論文の内容の要旨

論文題目　Criteria for good reduction of hyperbolic polycurves
(多重双曲的曲線の良還元判定条件)
氏名　長町一平

この論文では, 多重双曲的曲線の良還元判定条件を与えた. この研究は, 織田・玉川による双曲的曲線の良還元判定条件に関する研究の高次元版にあたる.

まず, 代数多様体の良還元の定義を述べる. S を離散付値環 O_K のスペクトラム, η を S の生成点, σ を S の閉点とする. $K = \kappa(\eta)$ を O_K の商体, $k = \kappa(\sigma)$ を O_K の剰余体, p を k の標数とする.

定義 1. X を K 上の固有滑らかなスキームとする. X が良還元を持つとは, S 上固有滑らかなスキーム $\mathfrak{X}$ であって, 生成ファイバー $\mathfrak{X}_\eta$ が K 上 X と同型であるものが存在することをいう. このような $\mathfrak{X}$ を X の滑らかなモデルという.

数論幾何において, X が良還元を持つかの判定条件を与えることは重要な問題である. 例えば Serre と Tate はアーベル多様体について, K の惰性群の (p と素な素数 l について) 第一 l 進エタールコホモロジーへの作用が自明であることと, 良還元を持つことが同値であることを証明した. このようなガロア表現を用いた良還元判定条件の非可換版として, 織田と玉川による判定法がある. これは, 双曲的曲線 [cf. 定義 2] が良還元を持つことと, K の惰性群の副 l 基本群への外ガロア表現が自明であることが同値というものである [Oda1] [Oda2]. これについて説明する.

外ガロア表現は次のように定義される. K の分離閉包を K^{sep} とし, その絶対ガロア群を $G_K := \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$, 惰性群を I_K とする. (ここで I_K は共役を除いて定まる G_K の部分群である). X を K 上の滑らかかつ幾何的連結なスキームとする. $\bar{t}$ を基点とする X の幾何的エタール基本群 $\pi_1(X \otimes K^{\mathrm{sep}}, \bar{t})$ の副 l 完備化 $\pi_1(X \otimes K^{\mathrm{sep}}, \bar{t})^l$ は, 位相群の連続準同型

$$\rho : G_K \to \mathrm{Out}(\pi_1(X \otimes K^{\mathrm{sep}}, \bar{t})^l) := \mathrm{Aut}(\pi_1(X \otimes K^{\mathrm{sep}}, \bar{t})^l)/\mathrm{Inn}(\pi_1(X \otimes K^{\mathrm{sep}}, \bar{t})^l),$$

を誘導する. これを外ガロア表現という. 織田は X が良還元を持つことと, ρ の I_K への制限が自明になることの同値を証明した [Oda1][Oda2]. 固有でない双曲的曲線については, 玉川が同様の良還元判定法を X の滑らかなコンパクト化に対して示した [Tama].

織田と玉川の判定法は遠アーベル幾何の一部と捉えることができる. 実際, Grothendieck 予想と呼ばれる「双曲的曲線は (適当な K に関する条件のもとで) 外ガロア表現 $G_K \to \mathrm{Out}\,\pi_1(X \otimes K^{\mathrm{sep}}, \bar{t})$ から同型類が決定される」 という主張が, 玉川と望月により証明されており, 双曲的曲線は典型的な遠アーベル多様体で

ある. ゆえに, X の還元の情報が X の外ガロア表現から得られると期待することは, 非常に自然である.

次に双曲的曲線の高次元版にあたる多重双曲的曲線を, 双曲的曲線の定義も含めて説明する.

定義 2. S をスキームとし, X を S 上のスキームとする.

1. D を X の因子とする. 射 $X \to S$ が固有滑らかかつ幾何的ファイバーが次元 1 の連結な種数 g の曲線であり, 射 $D \to S$ が次数 n の有限エタール射であり, さらに不等式 $2g + n - 2 > 0$ を満たすとき, (X, D) は S 上の双曲的曲線であるという. $n = 0$ のとき $2g$ を, $n > 0$ のとき $2g + n - 1$ を第 1 ベッチ数という. $D = \emptyset$ のとき, X は固有双曲的曲線であるという.

2. ある正整数 n と射 $X \to S$ の分解

$$X = X_n \to X_{n-1} \to \ldots \to X_1 \to X_0 = S \tag{1}$$

が存在して, 各 $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対し, ある双曲的曲線 $(\bar{X}_i, D_i) \to X_{i-1}$ から定まるスキーム $\bar{X}_i \setminus D_i$ が X_{i-1} 上 X_i と同型のとき, X は S 上の相対次元 n の多重双曲的曲線であるという. また, 射 $X \to S$ が固有であるとき, 固有多重双曲的曲線であるという. この $X \to S$ の分解をパラメーター付け射の列という.

3. X を S 上の相対次元 n の多重双曲的曲線 (resp. 固有多重双曲的曲線) とする. $X \to S$ のパラメーター付け射の列

$$\mathcal{S} : X = X_n \to X_{n-1} \to \ldots \to X_1 \to X_0 = S, \tag{2}$$

に対し, $X_i \to X_{i-1}$ のファイバーの第一ベッチ数 (resp. 種数) のうち最大のものを, $\mathcal{S}$ の極大第一ベッチ数 $b_{\mathcal{S}}$ (resp. 種数 $g_{\mathcal{S}}$) という. X の全てのパラメーター付け射の列の極大第一ベッチ数 (resp. 種数) のうち最小のものを, X の最大第一ベッチ数 b_X (resp. 種数 g_X) という.

多重双曲的曲線は遠アーベル多様体であると考えられている. 実際, 4 次元以下で基礎体が劣 p 進体上のとき Grothendieck 予想が成立する. さらに, X が強双曲的 Artin 近傍で基礎体が $\mathbb{Q}$ 上有限生成のとき, Grothendieck 予想が任意の次元で成立する. よって, 織田と玉川による良還元判定条件の類似が多重双曲的曲線に対して成立することが期待される.

[Nag] では, 固有多重双曲的曲線の良還元判定法がある条件下で示された. この論文では, [Nag] の結果を改良し, また固有でない場合についても議論する. この論文の主結果は以下である:

定理 3. K を O_K が付値環であるような離散付値体とし, K の剰余標数を $p \geq 0$ とする. I_K を K の絶対ガロア群 G_K の惰性群とする. X を K 上の固有双曲的多重曲線とし, g_X を X の最大種数とする. 以下の条件について考える.

(A) X は良還元を持つ.

(B) I_K の外ガロア表現 $I_K \to \mathrm{Out}(\pi_1(X \times_{\mathrm{Spec}\, K} \mathrm{Spec} K^{\mathrm{sep}}, \bar{x})^{p'})$ は自明.

このとき, 次が成立する.

1. (A) ならば (B).
2. $p = 0$ とすると, (B) ならば (A).
3. $p > 2g_X + 1$ かつ X の次元が 2 なら, (B) ならば (A).
4. X が K 有理点 x を持ち, x から誘導されるガロア表現 $I_{K(x)} \to \mathrm{Aut}(\pi_1(X \times_{\mathrm{Spec}\, K} \mathrm{Spec}\, K^{\mathrm{sep}}, \bar{x})^{p'})$ が自明であり, かつ $p > 2g_X + 1$ なら, (A) が成立する.

定理 4. K, O_K, I_K を定理 3 のものとする. パラメーター付け射の列

$$\mathcal{S} : X = X_n \to X_{n-1} \to \ldots \to X_1 \to X_0 = \mathrm{Spec}\, K \tag{3}$$

を持つ K 上の双曲的多重曲線 X を考える. $\mathcal{S}$ の極大第一ベッチ数を $b_{\mathcal{S}}$ とする. 次の条件を考える.

(A) O_K 上の多重双曲的曲線 $\mathfrak{X} \to$ であって, 生成ファイバーが $\mathcal{S}$ と同型なパラメーター付け射の列

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{X}_{n-1} \to \ldots \to \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_0 = \mathrm{Spec}\, O_K \tag{4}$$

を持つものが存在する.

(B) I_K の外ガロア表現 $I_K \to \mathrm{Out}(\pi_1(X \times_{\mathrm{Spec}\, K} \mathrm{Spec} K^{\mathrm{sep}}, \bar{x})^{p'})$ は自明.

このとき, 次が成立する.

1. $p = 0$ または $p > b_{\mathcal{S}} + 1$ とすると, (A) ならば (B).
2. $p = 0$ とすると, (B) ならば (A).
3. $p > b_{\mathcal{S}} + 1$ とし, X の次元が 2 とすると, (B) ならば (A).

また, $b_{\mathcal{S}}$ と p に非常に強い条件をつけることで, 外ガロア表現による良還元判定法の高次元版を示すことができる.

定理 5. K, O_K, I_K, X, $\mathcal{S}$, $b_{\mathcal{S}}$, n を定理 4 のものとし, $n \geq 3$ とする. $m \geq 3$ に対し, 関数 $f_{b_{\mathcal{S}}}(m)$ を次で定める.

- $m = 3$ なら, $f_{b_{\mathcal{S}}}(3) = 2^{b_{\mathcal{S}}^2}$.
- $m \geq 3$ なら,

$$f_{b_{\mathcal{S}}}(m+1) = (f_{b_{\mathcal{S}}}(m)) \times (2^{b_{\mathcal{S}}^2 \times f_{b_{\mathcal{S}}}(m)^2})^{f_{b_{\mathcal{S}}}(m)}.$$

定理 4 の条件 (A), (B) を考える. $p > 2^{b_{\mathcal{S}} \times f_{b_{\mathcal{S}}}(n)}$ であれば, (B) ならば (A).

(A) $\Rightarrow$ (B) は特殊化の議論により従う. 以下で, (主張中の p, g_X, $b_{\mathcal{S}}$ に関する条件を課した上で) (B)$\Rightarrow$(A) の証明の主となる議論を説明する.

1. 惰性群と中心化群の比較

   $p = 0$ のとき, 惰性群のガロア作用を, エタール基本群 Π における幾何的エタール基本群 Δ の中心化群 $Z_\Pi(\Delta)$ の作用で記述し直すことができる. この翻訳は, $\Pi \cong \Delta \times Z_\Pi(\Delta)$ という分解を用いる. この分解は, ($p = 0$ なので) 幾何的エタール基本群のホモトピー完全列が存在するため, Δ の中心自明性が成立することと, 外ガロア作用に関する仮定から得られる. これらの技術を用いて, (B) $\Rightarrow$ (A) を示すことができる.

2. 中間商群

   $p > 0$ のとき, ファイブレーション $X_i \to X_{i-1} (2 \leq i \leq n)$ に関する適切なホモトピー完全列が存在しないことに注意する. 実際, 副有限群を副 p' 完備化という関手は完全ではない. さらに, K の標数が正であるとき, (フルの) エタール基本群のファイブレーションの完全列が存在しない. この論文では, 幾何的エタール基本群の副 p' 完備化と副 l 完備化の中間商 ($\Delta^{(l,p')}$ と書く) を考えることで, ホモトピー完全列を得た. X の次元が 2 であれば, $\Delta^{(l,p')}$ の中心自明性と, 1 と同様の議論を用いることで, (B)$\Rightarrow$(A) を示すことができる. また, X が閉点 x を持てば, x における惰性群 $I_{K(x)}$ の作用と帰納法の各段階に出てくる惰性群の作用を比較することができ, 定理 3.4 を示すことができる.

3. 更なる中間商群

   X の次元が 3 以上のとき $\Delta^{(l,p')}$ の中心自明性は不明だが, p が十分大きければ, その商 $\overline{\Delta}$ で中心自明性を持ち, かつホモトピー完全列を持つものが構成できる. これにより, 定理 5 を示すことができる.

またこの論文の最後に, 多重双曲的曲線が (1 次元の) 双曲的曲線に比べて, ある意味で遠アーベル的性質が弱いことを示す興味深い例を 3 個与えた.

References

[Nag] I.Nagamachi, *On a good reduction criterion for proper polycurves with sections*, arXiv:1609.07865v2[math.NT].

[Oda1] T. Oda, *A note on ramification of the Galois representation on the fundamental group of an algebraic curve*, J. Number Theory, 34 (1990) 225-228.

[Oda2] T. Oda, *A note on ramification of the Galois representation on the fundamental group of an algebraic curve II*, J. Number Theory, 53 (1995) 342-355.

[Tama] A. Tamagawa, *The Grothendieck conjecture for affine curves*, Compositio Math. 109 (1997), no.2, 135-194.