論文の内容の要旨

論文題目　An invariant of 3-manifolds via homology cobordisms
and knots in lens spaces
（ホモロジーコボルディズムを用いた 3 次元多様体の不変量と
レンズ空間内の結び目）

氏　　名　野崎 雄太

本論文はホモロジーコボルディズムを用いて定義される閉 3 次元多様体の不変量 $\mathrm{hc}(X)$ を研究した第 1 部 ([9]) と，3 次元球面 S^3 内の結び目の対称性をレンズ空間 $L(p,q)$ 内の結び目を通して研究した第 2 部 ([8]) からなる．

第 1 部の背景の概説から始める．まず連結で向き付けられた閉 3 次元多様体 X はファイバー結び目を含むことが知られている．つまり X は連結なバインディングを持つオープンブック分解を許容する．このようなオープンブック分解たちのページの最小種数は X の位相不変量であり，これを $\mathrm{op}(X) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と書く．例えば，$\mathrm{op}(X) = 0$ であることは X が S^3 に同相であることと同値である．X がレンズ空間の場合には，森元 [7] の結果を使うことで $\mathrm{op}(L(p,\pm 1)) = 1$ がわかるとともに $\mathrm{op}(L(p,q)) > 1$ なる例が得られる．その後 Baker [1] は組みひもの分類を用いて，$\mathrm{op}(L(p,q)) = 1$ となる必要十分条件を得た．

しかし $\mathrm{op}(X)$ の計算は一般に困難である．そこで逆井 [10] はオープンブック分解の代わりにホモロジーコボルディズムを用いることで，$\mathrm{op}(X)$ のホモロジー的な類似 $\mathrm{hc}(X)$ を導入した．ここで，種数 g で境界成分数 1 の曲面 $\Sigma_{g,1}$ 上のホモロジーコボルディズムとは，3 次元多様体 M と 2 つの埋め込み $i_\pm \colon \Sigma_{g,1} \to \partial M$ の組 (M, i_+, i_-) であり，ホモロジー群の間に誘導される準同型 $(i_\pm)_* \colon H_*(\Sigma_{g,1}) \to H_*(M)$ が同型となる（かついくつかの条件を満たす）ものである．

いま M の境界を i_+ と i_- で貼り合わせることにより，閉 3 次元多様体が得られる．逆に閉 3 次元多様体 X を $\Sigma_{g,1}$ 上のホモロジーコボルディズムに分解する仕方を全て考え，種数 g の最小値を $\mathrm{hc}(X) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と書くと，これは X の位相不変量である．例えば，$\mathrm{hc}(X) = 0$ であることは X が整ホモロジー 3 球面であることと同値である．また定義から $\mathrm{op}(X) \geq \mathrm{hc}(X)$ が従う．

第 1 部の目的は，$\mathrm{hc}(X)$ の性質を解明し，実際に計算することである．まず逆井 [10] によって次の事実が知られていた．

定理 1 ([10])**.** 不変量 $\mathrm{hc}(X)$ は 1 次 Betti 数 $b_1(X)$ と torsion linking form $\lambda_X \colon TH_1(X) \times TH_1(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ の同型類のみに依存する．

なお $\mathrm{hc}(X)$ は $H_1(X)$ のみでは決まらない．実際，レンズ空間の連結和 $X_q = L(5,1) \sharp L(5,q)$ $(q = 1, 2)$ に対して $\mathrm{hc}(X_1) = 1 \neq \mathrm{hc}(X_2) = 2$ であることが確認できる．次の定理は主結果の 1 つである．

定理 2. 連結で向き付けられた閉 3 次元多様体 X に対して，$\mathrm{hc}(X\sharp(\sharp^2 S^1\times S^2))=\mathrm{hc}(X)+1$ が成り立つ．

定理 1, 2 により，$\mathrm{hc}(X)$ の計算は，$\lambda_X\cong\lambda_Y$ なる有理ホモロジー 3 球面 Y に対して $\mathrm{hc}(Y)$ 又は $\mathrm{hc}(Y\sharp S^1\times S^2)$ を計算することに帰着される．以下では $Y=L(p,q)$ の場合に得られた結果を述べるが，その際に整数論が重要な役割を担う．

定理 3. 全てのレンズ空間 $L(p,q)$ に対して $\mathrm{hc}(L(p,q))=1$ が成り立つ．

系 4. $S^1\times S^2$ との連結和に関して，次が成り立つ：

$$\mathrm{hc}(L(p,q)\sharp S^1\times S^2)=\begin{cases}1 & q \text{ 又は } -q \text{ が } p \text{ を法として平方剰余のとき},\\ 2 & \text{その他}.\end{cases}$$

さらに定理 Theorems 1–3 及び系 4 を組み合わせることで，次を得る：$H_1(X)\cong\mathbb{Z}/p\oplus\mathbb{Z}^r$ かつ $\lambda_X\cong(q/p)$ $(p\in\mathbb{Z}_{\geq 2},\, q\in\mathbb{Z})$ ならば，

$$\mathrm{hc}(X)=\begin{cases}(r+2)/2 & r \text{ が偶数のとき},\\ (r+1)/2 & r \text{ が奇数かつ，} q \text{ 又は } -q \text{ が } p \text{ を法として平方剰余のとき},\\ (r+3)/2 & \text{その他}.\end{cases}$$

さて定理 3 を証明するには，種数 1 の曲面 $\Sigma\subset L(p,q)$ であって補空間がホモロジーコボルディズムとなるものを見つける必要がある．まずホモロジー群を詳しく調べることにより，この問題はある連立 Diophantus 方程式の解を見つけることに帰着される．さらに整係数 2 次形式とその判別式に関する定理を用いることで，変数の個数を減らすことができ，最後に定理 5 から解の存在が示される．なお，定理 5 は数体 $\mathbb{Q}(\sqrt{n(n\pm 4)}, e^{2\pi\sqrt{-1}/n})$ に Chebotarev の密度定理を適用することで証明できる．

定理 5. 互いに素な $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}_{>0}\setminus\{5\}$ に対して，以下の条件を満たす組 $(\varepsilon,l)\in\{1,-1\}\times\{$奇素数$\}$ が無限個存在する：合同方程式 $nx(x+1)\equiv\varepsilon \mod l$ が解を持ち，かつ $l\equiv m \mod n$ を満たす．

ところで上記の曲面 Σ を見つけることは，$L(p,q)$ 内に種数 1 のホモロジーファイバー結び目を見つけることと等価である．ここでホモロジーファイバー結び目とは，ホモロジーコボルディズムを用いて定義される結び目であり，ファイバー結び目よりも広いクラスを定める．そして X が有理ホモロジー 3 球面の場合には，以下の通り，Alexander 多項式を用いて特徴付けることができる．

定理 6. $K\subset X$ をヌルホモロガスな結び目とし，その結び目種数を $g(K)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と書く．このとき，K がホモロジーファイバー結び目である必要十分条件は，Alexander 多項式 $\Delta_K(t)\in\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ が（符号の差を除いて）モニックかつ（Laurent 多項式としての）幅が $2g(K)$ に等しいことである．

この定理の系として，ファイバー結び目の連結和に関する Gabai [4] の結果の類似が得られる．

系 7. $K_1 \subset X_1$ と $K_2 \subset X_1$ がホモロジーファイバー結び目なら $K_1 \sharp K_2$ もそうであり，X_1 と X_2 が有理ホモロジー 3 球面のときは逆も成り立つ．

次に第 2 部の要旨を述べる．第 1 部で扱ったホモロジーファイバー結び目は特にヌルホモロガスな結び目だが，それとは対照的に $H_1(L(p,q)) \cong \mathbb{Z}/p$ の生成元となる結び目 $K' \subset L(p,q)$ を考える．すると p 重巡回被覆 $\pi\colon S^3 \to L(p,q)$ による逆像 $\pi^{-1}(K')$ は自由周期 p を持つ結び目である．逆に巡回群の自由作用 $\mathbb{Z}/p \curvearrowright (S^3, K)$ が存在すると，p と互いに素なある整数 q と結び目 $K' \subset L(p,q)$ が得られ，その逆像は K となる．

まずはトーラス結び目 $T_{m,n}$ が自由周期 p を持つか否かを考える．この問題は Hartley [5] によって必要十分条件が与えられており，例えば三葉結び目 $T_{3,2}$ は自由周期 2 を持たない．つまり $T_{3,2}$ は $L(2,1) \cong \mathbb{R}P^3$ 内の結び目の逆像にはなり得ない．また結び目群の外部自己同型群 $\mathrm{Out}(\pi_1(S^3 \setminus K))$ が自明な場合には，Borel の定理 (Conner-Raymond [3]) により，いかなる自由周期も持たないことがわかる．

さて第 2 部の目的は上述の 2 つの事実を統一的に証明することである．まず群 G と整数 $p \geq 2$ に対し，交換子と p 乗元たちで生成される部分群を $\mathrm{C}^p(G)$ と書く．また群 G' が C^p 群であるとは，$G' \cong \mathrm{C}^p(G)$ なる群 G が存在することとする．$p = 2$ の場合は Sun [11] や Haugh, MacHale [6] による先行研究があり，対称群をはじめとする有限群についてそれらが C^2 群か否かを調べている．また Cochran, Harvey [2] は，p が素数の場合に $\mathrm{C}^p(-)$ を繰り返しとることで得られる減少列（p 導来列）を研究している．本論文では，結び目群に対してこれらを適用することにより，次の結果を得た．

定理 8. X を整ホモロジー 3 球面，$\pi\colon X \to X'$ を p 重巡回被覆，$K' \subset X'$ を結び目であって逆像 $K = \pi^{-1}(K')$ が連結なものとする．このとき，誘導準同型 $\pi_*\colon \pi_1(X \setminus K) \rightarrowtail \pi_1(X' \setminus K')$ の像は部分群 $\mathrm{C}^p(\pi_1(X' \setminus K'))$ に一致する．特に $\pi_1(X \setminus K)$ は C^p 群である．

$X = S^3$, $X' = L(p,q)$ の場合を考えることで，前述の通り以下の系を得る．

系 9. m, n を互いに素な整数，p を 2 以上の整数とする．このとき，ある整数 q と結び目 $K' \subset L(p,q)$ が存在して $\pi^{-1}(K')$ が $T_{m,n}$ 又はその鏡像にアイソトピックであるための必要十分条件は $\gcd(mn, p) = 1$ が成り立つことである．

系 10. 結び目 $K \subset S^3$ が $\mathrm{Out}(\pi_1(S^3 \setminus K)) = 1$ を満たすとする．このとき，K はいかなるレンズ空間内の結び目の逆像としても得られない．

また $\pi_1(S^3 \setminus T_{3,2}) \cong B_3$ であることから，一般に組みひも群 B_n $(n \geq 3)$ が C^p 群であるかについても考察し，p が偶数のとき B_n は C^p 群でないことを示した．証明は純組みひも群 $P_n = \mathrm{Ker}[B_n \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_n]$ が B_n の特性部分群であることに基づいており，対称群 $\mathfrak{S}_n$ の考察に帰着される．

参考文献

[1] K. L. Baker. Counting genus one fibered knots in lens spaces. *Michigan Math. J.*, 63(3):553–569, 2014.

[2] T. Cochran and S. Harvey. Homology and derived p-series of groups. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 78(3):677–692, 2008.

[3] P. E. Conner and F. Raymond. Manifolds with few periodic homeomorphisms. In *Proceedings of the Second Conference on Compact Transformation Groups (Univ. Massachusetts, Amherst, Mass., 1971), Part II*, pages 1–75. Lecture Notes in Math., Vol. 299. Springer, Berlin, 1972.

[4] D. Gabai. The Murasugi sum is a natural geometric operation. In *Low-dimensional topology (San Francisco, Calif., 1981)*, volume 20 of *Contemp. Math.*, pages 131–143. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.

[5] R. Hartley. Knots with free period. *Canad. J. Math.*, 33(1):91–102, 1981.

[6] M. Haugh and D. MacHale. The subgroup generated by the squares. *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, 97(2):123–129, 1997.

[7] K. Morimoto. Genus one fibered knots in lens spaces. *J. Math. Soc. Japan*, 41(1):81–96, 1989.

[8] Y. Nozaki. An explicit relation between knot groups in lens spaces and those in S^3, 2016, arXiv:1602.05884.

[9] Y. Nozaki. Every lens space contains a genus one homologically fibered knot, 2017, arXiv:1702.02731.

[10] T. Sakasai. Johnson-Morita theory in mapping class groups and monoids of homology cobordisms of surfaces. *Winter Braids Lecture Notes*, 3(4):1–25, 2016.

[11] H. S. Sun. On groups generated by the squares. *Fibonacci Quart.*, 17(3):241–246, 1979.