論文内容の要旨

論文題目　Quasi-integrable extensions of the discrete Toda lattice equation
(離散戸田格子方程式の準可積分拡張)

氏　　名　　　神谷　亮

非線形微分方程式において，可積分性の定義は例えばLiouville可積分性などとして，厳密に定義されている．他方，非線形差分方程式の可積分性については，未だに様々な議論がある．2 階の有理形の差分方程式（3項間漸化式）については，可積分性の判定法として，特異点閉じ込めテストが提案され，一連の離散 Painlevé 方程式系が構成された．しかしながら，Hietarinta-Viallet 方程式のように，特異点閉じ込めテストを通過するものの，その軌道がカオスを示すものがあり，より精密な判定法として,「代数的エントロピーが0である」ことが提案された．現在では「代数的エントロピーが0である」ことが自律的な2階の有理形の差分方程式の可積分性の定義と考えられているが，非律的な場合や，高階・高次元の離散方程式系の場合には，未だ確立された定義はない．その理由のひとつとして，特異点閉じ込めテストや代数的エントロピーの概念を，直接高次元化し，計算することが困難であることが挙げられる．最近，特異点閉じ込めテストの一つの再定式化として，co-primeness 条件が提案された．co-primeness 条件とは，時間発展して得られる各項を初期値の有理式と捉えたときに，適当な環の上で互いに素になるという性質であり，特異点閉じ込めの代数的再定式化とも考えられる．最近，離散 KdV 方程式や，1 次元離散戸田格子方程式

$$\tau_{t+1,n}\tau_{t-1,n} = \tau_{t,n}^2 + \tau_{t,n-1}\tau_{t,n+1}. \tag{1}$$

は，離散可積分方程式の持つ特徴である co-primeness property を満たすことが示された．

一般に，典型的な離散可積分方程式と考えられる離散 KdV 方程式や離散戸田格子方程式では，十分な数の保存量が存在する，Lax 表示が存在するなどのよい性質があることが知られている．本学位論文では，co-primeness 条件を満たしながら，このような性質を持たない（多くの場合その簡約の系の代数的エントロピーが正となるもの），可積分系に近い性質を持つ系を扱う．このような系を，準可積分系 (quasi-integrable system) と呼ぶことにする．本学位論文の前半では，まず，5 項間漸化式 Somos-4 の拡張として，

$$x_{n+4}x_n = x_{n+3}^l x_{n+1}^m + x_{n+2}^k, \qquad (l,m,k \in \mathbb{Z}_+) \tag{2}$$

を考え，次の命題が成立することを示した．

Proposition 1. (l,m,k) の最大公約数が，1 または 2 のべき乗であるとする．方程式 (2) の各項 x_n は，初期変数 x_0, x_1, x_2, x_3 の既約 Laurent 多項式である．もし $n \neq m$, ならば，x_n と x_m は，互いに素である．

次に，2 次元離散戸田格子方程式

$$\tau_{t+1,n,m+1}\tau_{t-1,n+1,m} = \tau_{t,n+1,m}\tau_{t,n,m+1} + \tau_{t,n,m}\tau_{t,n+1,m+1}, \tag{3}$$

の拡張である，$2+1$ 次元の方程式

$$\tau_{t+1,n,m+1}\tau_{t-1,n+1,m} = \tau_{t,n+1,m}^{k_1}\tau_{t,n,m+1}^{k_2} + \tau_{t,n,m}^{l_1}\tau_{t,n+1,m+1}^{l_2} \qquad (k_i, l_i \in \mathbb{Z}_+). \tag{4}$$

を考え，これらについて，次の定理が成立することを示した．

Theorem 2. (k_1,k_2,l_1,l_2) の最大公約数が，1 または 2 のべき乗であるとする．このとき，(4) の各項 $\tau_{t,n,m}$ は，初期変数

$$\left\{\tau_{t=0,n,m},\ \tau_{t=1,n,m} \middle| (n,m) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

の既約 Laurent 多項式である．さらに，$(t,n,m) \neq (t',n',m')$ ならば，$\tau_{t,n,m}$ と $\tau_{t',n',m'}$ は互いに素である．

さらに，1 次元への簡約によって，1 次元離散戸田格子方程式の拡張である

$$\tau_{t+1,N}\tau_{t-1,N} = \tau_{t,N}^{k} + \tau_{t,N-1}^{l_1}\tau_{t,N+1}^{l_2} \qquad (k, l_1, l_2 \in \mathbb{Z}_+). \tag{5}$$

についても，同様の結果が成り立つことを確認した．

本学位論文の後半では，次の $2+1$ 次元離散方程式について考察した．

$$\frac{(U_{t+1,n,m+1}-1)(U_{t-1,n+1,m}-1)}{(U_{t,n+1,m}-1)^{k_1}(U_{t,n,m+1}-1)^{k_2}} = \frac{U_{t,n,m}^{l_1}U_{t,n+1,m+1}^{l_2}}{U_{t,n+1,m}^{k_1}U_{t,n,m+1}^{k_2}} \qquad (l_i, k_i \in \mathbb{Z}_+). \tag{6}$$

この方程式は，$l_1 = l_2 = k_1 = k_2 = 1$ のとき，適当なスケール変換の下で，2 次元離散戸田格子方程式の非線形形式

$$\frac{\left(1+\delta\epsilon(\tilde{U}_{t+1,n,m+1}-1)\right)\left(1+\delta\epsilon(\tilde{U}_{t-1,n+1,m}-1)\right)}{\left(1+\delta\epsilon(\tilde{U}_{t,n+1,m}-1)\right)\left(1+\delta\epsilon(\tilde{U}_{t,n,m+1}-1)\right)} = \frac{\tilde{U}_{t,n,m}\tilde{U}_{t,n+1,m+1}}{\tilde{U}_{t,n+1,m}\tilde{U}_{t,n,m+1}}.$$

となるため，2 次元離散戸田格子方程式の非線形形式のある拡張になっている．$l_1 = l_2 = k_1 = k_2 = 1$ の場合も含め，これらの方程式の解は，初期値の Laurent 多項式にはならない．これらの系を調べるために，まず最初に，方程式 (6) の簡約によって得られる，非線形の 5 項間漸化式

$$\frac{(u_{n+4}-1)(u_n-1)}{(u_{n+2}-1)^k} = \frac{u_{n+3}^m u_{n+1}^l}{u_{n+2}^k} \quad (k, l, m \in \mathbb{Z}_+). \tag{7}$$

を考察し，次の拡張された co-primeness 条件が成り立つことを示した．

Theorem 3. 方程式 (7) の解 u_n は，次の co-primeness 条件を満たす: $n \not\equiv n'$ (mod 2) または $|n-n'|>4$ が満たされるとき, u_n と $u_{n'}$ は，次の環 $\mathcal{R}_u$:において，互いに素である．

$$\mathcal{R}_u := \mathbb{Z}\left[\{u_j^{\pm}, (u_j-1)^{\pm}\}_{j=2}^{5}\right]. \tag{8}$$

ここで，初期値の有理式のなす体 F の要素 h_1, h_2 と，F の部分環 R について,「h_1, h_2 が環 R において互いに素である」とは，R の要素として互いに素な f_1, g_1, f_2, g_2 が存在し，

$$h_1 = \frac{f_1}{g_1}, \quad h_2 = \frac{f_2}{g_2}$$

が成り立つことである．

さらに，(6) について，次の定理が成り立つことを証明した．

Theorem 4. 方程式 (6) の解の 2 項 $U(t,n,m)$ と $U(t',n',m')$ について，次が成立する:

$|t-t'|>2$ または $(n',m') \neq (n,m), (n\pm 1, m\mp 1)$ が成り立つとき，それらは次の環 $\mathcal{S}_U$ において，互いに素である:

$$\mathcal{S}_U := \mathbb{Z}\left[\left\{U_{t,n,m}^{\pm}, (U_{t,n,m}-1)^{\pm}\right\}_{t=0,1}\right]. \tag{9}$$

これまでのところ．準可積分系として知られている高次元の離散格子方程式系は，$1+1$ 次元の離散 KdV 方程式の拡張と，本学位論文で考察した離散戸田格子方程式の拡張のみである．$2+1$ 次元系については，本研究で初めて構成された．より一般的な準可積分系を組織的に構成する手法を見出すことや，その幾何学的あるいは代数的特徴づけを行うことが，今後の課題であり，将来研究したいトピックである．