。この程度の誤差のレベルの場合、0.1程度の u が保証されれば、誤差が非線形性によって大きく増幅されることなく、前節で示す方法で設定したプログラム履歴を十分忠実に遂行することが可能であることがわかる。ただ、 u についての制約が0.02程度まできびしい場合には、Fig.4-21に示すように、誤差を抑え切ることができず、誤差が広がっていく場合もある。

4-3-3 状態量の観測

ここでは、観測値に誤差が入った場合に、どの程度状態量が正確に推定されるかを検討する。状態量の推定方法としては、同一次元オブザーバを組んで極を設定する場合を考える。観測誤差としては、初期の状態量推定誤差と、白色ガウス雑音の形で与えられる観測誤差を考える。また、観測値としては、1)姿勢角のみが観測可能な場合、2)姿勢角および姿勢角速度が観測可能な場合を考える。

Fig.4-22~Fig.4-25に、状態量の推定結果を示す。それぞれの図のa, bには θ および $\dot{\theta}$ の推定誤差(推定値と真値の差)を示している。Tab.4-3に、4つの図において用いた外乱のモデルと、観測値の組み合わせをまとめている。それぞれ、オブザーバの極を $\gamma_1=\gamma_2=-2$ 、 -4 、 -6 に設定した場合の履歴を示している。初期推定誤差に対

しては、極が小さいほうが ($\gamma_1 = \gamma_2 = 6$ の場合) 収束が速い、良い推定結果を示しているが、持続外乱を与えたケースでは逆の傾向が見られる。

最後に、オブザーバの極を-4、初期推定誤差を $\delta_{\theta} = 0.1$ 、 $\delta_{\dot{\theta}} = 0.1$ 、持続的な観測外乱

(平均0、分散 $V[w_{\theta}] = 0.05^2$ 、 $V[w_{\dot{\theta}}] = 0.05^2$ の白色ガウス雑音) がある場合の θ 、 $\dot{\theta}$ の真値と、それらの推定値の履歴を示したのが Fig.4-26 である。観測値は姿勢角のみである。目的の運動を引き起こすために十分な精度の観測結果がえられていると考える。

4-3-4 観測値を元に制御をおこなう場合の運動

前2段の結果を用いて、Tab.4-4に示す様な外乱モデル、レギュレータ、オブザーバを用いた場合の ε_{θ} 、 $\varepsilon_{\dot{\theta}}$ 、 u の履歴を Fig.4-27.a~c に、また θ 、 $\dot{\theta}$ (状態量の真の値) の履歴をリファレンス軌道の θ 、 $\dot{\theta}$ の履歴とともに Fig.4-27.d,e に示す。リファレンス軌道は、 $e = 0.5$ 、 $k_y = 1.0$ 、 $\theta_0 = 0.0$ 、 $\dot{\theta}_0 = 2.0$ の自由運動としている。 u_{\max} は 0.05、0.1 の場合を示している。Fig.4-28には同じ場合の2周期分の制御の履歴を示している(リファレンス軌道は前と同じ)。一周目の最後に残っている誤差が二週目に増幅される可能性を考えてのものであるが、一周目の最後の誤差は、二週目の初期誤差として吸収されており、二週目の間に誤差が大きく増幅されることなく、ある範囲に保たれることがわかる。

Fig.4-29、Fig.4-30には別のリファレンス軌道を用いた場合の運動履歴を示す。

Fig.4-29は軌道の離心率 $e = 0.8$ 、 $k_y = 1.0$ 、 $\theta_0 = 0.0$ 、 $\dot{\theta}_0 = 2.0$ とした(軌道離心率を大きくした)場合、Fig.4-30は $e = 0.5$ 、 $k_y = 1.0$ 、 $\theta_0 = 0.0$ 、 $\dot{\theta}_0 = 10.0$ とした(初期回転角速度が速くなった場合)場合の ε_{θ} 、 $\varepsilon_{\dot{\theta}}$ 、 u および θ 、 $\dot{\theta}$ の履歴である。外乱モデル、レギュレータ、オブザーバなどのパラメータ値は Tab.4-4 に示したものをを用いている。どちらの場合も u が小さすぎると十分な制御結果がえられないことがわかる。以上より、ここで仮定した外乱、および制御力のレベルの範囲内であれば、前節で示した方法で作られたプログラム履歴を、十分忠実に遂行できるだけの制御能力があることが示された。

ただ、ここでおこなった検討は、冒頭にも述べたとおり、ある程度の制御能力で、ある程度の外乱や観測誤差を吸収できる、という定性的な結果を示しているだけであり、与えられた外乱の程度に対し、必要な制御力の程度を厳密に特定するというような定量的な検討は行っていない。また、4-2で考えた「プログラム」においては、制御力の積分値についての制約を考慮したが、この「追従制御」の方では、ここで述べた制御法ではその制約を考慮に入れることはできない。このような制約により、必要な制御力を発生させられない場合や、制御力不足の場合に、実際の軌道がリファレンス軌道から大きくはずれた場合は、再プログラムなどの方法を用意する必要があると考えられる。

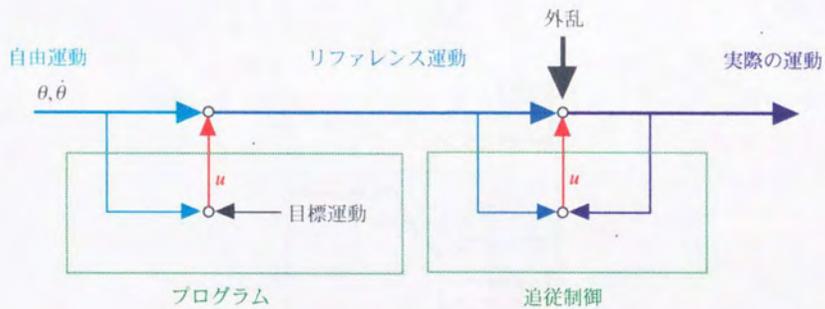
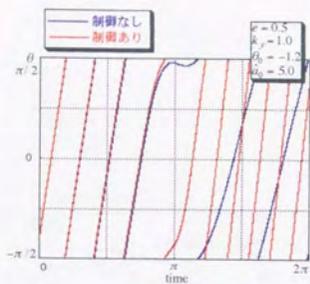
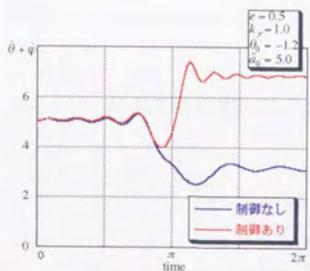


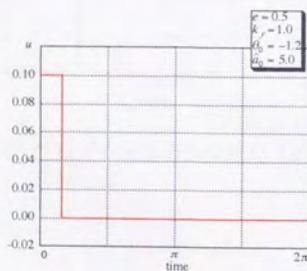
Fig.4-1 回転運動のプログラムと追従制御の概念



(a) θ の履歴



(b) $\theta + \varphi$ の履歴



(c) u の履歴

Fig.4-2 小さな制御力と非線形性の効果

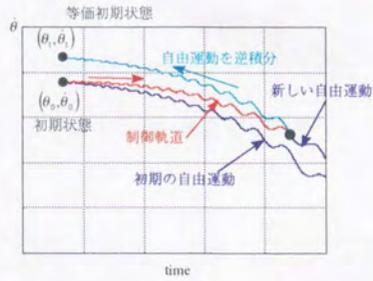


Fig.4-3 等価初期状態の考え方

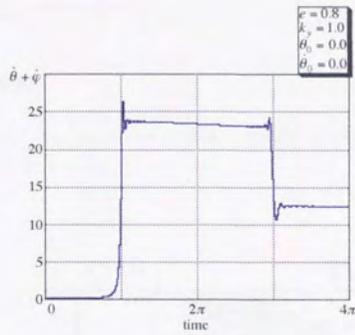


Fig.4-4 プログラム前の自由運動 (θ の履歴)

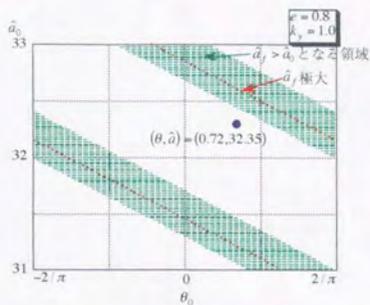
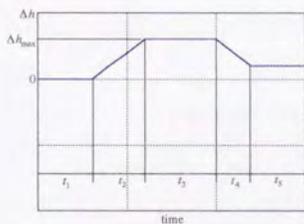
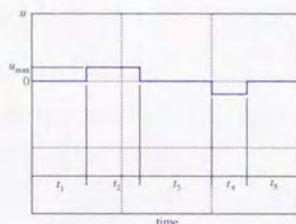


Fig.4-5 θ_0, \hat{a}_0 と \hat{a}_f の関係



(a) Δh の履歴



(b) u の履歴

Fig.4-6 プログラム履歴のモデル

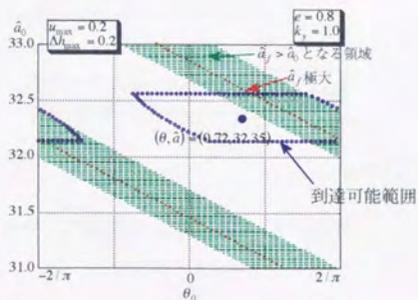


Fig.4-7 等価初期状態の到達可能範囲

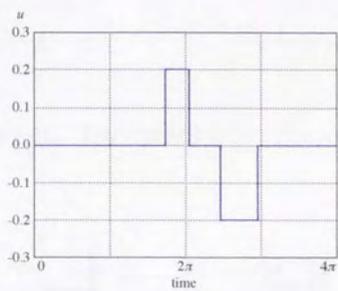


Fig.4-8 プログラム履歴の例 (u の履歴)

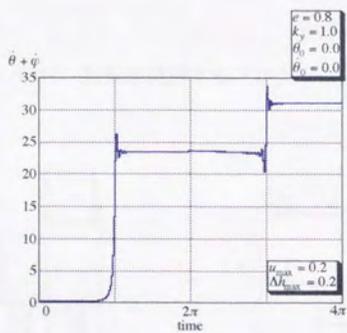
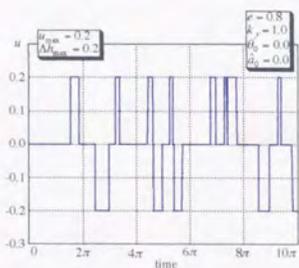
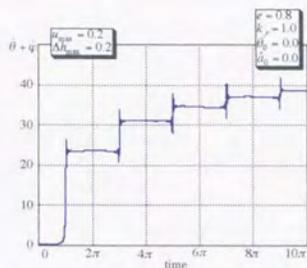


Fig.4-9 プログラム後の運動 (θ の履歴)

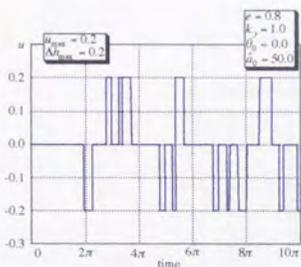


(a) u の履歴

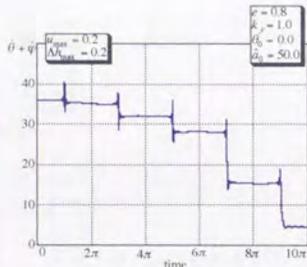


(b) $(\dot{\theta} + \dot{\varphi})$ の履歴

Fig.4-10 回転を加速するプログラム例

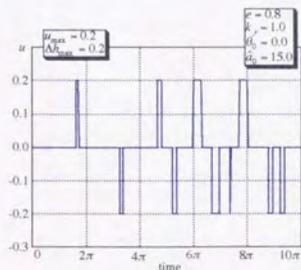


(a) u の履歴

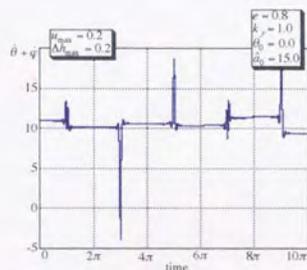


(b) $(\dot{\theta} + \dot{\varphi})$ の履歴

Fig.4-11 回転を減速するプログラム例

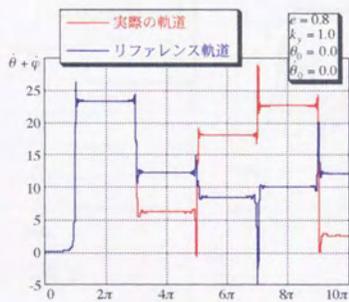


(a) u の履歴



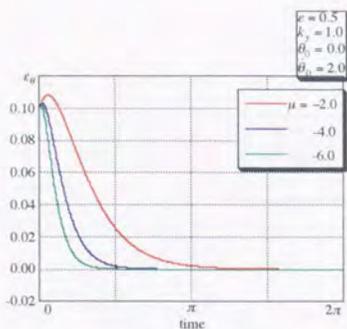
(b) $(\dot{\theta} + \dot{\varphi})$ の履歴

Fig.4-12 回転速度をほぼ一定に保つプログラム例

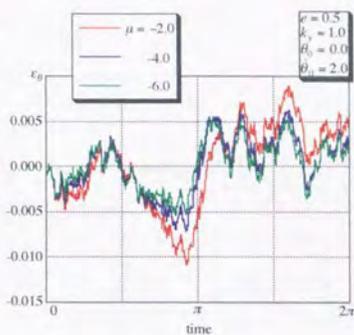


$\dot{\theta}$ 、 $\dot{\theta}$ にそれぞれ平均値0、
分散 0.01^2 の持続外乱

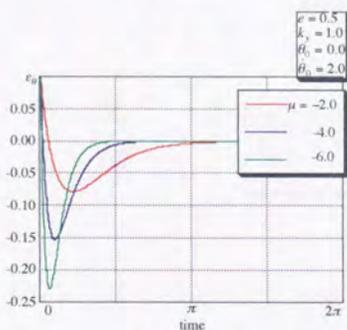
Fig.4-13 微小な外乱による実際の軌道のずれ



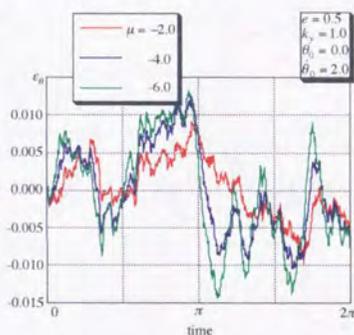
(a) ϵ_θ の履歴



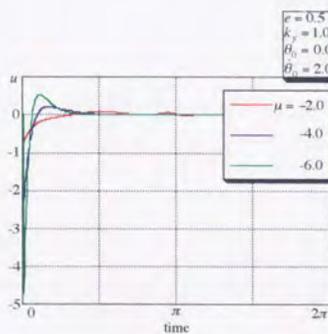
(a) ϵ_θ の履歴



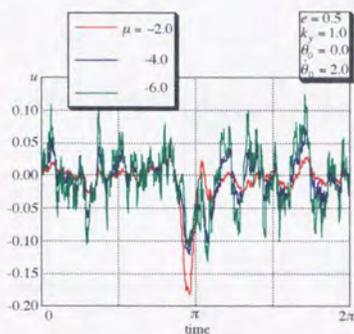
(b) ϵ_θ の履歴



(b) ϵ_θ の履歴



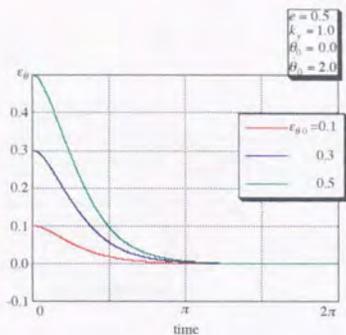
(c) u の履歴



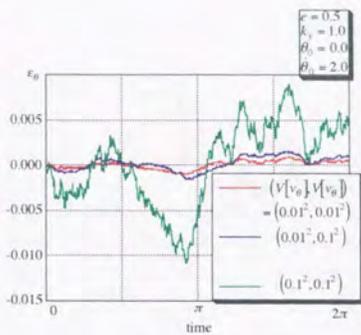
(c) u の履歴

Fig.4-14 初期誤差がある場合の
状態フィードバック制御
(μ の影響)

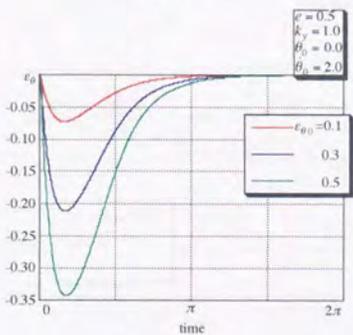
Fig.4-15 持続外乱がある場合の
状態フィードバック制御
(μ の影響)



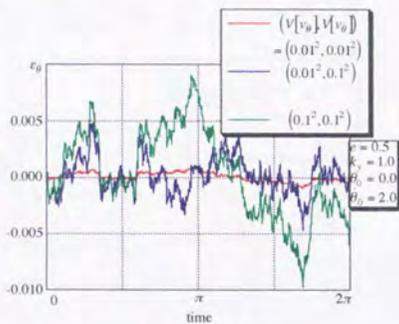
(a) ε_θ の履歴



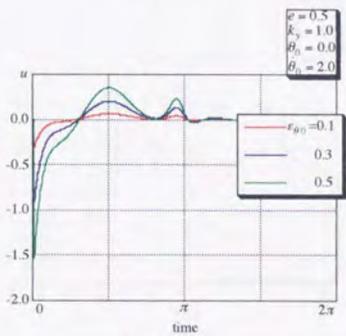
(a) ε_θ の履歴



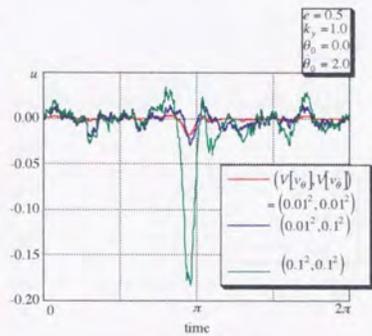
(b) ε_θ の履歴



(b) ε_θ の履歴



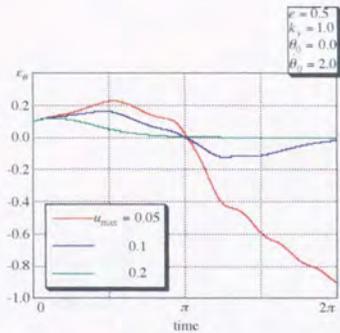
(c) u の履歴



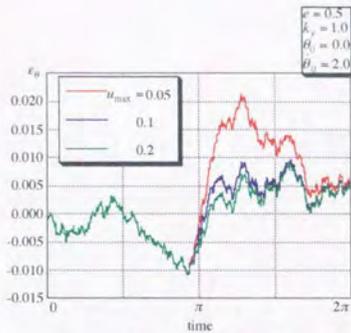
(c) u の履歴

Fig.4-16 初期誤差がある場合の
状態フィードバック制御
(初期誤差の影響)

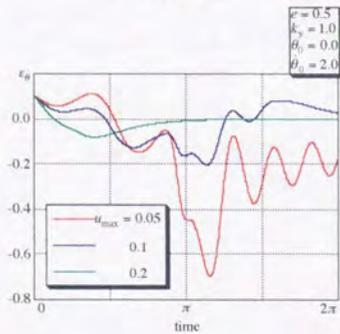
Fig.4-17 持続外乱がある場合の
状態フィードバック制御
(持続外乱の影響)



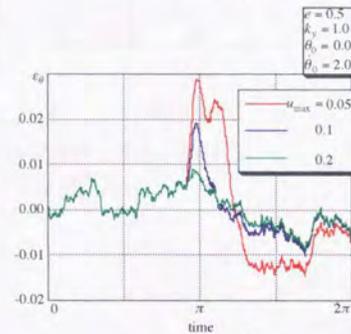
(a) ε_θ の履歴



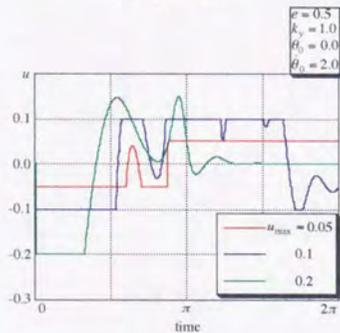
(a) ε_θ の履歴



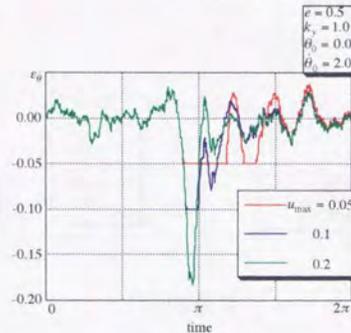
(b) ε_θ の履歴



(b) ε_θ の履歴

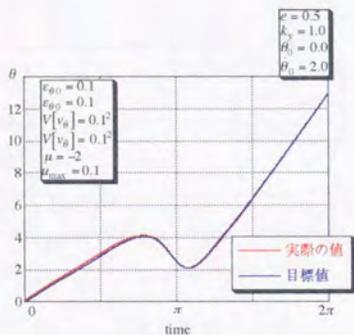


(c) u の履歴

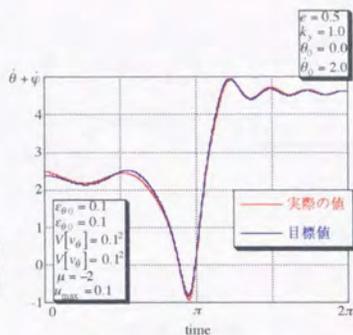


(c) u の履歴

Fig.4-18 u に制限がある場合の制御 (初期誤差の影響) Fig.4-19 u に制限がある場合の制御 (持続外乱の影響)

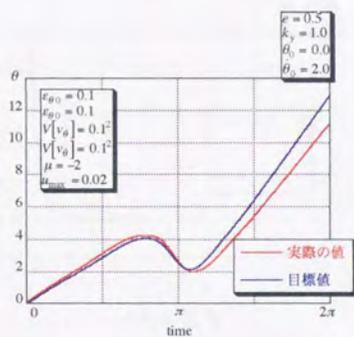


(a) θ の履歴

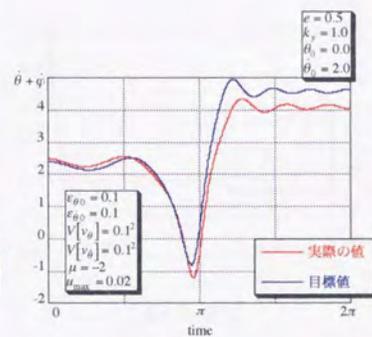


(b) $\dot{\theta} + \varphi$ の履歴

Fig.4-20 状態フィードバック制御と制御の追従性
(制御力 u が十分な場合)

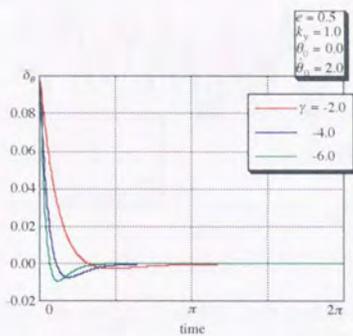


(a) θ の履歴

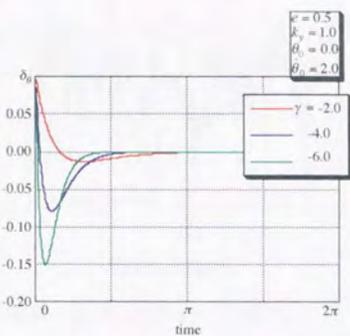


(b) $\dot{\theta} + \varphi$ の履歴

Fig.4-21 状態フィードバック制御と制御の追従性
(制御力 u が不十分な場合)

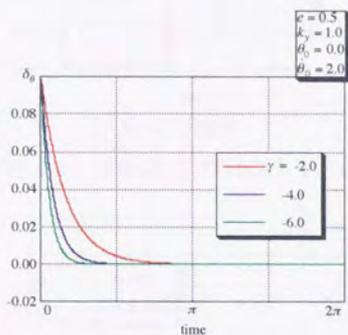


(a) δ_θ の履歴

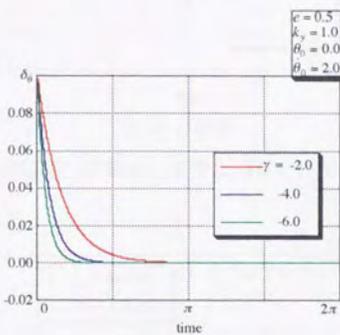


(b) δ_θ の履歴

Fig.4-22 初期誤差がある場合の状態量の観測 (姿勢角のみ観測)

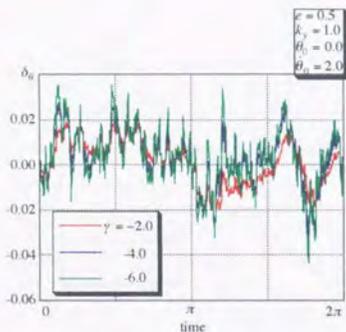


(a) δ_θ の履歴

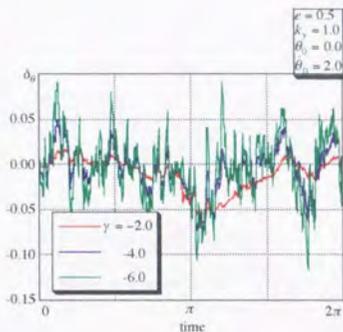


(b) δ_θ の履歴

Fig.4-23 初期誤差がある場合の状態量の観測 (姿勢角、姿勢角速度を観測)

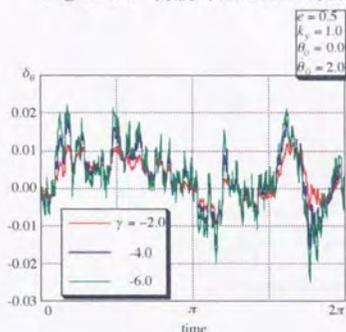


(a) δ_θ の履歴

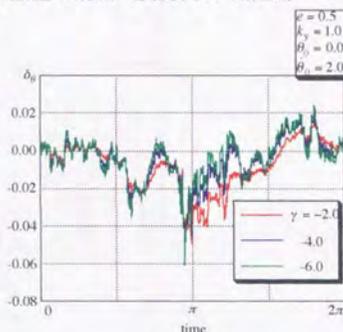


(b) δ_θ の履歴

Fig.4-24 持続外乱がある場合の状態量の観測（姿勢角のみ観測）

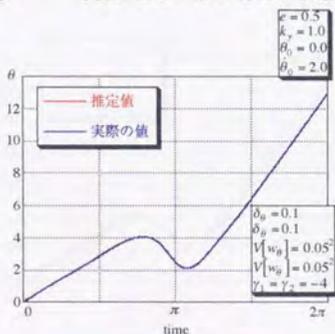


(a) δ_θ の履歴

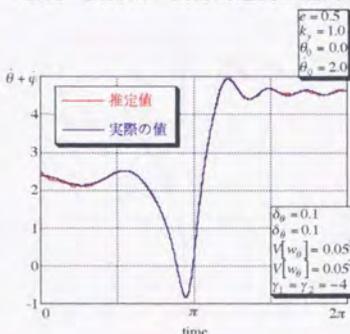


(b) δ_θ の履歴

Fig.4-25 持続外乱がある場合の状態量の観測（姿勢角、姿勢角速度を観測）

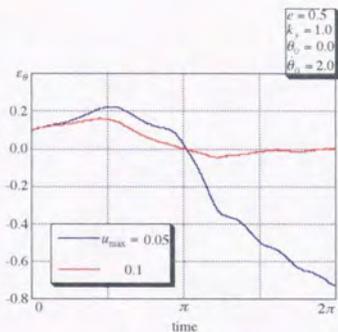


(a) θ の履歴

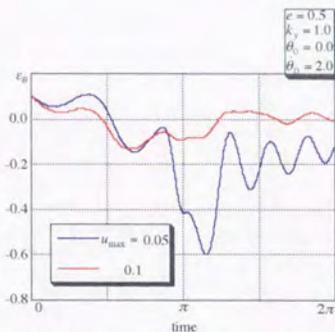


(b) $\dot{\theta}$ の履歴

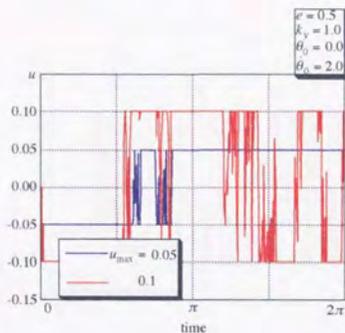
Fig.4-26 状態量の観測と推定の追従性



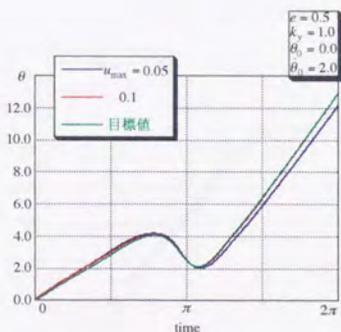
(a) ε_θ の履歴



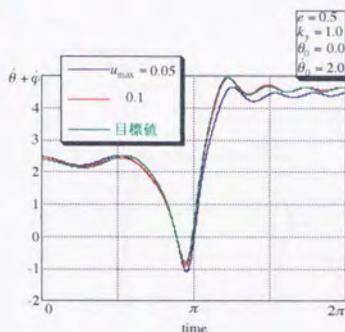
(b) $\varepsilon_{\dot{\theta}}$ の履歴



(c) u の履歴

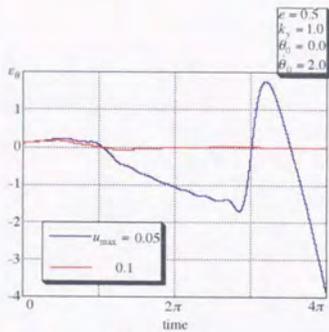


(d) θ の履歴

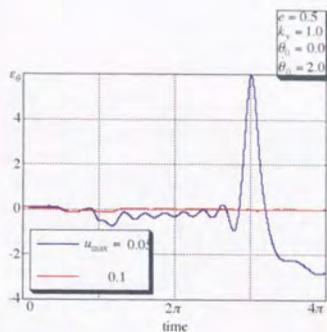


(e) $\dot{\theta} + \dot{q}$ の履歴

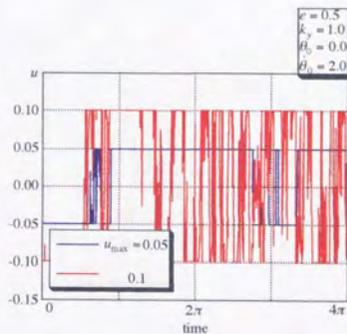
Fig.4-27 観測値を元にした制御
(1周期の間の運動)



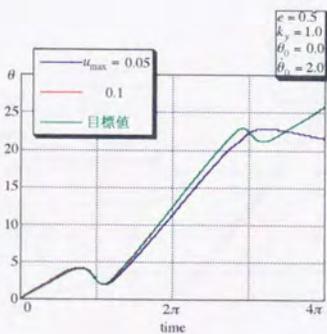
(a) ε_θ の履歴



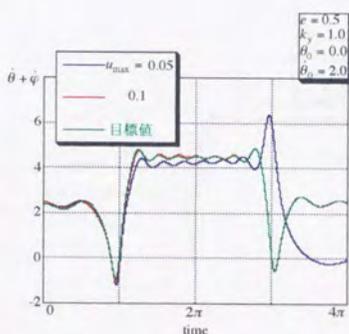
(b) ε_θ の履歴



(c) u の履歴

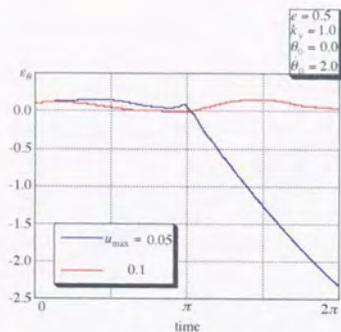


(d) θ の履歴

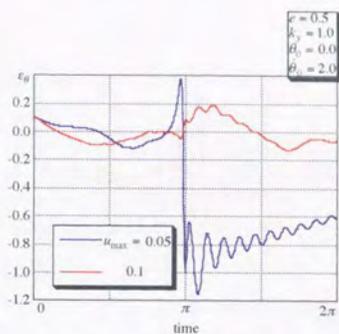


(e) θ の履歴

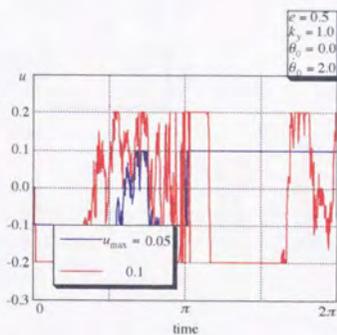
Fig.4-28 観測値を元にした制御
(2周期の間の運動)



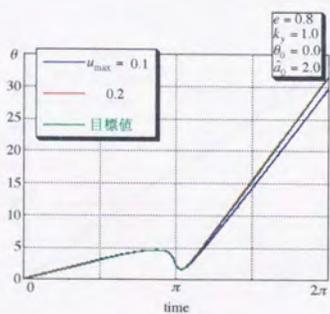
(a) ε_θ の履歴



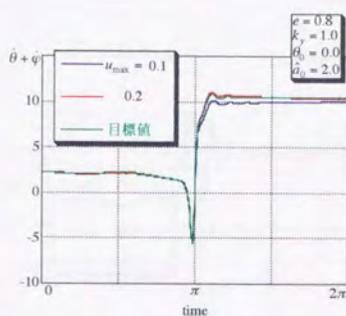
(b) $\varepsilon_{\dot{\theta}}$ の履歴



(c) u の履歴

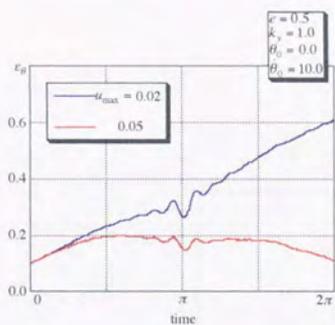


(d) θ の履歴

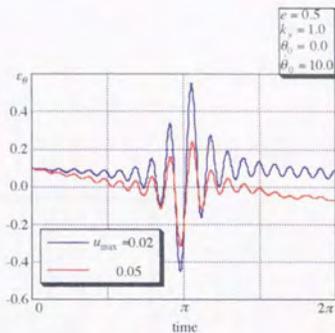


(e) $\dot{\theta} + \varphi$ の履歴

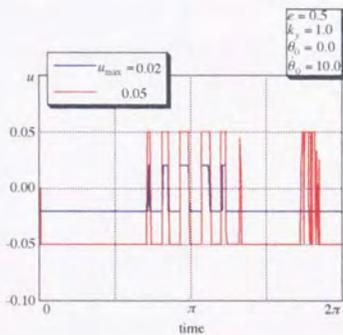
Fig.4-29 ε が大きい軌道での制御性



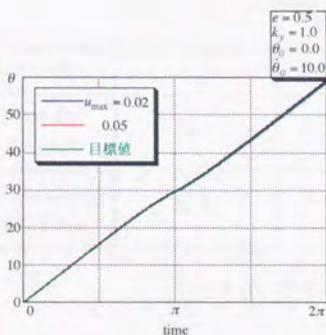
(a) ε_θ の履歴



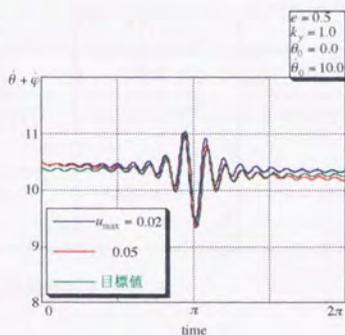
(b) $\varepsilon_{\dot{\theta}}$ の履歴



(c) u の履歴



(d) θ の履歴



(e) $\dot{\theta}$ の履歴

Fig.4-30 $\dot{\theta}$ が大きい場合の制御性

t_1	2.13
t_2	1.00
t_3	1.34
t_4	1.52
t_5	0.00

Tab.4-1 選ばれた誘導スケジュールの例

	初期誤差		持続外乱	
	ϵ_θ	$\epsilon_{\dot{\theta}}$	$V[v_{\dot{\theta}}]$	$V[v_{\ddot{\theta}}]$
無次元量	0.1	0.1	0.1^2	0.1^2
有次元量 (a=10000km)	同上	6.314×10^{-5} (/s)	$(6.314 \times 10^{-5})^2$ (/s ²)	$(3.986 \times 10^{-8})^2$ (/s ⁴)
有次元量 (a=20000km)	同上	2.232×10^{-5} (/s)	$(2.232 \times 10^{-5})^2$ (/s ²)	$(4.983 \times 10^{-9})^2$ (/s ⁴)

Tab.4-2 考慮した持続外乱の大きさ

	外乱	観測値
Fig.4-16	初期推定誤差 $\delta_{\theta} = 0.1, \delta_{\dot{\theta}} = 0.1$	姿勢角
Fig.4-17	初期推定誤差 $\delta_{\theta} = 0.1, \delta_{\dot{\theta}} = 0.1$	姿勢角、姿勢角速度
Fig.4-18	観測誤差 $V[w_{\theta}] = 0.05^2, V[w_{\dot{\theta}}] = 0.05^2$	姿勢角
Fig.4-19	観測誤差 $V[w_{\theta}] = 0.05^2, V[w_{\dot{\theta}}] = 0.05^2$	姿勢角、姿勢角速度

Tab.4-3 Fig.4-22~25に用いた外乱のモデル、観測値

外乱	初期状態量誤差	$\varepsilon_{\theta 0} = 0.1, \varepsilon_{\dot{\theta} 0} = 0.1$
	持続外乱	$V[v_{\theta}] = 0.1^2, V[v_{\dot{\theta}}] = 0.1^2$
	初期推定誤差	$\delta_{\theta 0} = 0.1, \delta_{\dot{\theta} 0} = 0.1$
	観測誤差	$V[w_{\theta}] = 0.05^2, V[w_{\dot{\theta}}] = 0.05^2$
レギュレータの極		$\mu_1 = \mu_2 = -2.0$
オブザーバの極		$\gamma_1 = \gamma_2 = -4.0$

Tab.4-4 Fig.4-27~30に用いた外乱、レギュレータ、オブザーバのモデル

第5章 Tethered OTVを用いた輸送システムへの応用

5-1 Tethered OTVの概念

- 5-1-1 Tethered OTVを用いた軌道間輸送の方法
- 5-1-2 Tethered OTVを用いたミッションの例
- 5-1-3 テザーを用いた輸送システムについての過去の研究

5-2 Tethered OTVを用いた場合の軌道間輸送能力

- 5-2-1 軌道間輸送ミッションのモデル
- 5-2-2 従来型OTVとの燃料消費量の比較

5-3 Tethered OTVによる回転加速の運動シミュレーション

- 5-3-1 使用したTethered OTVのモデル
- 5-3-2 回転加速の運動シミュレーション例

第5章の図表

5-1 Tethered OTVの概念

5-1-1 Tethered OTVを用いた軌道間輸送の方法

前章までで検討してきた楕円軌道上における剛体の回転運動を応用した軌道間輸送を考える。本章での具体的な例を用いての検討を通して、第3章で示した回転の強さが有意なものであるか、あるいは第4章で示した制御力がどの程度のものであるかを検討していくことになる。この方法で用いられるのは、テザーを装備した軌道間輸送機(OTV)である。本論文では、このOTVをTethered OTVと称している。Tethered OTVはOTV本体とペイロードをテザーでつないだテザーシステムを構成する。この方法の要点は、回転するテザーシステムからペイロードを分離し、ちょうどハンマー投げのようにペイロードを別の軌道に投入するということである(Fig.5-1)。

ペイロードを搭載したTethered OTVは、ペイロードの目標軌道への移行軌道となる楕円軌道にのる。楕円軌道上で展開前のテザーの先端にペイロードをつけ、テザー(長さ数百km程度)を展開してペイロードとOTV、テザーでテザーシステムを構成する。テザーシステムは、実際にはテザーの弾性により伸縮、振動などの運動も起こすが、近似モデルとしてはダンベル状の剛体として扱うことができる。この結果、このテザーシステムは、楕円軌道上の重力傾斜トルクを受けやすい(慣性モーメント比 $k_y=1.0$)剛体と近似でき、前章までで議論していたように回転運動が励起される。ここで注意すべきことは、回転運動を励起したり、回転を加速したりするのに、反対質量は全く必要ないことである。一方で、テザーの回転運動を制御するためにエネルギーは必要である。回転しているテザーシステムの重力中心はもとの移行楕円軌道にあり、両端の物体(ペイロードとOTV)はその点のまわりを回転していることになる。この時、軌道の外側にある方の物体(回転しているので時間によって入れ替わる)は、軌道速度よりも速く運動していることになり、逆に軌道の内側にある物体は、軌道速度よりも遅く運動していることになる。したがって、この状態でテザーを切り離せば外側の物体は、もとの軌道より大きな軌道へ、内側の物体はより小さな軌道へ遷移することになる。ペイロードの目標軌道に合わせテザーを切り離せば、ペイロードを移行軌道から目標軌道に投入するための燃料が不要ということになる。

テザーを用いた輸送システムは、つづく5-1-3でも述べるように、過去にいくつか提案されている。それらの中には、上で述べたような、テザーを装備したOTVとテザーの先端につけられたペイロードという構成を考えているものもある。しかし、ここでとりあげる方法のポイントは、テザーシステムを回転させることによって、より大きな速度増分(ΔV)を獲得できることを利用し、さらに、この回転を引き起こすために全く反対質量を必要としないことにある。この方法を利用することで、後で紹介するように、長さ400km程度のテザーを装備したOTVで、ペイロードに約1500m/sほどの ΔV を与えることができる。

以下、この方法を利用した輸送システムをTethered OTV Systemと呼ぶことにして、その輸送能力の検討および運動のシミュレーションを行う。

5-1-2 Tethered OTVを用いたミッションの例

本論文でとりあげるTethered OTVを用いたミッションの例をいくつか挙げる。テザーを用いた軌道間輸送ミッションの例はいろいろあるが、Tethered OTVは本論文で検討したような楕円軌道上の回転運動の励起という現象を用いることに主眼があるので、その観点から考える。本論文で検討した回転運動の励起という現象は、第3章でも述べたとおり、ある程度の離心率をもった楕円軌道と、重力傾斜トルクの影響を受けやすい形状、という2つの条件を満たした場合に起こるものである。Tethered OTVの場合、テザーを展開した場合の形状は、ダンベル型の剛体

($k_y=1.0$)に近似されるので、形状という条件については問題はない。したがって、テザーシステムが楕円軌道上にあって、ペイロードを別の軌道に移行させるようなミッションでの利用が考えられる。

いくつかの例をFig.5-2にあげる。Fig.5-2.aは、低軌道から高軌道へのペイロードの輸送ミッションである。以下の節、5-2、5-3では、この形態のミッションの輸送能力の検討や、運動のシミュレーションをおこなう。低軌道から高軌道への移行楕円軌道にのったTethered OTVシステムは、楕円軌道上で回転運動をはじめ、遠地点でペイロードを目標高軌道に投入するのに必要な ΔV が得られるほどの回転角速度を得たところで、ペイロードを切りはなし、ペイロードを目標軌道に投入する。この際、OTV自体はその反作用として減速されることになるので、もとの軌道に戻るためには、余分な ΔV が必要となる。より大きい ΔV が獲得できるならば、ペイロードを地球の引力圏外の惑星間軌道に投入することも可能である。獲得できる ΔV は、テザーシステムの回転角速度とテザーの長さの積の形であらわされるので、楕円軌道の離心率を大きくして回転角速度を大きくするか、テザー長を長くする必要がある。

Fig.5-2.bは逆にペイロードを低い軌道に投入するミッションである。例えば低軌道上のデブリを大気圏内に突入させるケースや、あるいは、大気圏内に再突入させるペイロードの減速などが考えられる。楕円軌道上のTethered OTVシステムは回転運動を開始し、回転運動が加速され、ペイロード側（楕円軌道の内側にある）の減速度が十分大きくなったところでペイロードを切り離す。その後のペイロードが描く軌道の近地点は、もとの楕円軌道の近地点よりさがることになるので、物体を大気圏内に再突入させることも可能になる。この際、OTVの方は加速されることになるので、元の軌道より高い軌道に移行することになる。

また、本論文では、楕円軌道上での剛体の運動を検討したが、双曲線軌道においても離心率が小さい場合には、楕円軌道の場合と同様に回転運動が引き起こされることがわかっている。この現象を惑星フライバイミッションに応用することも考えられる。

基本的にはテザーでつないだ2つの物体を用いた軌道間輸送ということは、過去に

も何度か提案されてきており、その際、テザーを秤動させたり、回転させたりすることで、静止したテザーシステムを用いる場合より大きな ΔV が得られることも過去に発表されている。ここでとりあげるTethered OTVシステムでも、テザーシステムを回転することで、大きな ΔV を得ようとしている。しかし、この回転運動が楕円軌道の上にテザーシステムを配置することで、燃料の消費なしに自然に励起されるものであり、しかも、その回転運動が制御できることにこの方法のポイントがある。このことにより、Tethered OTVを用いることで獲得できる ΔV が大きくなり、考えられるミッションの幅が過去に提案されてきた方法よりも広がったと考える。

5-1-3 テザーを用いた輸送システムについての過去の研究

テザーを輸送システムに用いるという提案は、1960年代以来、多くの論文で発表されている。テザーの両端にはたらく重力の差（重力傾斜）を利用することで、理論的には一切の燃料消費なしに、物体の軌道間移行ができることになる。しかしながら、初期の論文では、すべての宇宙輸送をテザーを用いた輸送系のみでカバーするという考えに重点が置かれていた。とくに地球周回低軌道（LEO）への輸送を、地上とLEOの間を結ぶテザー、あるいは軌道タワー（軌道エレベータ）と呼ばれるシステムを用いて実現することが考えられていた（文献[23]）。しかしこのシステムを実現するためには、非常に大きなスケールのテザーが必要であり、材料や構造の面での問題点や、非常に大量の物資をこのシステムの建設のために軌道上に打ち上げる必要があるという困難さから、このシステムを実現は当面不可能だと結論づけられることになった。

1980年代以降は、より小さなスケールのテザーの利用が注目を集め始め、これに関する多くの応用事例が検討された。ここで考えられたテザーのスケールは数百kmのサイズで、それ自身を支えるための太さも数mm程度であり、材料や構造の面からも実現が不可能なものではないと考えられている（文献[24][28]）。テザーに関しての、より現実的な検討、たとえば振動の制御なども同時に検討されるようになった。

この中で、このスケールのテザーを輸送システムに用いようという2つの典型的な方法が提案されている。第1のアイデアは、テザーシステムの軌道（テザーシステムの重心の軌道）をテザーの長さを変化させることによって変更していこうというものである（文献[22]）。このアイデアの魅力的な面は、何の反対質量もなくテザーシステムの軌道の変換がおこなわれるという点にある。この方法で必要なのはエネルギーだけであり、これはテザーシステムの両端物体で太陽発電などを用いて供給されるもので十分である。一方で、この方法を用いた場合の軌道の修正量は非常に小さく、大きな軌道変更を引き起こすためには非常に長い時間が必要であるという短所がある。

第2のアイデアは1960年代に提案されていたスカイフックや軌道タワーという概念の縮小版といえるものである。この方法は、ベイロードの軌道移行時に必要な ΔV （これは通常、化学燃料を用いた推力で達成される）を、スペースクラフトから展

開されたテザーの先端からペイロードを放出することによって減少させるというものである(文献[34])。テザーを展開するときにおこるテザーシステムの秤動を利用すれば、より大きな ΔV が獲得ができること(文献[36])、楕円軌道上のテザーシステムからペイロードの放出をおこなえば、円軌道上の静止しているテザーから放出するよりは大きな ΔV が得られること(文献[31])なども発表されている。本論文でとりあげる方法は、この第2のアイデアの延長にある。この方法では、テザーシステムはただ秤動するだけではなく、その重心まわりを回転し、より大きな ΔV を獲得することができる。テザーの回転を引き起こすために反対質量は必要ない。テザーシステムが、ある程度離心率が大きな楕円軌道上にのっていればよい。テザーシステムは自然に回転をはじめ、テザーの長さを少々変更するエネルギーさえあれば、その回転を制御し、回転をある程度まで速くしていくことも可能である。

以上が、過去のテザーを用いた輸送系に関する提案、および、それに対する本論文でとりあげるTethered OTV Systemの立場である。

5-2 Tethered OTVを用いた場合の軌道間輸送能力

5-2-1 軌道間輸送ミッションのモデル

Tethered OTVを用いたミッションの形態は5-1で述べたように、いろいろ考えられるが、ここでは、Fig.5-3に示すような低軌道から高軌道へのペイロード輸送ミッションを考える。ミッションのシナリオは次の通りである。

- 1.ペイロードは地上からLEOのステーションに打ち上げられる。
- 2.Tethered OTV (テザーはまだ展開されていない) はペイロードを受け取り、LEOのステーションを出発する。OTVは目標軌道への移行楕円軌道に入る。この際は、化学推進を利用する。
- 3.移行軌道上で、OTVはテザー先端にペイロードをとりつけ、そのテザーを展開する。
- 4.テザーは第3章、第4章で述べた方法によって回転運動を始め、移行軌道を数周する間に回転運動を加速する。
- 5.ペイロードは、目標軌道投入に必要な速度が得られた遠地点通過時にテザーから切り離され、目標軌道に投入される。
- 6.OTVはテザーを収容し、LEOに帰還する。

以上のミッションをもとに、次段でTethered OTVの能力を、ミッション達成のための燃料消費量という観点から考える。

5-2-2 従来型OTVとの燃料消費量比較

ここでは、Tether OTVの能力を、前段で示したモデルミッション達成のための燃料消費量という観点から考える。ここでは、Tab.5-1に示すような3つの軌道間移行ミッションのケースについての、Tethered OTVの燃料消費量を、テザーを用いない従来型のOTVを用いた場合の燃料消費量と比較する。

システムに関する諸値はTab.5-2に示されている。テザーの太さと、ペイロード重量については、数種類の値を用いている。

2つのシステムの燃料消費量は以下の手順で計算される。まず、Tethered OTVを用いたシステムでは、

1. f_{i1} : OTVとペイロードを初期軌道から移行軌道に投入するのに必要な燃料量。
2. f_{i2} : OTVが初期軌道に戻るために必要な燃料量。ペイロードを遠地点で放出する際に、OTV自身が減速され、初期軌道に戻るためにはその分だけ余分な燃料が必要になるが、それも考慮にいれている。

これらを用いて、Tethered OTVシステムでミッション達成に必要な燃料量は

$$f_i = f_{i1} + f_{i2} \quad (5-1)$$

次に、従来型のOTVを用いたシステムでは、

1. f_{e1} : OTVとペイロードを初期軌道から移行軌道に投入するのに必要な燃料量。

2. f_{c2} : OTVとペイロードを移行軌道から目標軌道に投入するのに必要な燃料量。

3. f_{c3} : OTVが初期軌道に戻るために必要な燃料量。

これらを用いて、従来型のOTVを用いたシステムでミッション達成に必要な燃料量は

$$f_c = f_{c1} + f_{c2} + f_{c3} \quad (5-2)$$

これらの計算では、テザーの重量は考慮に入れているが、テザーを運用するための諸機器の重量は考慮に入れていない。つまり、テザーを除いたOTVの構造重量はTethered OTVも従来型OTVも同じとしている。

結果はFig.5-4~6に示す。グラフの横軸はペイロードの重量、縦軸はミッション達成に必要な燃料消費量を示している。数種類の太さのテザーを用いた場合の結果が細い5本の線で示されており、太い線は従来型のOTVを用いた場合の結果を示している。図中のS.F.は安全率をあらわし、

$$S.F. = \frac{\text{テザーの強度}}{\text{テザーにかかる最大張力}} \quad (5-3)$$

で定義される。各グラフ中の影の部分は $S.F. < 1.0$ のためTethered OTVが使用できない範囲を示している。これらの結果から次のことがいえる。

1. 燃料消費量における優位性はミッションのタイプに依存する。厳しいミッション（大きな ΔV が必要なミッションや、ペイロード重量が大きい場合）では従来型のOTVを使用したほうが有利であるが、軽いミッションではTethered OTVを用いた方が有利である。
2. Tethered OTVが有利なミッションでは、従来型のOTVを用いた場合と比べて、最大で40%の燃料消費量の減少が可能である。
3. S.F.によって制限される領域はテザーの材質にかなり依存する。将来、より軽くて強い材料が開発されれば、Tethered OTVが有利となる領域が増えることが期待される。

5-3 Tethered OTV Systemの回転加速の運動シミュレーション

5-3-1 Tethered OTVのモデル

ここでは、5-1-2で述べた、Tethered OTVを用いた諸々のミッションのうち、低軌道から、高軌道にペイロードを輸送するミッションにTethered OTVを用いる場合についての運動を考える。

ミッションの概要は、Fig.5-3に示すようなものである。地球周回低軌道に待機するOTVは、地上から打ち上げられたペイロードを受け取り、目標の高軌道への移行軌道へ入る（図中1,2）。移行軌道上でOTVはテザー先端にペイロードを取り付け、そのテザーを展開する（同3）。テザーシステムは、第3章、第4章で述べたような方法により、回転運動を開始し、回転を加速させていく（同4）。この間に楕円軌道上を数周、周回することになる。ペイロードは目標軌道投入に必要な ΔV が得られたところで切り離され、目標軌道に投入される（同5）。OTVはテザーを収容しLEOに帰還する。

ここでは回転の加速フェーズ（Fig.5-3中4）の運動のシミュレーションをおこなう。テザーを展開した初期状態から、遠地点でのペイロードの目標軌道投入に必要な ΔV を獲得できるような回転角速度を得るまでをシミュレーションの対象とする。テザーシステムをペイロード・OTVを両端に配するダンベル型剛体（ $k_y=1.0$ ）としテザーの質量は無視する。第4章で述べたような制御をおこなうための制御力は、テザーの長さを変えることで得るものとする。ダンベル型剛体の場合、長さを変えると k_y は変化せず、 I_y のみ変化するので、運動方程式は

$$\ddot{\theta} = -\frac{3k_y}{r^3} \cos\theta \sin\theta - \ddot{\varphi} - \frac{\dot{I}_y}{I_y} (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \quad (5-4)$$

となり、

$$-\frac{\dot{I}_y}{I_y} (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \quad (5-5)$$

の項が、重力傾斜トルク以外の外力項として加わることになる。 \dot{I}_y については、その大きさの最大値と、その積分値（長さの変化量に相当する）の最大・最小が制限されているものとする。また、姿勢の観測については、両端物体（ペイロード・OTV）の位置を知ることによってテザーシステム全体の姿勢角を観測できることとし、テザーシステム全体の姿勢角速度は直接には観測できないものとする。以上のモデルに対し、持続外乱、観測誤差がある中での運動シミュレーションをおこなう。

5-3-2 回転加速の運動シミュレーション

前段で述べたような軌道移行のモデルにおいて、回転を加速するフェーズの運動シミュレーションをおこなった。対象とする移行軌道はTab.5-3に示すものである。この場合、遠地点でペイロードを円軌道に投入するために必要な ΔV は1446m/sである。Tethered OTVのコンフィギュレーションをTab.5-4に示す。OTV・ペイロードで構成されるテザー系の質量中心が移行楕円軌道上にあると考えれば、ペイロードがテザー系質量中心まわりに回転する時の回転半径は363.6kmとなる。これより、目的の ΔV をペイロードに与えるために必要なテザー系の回転角速度は $3.976 \times 10^{-3} \text{rad/s}$ となる。すなわち、この角速度まで回転を加速する必要があることになる。

回転運動のプログラム、および制御に用いる制御力は、前段で述べたように、テザー長を変化させることによって得ることとする。この際、OTVにおいて、テザー長変化のために使用する電力(P)の最大値がTab.5-4中の値(5kW)に制限されていることとする。これによって間接的に制御力の大きさが制限されることになる。テザー長変化を \dot{l} 、テザーの張力を T とすると、

$$P = \dot{l}T \quad (5-6)$$

であり、 T は

$$T = \frac{m_1 m_2}{m} l (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \quad (5-7)$$

と近似的に表わされる。また、テザー長が基準値(今の場合400km)から大きく変化する(とくに伸びる)ことは好ましくないと考えられるので、このフェーズにおいてテザー長は $400 \pm 10 \text{km}$ の範囲に制限することとする。

(1) 回転加速運動のプログラム

回転加速運動のプログラムはおおむね4-2節で述べた方法でおこなう。各周回ごとに最終回転角速度が最も大きくなるような等価初期状態を選び、これを実現するような制御履歴をつくる。制御力の大きさ(この場合はテザー長変化率)は(5-3)、(5-4)からわかるように使用可能電力によって制限される。制御力の大きさの制限はテザー系の回転速度とともに変化する。ただし、使用可能電力をこの段階ですべて用いると、後述の追従制御時に使用できる電力がなくなるので、一部の電力は計画時には使用しないものとしている。追従制御用の電力としては、4-3-4の $e=0.8$ の場合の検討結果をもとに、無次元化角加速度(u)で0.2に相当する電力としている。また、各周回において、近地点通過後にテザー長を基準値(400km)に戻す期間を設けている。

以上のような条件で作った回転加速運動のプログラムをFig.5-7~Fig.5-9に示す。Fig.5-7は回転角速度の履歴である。軌道周回ごとに回転運動が加速され、7周後に必要な回転角速度が達成されていることがわかる(近地点通過時にグラフが下向きピークを示している)。Fig.5-8はテザー長履歴を示している。近地点通過後にテ

ザー長を基準値に戻していること、および、テザー長の制限が破られないような履歴が作られていることがわかる。Fig.5-9は必要電力の履歴である。電力も最大値の5kwに余裕を残した値に抑えられて計画されていることがわかる。この段階で、Tab.5-3、Tab.5-4に示されるコンフィギュレーション下で必要な回転加速運動のプログラムができることが示された。

(2)回転加速運動の追従制御

ここでは、プログラム時になかったような外乱が加わった場合でも、前段でプログラムされた運動を実現するような制御が可能であることを示す。外乱としては、Tab.5-5に示すような持続外乱と観測誤差を考慮に入れる。初期状態量誤差と初期推定誤差については考慮しないが、これについては後で述べる。

追従制御の方法は4-3節で述べたものを用い、リファレンス軌道としては前段で計画されたものを用いる。先にも述べたとおり、制御力はテザー長を変化させることによって得るものとし、制御に使用する電力の最大値が制限されていることとする。この電力は回転運動のプログラム時に使用されることになっているものと分けあって使用することになるので、追従制御に用いることができる電力は、プログラム時に使用することになった電力の残りということになる。また、テザー長についても前述の制約 ($400 \pm 10\text{km}$) が設けられており、その範囲外の長さとはれないものとする。4-3で述べた追従制御では、この制約を加味して制御信号を出すことは不可能なので、ここでは、この制約を破るような信号が出た場合はそれを無視することになっている。

初期状態量誤差と初期推定誤差をここでいれていない理由を簡単に述べる。その理由を一言で言えば、ここで用いている制御力、およびそれについての制約の範囲では、ある程度の大きさのこれらの誤差があると、計画どおりの運動を実現することが不可能であるからである。今の場合初期の回転角速度はほぼ0に設定されている。(5-1)より制御力はテザー長変化率と回転角速度の積で表わされるので、ある制御力を発生させるためには、回転角速度が小さい時にはかなり大きなテザー長変化率が必要となる。(5-3)、(5-4)より、必要な制御力を得るための電力は、テザー長変化率と回転角速度の2乗に比例する。したがって、この場合に必要な電力が巨大になるということはない。しかし、テザー長変化率が大きい場合、短時間でテザー長の制限にぶつかることになり、制御力を長時間持続することができなくなり、実際の軌道をリファレンス軌道まで戻すことができなくなる。

しかし、これらの誤差は現実的に考えると、あまり大きなものを考慮する必要はないと考えられる。初期推定誤差が運動に大きな影響を与えるのは、その推定値をもとに制御をおこなうからである。したがって、推定誤差が十分小さくなるまで制御を行わない、逆に言えば制御をおこなう十分前から状態量の推定を行っておけばよいことになる。十分な時間があれば初期推定誤差が吸収されることは4-3節で示されており、現実的には十分可能である。さらに、運動のプログラムはそれほど時間のかかるものではないので、十分な精度で推定された状態量をもとにプログラムを立てることにすれば、初期状態量誤差も初期推定誤差と同様の範囲に抑えることがで

きると考えられる。

以上が、ここで初期状態量誤差と初期推定誤差を入れていない理由である。

以上のような条件下で、外乱を入れた状態で制御をおこなった場合のシミュレーション結果をFig.5-10～Fig.5-12に示す。Fig.5-10は回転角速度の履歴である。プログラムされた運動とほぼ同じ運動（複数周回にわたって回転が加速され続けること自体非常に困難であることは3-3節の議論からわかるであろう）が外乱がある状態下でも実現され、軌道7周回目に目標の回転角速度が実現されていることがわかる。Fig.5-11はテザー長の履歴である。リファレンス運動のテザー長変化に加えて、制御のためのテザー長の変更が行われていることがわかる。ただ、テザー長の山と谷の傾向はリファレンス軌道でのそれとほぼ一致しており、制御のための長さ変更のスケールがそれほど大きくないことがわかる。Fig.5-12は必要電力の履歴である。電力の最大値（5kw）の範囲内に収まっていることがわかる。かなり細かい制御を行っているように見えるグラフであるが、制御間隔（同じ制御量をとる時間間隔）は800s程度であり、十分実用の範囲内と考えられる。

このように、Tab.5-3、Tab.5-4に示されるコンフィギュレーション下でTab.5-5に示されるような外乱のもとでも計画された回転加速運動が実現できることが示された。

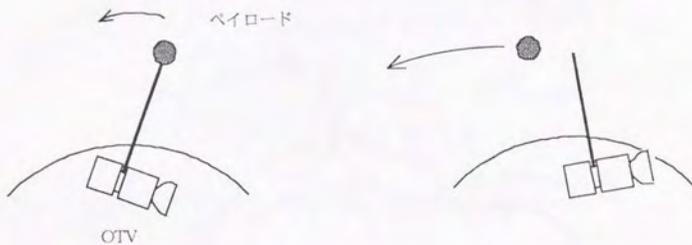
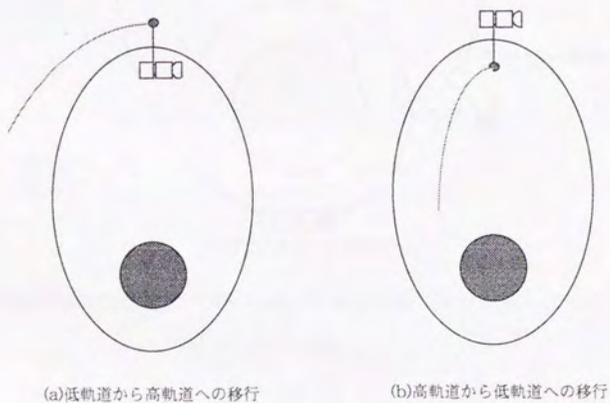


Fig.5-1 回転するテザーシステムからのペイロードの放出



(a)低軌道から高軌道への移行

(b)高軌道から低軌道への移行

Fig.5-2 Tethered OTVを用いたミッション例

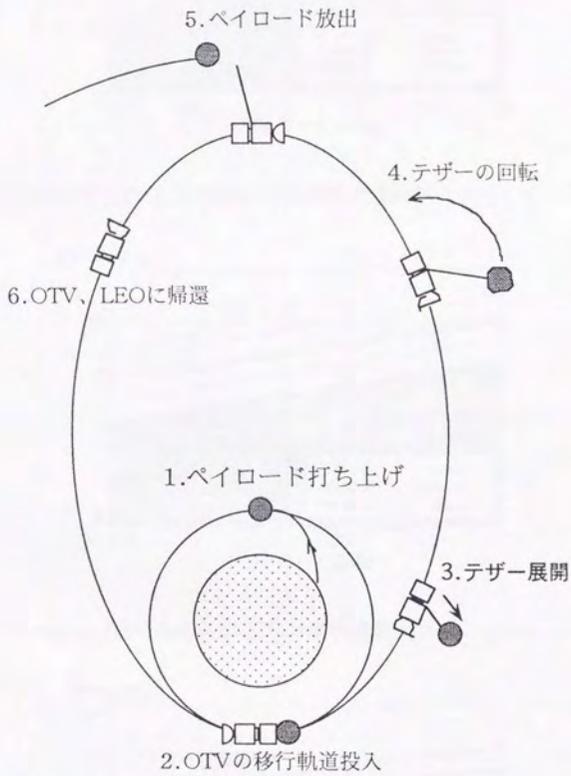


Fig.5-3 Tethered OTVを用いた軌道間輸送ミッションのモデル

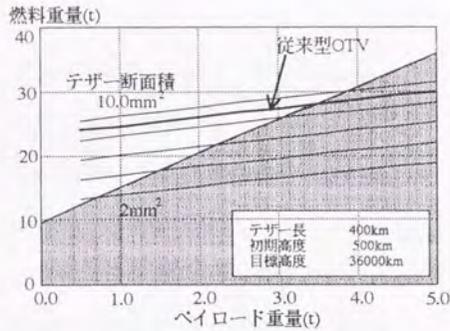


Fig.5-4 Tethered OTVと従来型OTVの燃料消費比較 (ミッションCase 1)

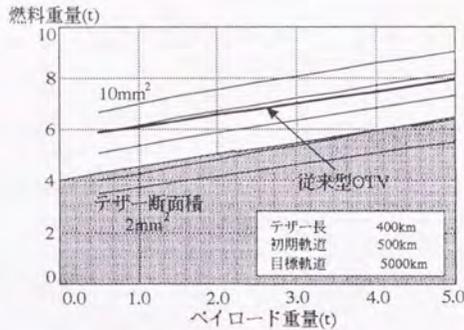


Fig.5-5 Tethered OTVと従来型OTVの燃料消費比較 (ミッションCase 2)

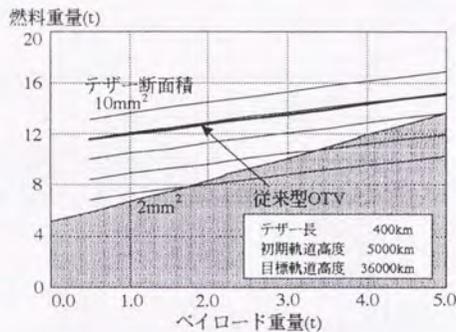


Fig.5-6 Tethered OTVと従来型OTVの燃料消費比較 (ミッションCase 3)

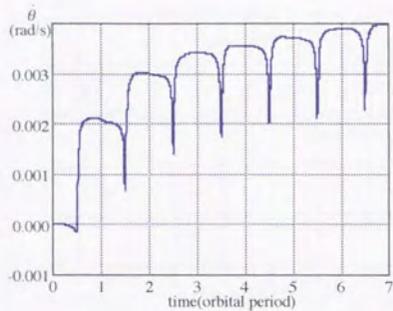


Fig.5-7 リファレンス運動の例 (姿勢角速度履歴)

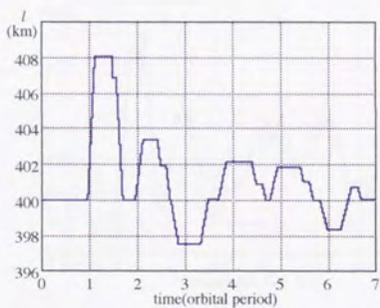


Fig.5-8 リファレンス運動の例 (テザー長履歴)

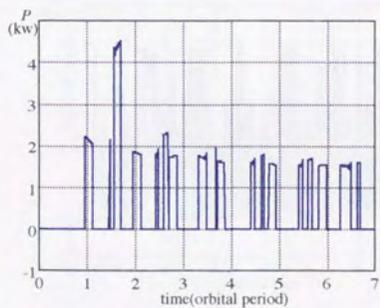


Fig.5-9 リファレンス運動の例 (必要電力履歴)

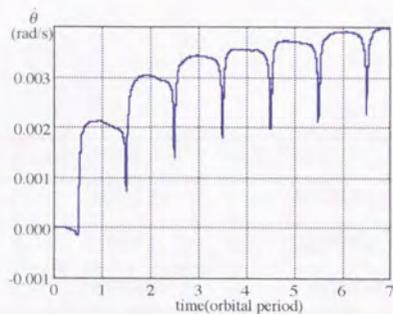


Fig.5-10 外乱がある場合の運動の例 (姿勢角速度履歴)

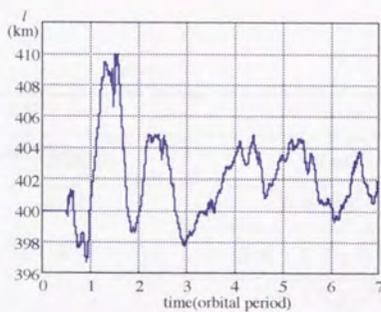


Fig.5-11 外乱がある場合の運動の例 (テザー長履歴)

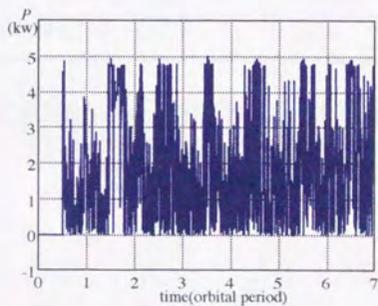


Fig.5-12 外乱がある場合の運動の例 (必要電力履歴)

ケース	初期軌道高度	目標軌道高度
1	500km	36000km
2	500km	5000km
3	5000km	36000km

Tab.5-1 検討した軌道間輸送ミッションの3つのケース

テザー長	400km
テザー断面積	2-10mm ²
テザー材質	炭素繊維
	密度 : 1.75g/cm ³
	強度 : 5.1GPa
OTV 構造質量	5000kg
OTV 電力 (最大値)	5kW
ペイロード質量	500-5000kg
化学燃料のISP	450s

Tab.5-2 Tethered OTVシステムに関する諸値

近地点高度	500km
遠地点高度	36000km
軌道長半径	24678km
離心率	0.72072

Tab.5-3 シミュレーションに用いた移行軌道

テザー長	400km(±10km)
OTV質量 (含燃料)	10000kg
ペイロード質量	1000kg
OTV電力	5kW

Tab.5-4 シミュレーションに用いたOTVのコンフィギュレーション

持続外乱	$v[\dot{\theta}]$	$(1.634 \times 10^{-5})^2 / s^2$
	$v[\ddot{\theta}]$	$(2.659 \times 10^{-9})^2 / s^4$
観測誤差	$w[\theta]$	0.1^2

Tab.5-5 シミュレーションに用いた外乱モデル

第6章 結論と今後の課題

6-1 本研究の結論

6-2 今後の課題

6-1 結論

本研究では、楕円軌道上における剛体の回転運動の励起という現象について検討をおこなった。

3-1では、楕円軌道上の剛体の姿勢運動が、広く知られている円軌道上の重力傾斜トルク下の運動とは大きく異なった不安定なものであることが示された。円軌道上の剛体に対して、重力傾斜トルクは、静止している物体を静止しているままに、秤動している物体は秤動しているままに、回転している物体はその速度で回転し続けるように、運動を安定化させる方向に作用する。これに対し楕円軌道上の剛体に対して重力傾斜トルクは、静止・秤動状態にあるような物体を回転状態に移行させ、回転している物体を秤動・静止状態に移行させるような不安定な運動を引き起こす。3-2では、この不安定な運動のうち、静止・秤動状態から回転が引き起こされるという部分に焦点をあて、検討をおこなった。その結果、運動を規定する2つのパラメータ (e, k_y) のかなり広い範囲の組み合わせについて、回転が励起されることが示された (Fig.3-9)。このことから、楕円軌道上の剛体の姿勢運動では回転運動こそが通常の運動状態であることがわかった。

つづいて3-3では、1軌道周期の間の回転運動の強さの変化についての検討をおこなった。ここでは、回転の強さを示す指標として \hat{a} (回転強度パラメータ) を導入して、1軌道周期の間に \hat{a} がどのように変化するかを調べた。まず、パラメータ e, k_y を固定した場合の初期状態量と1周後の \hat{a} の関係を調べた。その結果、1周後の \hat{a} が運動の初期状態に強く複雑に依存することが示され、この関係が楕円軌道上の剛体に関する3つの要因、すなわち

- 1.楕円軌道上の位置によって重力の強さが変化すること
- 2.楕円軌道上の位置によって軌道角速度が変化すること
- 3.重力傾斜トルクが姿勢角の非線形関数で表現されること

の相互作用によって生み出されるものであることが示された。

つづいて、パラメータ e, k_y と回転運動の強さの関係について検討した。パラメータに関して \hat{a} を規格化する指標として \hat{a}_y を導入した。いろいろな e, k_y に対する \hat{a} の変化を \hat{a}_y によって規格化したものを比較した結果、基本的にはいろいろな e, k_y について、起こっている現象は同様なものであることが確認された。ただし、この中で k_y が非常に小さい場合 (重力傾斜トルクの影響を受けにくい形状の剛体) と、運動状態が弱く回転が起こっていない場合 (秤動状態) については、別の考え方が必要であることがわかった。

3-4では、複数軌道周期の間の回転の強さの変化について検討がなされた。初期状態と複数周回後の回転運動の強さの関係は1軌道周期ごとの非線形な関係の繰り返しによって、カオス的な様相を示し、複数周回後の運動が初期状態量に非常に敏感になることが示された。この結果、複数軌道周期にわたって何らかの目的をもった運動を実現しようとする場合には、自由運動の範囲内でその運動を実現することが困

難であることがわかった。

第4章では、第3章の結果をうけて、目的をもった運動を実現するために、制御力を加えることについて検討した。制御力を加える目的は大きく分けて2つあり、その第一は、目的の運動を実現するような運動履歴を作り出すこと、第二は、少々の外乱の中でも予定された運動を達成するためである。本論文では、それぞれに「プログラム」と「追従制御」という名称を用いている。

まず、プログラムについての議論がなされた。ここでは、制御力を加えることで擬似的に運動の初期状態を変化させ、近地点付近の非線形性によって近地点通過後の運動状態を大きく変化させるという方法を用いている。制御力を加えることによる初期状態の変化を計算するにあたっては、楕円軌道上の姿勢運動も、非線形性が強い近地点付近の運動を除いては、ほぼ線形的なものにとらえられることを利用している。この方法によって、ある程度の制御力が与えられれば、目的の運動を実現するような運動履歴を作り出すことが可能であることがわかった。しかし、制御力に対する制限が強い場合には、1周の間の制御だけでは目的の運動を実現できないような場合があり、その場合には1周前にさかのぼって履歴の変更をおこなうなど別の手法を用いる必要があることも判明した。

次に、追従制御についての議論がなされた。プログラムによって作られた計画されていた運動と、実際の運動のあいだに誤差があったり、あるいは運動に外乱が加わった場合、たとえそれが微小であっても、それが放置されると複数周回後の大きな運動の変化となって現れる。そこで、実際の運動が予定の運動から大きくずれないように制御力を加えることを考える。ここでは、運動方程式を計画された運動のまわりに展開して線形化し、線形な運動に対する制御として取り扱っている。いくつかの外乱モデル、制御力に対する制約についての制御性が検討され、ある程度の制御力が与えられた場合、レギュレータとオブザーバを組み合わせることで、実際の運動を計画された運動に追従させることが可能であることがわかった。ただ、制御力に対する制約が強い場合には、実際の運動のずれが非線形性によって増幅されることを制御によって抑えることができず、実際の運動が計画された運動からは大きくはずれていくことになることがあり、この場合にはあらたにプログラムをやり直すなど、別の方法を用意する必要があることもわかった。

本論文の第3章、第4章で検討された事柄は、楕円軌道上における剛体の回転運動の励起という現象一般について説明するものである。したがって、この部分から得られる結論は上記のような定性的なものに限定されることになる。

具体的に、励起される回転運動が有意なものであるか、あるいはその制御のために必要とされる制御力がどの程度のものか、ということを検討するためには、実際にこの現象を利用する目的を規定する必要がある。第5章では、この運動をTethered OTVを用いた軌道間輸送に応用する例を示し、現実的なOTVのモデルに対し、引き起こされる回転運動が有意なものであり、必要とされる制御力も現実的なものであることを示した。

以上をもって本論文の結論とする。

6-2 今後の課題

本論文では、楕円軌道上の不安定姿勢運動とその利用という問題を検討し、その研究の道筋を作り上げることができたと考えている。対象の運動の性質を分析し、それを有効に利用するために必要な事柄（プログラムと追従制御）を明らかにし、それを実現する方法を示した。

しかし、その一方で、研究の過程において、新たに興味ある諸問題が提起されてきたことも事実である。そのような問題を、今後研究が期待される事柄としてここに提示する。

まず、第2章・第3章で取り上げた、自由運動に関連する問題について。

本論文では、検討の対象として、姿勢運動が質量中心軌道面内に限られる場合の運動を取り上げた。しかし、軌道面外の姿勢運動を伴う3次元姿勢運動についても興味ある結果が得られる可能性がある。2-2でも述べたとおり軌道面外運動では、不安定運動を引き起こす3つの要素のうち「軌道運動」の要素がはたらかないため、引き起こされる不安定運動の規模は大きくならない。本論文で取り上げたような離心率が大きい楕円軌道上では、引き起こされる姿勢角速度は大きい、軌道面内運動が支配的となるため姿勢運動面も軌道面とほぼ一致し、姿勢回転軸の変化はあまり激しくならない。しかし、離心率が小さい軌道上では「軌道運動」の要素が小さく、引き起こされる軌道面内運動も小さくなるので、姿勢角速度は大きくない反面、軌道面内運動が支配的となることもなく、姿勢回転軸がダイナミックに変化する可能性があり、その中から興味ある結果が得られる可能性がある。

第2章でも述べたとおり、慣性モーメント比 k_y が小さい物体の運動は、楕円軌道上のスピン衛星の運動として過去にも取り上げられている。このようなケースは、実用面から見れば「移行楕円軌道上の通常形態の衛星に重力傾斜トルクが引き起こす微小外乱」にすぎないであろう。しかし現象面から見れば、3-3でも述べたようにこの領域の運動は、非線形性が強い領域とは異なった様相を示す。これはこの領域が線形と非線形の境界にあたるためと考えられ、ここから興味ある結果が得られる可能性がある。

3-4では、複数軌道周回後の状態量が初期状態に非常に敏感になる様子が示され、その様子を「カオス的」と称した。この現象がカオスの例なのか、あるいは似て非なるものなのかは、はっきりさせておきたい点である。そしてもしカオスであれば昨今の幅広い研究の展開の中に、関連する研究がある可能性も考えられる。

続いて、プログラム・追従制御を扱った第4章について。

プログラムにおいては、等価初期状態を求める過程において、軌道の近地点通過時周辺以外の運動方程式を近似的に線形化して考えている。この仮定自体はそれほど大それたものではなく、実際に本論文で扱った例（離心率 $e=0.5$ ）では、非線形モデルを用いた修正も微小ですんでいる。しかし e が小さくなった場合などは、近地点付近だけを特異的として切り出すことが困難となるので、軌道上のどの部分が近似的に線形化できるのかを判断する指標が必要となる可能性がある。これは、重力傾斜

トルクが引き起こす非線形性の指標と考えられるもので、興味深い点である。プログラムの段階で、「制御力についての制約」と「その制約の範囲内で作られるプログラム軌道」の間の関係は単純ではない。例えば初期状態と周回数が与えられた場合、終端状態量がとりうる範囲は制御力の制約に直接影響される。例えば、回転を加速するようなプログラムの場合、制御力についての制約と終端の姿勢角速度の間に明確な関係が現われるであろう。しかし、初期状態も含めてプログラム可能である場合には、たとえ制御力が0であっても目的のプログラム軌道を組める可能性がある。この場合には初期状態の設定に際して非常に高い精度が要求される。では、初期状態の精度に制限があり、制御力も制限されている状況で作られるプログラム軌道は、目標をどの程度達成できるのか。本論文では、目標とする運動を達成するプログラム軌道を作ることができることを示しただけだが、この部分を定量的に評価することは、困難だが非常に重要である。

制御力に関する制約と制御性能の関係については、追従制御においても重要な問題である。本論文では、与えられた制御力・外乱の範囲内で、実際の運動を与えられたリファレンス軌道に追従することが可能であることを示したが、「どれほどの制御力でどれほどの外乱に耐えられるか」が本当に大事な質問であろう。しかし、問題が非線形であるだけに、これはかなりの難問である。第一の理由は外乱と制御力を式上で直接結び付けるのが困難だからである。第二の理由は、制御能力がリファレンス軌道に依存する可能性、つまり外乱に敏感な軌道と敏感でない軌道が存在する可能性があるからである。この場合にはリファレンス軌道を作る際に、外乱への敏感度という指標を入れうる可能性があり、制御能力についてもそれにしがつた評価の必要がある。以上を考慮に入れた結果が得られれば、それは非常に重要なものとなる。

以上、研究過程において新たに発生した問題点をもって今後の課題とする。

参考文献

- [1] "Spacecraft Attitude Dynamics", Hughes, P.C., John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [2] "Modern Spacecraft Dynamics & Control", Kaplan, M.H., John Wiley & Sons, New York, 1976.
- [3] "Spacecraft Attitude Determination and Control", Wertz, J.R., D. Reidel P.C., 1978.
- [4] "Spaceflight Dynamics", Wiesel, W.E., McGraw-Hill P.C., New York, 1989
- [5] "Optimal Spacecraft Rotational Maneuver", Jankins, J.L., Turner, J.D., ELSEVIER, 1986
- [6] "宇宙工学入門", 茂原正道, 培風館, 1994.
- [7] "宇宙システム入門", 富田信之, 東大出版会, 1993.
- [8] "On Satellite Librations", G.M.Schindler, ARS Journal May 1959
- [9] "Satellite Librations of Large Amplitude", Klemperer, W.B., ARS Journal, Vol.30, No.1, Jan. 1960, pp.123-124.
- [10] "Librations on a Slightly Eccentric Orbit", Baker, R.M.L., Jr., ARS Journal, Vol.30, No.1, Jan. 1960, pp.124-126.
- [11] "Effects of Plane Librations on the Orbital Motion of a Dumbbell Satellite", J.P.Moran, ARS Journal, August, 1961
- [12] "Dumbbell Librations in Elliptic Orbits", Schechter, H.B., AIAA Journal, Vol.2, No.6, June 1963, pp.1000-1003.
- [13] "Motion of an Artificial Satellite about its Center of Mass", Beletskii, V.V., NASA TT F-429, 1966.
- [14] "Periodic Solutions Associated with the Gravity-Gradient -Oriented System: Part I: Analytical and Numerical Determination", Modi, V.J. and Brereton, R.C., AIAA Journal, Vol.7, No.7, July 1969, pp.1217-1225.
- [15] "Periodic Solutions Associated with the Gravity-Gradient -Oriented

System: Part II: Stability Analysis", Modi,V.J. and Brereton,R.C., AIAA Journal, Vol.7, No.8, August 1969, pp.1465-1468.

- [16] "重力傾度による衛星の軌道制御の可能性", 村上 力, 航空宇宙学会誌 20巻 319号
- [17] "On orbit control using gravity gradient effects", C.Murakami, A.A. Vol.8, No.7, pp733-747, 1981
- [18] "Study on Rotational Motion of Dumbbell Shaped Rigid Body on Elliptical Orbit", Kawakatsu,Y., Watanabe,T., Nakasuka,S., Tanabe,T., Proceedings of 5th Workshop on Astrodynamics and Flight Mechanics, August 1995.
- [19] "システム制御理論入門", 小郷寛, 美多勉, 実教出版, 1979.
- [20] "最適制御入門", 加藤寛一郎, 東大出版会, 1987.
- [21] "Tethers Open New Space Options", Ivan Bekkey, Astronautics & Aeronautics Apr 1983
- [22] "Orbital Modifications Using Forced Tether-Length Variations", Manuel Martinez-Sanchez, Sarah A.Gavit, J.G. Vol.10 No.3 May-Jun 1987
- [23] "The orbital tower:a spacecraft launcher using the Earth's rotational energy", Jerome Pearson, A.A. Vol.2 pp785-799 1975
- [24] "Tether Applications in Space Transportation", Joseph A. Carroll, A.A. Vol.13 No.4 1986
- [25] "The Behavior of Long Tethers in Space", David A. Arnold, J.A.S. Vol.35 No.1 Jan-Mar 1987
- [26] "Pumping a Tethered Configuration to Boost its Orbit Around an Oblate Planet", John V.Breakwell, James W.Gearhart, J.A.S. Vol.35 No.1 Jan-Mar 1987
- [27] "Feasibility Assessment of the Get-Away Tether Experiment", Michael Greene, Charles C.Rupp, Justin Walls, Douglas, Wheelock, Andrea Lorenzoni, J.A.S. Vol.35 No.1 Jan-Mar 1987
- [28] "Shuttle/Tethered Satellite System", Charles C.Rupp, Jay H.Laue, J.A.S. Vol.26 Jan-Mar 1978

- [29] "The removal of large Space Debris objects with the help of space tethers", A.Bade, P.Eichler, Z.Flugwiss Vol.16 pp271-282 1992
- [30] "On the Tilting Crane Concept", F.Venditti, G.Origgi, A.Ercoli Finzi, AIAA paper 89-1586
- [31] "Advantages of Tether Release of Satellites from Elliptic Orbits", George A.Kyroudis, Bruce A.Conway, J.G. Vol.11 No.5 Sep-Oct 1988
- [32] "A Non-Synchronous Orbital Skyhook", Hans Moravec, J.A.S. Vol.25 No.4 Oct-Dec 1977
- [33] "Anchored Lunar Satellites for Cislunar Transportation and Communication", Jerome Pearson, J.A.S. Vol.27 No.1 Jan-Mar 1979
- [34] "Reactionless Orbital Propulsion Using Tether Deployment", Geoffrey A.Landis, A.A. Vol.26 No.5 1992
- [35] "Strategy for the Economical Removal of Numerous Larger Debris Objects From Earth Orbits", P.Eichler, A.Bade, A.A. Vol.29 No.1 1993
- [36] "Effects of Deployment Rates and Librations on Tethered Payload Raising", K.Kumar, R.Kumar, A.K.Misra, J.G.C.D. Vol.15 No.5 Sep-Oct 1992
- [37] "Two Dimensional Tethered Satellite Attitude Dynamics", Ronald W.Humble, J.A.S. Vol.38 No.1 Jan-Mar 1990
- [38] "The Tethered Satellite System: Present Status and Future Developments", A.Anselmi, F.Giani, Z.Flugwiss Vol.10 pp349-356 1986
- [39] "Tether-Assisted Servicing of the COLUMBUS Free Flying Laboratory by HERMES", A.Hornik, W.Seboldt, A.A. Vol.22 pp71-77 1990
- [40] "Operations with Tethered Space Vehicles", D.L.Lang, R.K.Nolting, NASA SP-138, Gemini Summary Conference 1967
- [41] "An Alternate Approach to Space Missions Involving a Long Tether", Ehud Netzer, Thomas R.Kane, J.A.S. Vol.40, No.3 Jul-Sep 1992
- [42] "Reaction-Boom Attitude Control Systems", W.W.Hooker, I.P.Leliakov, M.G.Lyons, G.Margulies, J.S.R. Vol.7 No.11, pp1337-1343, 1970
- [43] "Feasibility Study on Enhancement of OTV Capability by Tether for Orbital

Transfer Operations", Y.Kawakatsu, T.Watanabe, Proceedings of 19th ISTS
1994

- [44] "Orbital Transfer Operation Utilizing Rotational Motion of Tether",
Kawakatsu Y., Watanabe T., Nakasuka S., Proceedings of 4th Workshop on
Astrodynamics and Flight Mechanics, Aug. 1994, pp93-98.
- [45] "ニュートンの時計", アイバース・ピーターソン, 日経サイエンス社, 1995
- [46] "Rotation of Hyperion. I. Observations", J.J. Klavetter, The Astronomical
Journal Vol.97, No.2, Feb. 1989, pp570-579
- [47] "The Chaotic Rotation of Hyperion", J.Wisdom, J.P.Stanton, M.Francois,
Icarus Vol.58, May 1984, pp137-152
- [48] "Chaotic Spinning of Hyperion?", C.C.Murray, Nature Vol.311, Oct. 1984,
pp705
- [49] "Rotation of Hyperion. II. Dynamics", J.J. Klavetter, The Astronomical
Journal Vol.98, No.5, Nov. 1989, pp1855-1874
- [50] "Dynamics of the Uranian and Saturnian Satellite Systems: a Chaotic route
to melting Miranda?", S.F.Dermott, R.Malhotra, C.D.Murray, Icarus Vol.76,
Dec 1988, pp295-334
- [51] "数値計算の常識", 伊理正夫, 藤野和建, 共立出版, 1985

雑誌名略号は以下のとおり

- A.A. Acta Astronautica
J.A.S. Journal of the Astronautical Science
J.G. Journal of Guidance
J.G.C.D. Journal of Guidance, Control, and Dynamics
J.S.R. Journal of Spacecrafts and Rockets
Z.Flugwiss Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung

Appendix A シミュレーションに用いた数値計算

本論文で採用した数値計算の方法が本論文での検討に対して精度的に妥当なものかどうかを検討する。必要な精度要求に対して計算量的にもっとも効率的な方法かどうかを議論するわけではないことに注意する。

以下の議論でも、本論文内の諸シミュレーションでもRunge-Kutta法による数値積分を用いているが、別の数値積分法として予測子・修正子法の1つAdams-Bushforth-Moulton法でも同様な結果がえられていることを冒頭に述べておく。また、数値積分の誤差については過去にもいろいろな議論がされているが、基本的には被積分関数に依存するものなので、ここではいくつかの刻み幅を用いた積分の結果を比較することにする。

時刻 t を独立変数とした運動方程式

$$\ddot{\theta} = -\frac{3k_y}{r^3} \cos\theta \sin\theta - \ddot{\varphi}$$

をそのまま用いて $dt=0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ とした場合のシミュレーションの結果を示す。時間は無次元化されており1軌道周期が 2π となる。Fig.A-1(a)(b)は $e=0.8, k_y=1.0, \theta_0=0.0, \dot{\theta}_0=0.0$ の場合の $\theta, \dot{\theta}+\dot{\varphi}$ の履歴である。さらに $dt=0.1, 0.01, 0.001$ の場合の状態量と $dt=0.0001$ の場合の状態量の差 $\Delta\theta, \Delta\dot{\theta}$ の履歴を示したのがFig.A-1(c)(d)である。 dt が 0.01 より小さな刻み幅では状態量の履歴に大きな差がないことがわかる。他の条件下の運動でも同様な結果がえられた。これより、 $dt=0.01$ 程度にとれば十分な精度の結果がえられると考える。

本論文では、基本的に剛体の重心の軌道は不変であると仮定している。そこで真近点離角 φ を独立変数とした運動方程式

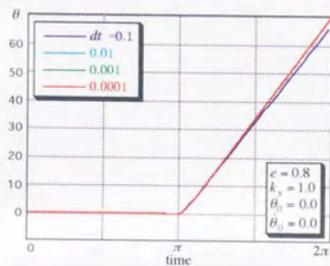
$$(1 + e \cos \varphi) \theta'' - 2e \sin \varphi \theta' + 3k_y \cos \theta \sin \theta = -2e \sin \varphi$$

を考えることもできる。この場合刻み幅 $d\varphi$ を一定にしても、時間的な刻みは近地点近傍でより細かく（近地点から遠い点ではより大きく）なる。第3章で示したように、近地点近傍で大きな運動の変化がおきることを考えると、以上のような性質より、同じ刻み数でも φ を独立変数にした方が t を独立変数にした場合よりも精度がよくなることが期待される。 $d\varphi=0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ とした場合のシミュレーションの結果を示す。やはり1軌道周期が 2π に相当する。Fig.A-2(a)(b)は $e=0.8, k_y=1.0, \theta_0=0.0, \dot{\theta}_0=0.0$ の場合の $\theta, \dot{\theta}+\dot{\varphi}$ の履歴である。さらに $d\varphi=0.1, 0.01, 0.001$ の場合の状態量と $d\varphi=0.0001$ の場合の状態量の差 $\Delta\theta, \Delta\dot{\theta}$ の履歴を示したのがFig.A-2(c)(d)である。 $d\varphi=0.01$ とすれば十分な精度がえられること、および、誤差の程度が t を独立変数とした場合よりも小さくなっていることがわかる。以上の結果を受けて、本論文内のシミュレーションでは、一部をのぞいて、 φ を独立変数とした運動方程式を刻み幅 $d\varphi=0.01$ のRunge-Kutta法により積分している。1軌道周期の間の運動では上記のように $d\varphi=0.01$ 以下であれば状態量の履歴にほと

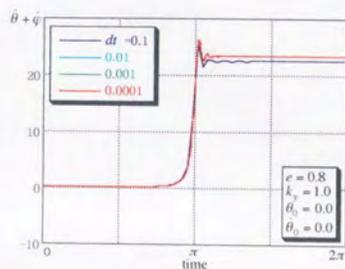
んど差は出てこないのだが、この小さな差も4-3でも示したとおり複数軌道周期にわたって運動を続けると増幅されることになる。Fig.A-3に $d\varphi=0.01, 0.001$ の場合の5軌道周期にわたる姿勢角速度の履歴を示す。 $e=0.8, k_y=1.0, \theta_0=0.0, \dot{\theta}_0=0.0$ である。当初は両グラフともほぼ同じ履歴を示しているが、3周目以降は大きな差を生じていることがわかる。

このように複数軌道周期にわたる運動では、数値計算誤差も大きく増幅される可能性があることを考慮して、この運動についての議論を簡単に再確認する。すなわち、3-4で示したような複数軌道周期にわたる運動における初期値と終端値の間の複雑な関係が、数値計算誤差に因を発するものではないことを確認する。 $e=0.8, k_y=1.0$ の場合について、 $\hat{a}_0=1.0$ のときの θ_0 と軌道2周後の \hat{a}_f (\hat{a}_{f2}) の関係をプロットしたのがFig.A-4である。 $d\varphi=0.01, 0.001$ の場合のグラフを示しているが、両者はほぼ完全に一致している。つまり、この複雑な関係は数値計算誤差によるものではないと確認できる。

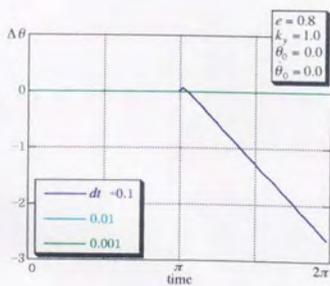
以上より、本論文で採用している数値計算は、本論文の検討に対しては十分な精度をもっていると考えられる。



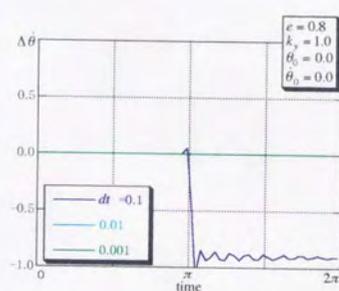
(a) θ の履歴



(b) $\dot{\theta} + \varphi$ の履歴

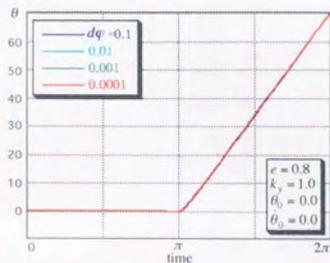


(c) $\Delta\theta$ の履歴

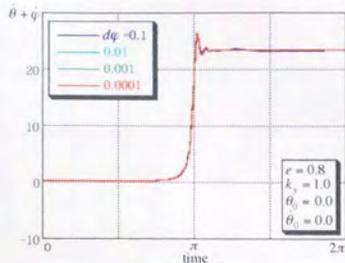


(d) $\Delta\dot{\theta}$ の履歴

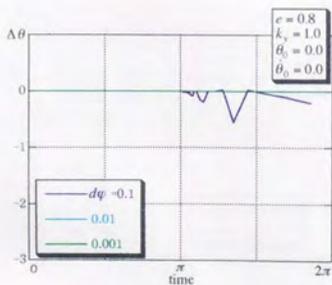
Fig.A-1 シミュレーション結果の刻み幅による違い (独立変数は t)



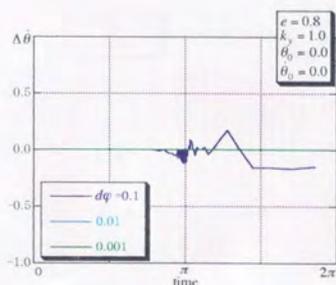
(a) θ の履歴



(b) $\dot{\theta}$ の履歴



(c) $\Delta\theta$ の履歴



(d) $\Delta\dot{\theta}$ の履歴

Fig.A-2 シミュレーション結果の刻み幅による違い (独立変数は φ)

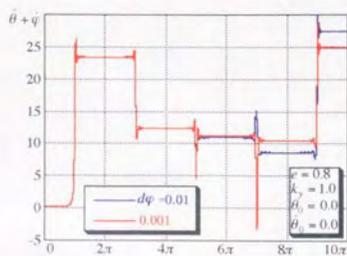
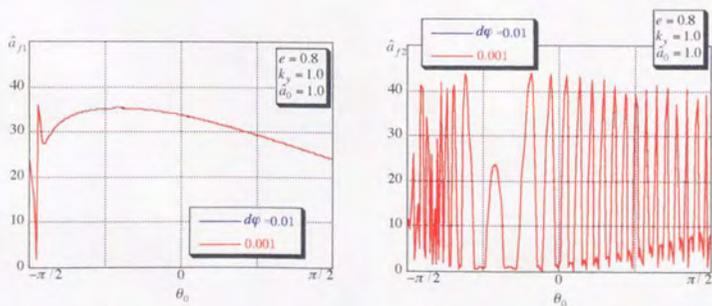


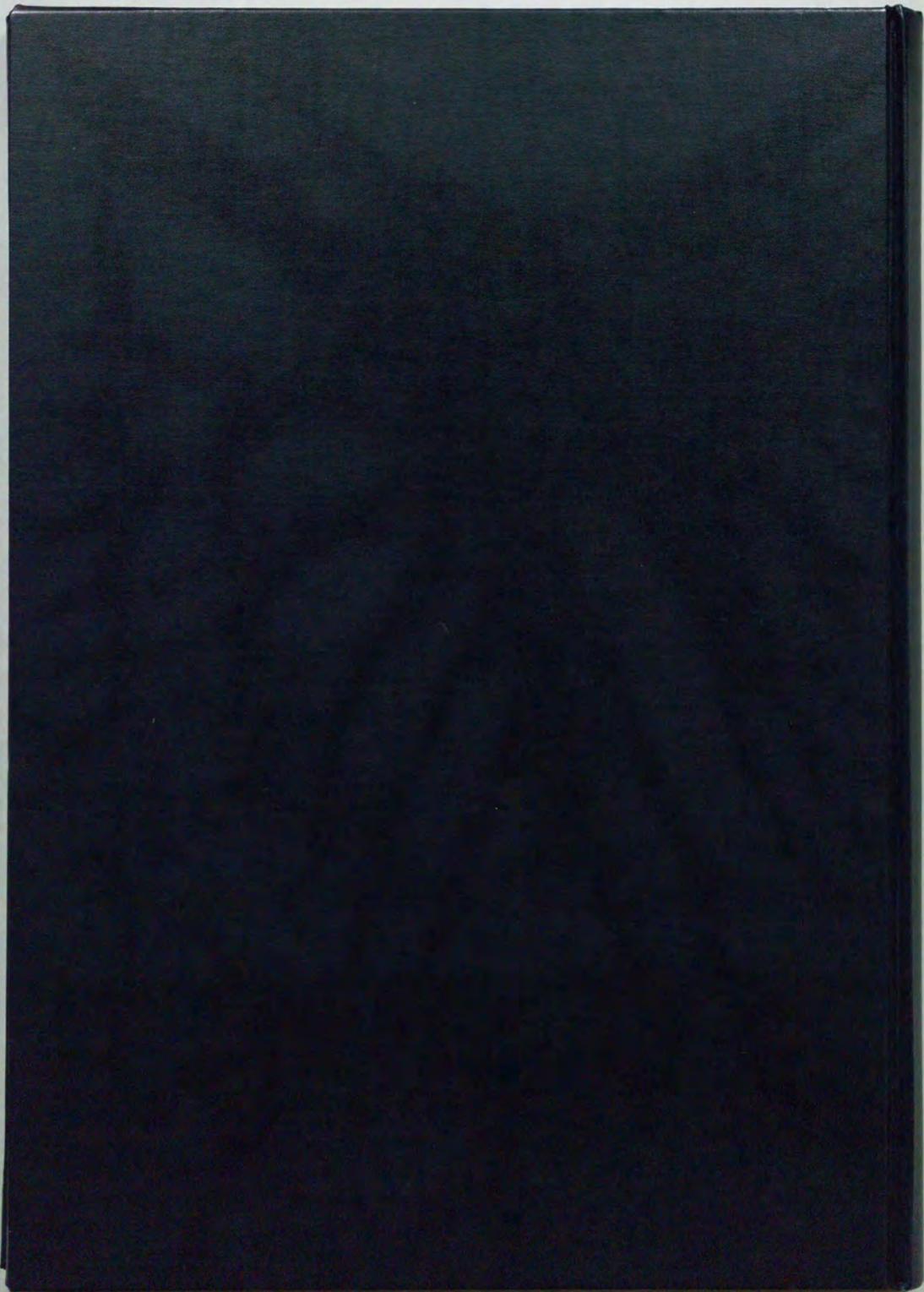
Fig.A-3 複数周回にわたるシミュレーションにおける刻み幅による違い



(a) 1 軌道周期の θ_0 と \hat{a}_{f1} の関係

(b) 2 軌道周期の θ_0 と \hat{a}_{f2} の関係

Fig.A-4 複数周回にわたる運動における θ_0 と \hat{a}_j の関係の刻み幅による違い



inches 1 2 3 4 5 6 7 8
cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM Kodak



Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM Kodak

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

