東京大学大学院新領域創成科学研究科
環境システム学専攻

平成 30 年度

修士論文

メタルピー保存形式の地下水流動–熱輸送連成解析シミュレータの開発

2019 年 1 月 25 日提出
指導教員　愛知　正温　講師

秋田谷　健人

目次

図目次

表目次

記号	意味	単位	記号	意味	単位
$\mathrm{d}A$	体積素片の表面積	m^2	α	熱膨張率	K^{-1}
c	（定圧）比熱	$\mathrm{J\ kg^{-1}\ K^{-1}}$	β	圧縮率	Pa^{-1}
c_p	比熱	$\mathrm{J\ kg^{-1}\ K^{-1}}$	ε	ひずみ	–
E	エネルギー	J	θ	比メタルピー	$\mathrm{J\ kg^{-1}}$
g	重力加速度	$\mathrm{m\ s^{-2}}$	κ	熱拡散係数	$\mathrm{m^2\ s^{-1}}$
G	ギブスエネルギー	J	λ	熱伝導率	$\mathrm{W\ m^{-1}\ K^{-1}}$
h	比エンタルピー	$\mathrm{J\ kg^{-1}}$	μ	動粘性係数	Pa s
h	水頭	m	μ_{JT}	ジュール・トムソン係数	$\mathrm{K\ Pa^{-1}}$
$\boldsymbol{J}$	熱伝導の熱流速	$\mathrm{J\ m^{-2}\ s^{-1}}$	O	ランダウの記号	–
K	透水係数	$\mathrm{m\ s^{-1}}$	ρ	密度	$\mathrm{kg\ m^{-3}}$
k	浸透率	m^{-2}			
L	特性長さ	m	ϕ	間隙率	無次元
M	質量	kg	f（添え字）	間隙亀裂	–
p	間隙圧力	Pa	p（添え字）	間隙孔	–
Q	流量	$\mathrm{m^3\ s^{-1}}$	s（添え字）	固相	–
$\boldsymbol{q}$	ダルシー流速	$\mathrm{m\ s^{-1}}$	w（添え字）	水	–
Re	レイノルズ数	–	bulk（添え字）	バルク	–
$\boldsymbol{r}$	位置ベクトル	m	ϕ（添え字）	間隙	–
S_s	比貯留係数	m^{-1}			
s	比エントロピー	$\mathrm{J\ kg^{-1}\ K^{-1}}$			
T	温度	K			
t	時間	s			
u	内部エネルギー	$\mathrm{J\ kg^{-1}}$			
V	比容積	$\mathrm{m^3\ kg^{-1}}$			
$\mathrm{d}V$	体積素片	m^3			
v	速さ	$\mathrm{m\ s^{-1}}$			
$\boldsymbol{v}$	速度	$\mathrm{m\ s^{-1}}$			
z	標高	m			

1　序論

1.1　地下水流動と熱輸送を研究する意味

自然の複雑な振る舞いを理解する試みにおいて、システム思考は重要な手段である。システムとは、複数の構成要素から成り、構成要素内部と構成要素間に相互作用が存在する総体のことである。例えば地球は、大気圏、水圏、地圏、生物圏、人間圏といった構成要素から成るシステムをして理解することができる。構成要素間を循環する水を例にとって考えてみる。水は大気圏に水蒸気として存在し、雨として地圏に移動する。植物は地圏の水を吸収し、一部を大気圏に水蒸気として放出する。また地圏の水は河川や地下水流を形成し、海をはじめとした水圏に移動する。水圏の表面からは蒸発により水が大気圏に移動する。このように、考えるべき領域をいくつかの構成要素に区切ることで複雑な自然の振る舞いを理解できるようになる。

この水の例のように、地球上の様々な物質やエネルギーは地球上の至るところで蓄えられ循環している。人類を含めたあらゆる生命はこの循環に支えられて生きており、循環に生じる問題は種の存続に関わる死活問題ともなりうる。人間が活動領域とする地下はせいぜい数メートルほどなため、数百メートルから数キロメートルの深部の地下の環境は自分に関わりがないと思う人も多いかもしれない。しかし水や熱は地球上を循環しており、地下はその主要な経路の一つである。農業用水の多くは地下水揚水に依存しており、また地下の熱は高温の地熱を利用した地熱発電、低温の地熱を利用した温泉、地中熱ヒートポンプなどエネルギー資源としての価値がある。しかしこれらの要素は新たな環境問題の種としての可能性も秘めている。地下水流動と熱輸送に関する本研究は、人類が自然と適切な距離感を保ち続けるために存在する。地下の恩恵を享受しつつ環境問題を抑制あるいは予防し、また同時に過度に環境問題を恐れず地下の恩恵にあずかるためには地下の情報を得る必要がある。地下水流動の解析に対して熱輸送の解析を加えることの意味はここにある。情報が不足しがちな地下の実態に少しでも近づけたアプローチは、これまで隠れていた地下の実態を明らかにする可能性がある。

1.2　地下温度分布と地下水流動系

地下に対しては地殻から熱が供給されており、地下 10 数 m 以深の温度分布は深度が増すにつれ温度は高くなる傾向がある。しかしその温度勾配は一様ではなく、熱伝導率の異なる地質条件や地下水流動系による熱輸送の影響を受ける。地下における熱の移動を支配する主要な現象として、熱伝導と地下水の移流による熱輸送が挙げられる。地下水の移流がない場合には熱の移動は熱伝導に支配され、地下水の移流が存在する場合には熱の移動は地下水移流による熱輸送の効果が卓越する。熱伝導は物質の移動を伴わない、高温側から低温側への熱の移動現象である。地盤を構成する固相－固相間、もしくは間隙に存在する流体－流体間の熱の移動であり、フーリエの法則として数学的に表現される。一方で地下水の移流による熱輸送は、熱伝導と異なり地下水流動系の影響を直接的に受ける。したがって、地下水移流による熱輸送の効果を知るためには地下水流動系の全体像を把握しなければならない。図 1 に Tóth(1963) が示した地下水流動系の概念図を示す。Tóth は水頭（地下水流れのポテンシャル）をポテンシャルエネルギーと圧力の和で表現し、地下水流動方程式を 2 次元のラプラス方程式で記述した。これにより標高の高い地域の地下水面は高く、地下水は地下水面の高い地域から低い地域に向かって流れること、涵養地域では地下水は鉛直下向きに流れ、流出域では鉛直上向きに流れることなどが理解された。また地下水の起源にはいくつかの種類があり、大域的には地形に従う広域地下水流動系、中規模の地下水流動系、地質構造と地表の凹凸などに支配される小規模の局所的な流動系の存在と定量的な地下水流れが理解された。

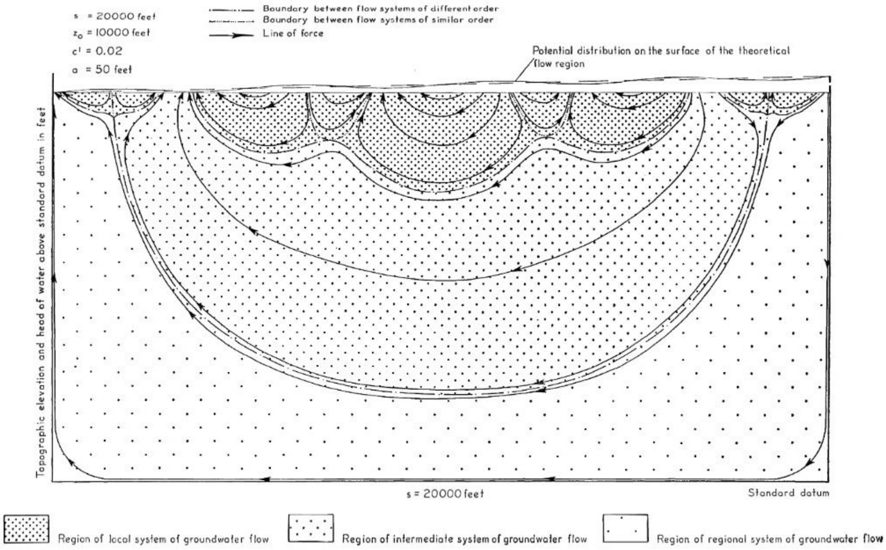

図１　地下水流動系の概念図（Tóth(1963), Fig3 より引用）

これら地下水流動系と地下温度分布の相互作用の解析の応用例を挙げる。天然ガスなどの地下流体は物性こそ水とは異なるものの、その流動を支配する物理法則は地下水流動系と同様である。また多くの流体の物性は温度に依存するため、流体挙動を予測する上で温度分布を把握することが重要となる。地下流体資源の分布を把握した上で、効率的に資源採掘を行うために地下温度に人為的な操作を加え、流体挙動をある程度操作することが可能である（例：石油増進回収法の熱攻法）。また、水温は地域分析に利用することもできる。温度は保存性があるとともに短時間で変化するため、水温を地下水流のトレーサーとして活用できる。

1.3　人間の活動が地下温度分布へ影響を与えた例

地表面の温度変化は熱伝導と地下水移流による熱輸送で地下深部へと伝播する。本節では地下温度分布に対して人間の活動が影響を与えた報告例を述べる。地下温度分布には地表面の温暖化の影響が現れていることの報告が存在する。宮越ら (2001) は、関東平野における 88 カ所の観測井の地下水温の測定結果と地下水位を分析した。それによると、関東平野内の地下温度分布は、地下水流動による熱移流の影響を強く受けていることが示唆された。加えて、気候変動に伴う関東平野の年平均気温の上昇が地表面温度の上昇を招き、さらには地温の逆転現象を引き起こしたと推定している。地表面の温暖化による地下 50–100 m の地温の逆転現象に関しては、北米やヨーロッパ、オーストラリアでも報告されている (Cermak, 1971; Jessop, 1990)。地表面の温暖化は気候変動によるものだけでなく地表面の都市化に伴うアスファルトの増加と緑地の減少が引き起こしている可能性もあり、因果関係について更なる調査が必要であると考えられる。

また、近年では省エネに対する社会の意識の高まりから地中熱ヒートポンプが注目されている。地中熱ヒートポンプは、地下温度の季節変動が大気温度の季節変動よりも小さいことを利用する熱交換技術である。この技術は高効率なエアコンを実現させる一方で、熱交換器周辺の温度を変化させる。そして、地中熱ヒートポンプによる温度変化が様々な環境問題を引き起こしかねないことが指摘されている。

斎藤ら (2014) は、国内外の地中熱ヒートポンプによる地温変化とそれによる環境リスクについて現状を整理している。ドイツにおいて、50 m 深度のクローズド式地中熱ヒートポンプで 3 か月程度の暖房運転を行っ

たところ、熱交換器から 1 m 程度の地点で最大 6 ℃前後の地温低下が確認された (Sanner, 1986; Rybach and Sanner, 2000)。スイスにおいて、105 m 深度のクローズド式地中熱ヒートポンプで数年間にわたり、冬季にのみ暖房運転を行ったところ、熱交換器から 1 m の地点において、稼働開始から 2–3 年の間は、地温が継続的に低下する傾向が確認された。その後は熱平衡状態に達し、この時の地温は自然状態と比較して 1–2 ℃程度低い値を示した (Rybach and Eugster, 1998; Eugster and Rybach, 2000; Rybach and Sanner, 2000)。アメリカのリチャード・ストックトン大学に導入された大規模地中熱ヒートポンプシステムにおいて、約 10 年間冷暖房を稼働させたときの地温がモニタリングされた (Sowers et al., 2006)。詳細な運転条件等の記載がないが、これによれば 10 ℃程度の地温上昇が報告されている。

これら数々の事例から、地中熱ヒートポンプの運用が地温変化を引き起こすことが確かに確認できる。さて、それでは地温変化がどのような問題を引き起こす可能性があるのかを見ていく。例えば、地中熱ヒートポンプの設置密度の上昇に伴う熱干渉の発生が予想される (Bernier et al., 2008)。熱干渉が発生すると地中熱ヒートポンプの熱効率が下がり、経済的な採算が取れなくなる可能性が生じる。また、地温低下に伴い地中の水分が凍結することで凍上が発生するなどの物理的なリスクも存在する (Banks, 2008)。地下水が凍結した場合は、熱伝導による温度上昇と氷の融解を待つ必要があるため、特にオープンループ式地中熱ヒートポンプで致命的になることが考えられる。他方で、地温上昇に伴うリスクとして、土壌の乾燥が挙げられる。土壌の乾燥は地盤を支える間隙水圧の低下を招き、特に軟弱な粘土層における圧密・沈下が予想される (Gabrielsson et al., 2000)。また、現状では未解明な部分も多いが、地温上昇は微生物活動の活発化も引き起こす (Bonte et al, 2011; 滝沢, 2011)。増殖した微生物は、地中の有害化学成分である硫化水素濃度の上昇や帯水層の目詰まりを引き起こす可能性もある (滝沢, 2011)。表 1 に地中熱ヒートポンプによる地温変化が誘発する環境リスクをまとめた。

表 1　地中熱ヒートポンプによる地温変化が誘発する環境影響とリスクの例 (斎藤ら, 2014 を参考に作成)

環境影響	リスク	リファレンス
熱干渉	熱効率の低下と地温変化幅の増大	Bernier et al., 2008
土壌水分の凍結	凍上の発生	Banks, 2008
土壌の乾燥	軟弱な地盤の圧密・沈下	Gabrielsson et al., 2000
温度上昇	岩石の熱膨張	Banks, 2008
微生物活動の活発化	帯水層の目詰まり	Takizawa, 2011
微生物活動の活発化	地中の有害物質濃度の上昇	Bonte et al., 2012

1.4　地下水流動–熱輸送連成解析

地下水流動や熱輸送現象を含めた地球上のあらゆる自然現象は、他の現象と相互作用しており複雑に時間変化する。相互作用の存在を考慮した上で現象の挙動を予測するためには、現象を支配する方程式を連立して解けばよい。この技術は一般に連成解析と呼ばれ、前節までに述べた地下水流動と熱輸送の相互作用を考慮した解析技術が地下水流動–熱輸送連成解析である。地下水流動と熱輸送の連成解析技術は古くから研究されており、数多くの既存研究や既存解析シミュレータが存在する。支配方程式は、多孔質媒体の間隙を流れる流体の質量保存則と間隙流体の流動を考慮したエネルギー保存則から構成される。

1.5　エンタルピー保存形式の地下水流動–熱輸送連成解析が生じる温度誤差

Dodson(1971) は地下水流動–熱輸送連成解析において、流体が持つエネルギーとしてエンタルピーを用いると鉛直方向の地下温度分布に誤差が生じることを定性的に指摘した。これはエンタルピーが地下水移流による熱輸送の過程で本来保存されるべき量であるメタルピー（エンタルピー + ポテンシャルエネルギー + 運動エネルギー）との間に誤差を持つためである。ただし地下水流れは非常に遅く、エンタルピーやポテンシャルエネルギーと比べて無視できるほど小さいので運動エネルギーは一般に無視される。

Stauffer ら（2014）は、エンタルピー保存形式のポテンシャルエネルギーの欠如に起因する温度誤差に対して、定量的な説明を試みた。彼らはメタルピーの微小変化とエンタルピーの微小変化の差に注目し、温度誤差は $g\Delta z/c_w$ で与えられると説明した。重力加速度 g を 9.8 m s^{-2}、水の比熱 c_w を 4184 J kg^{-1} K^{-1} とすれば標高差 Δz の係数は約 2.3×10^{-3} K m^{-1} となるため、標高差 1000 m の地下水の流動で約 2.3 K の温度誤差が生じる。さらに Stauffer らは均質な地盤を想定し、鉛直上方向の 1 次元地下水流れをメタルピー保存形式とエンタルピー保存形式の両方でシミュレートした。そして 2 つの鉛直温度分布を比較し、定量的に予測したとおり、1000 m の地下水の流動で約 2.3 K の温度誤差が生じることを確かめた。

Stauffer らのエンタルピー保存形式の温度誤差に関する議論は確かに上手く説明がついた。しかし彼らは本来地下の温度分布を支配するエネルギー方程式に対して言及せずに、温度誤差に関する説明を与えた。また彼らが検証したのは一定速度で鉛直上方向に流れる地下水が形成する温度分布の問題のみであり、例えば鉛直下方向に流れる場合は温度誤差はどのように振舞うのかといった議論はしていない。

1.6　本研究の目的

地下水流動と熱輸送の連成解析技術は、人間社会が持続的に発展していくためにどのような行動を取ればよいか、その判断材料を与える重要な技術である。その重要性を考えれば、解析誤差はできるだけ小さくしたいとともに、解析結果がどの程度の誤差を含みうるのか知ることも重要である。Dodson によって指定されたエンタルピー保存形式の地下水流動–熱輸送連成解析がもたらす温度誤差は、Stauffer らによって実態が明らかにされ始めた。しかしながら、現状では様々な状況における温度誤差の振る舞いが検証されておらず、一体どのような状況において特に注意すべきことなのか不透明である。そこで本研究では、熱収支計算におけるポテンシャルエネルギーの欠如がもたらす温度誤差について、現実の地盤で起こりうる複数の状況を再現し検討を行う。地下水流速、移流方向、岩石の不均質性などといった要因と温度誤差の関係性を明らかにするとともに、メタルピー保存形式の計算機能を備えた地下水流動–熱輸送連成解析シミュレータを開発することで、エネルギー資源としての地下利用への貢献を目的とする。

1.7　本論文の構成

本論文の第 2 章において地下水流動と熱輸送を記述する数学モデルをまとめる。第 3 章では本研究で開発する地下水流動–熱輸送連成解析シミュレータが前提とする地下のモデル化の基本的仮定についてまとめるとともに、開発するシミュレーションプログラムのフローチャートを示す。第 4 章では開発する連成解析シミュレータで用いる支配方程式をまとめ、プログラムの実装に必要な計算を行う。第 5 章では支配方程式を構成する非線形方程式を連立して解くための数値計算手法について述べる。第 6 章では開発した連成解析シミュレータの妥当性を、熱伝導問題・地下水流動問題・熱輸送問題の解析解と比較することで検証する。また、Stauffer

らが行った鉛直流シミュレーションを再現し、開発した連成解析シミュレータがメタルピー保存形式の計算機能を備えていることを確認する。第7では熱収支計算におけるポテンシャルエネルギーの欠如がもたらす温度誤差について、現実の地盤で起こりうる複数の状況を再現し検討を行う。第8章では、各章において得られた知見の要約と今後の課題について述べる。

2　地下水流動と熱輸送を記述する数学モデル

本章では、地下水流動と熱の輸送を記述する数学モデルを整理する。

2.1　多孔質媒体

土や岩石は固相だけから成るのではなく、内部に多数の間隙を持つ多孔質媒体である。多孔質媒体は、固相部分といま考えている領域全体に間隙が存在する物質のことである（参照：図 2, 3）。例を挙げると、土、砂、岩石、紙、セラミック、パン、骨などが多孔質媒体である。多孔質媒体の間隙は空気や水といった流体に占められており、地下水の流動機構は多孔質媒体中の流体の浸透現象の物理で理解されている。

土の固相部分は鉱物の結晶、細かな粒子、無機質や動植物由来の有機物などからできている。固相以外の間隙は粒子間の隙間として構成されたものと、何らかの応力による割れ目などがある。さらに土の間隙内部には水、空気、油、ガス（窒素や天然ガスなど）が存在する。それら間隙内に存在する流体の挙動は、固相を構成する粒子径や間隙の割合、間隙の形状などによって様々に変化する。対象とする特徴によって流体挙動を記述する数学モデルが異なるが、本論文で取り扱う多孔質媒体は等方な材質であると仮定する。

自然が生み出す多孔質媒体は固相にせよ流体相（水、空気、ガスなど）にせよ、人工物と異なり不均質性を有している。しかしながら、自然をコンピュータ上で再現する数値モデリングにおいては不均質性を平均化して表現する必要がある。重要なことは、取り扱いたい問題のスケールに応じて粗すぎず細かすぎない再現を行うことである。粗すぎる平均化は観察対象を不鮮明にし、逆に個々の粒子を再現することは現実的ではないとともに、複雑すぎる結果が解釈を困難にしてしまう。

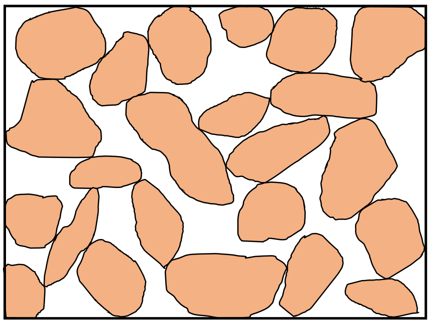

図 2　多孔質媒体の概念図

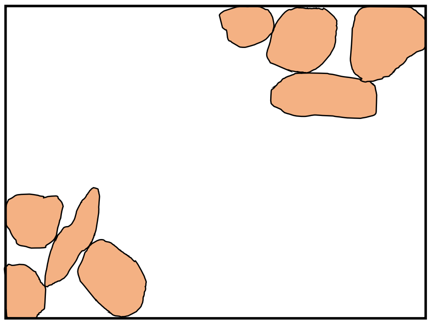

図 3　多孔質媒体ではない例の概念図

2.1.1　間隙率

多孔質媒体として記述される岩石中には、土粒子の骨格と流体の 2 つの連続体が存在する。多孔質媒体中の流体挙動に寄与する間隙や亀裂の体積は間隙体積 V_ϕ と呼ばれる。また、固相部分の体積 V_s は土粒子の体積である。単純な孔の体積 V_p と亀裂の体積 V_f の和が全体の間隙体積 V_ϕ となる。したがって、バルクの体積 V_{bulk} は固体の体積 V_s と間隙体積 V_ϕ の和となる。

$$V_{\mathrm{bulk}} = V_\phi + V_s \tag{1}$$

$$V_\phi = V_p + V_f \tag{2}$$

間隙率 ϕ（無次元数）は間隙体積 V_ϕ によって定義され、岩石中における水、塩水、石油、空気、他の流体を含む隙間の体積の比のことを言う。

$$\phi = \frac{V_\phi}{V_{\mathrm{bulk}}} \tag{3}$$

注意が必要なのは、バルクの体積 V_{bulk} とは間隙や亀裂を含めた固体の体積によって占められる体積のことであり、間隙率 ϕ はバルクの体積 V_{bulk} に対する間隙と亀裂の体積 V_ϕ の比のことであるという点である。また間隙率は、周囲と連結していない閉じた間隙は流れに関与しないために間隙体積に含めない。

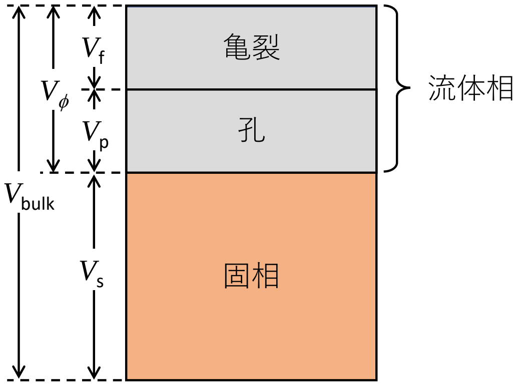

図 4　多孔質媒体としての岩石の構成

2.1.2　浸透率

浸透率は互いに接続された多孔質媒体間を流体が通過する能力のことである。一般に、浸透率は間隙の大きさや形状、亀裂、またその相互接続の具合に依存する。浸透率は岩石の性質にのみ依存し、粘性などの流体の性質には依存しない値として定義される（単位は m^2）。多孔質媒体中の流体は常に最も浸透率が高い軌道を最短の経路で通過しようとする。

表 2　岩石の種類と間隙率、浸透率、透水係数（藤縄 (2010), の数値をもとに作成）

岩石	間隙率	透水率 $[\mathrm{m}^2]$	透水係数 $[\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$
礫	0.25–0.4	3×10^{-11}–3×10^{-9}	3×10^{-2}–3×10^{0}
砂	0.25–0.5	2×10^{-14}–6×10^{-10}	2×10^{-5}–6×10^{-1}
シルト	0.35–0.6	1×10^{-16}–2×10^{-12}	1×10^{-7}–2×10^{-3}
粘土	0.35–0.6	8×10^{-20}–5×10^{-16}	8×10^{-11}–5×10^{-7}
砂岩	0.05–0.3	3×10^{-17}–6×10^{-13}	3×10^{-8}–6×10^{-4}
石灰岩	0.0–0.4	1×10^{-16}–6×10^{-13}	1×10^{-7}–6×10^{-4}

2.2　多孔質媒体中の流体流動の方程式

2.2.1　多孔質媒体中の流体の質量保存則

間隙を有する多孔質の岩石の密度は固相の存在とともに、間隙中に存在する流体の存在を考慮して決定される。間隙率 ϕ の岩石バルクの密度 ρ_{bulk} は、固相の密度 ρ_s と流体相の密度 ρ_w の平均で与えられる。

$$\rho_{\mathrm{bulk}} = \phi\rho_w + (1-\phi)\,\rho_s \tag{4}$$

また、この岩石バルクの質量 M_{bulk} は固相の質量 M_s と流体相の質量 M_w の和である。

$$M_{\mathrm{bulk}} = M_w + M_s \tag{5}$$

時刻 $t \geq 0$ における固相の質量と流体相の質量は次のように表される。

$$M_w = \int_{V_w} \rho_w\,(\boldsymbol{r}, t)\,dV_w = \int_V \phi\rho_w\,(\boldsymbol{r}, t)\,dV \tag{6}$$

$$M_s = \int_{V_s} \rho_s\,(\boldsymbol{r}, t)\,dV_s = \int_V (1-\phi)\,\rho_s\,(\boldsymbol{r}, t)\,dV \tag{7}$$

ここで、V_w は体積素片中の流体相の体積、V_s は体積素片中の固相の体積、$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ は位置ベクトルである。流体の質量が保存されるとすると、次の式で表される質量保存則が成り立つ。

$$\int_V \left(\frac{\partial(\phi\rho_w)}{\partial t} + \nabla\cdot(\phi\rho_w\boldsymbol{v})\right)\mathrm{d}V = 0 \tag{8}$$

ここで、$\boldsymbol{v}$ は流体の平均速度である。この質量保存則が常に成り立つためには被積分部分がゼロに等しくなければならず、

$$\frac{\partial(\phi\rho_w)}{\partial t} + \nabla\cdot(\phi\rho_w\boldsymbol{v}) = 0 \tag{9}$$

が成り立つ。次節で登場するダルシー流速 $\boldsymbol{q}$ は、体積素片の全断面を平均的に流れるとみなしたときの流体の流速である。したがって、実際の平均流速 $\boldsymbol{v}$ と

$$\boldsymbol{q} = \phi\boldsymbol{v} \tag{10}$$

の関係にある。すると、ダルシー流速 $\boldsymbol{q}$ による多孔質媒体中の流体の質量保存則は

$$\frac{\partial(\phi\rho_w)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_w\boldsymbol{q}) = 0 \tag{11}$$

と表される。

2.2.2　ダルシーの法則

多孔質媒体中の流体の流れは「浸透流量は浸透流長に反比例し、カラム断面積と流入出端の水頭差に比例する」というダルシーの法則で記述される。この法則は、1856 年、フランスの水道技師であったヘンリー・ダルシー (Henry Darcy) によって発見された。彼が行った実験は以下のようなものであった。いま、試料を充填したカラムの長さを L、カラムの断面積を A、試料の両端にかかる水頭差を Δh、カラム出口の流量を Q とする（参照：図 5)。そして、以下の経験式を得た。

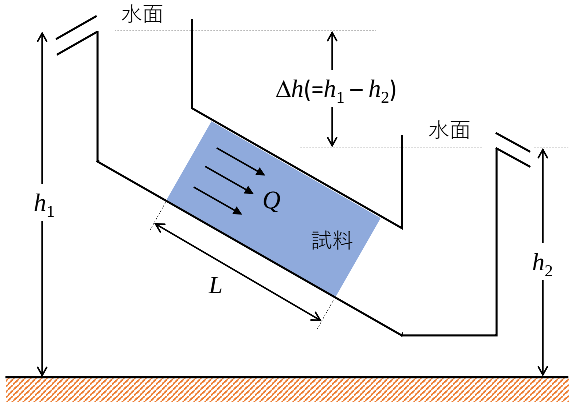

図 5　ダルシーのカラムを用いた浸透実験

$$Q \propto \frac{A\Delta h}{L} \tag{12}$$

比例定数を K（透水係数、単位は $\mathrm{m\ s^{-1}}$）をとすると、この関係式は

$$Q = \frac{KA\Delta h}{L} \tag{13}$$

と表される。ここで、カラムの長さを Δs、流体が断面を均一に流れるとみなして流量 Q を断面積 A で除し、Δs をゼロに近づけると

$$q = \frac{Q}{A} = \lim_{\Delta s \to 0}\left(-\frac{K\Delta h}{\Delta s}\right) = -K\frac{dh}{ds} \tag{14}$$

の関係が導かれる。ただし、q はダルシー流速である。ダルシー流速 q は多孔質媒体の間隙中を流れる真の流速ではなく、流体が全断面を平均的に流れると仮定したときの見かけの流速である。したがって、間隙内（間隙率 ϕ）を流れる実際の平均流速 v は

$$v = \frac{q}{\phi} \tag{15}$$

で与えられる。資料によって質量保存則やエネルギー方程式中の流速の表現がダルシー流速 q であったり、平均流速 v であったりするので注意が必要である。本論文では、ダルシー流速に対しては q を、平均流速に対しては v を一貫して使う。

ダルシーの法則は経験則だが、重力場にある粘性流体に対するナヴィエ・ストークス方程式を多孔質媒体中の流体の運動に適用することで、ダルシーの法則が理論的に誘導できる (藤縄, 2010, p.58)。この場合のダルシーの法則は以下の式で表される。

$$\boldsymbol{q} = -\frac{k}{\mu}(\nabla p + \rho_w g \nabla z) \tag{16}$$

ここで、$\boldsymbol{q}$ は地下水のダルシー流速（ベクトル)、k は浸透率 (permeability) である。

2.2.3　ダルシーの法則の適用限界

ダルシーの法則には適用限界が存在する。実験結果から、ダルシーの法則は十分に高い体積流量においては有効でないことが示唆されている。ある閾流速を超えると、ダルシー流速と水頭ポテンシャル勾配の間の関係

は非線形となり、乱流により大量のエネルギー損失が発生してしまう。したがって、ダルシーの法則は水頭ポテンシャル勾配から得られる流速値を過大評価してしまうことがわかる。そのような流れは地下環境においてはまれであるが、井戸にごく近い場所、もしくは炭酸塩岩石や溶岩で起こりうる海綿状の間隙の場合に発生する (Ingebritsen et al., 2006)。

ダルシーの法則の有効範囲の上限は、通常、レイノルズ数に基づいて推定される。レイノルズ数は慣性力と粘性力の比で定義される無次元数であり、以下の式で表される。

$$Re = \frac{\rho_w q L}{\mu} \tag{17}$$

ここで、L は特性長さ (単位は m) である。特性長さ L に関して、多孔質媒体においては、粒子径の分布に応じて決定されることが多い。また、非ダルシー流れへの遷移はレイノルズ数がおよそ $Re \sim 5$ の値をとるあたりから始まる (Bear, 1979)。

2.3　間隙に流動する流体が存在する多孔質媒体のエネルギー保存則

地下の温度を推定するためには地下を十分に細かいグリッドで区切り、各グリッド内に存在する固相と流体相の存在を考慮した上でグリッドが蓄えるエネルギーに関する方程式を解く必要がある。多孔質媒体とその間隙を流動する流体が持つエネルギーの変化は、体積素片 V にエネルギー保存則を適用することで得ることができる。

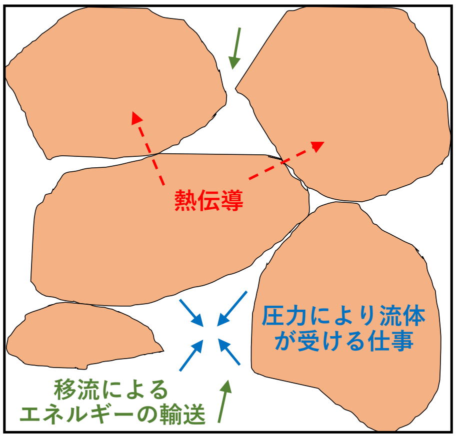

図 6　多孔質媒体中のエネルギーの流れ

いま、図 6 のように、空間に固定された剛体の多孔質媒体とその間隙を流体で占められた体積素片のエネルギーの出入りを考える（ただし固相と流体は局所的熱平衡状態にあり、温度が等しいとする）。この系に対しては外力として重力が働いている。また、流体の移流により流体が持つエネルギーが流入出するとともに、移流がなくとも隣り合う系から熱伝導により熱が流入出する。

2.3.1　単位質量あたりの流体と固相のエネルギー

単位質量当たりの流体のエネルギーは、比エンタルピー h[J kg^{-1}] で表される。エンタルピーは比内部エネルギー u[J kg^{-1}] と圧力–体積による仕事 p/ρ_w の和である。

$$h = u + \frac{p}{\rho_w} \tag{18}$$

一方で、単位質量当たりの固相のエネルギーは内部エネルギー u のみで表す。内部エネルギーは定圧比熱 c_p[J kg^{-1} K^{-1}] と温度 T[K] の積である。

$$u = c_p T \tag{19}$$

2.3.2　フーリエの法則による熱伝導の表現

熱伝導は物質の移動を伴わない、高温側から低温側への熱の移動現象である。いま、熱媒体の熱伝導率を λ[W m^{-1} K^{-1}]、温度を T[K] とすると、熱流束 $\boldsymbol{J}$[W m^{-2}] は

$$\boldsymbol{J} = -\lambda \nabla T \tag{20}$$

で表される。これをフーリエの法則と呼ぶ。一般に、熱伝導率は固体、液体、気体の順に小さく、熱が伝わりにくくなる。

2.3.3　多孔質媒体のエネルギー保存則

質量保存則と同様に体積素片の熱収支を考えることで、多孔質媒体のエネルギー保存則を得ることができる。体積素片に貯留される熱、流体の移流により輸送される熱、熱伝導で伝わる熱を考慮すると、エネルギー収支は以下のようになる。

$$\begin{aligned}(\text{貯留される熱}) =& (\text{移流により流入する熱}) - (\text{移流により流出する熱}) \\ &+ (\text{熱伝導により流入する熱}) - (\text{熱伝導により流出する熱})\end{aligned} \tag{21}$$

これを数学的に表すと、多孔質媒体のエネルギー保存則は以下のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\rho_w h + (1-\phi)\,\rho_s u\right) = -\nabla\cdot(\rho_w h\boldsymbol{q}) - \nabla\cdot\boldsymbol{J} \tag{22}$$

ここで、バルクのエネルギー E_{bulk} を

$$E_{\mathrm{bulk}} = \phi\rho_w h + (1-\phi)\,\rho_s u \tag{23}$$

とおくと、エネルギー保存則は以下のように書き直される。

$$\frac{\partial E_{\mathrm{bulk}}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_w\theta\boldsymbol{q} + \boldsymbol{J}) = 0 \tag{24}$$

ただし、バルクの熱伝導率 λ_{bulk} は

$$\lambda_{\mathrm{bulk}} = \phi\lambda_w + (1-\phi)\lambda_s \tag{25}$$

と表されるとする。

2.4　地下水流動–熱輸送連成解析

複数の現象の時間発展を、現象間の相互作用の存在を考慮した上で解くことは連成解析と呼ばれる。地下水流動と熱輸送の連成解析の場合は、地下水流動現象、熱伝導現象、移流による熱輸送現象が解析対象となる。したがって、間隙流体の質量保存則 (11) と多孔質媒体のエネルギー方程式 (24) から成る連立方程式を解くことになる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\phi\rho_w)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_w \boldsymbol{q}) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial E_{\mathrm{bulk}}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_w\theta\boldsymbol{q} + \boldsymbol{J}) = 0 \end{cases} \tag{26}$$

しかしながら、間隙流体の質量保存則 (11) と多孔質媒体のエネルギー方程式 (24) はどちらも非線形方程式であるため数値的に解く必要がある。

2.5　地下水流動–熱輸送の連成問題におけるエネルギー方程式の厳密な取り扱い

地下水流動と熱輸送の連成問題を解くためには注意しなければならない点がある。Dodson（1971）は、従来よく用いられてきた単位体積あたりの流体のエネルギーとしてエンタルピーを用いる支配方程式系は、鉛直方向に温度誤差を生むことを指摘している。鉛直方向の地下水移流による熱輸送過程において、保存されるべき量は（エンタルピー + ポテンシャルエネルギー + 運動エネルギー）である。一般に地下水の流れは遅いため運動エネルギーは無視されるが、それでもエンタルピーはポテンシャルエネルギーを欠如している。温度誤差を解消するためには、エンタルピーにポテンシャルエネルギーを加えたメタルピーと呼ばれる物理量を導入する必要がある。

$$h\,(\text{エンタルピー}) = (\text{内部エネルギー}) + (\text{圧力–体積仕事}) = u + \frac{p}{\rho_w} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \theta(\text{メタルピー}) &= (\text{内部エネルギー}) + (\text{圧力–体積仕事}) + (\text{力学的エネルギー}) \\ &= u + \frac{p}{\rho_w} + \frac{1}{2}v^2 + gz \end{aligned} \tag{28}$$

ここからは、エンタルピーがもたらす温度誤差についての Stauffer ら (2014) による定量的な説明を紹介する。メタルピーの変化量は、運動エネルギー項を無視すると、

$$\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}h + g\mathrm{d}z \tag{29}$$

となる（重力加速度 g は定数)。メタルピー θ の変化量は

$$\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}u + p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p + g\mathrm{d}z \tag{30}$$

となる。可逆過程における流体の内部エネルギーの微小変化から

$$\mathrm{d}u = T\mathrm{d}s - p\mathrm{d}V \tag{31}$$

が得られる。ここで、s は比エントロピーである。したがって、メタルピーの微小変化は以下のように表すことができる。

$$\mathrm{d}\theta = T\mathrm{s} + V\mathrm{d}p + g\mathrm{d}z \tag{32}$$

s を温度と圧力の関数として考えると

$$\mathrm{d}s = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p \tag{33}$$

である。(29), (30), (33) より

$$\mathrm{d}\theta = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T + \left[T\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T + \frac{1}{\rho}\right]\mathrm{d}p + g\mathrm{d}z \tag{34}$$

が得られる。定圧比熱の定義

$$c_p = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \tag{35}$$

マクスウェルの関係式

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{36}$$

熱膨張率 $\alpha[\mathrm{K}^{-1}]$

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{37}$$

より、$\mathrm{d}\theta$ は

$$\mathrm{d}\theta = c_p\mathrm{d}T + (1-\alpha T)\frac{\mathrm{d}p}{\rho} + g\mathrm{d}z \tag{38}$$

となる。したがって、温度–圧力勾配は次のように表される。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\theta = (\alpha T - 1)\frac{1}{\rho c_p} - \frac{g}{c_p}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}p}\right) \tag{39}$$

メタルピー形式はエンタルピー形式からは導かれない右辺第 2 項を有している。これが温度誤差の原因であり、重力加速度 g を 9.8 m s^{-2}、水の比熱 c_w を約 4.2×10^3 J kg^{-1} K^{-1} とすると、g/c_p はおよそ 2.3×10^{-3} K m^{-1} となる。したがって、鉛直方向に 1000 m の地下水の移動でエンタルピーは約 2.3 K の温度誤差を生むことになる。

3　メタルピー保存形式の地下水流動–熱輸送連成解析シミュレータの開発

本研究では、Stauffer ら (2014), Dodson(1971) による指摘を踏まえ、メタルピー保存形式の地下水流動–熱輸送連成解析シミュレータを開発する。

3.1　開発するシミュレータが前提とする仮定

- 地盤は等方で多孔質の剛体である。
- 大気や河川との相互作用を無視する。
- 間隙率は温度と圧力の変化に対して線形に変化する。
- 水の流れは飽和領域を対象とする。
- 水の密度は温度、水圧に依存する。
- 固液相間での局所的熱平衡状態が成立する。

3.2　シミュレーションプログラムのフローチャート

図 7 に開発するシミュレーションプログラムのフローチャートを示す。主変数を温度と圧力とし、支配方程式を数値的に解くことで地下水流動と地下温度分布の時間発展をシミュレートすることができる。間隙率、熱伝導率、水の粘性、水の密度は温度と圧力に依存するとしてプログラムを組んだ。したがって、各タイムステップの最初にこれら物性値を計算し、その後支配方程式の数値解析を行う。支配方程式の数値解析の結果として、次のタイムステップにおける温度と圧力の値が得られる。もともとの温度と圧力の値を新しく得た温度と圧力に更新し、もう一度同様の計算を行う。これを繰り返し、シミュレーション内の時間が事前に設定した計算終了時間に到達したら、シミュレーションを終了する。

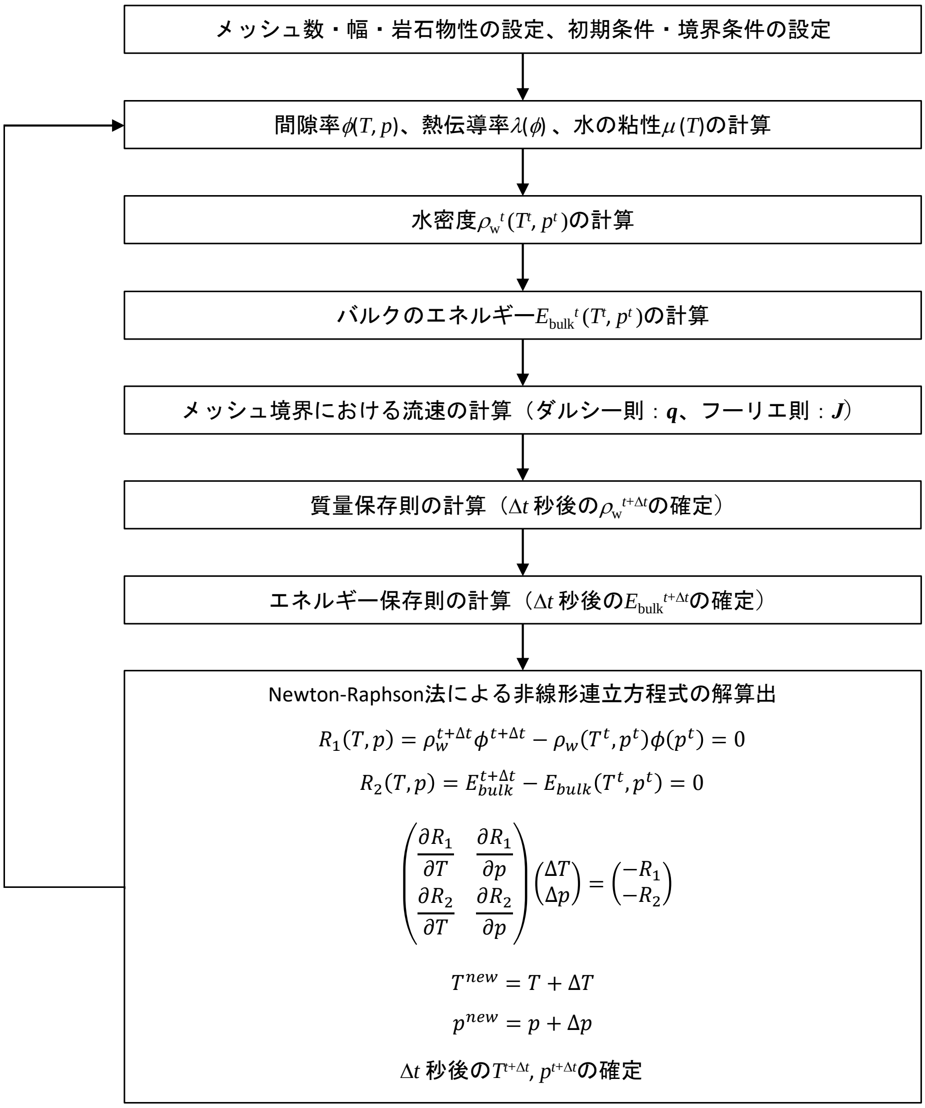
メッシュ数・幅・岩石物性の設定、初期条件・境界条件の設定
間隙率$\phi(T, p)$、熱伝導率$\lambda(\phi)$ 、水の粘性$\mu(T)$の計算
水密度$\rho_w{}^t(T^t, p^t)$の計算
バルクのエネルギー$E_{\rm bulk}{}^t(T^t, p^t)$の計算
メッシュ境界における流速の計算（ダルシー則：$\boldsymbol{q}$、フーリエ則：$\boldsymbol{J}$）
質量保存則の計算（Δt 秒後の$\rho_w{}^{t+\Delta t}$の確定）
エネルギー保存則の計算（Δt 秒後の$E_{\rm bulk}{}^{t+\Delta t}$の確定）
Newton-Raphson法による非線形連立方程式の解算出
$R_1(T,p) = \rho_w^{t+\Delta t}\phi^{t+\Delta t} - \rho_w(T^t,p^t)\phi(p^t) = 0$
$R_2(T,p) = E_{bulk}^{t+\Delta t} - E_{bulk}(T^t,p^t) = 0$
$\begin{pmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial T} & \frac{\partial R_1}{\partial p} \\ \frac{\partial R_2}{\partial T} & \frac{\partial R_2}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta T \\ \Delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_1 \\ -R_2 \end{pmatrix}$
$T^{new} = T + \Delta T$
$p^{new} = p + \Delta p$
Δt 秒後の$T^{t+\Delta t}$, $p^{t+\Delta t}$の確定

図 7　プログラムの流れ

4　地下水流動–熱輸送連成解析シミュレータで用いる基礎方程式

本章では、開発する連成解析シミュレータで用いる支配方程式をまとめ、数値解析に必要な諸計算を行う。

4.1　水の密度

本研究では、TEOS-10 を使用して水の密度を計算する。TEOS-10 は海水のギブスエネルギーを出力するプログラムであり、2009 年には海水の物性を与える公式なプログラムとしてユネスコ政府間海洋学委員会に採用された実績のあるプログラムである。水の密度は温度、圧力、塩分濃度に依存し、約 4 ℃付近で最大値を示し非線形に変化する。例えば水温 4 ℃付近のシミュレーションを行う際に、水の密度を温度と圧力に対して線形に仮定すると正しく現象を再現できない可能性がある。そのため本研究では水の密度計算に TEOS-10 を採用した。なお本研究では塩分濃度をゼロに設定し、TEOS-10 の純水部分のみを利用する。

$$\rho_w = \rho_{\text{TEOS-10}}\left(T, p\right) \tag{40}$$

後の非線形方程式の解析のために水の密度の偏微分を計算しておく。TEOS-10 が温度、圧力、塩分濃度の入力に対して出力するものは、対応するギブスエネルギー G である。そこで、ここで計算する偏微分もギブスエネルギーの関数として計算する。V が単位質量当たりの体積（比容積）であることに注意して偏微分を計算すると、以下のようになる。

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{V}\right)_p = -\frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\rho^2\cdot\left(\frac{\partial^2 G}{\partial T\partial p}\right) \tag{41}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{V}\right)_T = -\frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\rho^2\cdot\left(\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right)_T \tag{42}$$

となる。

4.2　間隙率の変化

間隙率は温度と圧力の変化に対して線形に変化すると仮定する。したがって間隙率変化 $\mathrm{d}\phi$ は以下の式で表す。

$$\mathrm{d}\phi = \varepsilon_{\text{bulk}} + \beta_s \mathrm{d}p - \alpha_s \mathrm{d}T \tag{43}$$

$\mathrm{d}\phi$ は間隙率変化、$\varepsilon_{\text{bulk}}$ はバルクのひずみ、β_s は固相の圧縮率、$\mathrm{d}p$ は圧力変化、α_s は固相の熱膨張率、$\mathrm{d}T$ は温度変化である。バルクのひずみ $\varepsilon_{\text{bulk}}$ はバルクの熱膨張率 α_{bulk} と温度変化 $\mathrm{d}T$ で

$$\varepsilon_{\text{bulk}} = \alpha_{\text{bulk}}\mathrm{d}T \tag{44}$$

と表される。固相の圧力圧縮率 α_s は堆積層を構成する土粒子の骨格の鉛直方向の圧縮率 (単位は Pa^{-1}) である。例として、表にいくつかの種類の堆積物と水の圧縮率を示した（Freeze and Cherry, 1979）。固相の熱膨張率 α_s は、バルクの熱膨張率 α_{bulk} と間隙の熱膨張率 α_ϕ、間隙率 ϕ によって

$$\alpha_s = \alpha_{\text{bulk}} - 3\alpha_\phi\phi \tag{45}$$

表 3　堆積物の圧縮率（藤縄 (2010), 単位: 10^{-10} Pa^{-1}）

堆積物の種類	圧縮率 $\beta_s[\mathrm{Pa}^{-1}]$
礫	$100 \sim 1$
砂	$1,000 \sim 10$
粘土	$10,000 \sim 10$
割れ目のある岩石	$100 \sim 1$
固結した岩石	$10 \sim 0.1$
水	4.4

と表される。ここで、バルクの熱膨張率 α_{bulk} と間隙の熱膨張率 α_ϕ を簡単のため等しいと考える。

$$\alpha_{\mathrm{bulk}} = \alpha_\phi \tag{46}$$

以上をまとめると

$$\mathrm{d}\phi = \alpha_s \mathrm{d}p + 3\alpha_{\mathrm{bulk}}\phi \mathrm{d}T \tag{47}$$

が得られる。したがって、間隙率 ϕ の偏微分は

$$\frac{\partial \phi}{\partial T} = 3\alpha_{\mathrm{bulk}}\phi \tag{48}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = \alpha_s \tag{49}$$

である。

4.3　ダルシー則

本研究では地下水流動と熱輸送の相互作用を考慮した精度の高い地下温度場を推定する。そこで、地下水流動を表現する方程式として、地下水の温度変化と圧力変化による地下水密度の変化を考慮した一般形式のダルシーの法則を採用する。

$$\boldsymbol{q} = -\frac{k}{\mu}(\nabla p + \rho_w g \nabla z) \tag{50}$$

4.4　質量保存則

地下水の質量保存則として以下の式を使用する。

$$\frac{\partial(\rho_w \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \boldsymbol{q}) = 0 \tag{51}$$

次に $\rho_w \phi$ の偏微分を計算する。

$$\frac{\partial(\rho_w \phi)}{\partial T} = \frac{\partial \rho_w}{\partial T} \cdot \phi + \rho_w \cdot \frac{\partial \phi}{\partial T} \tag{52}$$

$$\frac{\partial(\rho_w \phi)}{\partial p} = \frac{\partial \rho_w}{\partial p} \cdot \phi + \rho_w \cdot \frac{\partial \phi}{\partial p} \tag{53}$$

4.5 フーリエ則

液相中と固相中の熱伝導を表す方程式として、フーリエの法則を採用する。

$$\boldsymbol{J} = -\lambda \nabla T \tag{54}$$

ただし、λ は熱伝導率（単位は $\mathrm{W \cdot m^{-1} K^{-1}}$）である。

ここで、多孔質媒体のバルクとしての熱伝導率を λ_{bulk} とおく。固相の熱伝導率と流体の熱伝導率は異なるため、λ_{bulk} は固相と流体の存在比を考慮して決定されるべきである。したがって、多孔質媒体の固相の熱伝導率を λ_s、流体の熱伝導率を λ_w とすると、バルクの熱伝導率 λ_{bulk} は

$$\lambda_{\mathrm{bulk}} = \phi \lambda_w + (1-\phi)\,\lambda_s \tag{55}$$

と表される。

4.6 地下水のエネルギー保存則

エネルギー方程式は

$$\frac{\partial E_{\mathrm{bulk}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \theta \boldsymbol{q} + \boldsymbol{J}) = 0 \tag{56}$$

となる。ここで、バルクのエネルギー $E_{\mathrm{bulk}}(T,p)$ を次のように表す。

$$E_{\mathrm{bulk}}(T,p) = \phi \rho_w \theta + (1-\phi)\rho_s c_s T \quad \text{(メタルピー形式)} \tag{57}$$

ただし、θ はメタルピーで、

$$\theta = h + \frac{1}{2}v^2 + gz \tag{58}$$

h は比エンタルピーで、内部エネルギー $u(= c_p T)$ を使って

$$h = u + \frac{p}{\rho} = c_p T + \frac{p}{\rho} \tag{59}$$

と表現される。地下水の流れは非常にゆっくりなので、運動エネルギーを無視して整理すると、メタルピー θ は

$$\theta = c_p T + \frac{p}{\rho_w} + gz \tag{60}$$

と表される。以上より、バルクのエネルギーは

$$E_{\mathrm{bulk}}(T,p) = \phi \cdot (\rho_w c_w T + p + \rho_w g z) + (1-\phi) \cdot \rho_s c_s T \tag{61}$$

となる。次にバルクのエネルギー $E_{\mathrm{bulk}}(T,p)$ の T と p に関する偏微分を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{\mathrm{bulk}}}{\partial T} = \frac{\partial \phi}{\partial T} \cdot (\rho_w c_w T + p + \rho_w g z) + \phi \cdot \left(\frac{\partial \rho_w}{\partial T} c_w T + \rho_w c_w + \frac{\partial \rho_w}{\partial T} g z \right) \\ - \frac{\partial \phi}{\partial T} \cdot \rho_s c_s T + (1-\phi) \cdot \rho_s c_s \end{aligned} \tag{62}$$

$$\frac{\partial E_{\mathrm{bulk}}}{\partial p} = \frac{\partial \phi}{\partial p} \cdot (\rho_w c_w T + p + \rho_w g z) + \phi \cdot \left(\frac{\partial \rho_w}{\partial p} c_w T + 1 + \frac{\partial \rho_w}{\partial p} g z \right) - \frac{\partial \phi}{\partial p} \cdot \rho_s c_s T \tag{63}$$

5　支配方程式の数値計算手法

本章では、本研究で開発する地下水流動–熱輸送連成解析シミュレータが採用する支配方程式の数値解析手法を示す。

5.1　微分方程式の解法と離散化

地下水流動と熱の輸送現象は、空間的に連続的に分布する流体流動と温度場に関する微分方程式として記述された。これらの微分方程式を解くことで、対象としている場（地下）が時間的、空間的にどのような変化をするのか予想可能になる。Toth(1963) が地下水流動系をラプラス方程式で記述し解析したように、場と初期条件、境界条件などに大胆な仮説を立てれば地下水流動と熱の輸送現象に対して解析解を与えることも可能である（例：Diao et al., (2004)）。しかし、実際の現場は岩石の不均質性の存在や境界条件が不鮮明であり、微分方程式を解析的に解くために必要な諸条件が成立しない場合がある。流体の数値解析手法はこのような複雑な状況に対しても支配方程式を時間的に積分することで、場の変化を解析するものである。より詳しく言えば、空間上の離散点（格子点）上における速度、圧力、温度といった物理用の時間的な変化を、離散的な時間の上で求めることになる。

5.2　有限差分法

微分方程式の数値計算法の代表的なものの一つに、有限差分法がある。有限差分法は微分方程式の導関数を差分近似によって置き換え、方程式の厳密解に対する近似解を得る手法である。

5.2.1　空間的離散化

いま、一次元空間においてある物理量 u の定常状態における導関数 $u(x)$ を求めたいとする。空間を格子幅 Δx ごとに区切って離散化し、位置 $x = i\Delta x$ における物理量 u の値を u_i と表す。すると、位置 $x = (i+1)\Delta x$ における u_{i+1} は、テイラー展開を用いて次のように近似できる。

$$u_{i+1} = u_i + \Delta x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i + \cdots \tag{64}$$

したがって、物理量 u の 1 階微分は

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{65}$$

と表すことができる。式 (65) は 1 階微分に関する前進差分と呼ばれる。また、位置 $x = (i-1)\Delta x$ における u_{i-1} を次のようにテイラー展開することも考えられる。

$$u_{i-1} = u_i + \Delta x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i + \cdots \tag{66}$$

この場合の物理量 u の 1 階微分は

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{67}$$

となる。式 (67) は 1 階微分に関する後退差分と呼ばれる。

ここで、例えば u の導関数は x 軸上を流れる流体の流速 $q(x)$ を表しているとする（比例定数は -1 とする）。すると、誤差を無視すれば格子点 i と $i+1$ の境界 $i+\frac{1}{2}$ を流れる流速は

$$q(x)|_{i+\frac{1}{2}} = -\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})/2} \tag{68}$$

と表せると考えられる。同様に、格子点 $i-1$ と i の境界 $i-\frac{1}{2}$ を流れる流速は

$$q(x)|_{i-\frac{1}{2}} = -\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i-\frac{1}{2}} = -\frac{u_i - u_{i-1}}{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)/2} \tag{69}$$

となる。

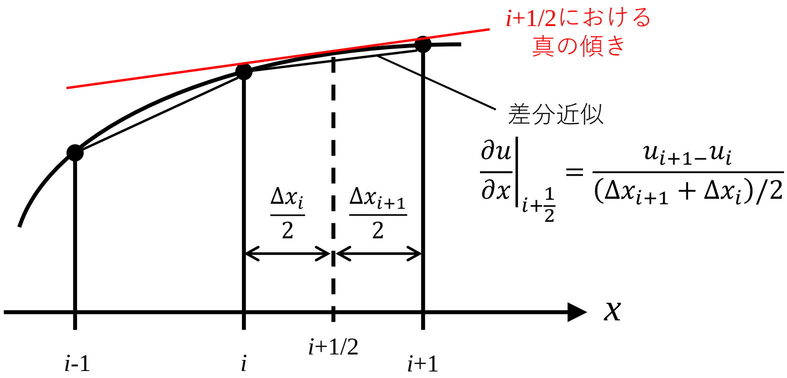

図 8　連続関数と差分近似

5.2.2　時間的離散化

時間発展する問題においては、空間的離散化に加えて時間的離散化を行う必要がある。時間的離散化とは、ある物理量 $u(x,t)$ の時間変化 $\partial u/\partial t$ に関する離散化である。例えば、移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad c > 0 \tag{70}$$

を考える。ある時刻 t のときの格子点 i 上の物理量を u_i^t とすれば、時間微分項の自然な差分近似として

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{t+\Delta t} - u_i^t}{\Delta t} \tag{71}$$

が考えられる。ここで、Δt を十分に小さくとった時間方向の刻み幅とした。

時間微分項の離散化の一方で、空間微分項の時間に関しては単純に考えると、t ととるか $t+\Delta t$ ととるかの 2 つの選択肢があることがわかる。前者は陽解法と呼ばれる手法で、時刻 $t+\Delta t$ での物理量 $u_i^{t+\Delta t}$ を時刻 $t+\Delta t$ における他の位置での物理量 $u_j^{t+\Delta t}$ $(j \neq i)$ に関わりなく、時刻 t における既知の物理量 u^t からのみ決定できる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i^t - u_{i-1}^t}{\Delta x} \quad \text{（陽解法）} \tag{72}$$

一方で後者の手法は陰解法と呼ばれ、時刻 $t+\Delta t$ での物理量 $u_i^{t+\Delta t}$ を決定するために時刻 $t+\Delta t$ における他の位置での物理量 $u_j^{t+\Delta t}$ が必要となる。陰解法では、時刻 t の任意の位置の解が時刻 $t+\Delta t$ のすべての点の解に影響を及ぼすことになる。陰解法の計算量は陽解法よりも多いためにより長い計算時間を要するが、陽解法よりも計算の安定性で優れている。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i^{t+\Delta t} - u_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} \quad \text{（陰解法）} \tag{73}$$

本研究で開発するシミュレータでは、計算の簡便さから陽解法を採用する。

5.3 支配方程式の有限差分離散化

本節では、支配方程式を離散定式化する。

5.3.1 質量保存則の離散化

地下水の連続式は以下の式で表される。

$$\frac{\partial(\rho_w \phi)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho_w q_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho_w q_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho_w q_z)}{\partial z} \tag{74}$$

これを陽解法で離散化すると、

$$\begin{aligned} \frac{(\rho_w\phi)_{i,j,k}^{t+\Delta t} - (\rho_w\phi)_{i,j,k}^{t}}{\Delta t} = &- \frac{(\rho_w q_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}^{t} - (\rho_w q_x)_{i-\frac{1}{2},j,k}^{t}}{\Delta x_{i,j,k}} \\ &- \frac{(\rho_w q_y)_{i,j+\frac{1}{2},k}^{t} - (\rho_w q_y)_{i,j-\frac{1}{2},k}^{t}}{\Delta y_{i,j,k}} \\ &- \frac{(\rho_w q_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{t} - (\rho_w q_z)_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{t}}{\Delta z_{i,j,k}} \end{aligned} \tag{75}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \rho_{w,i,j,k}^{t+\Delta t}\phi_{i,j,k}^{t+\Delta t} = \rho_{w,i,j,k}^{t}\phi_{i,j,k}^{t} &- \frac{\Delta t}{\Delta x_{i,j,k}}\left(\rho_{i+\frac{1}{2},j,k}^{t} q_{i+\frac{1}{2},j,k}^{t} - \rho_{i-\frac{1}{2},j,k}^{t} q_{i-\frac{1}{2},j,k}^{t}\right) \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta y_{i,j,k}}\left(\rho_{i,j+\frac{1}{2},k}^{t} q_{i,j+\frac{1}{2},k}^{t} - \rho_{i,j-\frac{1}{2},k}^{t} q_{i,j-\frac{1}{2},k}^{t}\right) \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta z_{i,j,k}}\left(\rho_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{t} q_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{t} - \rho_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{t} q_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{t}\right) \end{aligned} \tag{76}$$

5.3.2 ダルシー則の離散化

ダルシー則より、境界上の地下水流束はメッシュの境界面で差分を取ると $(m = x, y, z)$

$$q_{m+\frac{1}{2}} = -\frac{k_{m+\frac{1}{2}}}{\mu_{m+\frac{1}{2}}}\left(\frac{p_{m+1} - p_m}{(\Delta x_{m+1} + \Delta x_m)/2} + (\rho_w g)_{m+\frac{1}{2}}\right) \tag{77}$$

$$q_{m-\frac{1}{2}} = -\frac{k_{m-\frac{1}{2}}}{\mu_{m-\frac{1}{2}}}\left(\frac{p_m - p_{m-1}}{(\Delta x_m + \Delta x_{m-1})/2} + (\rho_w g)_{m-\frac{1}{2}}\right) \tag{78}$$

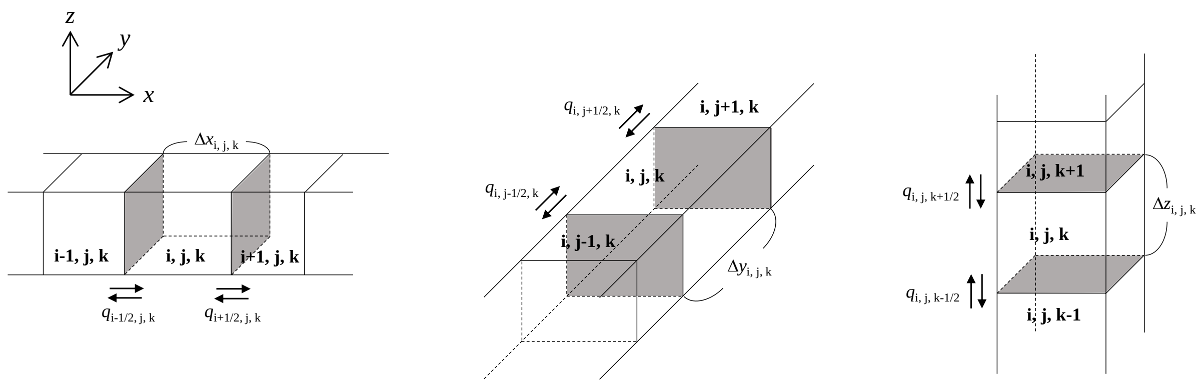

図 9　1 次元の流束モデル

となる。このとき、$m+\frac{1}{2}$ と $m-\frac{1}{2}$ の添え字が付いている係数は調和平均で計算する。

$$\rho_{m+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta x_{m+1} + \Delta x_m}{\frac{\Delta x_{m+1}}{\rho_{m+1}} + \frac{\Delta x_m}{\rho_m}} \tag{79}$$

5.3.3　フーリエ則の離散化

ダルシー則の離散化と同様にメッシュの境界面で差分を取ると、フーリエ則で表される境界上の熱伝導の熱流束は $(m = x, y, z)$

$$J_{m+\frac{1}{2}} = -\lambda_{m+\frac{1}{2}} \frac{T_{m+1} - T_m}{(\Delta x_{m+1} + \Delta x_m)/2} \tag{80}$$

$$J_{m-\frac{1}{2}} = -\lambda_{m-\frac{1}{2}} \frac{T_m - T_{m-1}}{(\Delta x_m + \Delta x_{m-1})/2} \tag{81}$$

5.3.4　エネルギー方程式の離散化

エネルギー方程式は以下のように表された。

$$\frac{\partial E_{\mathrm{bulk}}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_w \theta \boldsymbol{q} + \boldsymbol{J}) \tag{82}$$

したがって

$$\frac{\partial E_{\mathrm{bulk}}}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho_w \theta q_x + J_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho_w \theta q_y + J_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho_w \theta q_z + J_z)}{\partial z} \tag{83}$$

$$\begin{aligned}\frac{E^{t+\Delta t}_{\mathrm{bulk},i,j,k} - E^{t}_{\mathrm{bulk},i,j,k}}{\Delta t} = &-\frac{1}{\Delta x_{i,j,k}}\left((\rho_w\theta q)^t_{i+\frac{1}{2},j,k} + J^t_{i+\frac{1}{2},j,k} - (\rho_w\theta q)^t_{i-\frac{1}{2},j,k} - J^t_{i-\frac{1}{2},j,k}\right)\\ &-\frac{1}{\Delta y_{i,j,k}}\left((\rho_w\theta q)^t_{i,j+\frac{1}{2},k} + J^t_{i,j+\frac{1}{2},k} - (\rho_w\theta q)^t_{i,j-\frac{1}{2},k} - J^t_{i,j-\frac{1}{2},k}\right)\\ &-\frac{1}{\Delta z_{i,j,k}}\left((\rho_w\theta q)^t_{i,j,k+\frac{1}{2}} + J^t_{i,j,k+\frac{1}{2}} - (\rho_w\theta q)^t_{i,j,k-\frac{1}{2}} - J^t_{i,j,k-\frac{1}{2}}\right)\end{aligned} \tag{84}$$

$$
\begin{aligned}
E^{t+\Delta t}_{\mathrm{bulk},i,j,k} = E^{t}_{\mathrm{bulk},i,j,k} &- \frac{\Delta t}{\Delta x_{i,j,k}}\Big(\rho^{t}_{w,i+\frac{1}{2},j,k}\theta^{t}_{i+\frac{1}{2},j,k}q^{t}_{i+\frac{1}{2},j,k} + J^{t}_{i+\frac{1}{2},j,k} \\
&\qquad\qquad -\rho^{t}_{w,i-\frac{1}{2},j,k}\theta^{t}_{i-\frac{1}{2},j,k}q^{t}_{i-\frac{1}{2},j,k} - J^{t}_{i-\frac{1}{2},j,k}\Big) \\
&- \frac{\Delta t}{\Delta y_{i,j,k}}\Big(\rho^{t}_{w,i,j+\frac{1}{2},k}\theta^{t}_{i,j+\frac{1}{2},k}q^{t}_{i,j+\frac{1}{2},k} + J^{t}_{i,j+\frac{1}{2},k} \\
&\qquad\qquad -\rho^{t}_{w,i,j-\frac{1}{2},k}\theta^{t}_{i,j-\frac{1}{2},k}q^{t}_{i,j-\frac{1}{2},k} - J^{t}_{i,j-\frac{1}{2},k}\Big) \\
&- \frac{\Delta t}{\Delta x_{i,j,k}}\Big(\rho^{t}_{w,i,j,k+\frac{1}{2}}\theta^{t}_{i,j,k+\frac{1}{2}}q^{t}_{i,j,k+\frac{1}{2}} + J^{t}_{i,j,k+\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad -\rho^{t}_{w,i,j,k-\frac{1}{2}}\theta^{t}_{i,j,k-\frac{1}{2}}q^{t}_{i,j,k-\frac{1}{2}} - J^{t}_{i,j,k-\frac{1}{2}}\Big)
\end{aligned} \tag{85}
$$

5.3.5 1次精度風上差分法

支配方程式の離散化において、地下水流束 $\boldsymbol{q}$ と熱流束 $\boldsymbol{J}$ はメッシュとメッシュの間の境界で差分を取ることで計算ができる。また、その計算に必要な物性値（例えば熱伝導率 λ）に関しては、調和平均を採用した。しかし、例えば質量保存則で流速にかけ合わせる水の密度値は風上差分を採用する。以下が風上差分による水の密度値の計算例である。

$$
\rho_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{q_{i+\frac{1}{2},j,k} - |q_{i+\frac{1}{2},j,k}|}{2}\rho_{i+1,j,k} + \frac{q_{i-\frac{1}{2},j,k} - |q_{i-\frac{1}{2},j,k}|}{2}\rho_{i,j,k} \tag{86}
$$

5.4 ニュートン・ラプソン法による非線形連立微分方程式の解法

計算対象メッシュの Δt 秒後における温度 T と間隙圧力 p_w をニュートン・ラプソン法により求める。ニュートン・ラプソン法は反復計算により非線形方程式を解く一般的な数値解析手法である。以下に本研究における非線形連立微分方程式の解析の流れを述べる。

5.4.1 2変数のニュートン・ラプソン法による主変数の導出

まず、現時刻 t における計算対象メッシュの温度を T^t、間隙圧力を p^t とする。そして、Δt 秒後の時刻 $t+\Delta t$ における地下水の密度 $\rho_w^{t+\Delta t}$ とメッシュが持つエネルギー $E^{t+\Delta t}$ を質量保存則とエネルギー方程式から計算する。

$$
\frac{\partial(\phi\rho_w)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_w\boldsymbol{q}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_w^{t+\Delta t}\ \text{を確定}
$$

$$
\frac{\partial E_{\mathrm{bulk}}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_w\theta\boldsymbol{q} + \boldsymbol{J}) = 0 \quad \Rightarrow \quad E^{t+\Delta t}\ \text{を確定}
$$

これで、時刻 $t+\Delta t$ における地下水の密度 $\rho_w^{t+\Delta t}$ とメッシュが持つエネルギー $E^{t+\Delta t}$ が判明した。しかし、これらを構成する変数 $T^{t+\Delta t}$ および $p^{t+\Delta t}$ はまだ判明していない。これから、$\rho_w^{t+\Delta t}$ と $E^{t+\Delta t}$ から $T^{t+\Delta t}$ と $p^{t+\Delta t}$ をニュートン・ラプソン法によって算出していく。

いま、T と p の関数 $R_1(T,p)$ と $R_2(T,p)$ を以下のようにおく。

$$
R_1(T,p) = \rho_w^{t+\Delta t}\phi^{t+\Delta t} - \rho_{\text{TEOS-10}}(T,p)\cdot\phi(p) = 0 \tag{87}
$$

$$
R_2(T,p) = E^{t+\Delta t} - E_{\mathrm{bulk}}(T,p) = 0 \tag{88}
$$

式 (87)、(88) を同時に満たす T と p が、$t+\Delta t$ 秒目における温度 $T^{t+\Delta t}$、間隙圧力 $p^{t+\Delta t}$ である。

ここで、$R_1(T,p)$ と $R_2(T,p)$ に T^t、p^t を代入してみる。すると、$\rho_{\text{TEOS-10}}(T,p)$、$E_{\text{bulk}}(T,p)$ が決定される。ρ と E が時間変化しているならば、

$$R_1(T^t,p^t) = \rho_w^{t+\Delta t}\phi^{t+\Delta t} - \rho_{\text{TEOS-10}}(T^t,p^t)\cdot\phi(p^t) \tag{89}$$

$$R_2(T^t,p^t) = E^{t+\Delta t} - E_{\text{bulk}}(T^t,p^t) \tag{90}$$

はそれぞれゼロとはならないと考えられる。そこで、新たに変数

$$T^{\text{new}} = T^t + \Delta T \tag{91}$$

$$p^{\text{new}} = p^t + \Delta p \tag{92}$$

をおき、この T^{new} と p^{new} が連立方程式

$$\begin{cases} R_1(T^{\text{new}},p^{\text{new}}) = 0 \\ R_2(T^{\text{new}},p^{\text{new}}) = 0 \end{cases} \tag{93}$$

を満たすとする。ΔT と Δp が十分に小さいと信じて $R_1(T^{\text{new}},p^{\text{new}})$、$R_2(T^{\text{new}},p^{\text{new}})$ の展開式

$$\begin{cases} R_1(T^{\text{new}},p^{\text{new}}) = R_1(T^t,p^t) + \dfrac{\partial R_1}{\partial T}\Delta T + \dfrac{\partial R_1}{\partial p}\Delta p \\ \\ R_2(T^{\text{new}},p^{\text{new}}) = R_2(T^t,p^t) + \dfrac{\partial R_2}{\partial T}\Delta T + \dfrac{\partial R_2}{\partial p}\Delta p \end{cases} \tag{94}$$

が成り立つとする。式 (93) より、式 (94) の両式はそれぞれゼロとなるから

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R_1}{\partial T}\Delta T + \dfrac{\partial R_1}{\partial p}\Delta p = -R_1(T^t,p^t) \\ \\ \dfrac{\partial R_2}{\partial T}\Delta T + \dfrac{\partial R_2}{\partial p}\Delta p = -R_2(T^t,p^t) \end{cases} \tag{95}$$

が成り立つ。これを行列式で表現し直すと

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial R_1}{\partial T} & \dfrac{\partial R_1}{\partial p} \\ \\ \dfrac{\partial R_2}{\partial T} & \dfrac{\partial R_2}{\partial p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T \\ \\ \Delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1(T^t,p^t) \\ \\ -R_2(T^t,p^t) \end{bmatrix} \tag{96}$$

である。左側から 2 次正方行列の逆行列をかけて

$$\begin{bmatrix} \Delta T \\ \\ \Delta p \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial R_1}{\partial T} & \dfrac{\partial R_1}{\partial p} \\ \\ \dfrac{\partial R_2}{\partial T} & \dfrac{\partial R_2}{\partial p} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_1(T^t,p^t) \\ \\ R_2(T^t,p^t) \end{bmatrix} \tag{97}$$

ここで

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial R_1}{\partial T} & \dfrac{\partial R_1}{\partial p} \\ \\ \dfrac{\partial R_2}{\partial T} & \dfrac{\partial R_2}{\partial p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{98}$$

とおくと、$ad - bc \neq 0$ のとき

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial R_1}{\partial T} & \dfrac{\partial R_1}{\partial p} \\ \\ \dfrac{\partial R_2}{\partial T} & \dfrac{\partial R_2}{\partial p} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{99}$$

であるから

$$\begin{bmatrix} \Delta T \\ \\ \Delta p \end{bmatrix} = -\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1(T^t, p^t) \\ \\ R_2(T^t, p^t) \end{bmatrix} \tag{100}$$

したがって、以下の式で ΔT、Δp が求まる。

$$\Delta T = -\frac{1}{ad-bc}\left(dR_1(T^t, p^t) - bR_2(T^t, p^t)\right) \tag{101}$$

$$\Delta p = -\frac{1}{ad-bc}\left(-cR_1(T^t, p^t) + aR_2(T^t, p^t)\right) \tag{102}$$

こうして求まった ΔT と Δp を式 (91)、(92) に代入し、T と p を反復改良するスキームがニュートン・ラプソン法である。次の節において、ニュートン・ラプソン法の計算に必要な $R_1(T,p)$、$R_2(T,p)$ およびそれらの T、p による偏微分を計算する。

5.4.2 質量保存則の偏微分計算

ニュートン・ラプソン法を使って基礎方程式から Δt 秒後の温度 T と間隙圧力 p を求めるためには、前節で見たように式 (98) を求める必要がある。本節では、TEOS-10 による純水のギブスの自由エネルギー $G(T,p)$ とバルクのエネルギー $E_{\mathrm{bulk}}(T,p)$ の T と p に関する偏微分を計算することで式 (98) を決定する。

R_1 の定義式 (87) から、式 (98) において

$$a = \frac{\partial R_1}{\partial T} = -\frac{\partial(\rho_w \phi)}{\partial T} = -\frac{\partial \rho_w}{\partial T}\cdot\phi - \rho_w\cdot\frac{\partial \phi}{\partial T} \tag{103}$$

$$b = \frac{\partial R_1}{\partial p} = -\frac{\partial(\rho_w \phi)}{\partial p} = -\frac{\partial \rho_w}{\partial p}\cdot\phi - \rho_w\cdot\frac{\partial \phi}{\partial p} \tag{104}$$

となる。

5.4.3 エネルギー保存則の偏微分計算

R_2 の定義式 (88) から、式 (98) において

$$\begin{aligned} c = \frac{\partial R_2}{\partial T} = -\frac{\partial E_{\mathrm{bulk}}}{\partial T} &= -\frac{\partial \phi}{\partial T}\cdot(\rho_w c_w T + \rho_w g z) - \phi\cdot\left(\frac{\partial \rho_w}{\partial T}c_w T + \rho_w c_w + \frac{\partial \rho_w}{\partial T}gz\right) \\ &\quad + \frac{\partial \phi}{\partial T}\cdot\rho_s c_s T - (1-\phi)\cdot\rho_s c_s \end{aligned} \tag{105}$$

$$\begin{aligned} d = \frac{\partial R_2}{\partial p} &= -\frac{\partial E_{\mathrm{bulk}}}{\partial p} \\ &= -\frac{\partial \phi}{\partial p}\cdot(\rho_w c_w T + \rho_f g z) - \phi\cdot\left(\frac{\partial \rho_w}{\partial p}c_w T - \cdot\frac{\partial \rho_w}{\partial p}gz\right) + \frac{\partial \phi}{\partial p}\cdot\rho_s c_s T \end{aligned} \tag{106}$$

となる。

5.4.4 妥当性検証を想定した、温度もしくは圧力を固定した場合の解法

本研究で開発したシミュレータの妥当性を検証するためには、

- $\Delta T = 0$ すなわち温度一定の条件で地下水流動問題を解く
- $\Delta p = 0$ すなわち水圧一定の条件で熱伝導問題を解く

ことが重要である。本項目では、上記 2 点の検証問題を解くための Newton-Raphson 法による非線形方程式の解法について検討する。

例えば温度一定の条件 $\Delta T = 0$ が与えられているとする。この条件は、エネルギー保存則を無視して地下水流動問題を解くことと同義であり、行列式 (96) は

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial R_1}{\partial T} & \dfrac{\partial R_1}{\partial p} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T \\ \Delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1(T^t, p^t) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{107}$$

となる。Δp について解けば、

$$\Delta p = -\frac{R_1}{\left(\dfrac{\partial R_1}{\partial p}\right)} \quad (\Delta T = 0 \text{ のとき}) \tag{108}$$

が得られる。これは、1 変数のニュートン・ラプソン法と一致する。

一方で、圧力一定の条件 $\Delta p = 0$ が与えられているときの行列式 (96) は

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\partial R_2}{\partial T} & \dfrac{\partial R_2}{\partial p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T \\ \Delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -R_2(T^t, p^t) \end{bmatrix} \tag{109}$$

となる。これは、地下水流動を無視して熱伝導問題を解くことと同義であり、ΔT について解けば

$$\Delta T = -\frac{R_2}{\left(\dfrac{\partial R_2}{\partial T}\right)} \quad (\Delta p = 0 \text{ のとき}) \tag{110}$$

が得られる。

6　開発したシミュレータの妥当性の検証

本章では、本研究で開発した地下水流動–熱輸送連成解析シミュレータの妥当性を、解析解が発見されている問題を数値解析し解析解と比較することで検証する。以下に本章で行う検証を列挙する。

表 4　シミュレータの検証方法

検証手法	比較対象	検証内容
1 次元熱伝導問題	熱伝導方程式の解析解	熱伝導
1 次元地下水流動問題	ダルシー則と質量保存則の解析解	地下水流動
移流による 2 次元熱輸送問題	Infinite moving line source model	地下水による熱の輸送
鉛直 1 次元流シミュレーション	メタルピーの典型例	ポテンシャルエネルギーによる温度差

6.1　1 次元熱伝導問題

開発したシミュレータを 1 次元の熱伝導問題の解析に適用する。一様な温度 $T = T_0$[K] の半無限物体を想定する。時刻 0 のときに片端が急に $T = T_b$ の温度に変化し、その温度が保たれるとする。この条件の下、ある時刻 t における半無限物体の温度分布を求める問題が、1 次元の熱伝導問題である。本項目では、この熱伝導問題の解析解と開発したシミュレータの出力する結果を比較する。解析解とシミュレーション結果の一致は、シミュレータが熱伝導を正しく再現できることを意味する。

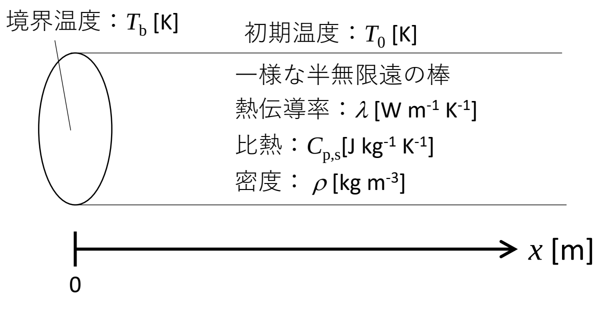

図 10　1 次元熱伝導問題

6.1.1　1 次元熱伝導問題の支配方程式と解析解

一次元熱伝導問題の支配方程式とその解析解を求める。図 10 に示すように、熱伝導率 λ[W m^{-1} K^{-1}]、比熱 c_s[J kg^{-1} K^{-1}]、密度 ρ_s[kg m^{-3}] の物質で構成される均一な半無限遠の棒を考える。この棒の 1 次元熱伝導方程式は、1 次元空間におけるエネルギー方程式 (56) に間隙率 $\phi = 0$ を代入することで次のように求められる。

$$\frac{\partial\left(\rho_s c_s T(x,t)\right)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \tag{111}$$

温度分布を $T(x,t)$[K]、熱拡散係数を $\kappa[\mathrm{m^2/s}]$ とおくと、この方程式は

$$\kappa = \frac{\lambda}{\rho_s c_{p,s}} \tag{112}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \tag{113}$$

と表される。そして、半無限遠の棒の初期条件と境界条件を以下のように設定する。

$$T\left(x,0\right) = T_0 \quad (\text{初期条件}) \tag{114}$$

$$T\left(0,t>0\right) = T_b \quad (\text{境界条件 } 1) \tag{115}$$

$$\left.\frac{\partial T\left(x,t\right)}{\partial x}\right|_{x=\infty} = 0 \quad (\text{境界条件 } 2) \tag{116}$$

問題を定式化できた。これを解くために新たな変数として

$$f(x,t) = T(x,t) - T_0 \tag{117}$$

を導入すると、問題は

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \quad (\text{支配方程式}) \tag{118}$$

$$f\left(x,0\right) = 0 \quad (\text{初期条件}) \tag{119}$$

$$f\left(0,t>0\right) = T_b - T_0 \quad (\text{境界条件 } 1) \tag{120}$$

$$\left.\frac{\partial f\left(x,t\right)}{\partial x}\right|_{x=\infty} = 0 \quad (\text{境界条件 } 2) \tag{121}$$

として書き換えられる。この支配方程式と境界条件をラプラス変換する。両辺を $\int_0^\infty e^{-st}dt$ で積分すると、

$$sF\left(x,s\right) - f\left(x,0\right) = \kappa \frac{\partial^2 F(x,s)}{\partial x^2} \quad (\text{支配方程式}) \tag{122}$$

$$F\left(0,s\right) = \frac{T_b - T_0}{s} \quad (\text{境界条件 } 1) \tag{123}$$

$$\left.\frac{\partial F\left(x,s\right)}{\partial x}\right|_{x=\infty} = 0 \quad (\text{境界条件 } 2) \tag{124}$$

となる。ただし、

$$F(x,s) = \int_0^\infty f(x,t) \exp\left(-st\right) \mathrm{d}t \tag{125}$$

である。そして、ラプラス変換後の支配方程式を境界条件下で解くと、解析解として

$$F\left(x,s\right) = \frac{T_b - T_0}{s} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\kappa}}x\right) \tag{126}$$

が得られる。ラプラス逆変換 $(F(s) \to f(t))$ の公式

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right) = \mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) \tag{127}$$

を使って、$F(x,s)$ をラプラス変換前の $f(x,t)$ に戻すと

$$f(x,t) = (T_b - T_0)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \tag{128}$$

となる。したがって、$f(x,t)$ と $T(x,t)$ の定義式より、1 次元熱伝導問題の解析解として

$$T\,(x,t) = T_0 + (T_b - T_0)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \tag{129}$$

が得られる。

6.1.2　解析解とシミュレーション結果の比較

計算条件は以下の表 5 のように設定した。図 11 に解析解とシミュレーション結果の比較を示す。

表 5　1 次元熱伝導問題の計算条件

パラメータ	解析解	シミュレータ
間隙率 ϕ	0	10^{-10}
固相の熱伝導率 $\lambda[\mathrm{W\cdot m^{-1}K^{-1}}]$	1.0	1.0
固相の比熱 $c_s[\mathrm{J\ kg^{-1}\ K^{-1}}]$	1000	1000
固相の密度 $\rho_s[\mathrm{kg\ m^{-3}}]$	3000	3000
時間刻み $\Delta t[s]$	—	100

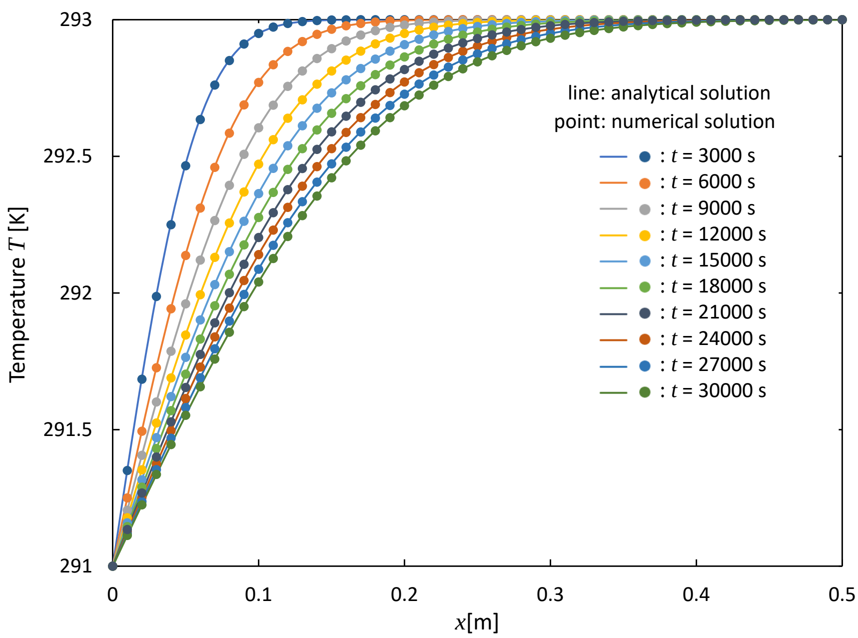

図 11　非定常熱伝導問題の解析解とシミュレーション結果の比較

図 11 からわかるように、解析解とシミュレーション結果は良い一致を示した。したがって、開発したシミュレータが熱伝導現象を再現できることが確認された。

6.2　1 次元水平方向地下水流動問題

開発したシミュレータを 1 次元水平方向の地下水流動問題の解析に適用する。1 次元水平方向の地下水流動問題は、基本的に 1 次元熱伝導問題における温度 T[K] を間隙水圧 p[Pa] に置き換えたものと考えてよい。一様な間隙水圧 $p(x, t = 0) = p_0$[Pa] の半無限遠の棒を想定する。この棒は均一で、間隙率 ϕ を持つ。時刻 $t = 0\ s$ のときに片端が急に $p(x = 0, t = 0) = p_b$[Pa] の間隙水圧に変化し、その水圧が保たれるとする。この条件の下、ある時刻 t[s] における半無限遠の棒の間隙水圧分布 $p(x, t)$ を求める問題を、1 次元水平方向の地下水流動問題として定義する。本項目では、この地下水流動問題の解析解と開発したシミュレータの出力する結果を比較する。解析解とシミュレーション結果の一致は、シミュレータが地下水流動を正しく再現できることを意味する。

6.2.1　1 次元水平地下水流動問題の支配方程式

よく知られるように、被圧帯水層中における一様密度の流体の飽和浸透流の支配方程式は

$$S_s \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla h) \tag{130}$$

で表される。ただし、$K[\mathrm{m}^2]$ は透水係数、S_s は比貯留係数、h[m] は全水頭、$\beta_s[\mathrm{Pa}^{-1}]$ は固相の圧縮率、$\beta_w[\mathrm{Pa}^{-1}]$ は水の圧縮率で、それぞれ

$$K = \frac{k \rho g}{\mu} \tag{131}$$

$$S_s = \rho_w g \left(\beta_s + \phi \beta_w\right) \tag{132}$$

$$h = \frac{p}{\rho_w g} + z + \frac{\boldsymbol{q}^2}{2g} \tag{133}$$

である。今考えたい問題は、一次元の水平な地下水流れなので

$$z(x) = z_0 \ (\text{定数}) \tag{134}$$

である。また、地下水の流れはゆっくりなため、運動エネルギーは他の項と比べて無視できるとする。そして、半無限遠の棒の初期条件と境界条件を以下のように設定する。

$$h(x, 0) = \frac{p_0}{\rho_w g} + z_0 \quad (\text{初期条件}) \tag{135}$$

$$h(0, t) = \frac{p_b}{\rho_w g} + z_0 \quad (\text{境界条件 1}) \tag{136}$$

$$\left. \frac{\partial h\,(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\infty} = 0 \quad (\text{境界条件 2}) \tag{137}$$

透水係数が一様であれば、一次元水平方向の地下水流動問題の支配方程式は

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{K}{S_s} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{138}$$

と表すことができる。この方程式は 1 次元熱伝導方程式と同型であり、熱伝導問題の解法を参考に、初期条件と境界条件下で解けば

$$h(x,t) = h(x,0) + (h(0,t) - h(x,0))\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt/S_s}}\right) \tag{139}$$

として解析解が得られる。本問題の解析解では水の密度を固定値として仮定するため、全水頭分布 $h(x,t)$ を得ることは間隙水圧分布 $p(x,t)$ を得ることと同義である。シミュレータは水の密度を固定値として扱わないが、水の密度の圧力変化は非常に小さいため（境界圧力の設定を水密度の圧力変化が小さい範囲にとどめるということ。）、解析結果の良好な一致を期待できる。

6.2.2 解析解とシミュレーション結果の比較

計算条件は以下の表 6 のように設定した。図 12 に解析解とシミュレーション結果の比較を示す。

表 6　1 次元水平方向地下水流動問題の計算条件

パラメータ	解析解	シミュレータ
間隙率 ϕ	0.3	0.3
固相の圧縮率 β_s [Pa^{-1}]	1.0×10^{-7}	1.0×10^{-7}
水の圧縮率 β_w [Pa^{-1}]	4.4×10^{-10}	TEOS-10 の出力
水の粘性 μ[Pa s^{-1}]	1.0×10^{-3}	1.0×10^{-3}
透水率 k[m^2]	1.0×10^{-12}	1.0×10^{-12}
固相の密度 ρ_s[kg m^{-3}]	3000	3000
水の密度 ρ_w[kg m^{-3}]	1000	TEOS-10 の出力
時間刻み $\Delta t[s]$	—	1.0×10^{-3}

図 12 からわかるように、解析解とシミュレーション結果は良い一致を示した。したがって、開発したシミュレータが地下水流動現象を再現できることが確認された。

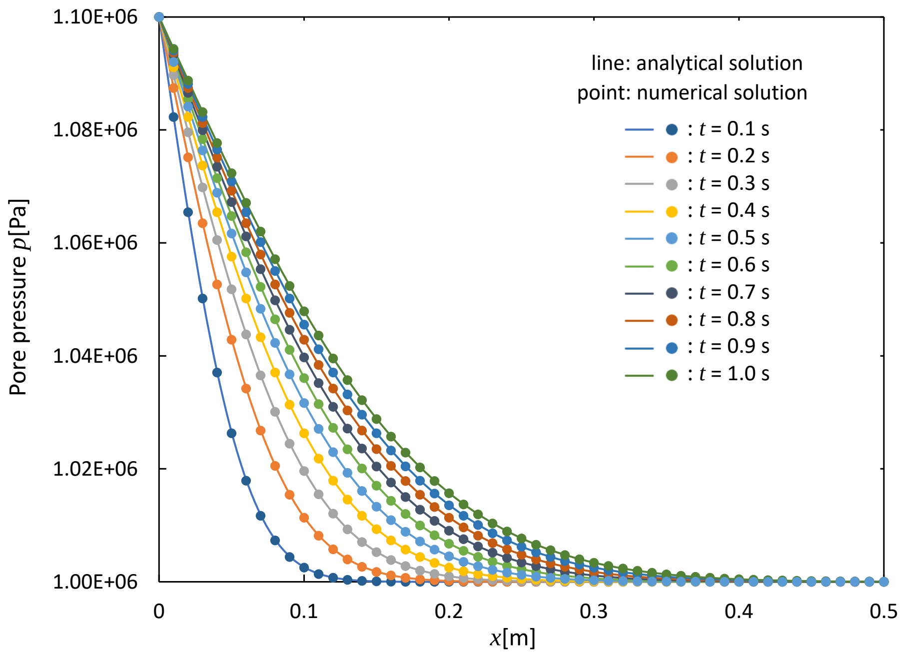

図 12　非定常地下水流動問題の解析解とシミュレーション結果の比較

6.3　地中熱交換器を線熱源とした 2 次元地下水流れ–熱輸送問題

開発したシミュレータを地中熱交換器を線熱源とした 2 次元地下水流れ–熱輸送問題の解析に適用する。ここまで熱伝導問題と地下水流動問題を解析することで、開発したシミュレータが熱伝導現象と地下水流動を再現できることを確かめた。本項目では、熱伝導現象と地下水流動に加えて地下水流れによる熱の輸送現象をシミュレートすることで、エネルギー方程式中の地下水移流による熱輸送項の検証を行う。

均一な材質（各種パラメータは表 7 に示す）の水平 2 次元平面を考える。この平面は x 軸方向に一定の圧力勾配（固定値）を持ち、x 軸方向に一定速度 $q_x[\mathrm{m\ s^{-1}}]$ の地下水流れが存在する。また、この平面には無限小の大きさの熱交換器が埋め込まれている。熱交換器は常に一定の熱量 $q_L[\mathrm{W\ m^{-1}}]$ を放出している。この状況は、均質な地中に無限長の熱交換器を垂直に埋め込み、十分に深い位置で水平方向に切り取ったものと解釈できる。

さて、平面の初期温度分布を $T(x, y, t = 0) = T_0[\mathrm{K}]$ と仮定する。時間の経過とともに熱交換器の放出する熱は周囲の岩石に熱伝導し、温度が上昇する。また、x 軸方向に地下水流れが存在するため、熱交換器から伝播した熱は地下水流れによって輸送される。その結果、風上側に急峻な温度勾配が形成され、風下に緩やかな温度勾配が形成されることが予想される。図 13 に本問題の概念図を示す。

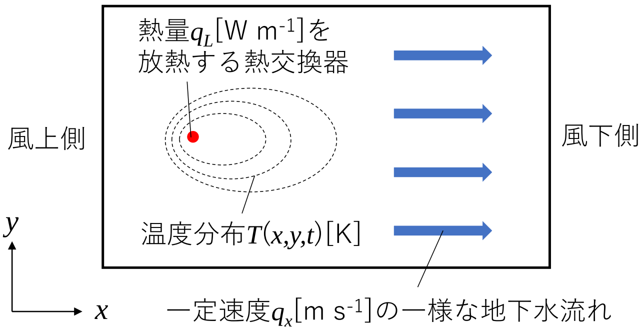

図 13　地中熱交換器を線熱源とした 2 次元地下水流れ–熱輸送問題の概念図

6.3.1　支配方程式と解析解

本問題は、水平な 2 次元空間におけるエネルギー方程式 (56) によって以下のように定式化される。

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + q_x \rho_w c_w \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{(支配方程式)} \tag{140}$$

$$\rho c = \phi \rho_w c_w + (1 - \phi) \rho_s c_s \tag{141}$$

初期条件として

$$T(x, y, t = 0) = T_0 \quad \text{（初期条件）} \tag{142}$$

また一定の熱量を放出し続ける熱交換器を、境界条件として

$$q_L = -2\pi\lambda \lim_{r\to 0} r\frac{\partial T}{\partial r} \quad （境界条件） \tag{143}$$

以上のように設定する。この問題の解析解は Diao ら (2004) によって以下のように導出されている。

$$\Delta T\left(x,y,z,t\right) = \frac{q_L}{4\pi\lambda}\exp\left(\frac{v_T x}{2\kappa}\right) \times \int_0^{v_T^2 t/4\kappa} \frac{1}{\psi}\exp\left(-\psi - \frac{v_T^2\left(x^2+y^2\right)}{16\kappa^2\psi}\right)\mathrm{d}\psi \quad （解析解） \tag{144}$$

$$v_T = q_x\frac{\rho_w c_w}{\rho c} \tag{145}$$

6.3.2　解析解とシミュレーション結果の比較

水平右方向に一定速度の地下水流れを発生させるため、シミュレーションでは $-q_x k/\mu[Pa\ m^{-1}]$ の水圧勾配をつける。単位長さあたりの熱交換器が地下に与える熱量は q_L[W/m] で与えられる。熱交換器に対応するメッシュの大きさを $\Delta x\Delta y\Delta z$ とする。このメッシュに熱交換器から与えられる熱量は $q_L\Delta z$[W] となる。したがって、このメッシュに熱交換器から与えられる単位体積当たりの熱量を計算すると $q_L\Delta z/\Delta x\Delta y\Delta z = q_L/\Delta x\Delta y$[W m^{-3}] となる。

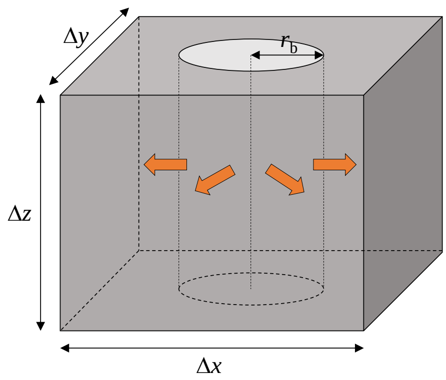

図 14　熱交換器に対応する数値メッシュ

計算条件は以下の表 7 のように設定した。図 15 に解析解とシミュレーション結果の比較を示す。また、図 16, 17, 18, 18 にいくつかの xz 平面、yz 平面で切り取ったときの温度分布の例を示した。また、解析解からシミュレーション結果を差し引いた誤差マップを以下の図に示す。

図 15 からわかるように、解析解とシミュレーション結果は比較的よく一致している。解析解とシミュレーション結果の誤差は図 20 の誤差マップから読み取れる。誤差は特に地下水移流の風上側（図の左側）で大きい。この要因として以下の 2 つが考えられる。まず一つ目は、解析解とシミュレーションにおける熱交換器の大きさの違いである。解析解は熱交換器の大きさを無限小として扱う。一方でシミュレータを使った数値解析ではメッシュサイズを有限とする必要があり、ここに避けられない誤差が生じてしまう。二つ目としては、解析解の出力が誤差を持っている可能性である。解析解は熱交換器位置 $(x,y)=(0,0)$ に特異点を持っており、特異点周囲の数値計算に不安が残る。今回解析解の出力は Mathematica による数値積分の結果を用いたが、より精度の高い計算手法で解析解を出力した場合、より一致する可能性がある。

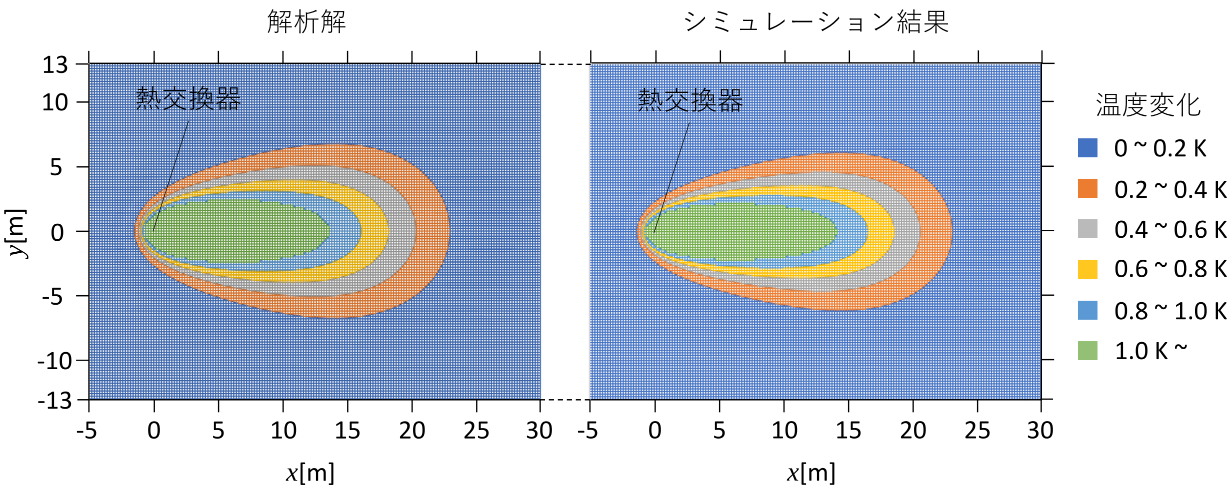

図 15　地下水移流による熱輸送問題の解析解とシミュレーション結果の比較

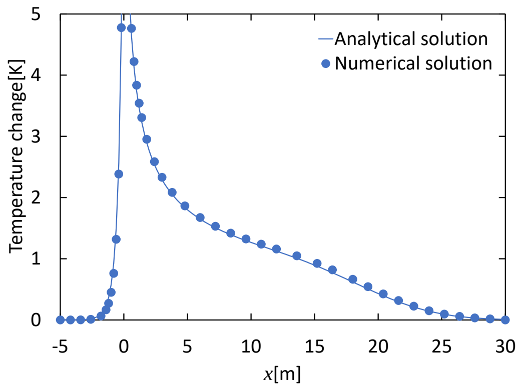

図 16　解析解と数値解の比較 ($y = 0$)

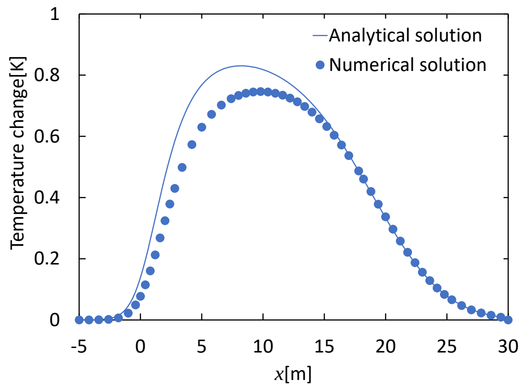

図 17　解析解と数値解の比較 ($y = 3$)

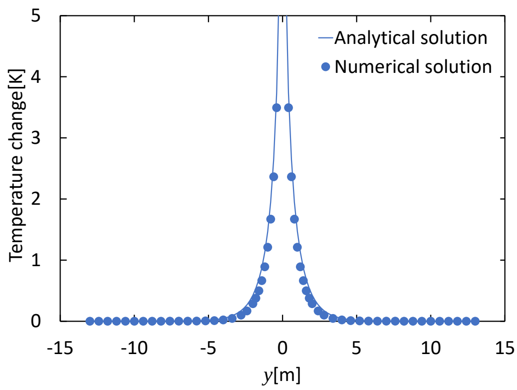

図 18　解析解と数値解の比較 ($x = 0$)

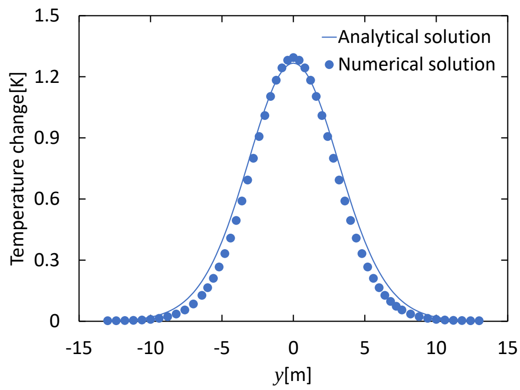

図 19　解析解と数値解の比較 ($x = 10$)

表 7　地下水移流による熱輸送問題の計算条件

パラメータ	解析解	シミュレータ
間隙率 ϕ	0.3	0.3
固相の圧縮率 β_s [Pa^{-1}]	1.0×10^{-7}	1.0×10^{-7}
固相の熱伝導率 λ_s[$\mathrm{W\ m^{-1}K^{-1}}$]	1.0	1.0
水の熱伝導率 λ_w[$\mathrm{W\ m^{-1}K^{-1}}$]	0.582	0.582
固相の比熱 c_s[$\mathrm{J\ kg^{-1}\ K^{-1}}$]	1000	1000
水の比熱 c_w[$\mathrm{J\ kg^{-1}\ K^{-1}}$]	4184	4184
水の粘性 μ[$\mathrm{Pa\ s^{-1}}$]	1.0×10^{-3}	1.0×10^{-3}
透水率 k[$\mathrm{m^2}$]	1.0×10^{-12}	1.0×10^{-12}
固相の密度 ρ_s[$\mathrm{kg\ m^{-3}}$]	3000	3000
水の密度 ρ_w[$\mathrm{kg\ m^{-3}}$]	1000	TEOS-10 の出力
空間刻み Δx[m]	—	0.10
時間刻み Δt[s]	—	5000

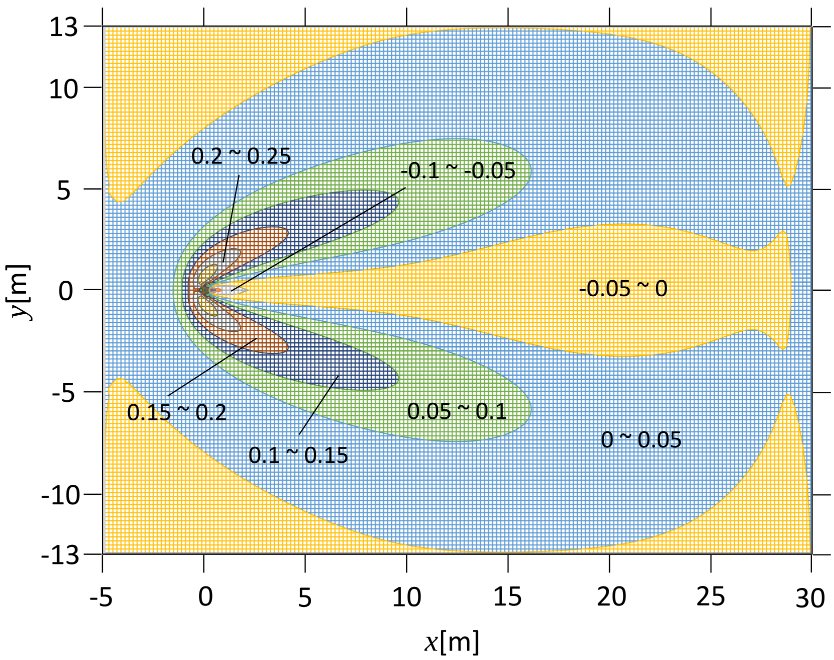

図 20　解析結果の誤差マップ（単位は K）

6.4　鉛直 1 次元流シミュレーション

開発したシミュレータがジュール･トムソン効果による地下水の温度変化を計算できるか検証する。Stauffer らが行った鉛直方向の温度誤差に関する数値実験をシミュレータで再現し、同様の結果が得られることを確認する。

6.4.1　Stauffer ら (2014) による数値実験の条件

Stauffer ら (2014) は 2 次元平面上でダルシー則に従う鉛直上向きの流れを、メタルピーとエンタルピーのそれぞれをエネルギー方程式に組み込んだ 2 つの手法でシミュレートし比較した。シミュレーション領域は鉛直方向に 1000 m、水平方向に 1000 m の大きさを持ち、等方な多孔質媒体で構成される 2 次元平面である。等間隔の格子状にグリッドを配置し、各グリッド間の幅は 4 m としている。領域の底辺 ($z = 0$) は 11.5 MPa、293 K に固定し、領域の上辺 ($z = 1000$) は 1.0 MPa、293 K に固定する（ディリクレ境界条件）。領域の横 2 辺の境界条件は、熱流束、地下水流速がゼロとする（ノイマン境界条件）。浸透率は $10^{-10}\mathrm{m}^2$、間隙率は 0.2 とする。熱伝導の効果を抑えるために、熱伝導係数は 0.1 W/m/K とする。計算条件をまとめたものを図 21 に示す。これらの計算条件は鉛直方向上向きのダルシー流速 $q = 6.3 \times 10^{-5}$ m/s を生み出すことが、Stauffer ら (2014) に報告されている。

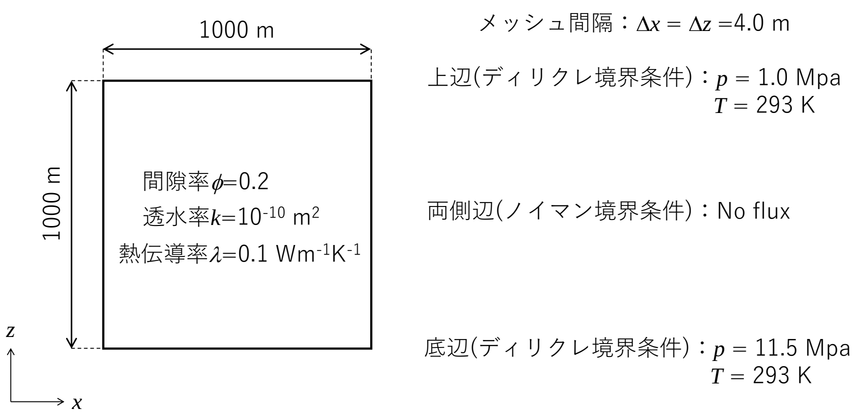

図 21　Stauffer ら (2014) による数値実験の条件

6.4.2　計算条件の設定

Stauffer らは 2 次元平面でシミュレーションを行っているが、この設定では x 軸方向に水圧勾配がないため水平方向の地下水流れが発生しない。そこで、計算量の節約のために本節では鉛直 1 次元流でシミュレーションを行う。また、計算対象は均質であるためメッシュ間隔をあまり細かくする必要性がないと考えられる。したがって、本節のメッシュ間隔 Δz は 50 m とする。設定した計算条件を以下の表 8 に示す。

表 8　鉛直 1 次元流シミュレーションの計算条件

パラメータ	Stauffer ら (2014)	本計算
間隙率 ϕ	0.2	0.2
固相の圧縮率 α_s [Pa^{-1}]	不明	1.0×10^{-7}
固相の熱伝導率 λ_s[$\mathrm{W\ m^{-1}K^{-1}}$]	0.1	0.1
水の熱伝導率 λ_w[$\mathrm{W\ m^{-1}K^{-1}}$]	不明	0.582
固相の比熱 c_s[$\mathrm{J\ kg^{-1}\ K^{-1}}$]	不明	1000
水の比熱 c_w[$\mathrm{J\ kg^{-1}\ K^{-1}}$]	不明	4184
水の粘性 μ[$\mathrm{Pa\ s^{-1}}$]	不明	1.0×10^{-3}
透水率 k[$\mathrm{m^2}$]	1.0×10^{-10}	1.0×10^{-10}
固相の密度 ρ_s[$\mathrm{kg\ m^{-3}}$]	不明	3000
水の密度 ρ_w[$\mathrm{kg\ m^{-3}}$]	不明	TEOS-10 の出力
空間刻み $\Delta x = \Delta z$[m]	4	50
時間刻み Δt[s]	不明	7×10^{-2}
計算終了時間	不明	1 年 (3.1536×10^7 s)

6.4.3　Stauffer らの鉛直流シミュレーションの再現結果

図 22 に Stauffer らの鉛直流シミュレーションの結果と開発したシミュレータでそれを再現した結果を重ねたものを示す。論文に明記されていないパラメータが多く、温度分布は完全には一致しなかったが、開発したシミュレータは Stauffer らの得た温度誤差と同じ大きさの温度誤差を出力した。したがって、開発したシミュレータがメタルピー保存形式の計算機能を備えていることが確認された。

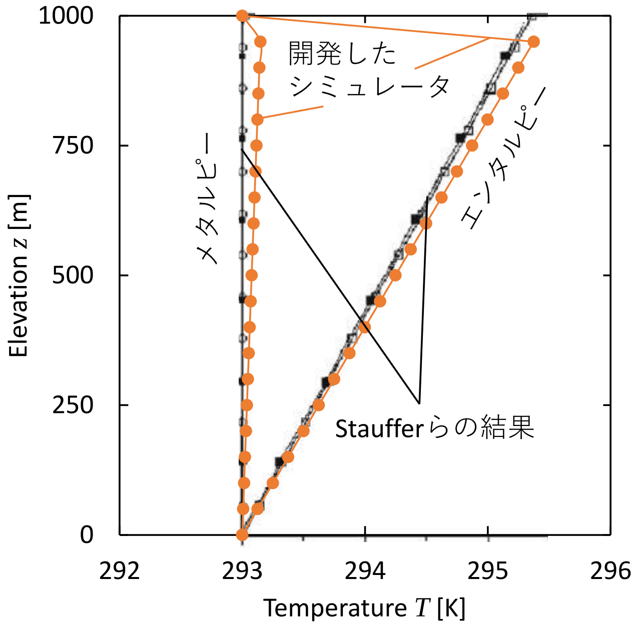

図 22　Stauffer らの鉛直流シミュレーション結果との比較

7　メタルピー形式とエンタルピー形式による数値実験

Stauffer ら (2014) は、メタルピーの微小変化から鉛直方向の温度–圧力勾配を以下のように示した。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\theta = (\alpha T - 1)\,\frac{1}{\rho_w c_w} - \frac{g}{c_p}\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)_\theta \tag{146}$$

Stauffer らのメタルピーに関する議論は、温度分布を支配するエネルギー方程式に言及していない。そのため、この温度–圧力勾配がどのような状況下で成り立つのかが不透明である。そこで本章では、地下水流速、移流方向、圧力勾配などを変化させてシミュレートし、様々な要因と温度誤差の関係性を明らかにする。

7.1　温度分布に影響を与える要因

いまメタルピーとエンタルピーに関する議論に集中するために、考える空間は鉛直 1 次元で間隙水圧分布 $\partial p/\partial z$ は固定されており流体の流速は一定値 q_z であるとする。固相と間隙流体の熱伝導率が十分に小さく熱伝導が無視できるとする。すると、温度分布の時間発展を記述するエネルギー方程式は以下のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\rho_w\theta + (1-\phi)\,\rho_s u\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\cdot\left(\rho_w\theta q_z\right) \tag{147}$$

流体の密度は変化しない (水の圧縮率 $\alpha = 0$) として定常状態を考えると

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(u + \frac{p}{\rho_w} + gz\right) = 0 \tag{148}$$

となる。$u = c_pT$ であるから、温度分布は

$$T(z) = T_0 - \frac{p - p_0}{\rho_w c_p} + \frac{g}{c_p}(z - z_0) \tag{149}$$

となる。この温度分布は、水の圧縮率 α をゼロとした場合の Stauffer らの導き出した温度勾配を圧力で積分したものと一致する。また、この計算から以下のことが考察される。

- 定常状態における温度分布に流速は現れない。
- 定常状態における温度分布は岩石の物性値の不均質性に影響を受けない。
- エンタルピー形式とメタルピー形式の温度誤差は系の圧力勾配に依存しない。
- エンタルピー形式とメタルピー形式の温度誤差は重力加速度と流体の比熱の比に比例する。
- メタルピーは移流によって輸送されるため、境界条件は移流の風上側のみが温度分布に反映される。

7.2　地下水流速を変化させた場合の温度分布

温度分布が流速に依存性を持つか検証するため、Stauffer らの鉛直 1 次元流シミュレーションの透水係数を変化させて温度分布を確認した。いずれの流速条件においても、温度分布の時間変化が小さくなるまでシミュレーションを行い定常状態に近いと考えられる結果を得た。図 23 に鉛直方向の温度分布を、図 23 に温度誤差 ΔT（エンタルピー形式の温度分布－メタルピー形式の温度分布）を示した。図 23 から温度分布に流速は依存しないことがわかる。したがって、必然的に温度誤差も流速に依存しないことがわかる（図 24)。また、温度誤差 ΔT–z の傾き 426.7 $m\ K^{-1}$ は、$c_p/g = 4184/9.8 = 426.9$ に一致する。

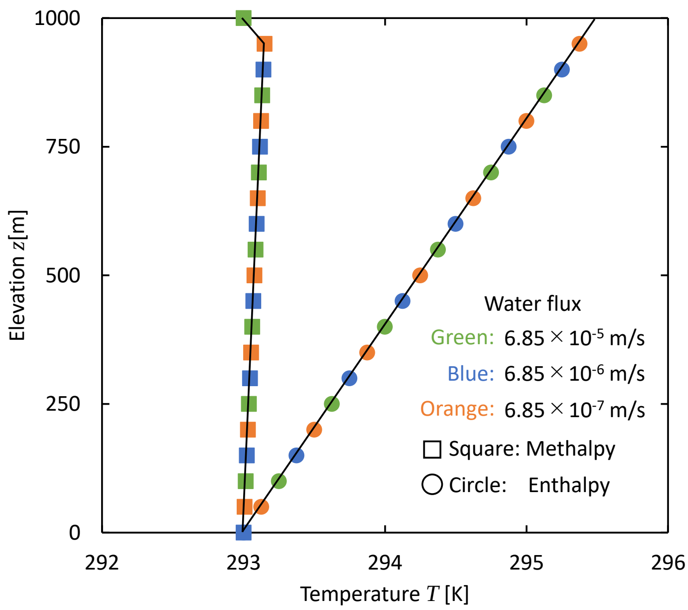

図 23　流速を変化させた場合のエンタルピーとメタルピーの温度分布

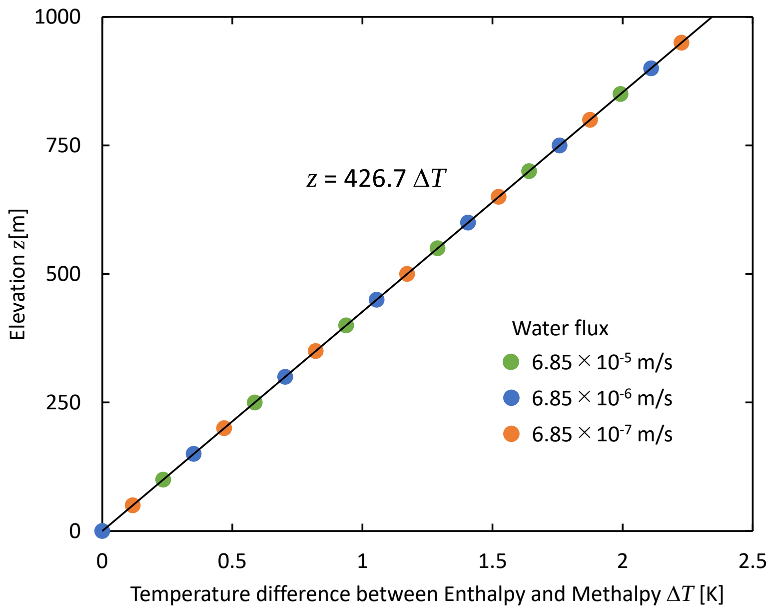

図 24　エンタルピーとメタルピーの温度差（流速比較）

7.3　圧力勾配を変化させた場合の温度分布

温度分布が圧力勾配に依存性を持つか検証するため、Stauffer らの鉛直 1 次元流シミュレーションの境界圧力を変化させて温度分布を確認した。圧力勾配の異なるシミュレーションを比較するが、圧力勾配以外の条件を同一にしたいため、同一の流体流速となるよう透水係数の値を調整した。図 25 に鉛直方向の温度分布を、図 26 に温度誤差 ΔT（エンタルピー形式の温度分布－メタルピー形式の温度分布）を示した。図 25 からエンタルピー保存形式とメタルピー保存形式の両方の温度勾配が圧力勾配の影響を受けていることがわかる。しかし 2 つの形式の差をとった温度誤差分布を見てみると（図 26）、温度誤差 ΔT は圧力勾配に依存しないことがわかる。

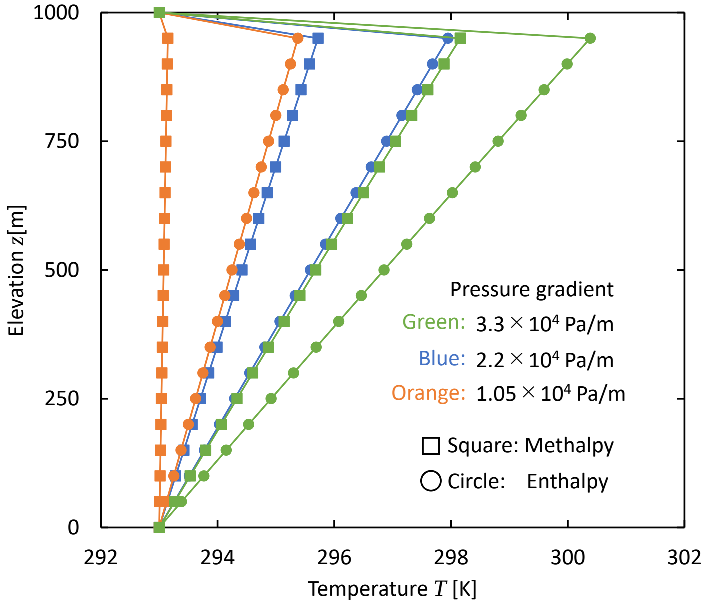

図 25　圧力勾配を変化させた場合のエンタルピーとメタルピーの温度分布

7.4　流体の比熱を変化させた場合の温度依存性

温度分布が流体の比熱に依存性を持つか検証するため、Stauffer らの鉛直 1 次元流シミュレーションで流体の比熱を変化させて温度分布を確認した。図 27 に鉛直方向の温度分布を、図 28 に温度誤差 ΔT（エンタルピー形式の温度分布－メタルピー形式の温度分布）を示した。図 27 から、いずれの流体の比熱の場合でもメタルピー保存形式の場合は温度勾配がほとんどゼロであり、一方でエンタルピー保存形式の温度勾配は流体の比熱の影響を強く受けていることがわかる。図 28 で詳しく温度誤差 ΔT をみると、温度誤差が重力加速度と流体の比熱の比 g/c_p に比例していることがわかる。例えば、流体の比熱 $c_p = 2092\ J\ kg^{-1}\ K^{-1}$ のとき、重力加速度と流体の比熱の比 g/c_p は

$$\frac{g}{c_p} = \frac{9.8}{2092} = 4.68 \times 10^{-3} \tag{150}$$

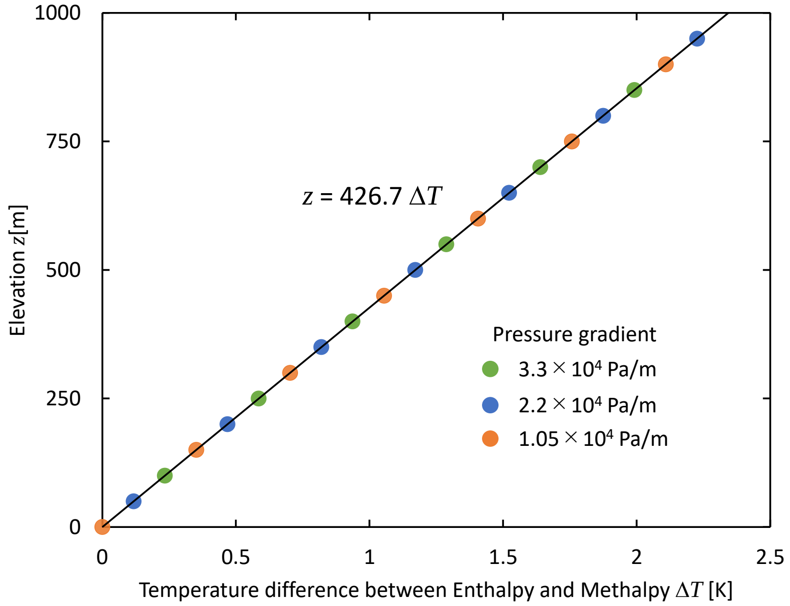

図 26　エンタルピーとメタルピーの温度差（圧力勾配比較）

となる。これの逆数を取ると 213.7 であり、図 28 の $c_p = 2092\ \mathrm{J\ kg^{-1}\ K^{-1}}$ に対応する直線の傾きに一致する。

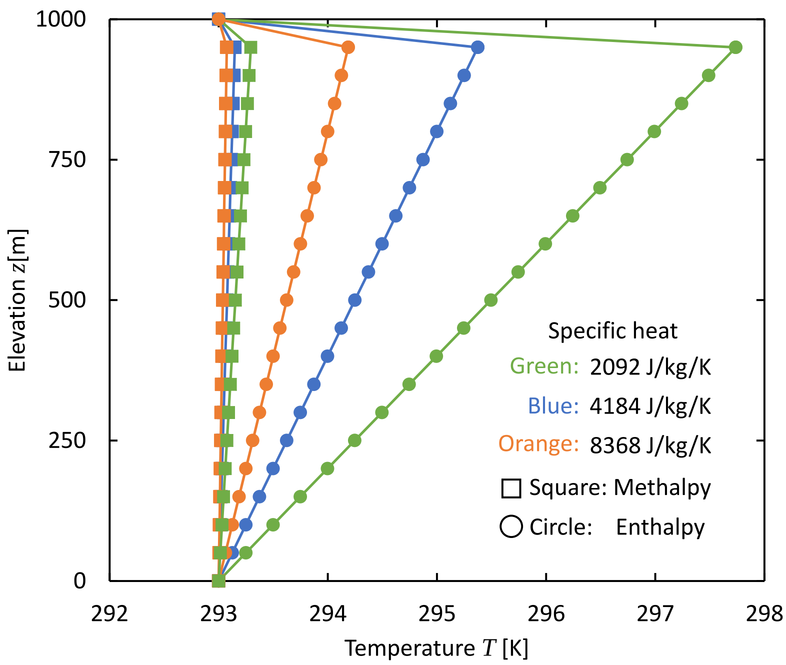

図 27　流体の比熱を変化させた場合のエンタルピーとメタルピーの温度分布

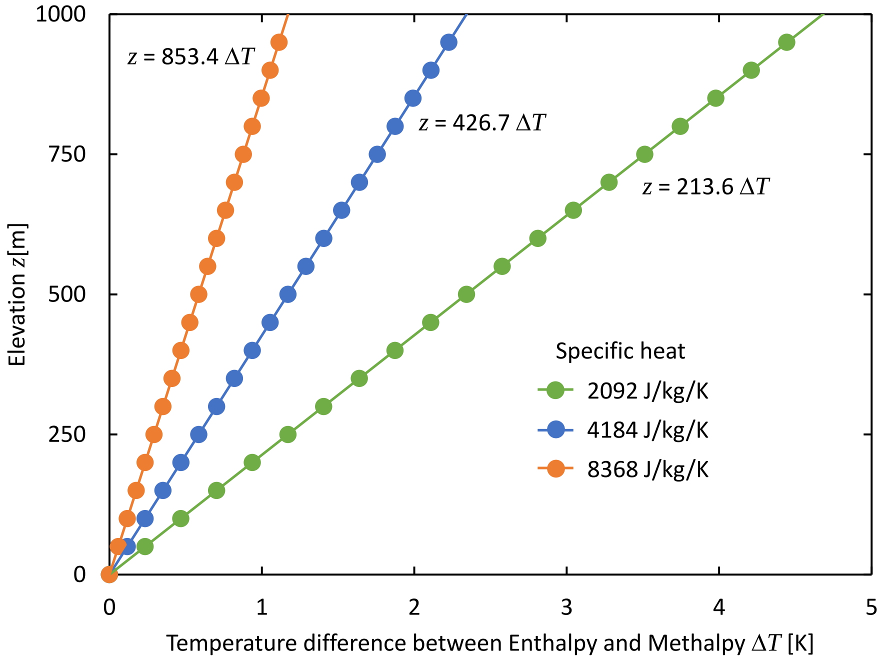

図 28　エンタルピーとメタルピーの温度差（流体の比熱比較）

7.5　鉛直下方向の流れによる温度分布

これまで鉛直上方向の流れの検証を行ってきたが、鉛直下方向の流れによってどのような温度分布が形成されるかを確認した。物性条件は Stauffer らの鉛直 1 次元流シミュレーションと同一の値を設定した。境界圧力は下端圧力を 10.0 MPa、上端圧力を 1.0 MPa で固定した。その結果として鉛直下方向に 8.13×10^{-5} m s^{-1} の地下水流れが形成された。図 27 にこのときの鉛直方向の温度分布を、図 28 に温度誤差 ΔT（エンタルピー形式の温度分布－メタルピー形式の温度分布）を示した。これまで鉛直上方向の流れが形成する温度分布では、エンタルピーは温度上昇を過大評価していた。しかし今回図 27 からわかることは、鉛直下方向の流れではエンタルピーは流れに伴う温度の降下を過大評価していることである。また図 28 で温度誤差 ΔT の傾きに着目すると、流れの方向が 180 度変化しても重力加速度と流体の比熱の比で決定される温度誤差の勾配は変化しないことがわかる。

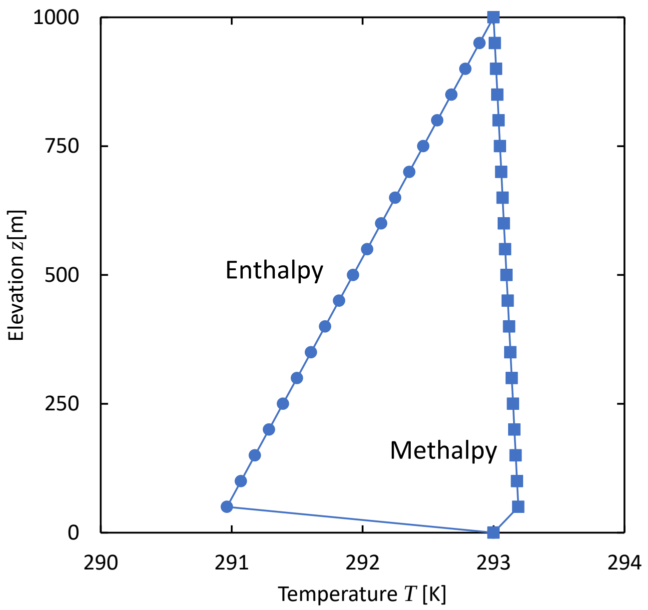

図 29　鉛直下方向の流れの場合のエンタルピーとメタルピーの温度分布

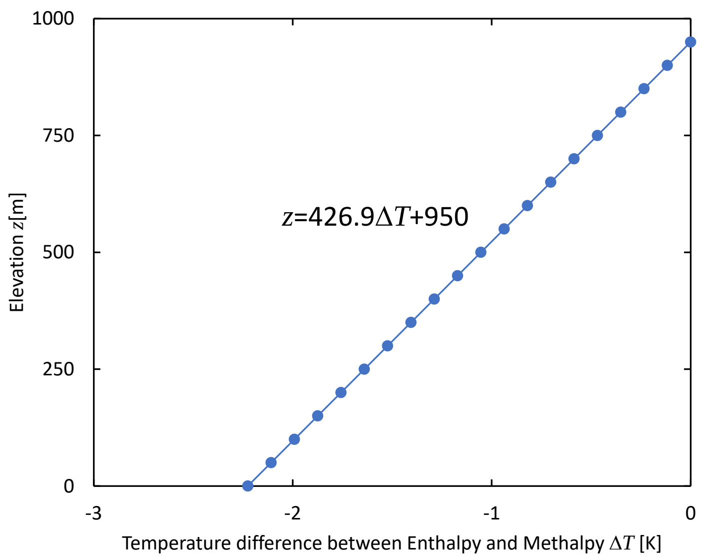

図 30　エンタルピーとメタルピーの温度差（鉛直下方向の流れ）

7.6 考察

本章で得られた結果を整理すると、以下のようになる。

定常状態における温度分布に対して、地下水流速の大きさは何ら寄与しない。したがって、Stauffer らは一般的な地下水流速の観点から言えばかなり速い地下水流れで鉛直流シミュレーションを行っているが、どんな速さの流れでも流れてさえいれば最終的に形成される温度分布に流速は影響を与えない。もっとも、初期状態として均一な温度分布を与えている場合は定常状態に至る時間の速さは、流速に依存する。速い地下水流れは熱輸送を高速に行うため、高速に定常状態に至る。しかし現実の地下水環境ははるか昔から存在しているため、定常状態に至るまでの時間の議論はあまり意味がないと考えられる。例えば地下温度分布に人為的な改変が加わった後、どれくらいの時間放置すれば元の温度環境に戻るか、といった議論でしか役に立たない。

次に、温度分布の圧力依存性について述べる。定常状態の温度分布に対して、圧力は大きな影響を与える。流体が圧力勾配に逆らって（もしくは従って）鉛直方向に流動するとき、流体が外部になす仕事（あるいはされる仕事）は圧力に比例する。したがって圧力勾配が大きい状況下においては、移流に伴う温度変化はより大きくなる。その一方で圧力勾配は、メタルピー保存形式とエンタルピー保存形式の差が生み出す温度誤差に対して何ら寄与しない。温度誤差に関しては、圧力勾配が大きかろうと小さかろうと一定値である。

次に、温度分布の流体の比熱依存性について述べる。流体の比熱は、メタルピー保存形式とエンタルピー保存形式の差が生み出す温度誤差の大きさを変化させる（重力加速度を除けば）唯一の要因である。図 28 でみたように、流体の比熱が小さいほどエンタルピー保存形式の温度誤差は大きくなる。水以外の流体の温度誤差を検討する際には、流体の比熱を水の比熱と比較することで誤差を見積もることができる。例えばメタンの流動に伴う温度誤差を検討する場合、メタンの比熱は水の比熱の約半分であるから、鉛直方向 1000 m の流動に伴う温度誤差は $2.3\ \mathrm{K} \times c_{\mathrm{water}}/c_{\mathrm{methan}}$ を計算して、水の 2 倍である 4.6 K であることがわかる。

鉛直下方向の流れに関する検討より、温度勾配は鉛直上向きの流れと全く同じであることが判明した。エンタルピー保存形式の温度誤差は、鉛直上向きの流れの際は温度を実際よりも高く見積もっていたが、鉛直下向きの流れの際は温度を実際よりも低く見積もることになる。温度誤差の大きさ自体は流体の比熱にのみ依存するため、鉛直上向き流れの見積もりの高低を反転させて考えることができる。

以上をまとめると、以下のようになる

1. 定常状態における温度分布に対して地下水流速の大きさは寄与しない。
2. 圧力勾配は定常状態における温度分布に対して寄与するが、温度誤差に対しては寄与しない。
3. 鉛直方向の流動に対してエンタルピーが含む温度誤差の大きさは $g\Delta z/c_p$ で与えられる。
4. エンタルピーは、鉛直上向き流れのときは実際よりも高く温度を見積もり、鉛直下向き流れのときは実際よりも低く温度を見積もる。

8　地下水凍結のシミュレーション

8.1　地下水凍結の物理

相転移付近の温度域では、わずかな温度誤差がシミュレーション結果に大きく影響することが予想される。そこで開発したシミュレータに地下水凍結をシミュレートする機能を付与した。

8.1.1　支配方程式

地下水の質量保存則として以下の式を使用する。

$$\frac{\partial(\rho_w \phi S_w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \boldsymbol{q}) = 0 \tag{151}$$

エネルギー方程式として以下の式を使用する。

$$\frac{\partial E_{\mathrm{bulk}}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_w \theta \boldsymbol{q} + \boldsymbol{J}) \tag{152}$$

バルクのエネルギー $E_{\mathrm{bulk}}(T, p)$ は次のように表される。

$$E_{\mathrm{bulk}}(T,p) = \phi \cdot S_w \cdot (\rho_w c_w T + p + \rho_w g z) + \phi \cdot S_i \rho_i c_i T + (1-\phi) \cdot \rho_s c_s T + \phi\,(1 - S_w) \cdot \rho_i L_f \tag{153}$$

ただし、上式はメタルピー形式であり、エンタルピー形式のときは重力加速度はゼロとなる ($g = 0$)。L_f は水と氷の相転移にかかる単位質量あたりの潜熱（単位は J/kg）である ($L_f = 334720$ J/kg)。

図 31 に温度変化に伴う氷の飽和度 S_i（水の飽和度と言い換えてもよい）の変化の概念図を示す。

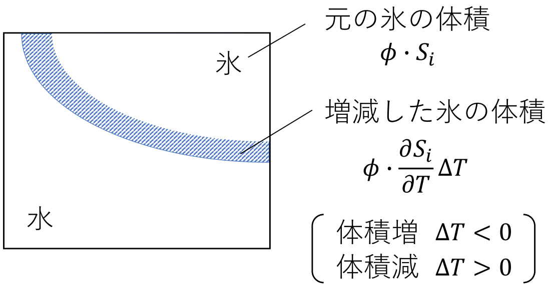

図 31　温度変化に伴う氷の飽和度の変化

熱伝導率 λ は以下のように表す。

$$\lambda = \phi S_w \lambda_w + \phi S_i \lambda_i + (1-\phi)\,\lambda_s \tag{154}$$

8.1.2　水と氷の飽和度

S_w, S_i はそれぞれ間隙中の水の飽和度、氷の飽和度である。したがって、たとえば間隙 ϕ を持つ体積素片 V 中の水の体積は $\phi S_w V$ である。以上の定義から

$$S_i + S_w = 1 \tag{155}$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial T} = -\frac{\partial S_w}{\partial T} \tag{156}$$

が成り立つ。飽和度 S_w と S_i は Linear freezing function で表現する。

$$\begin{cases} S_w = mT + 1 \quad (T > B_T) \\ S_w = S_{wres} \quad (T < B_T) \end{cases} \tag{157}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S_w}{\partial T} = m \quad (T > B_T) \\ \\ \dfrac{\partial S_w}{\partial T} = 0 \quad (T < B_T) \end{cases} \tag{158}$$

$$m = 1.0, \quad S_{wres} = 0.1, \quad B_T = -0.9\ ^{\mathrm{o}}\mathrm{C} \tag{159}$$

図 32 に Linear freezing function を示す。

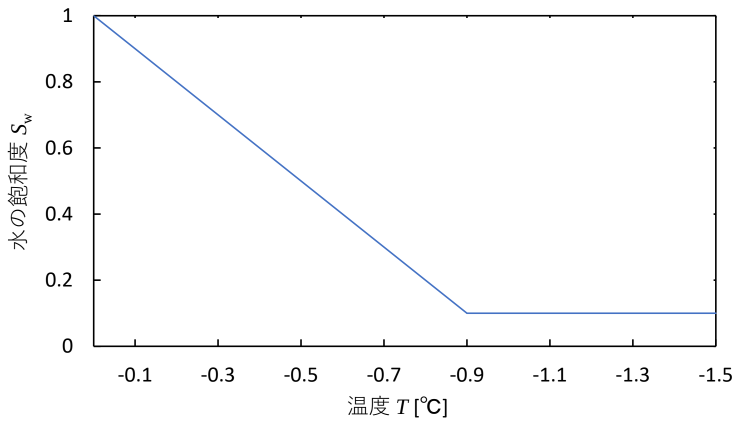

図 32　Linear freezing function

8.1.3　浸透率の変化

間隙中の水の飽和度が変化すると、地盤の浸透率が変化する。例えば地盤の温度が下がり、間隙中の水の飽和度が減少した場合、浸透率が減少し地下水流速が遅くなることが予想される。これを表現するために、以下の式で浸透率を表す。

$$k = k_{\mathrm{rw}} \cdot k_{\mathrm{soil}} \tag{160}$$

$$k_{\mathrm{rw}} = \frac{S_w^4}{\left(1 + \sqrt{1 - S_w}\right)^2} \tag{161}$$

8.1.4　ニュートン法のための偏微分計算

前項目の支配方程式で示したように、新たに氷の存在を考えることで、間隙中の水の質量とバルクのエネルギーが書き変えられた。したがって、ニュートン法のための偏微分計算も書き直す必要がある。

まず、間隙中の水の質量の偏微分から計算する。

$$\frac{\partial \rho_w \phi S_w}{\partial T} = \frac{\partial \rho_w}{\partial T}\phi S_w + \rho_w \frac{\partial \phi}{\partial T} S_w + \rho_w \phi \frac{\partial S_w}{\partial T} \tag{162}$$

$$\frac{\partial \rho_w \phi S_w}{\partial p} = \frac{\partial \rho_w}{\partial p}\phi S_w + \rho_w \frac{\partial \phi}{\partial p} S_w \tag{163}$$

次に、バルクのエネルギーの偏微分を計算する。まず温度に関する偏微分から計算する。バルクのエネルギー式 (153) を以下のように表す。

$$\frac{\partial E_{\text{bulk}}}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}((\text{1st term}) + (\text{2nd term}) + (\text{3rd term}) + (\text{4th term})) \tag{164}$$

各項に関する偏微分計算を行うと

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T}(\text{1st term}) &= \frac{\partial}{\partial T}(\phi \cdot S_w \rho_w (c_w T + gz)) \\ &= S_w \cdot \frac{\partial}{\partial T}(\phi \rho_w (c_w T + gz)) + \phi \rho_w (c_w T + gz) \cdot \frac{\partial S_w}{\partial T} \end{aligned} \tag{165}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}(\text{2nd term}) = \frac{\partial}{\partial T}(\phi \cdot S_i \rho_i c_i T) = S_i \cdot \frac{\partial}{\partial T}(\phi \rho_i c_i T) + \phi \rho_i c_i T \cdot \frac{\partial S_i}{\partial T} \tag{166}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}(\text{3rd term}) = \frac{\partial}{\partial T}((1-\phi) \cdot \rho_s c_s T) \tag{167}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}(\text{4th term}) = \frac{\partial}{\partial T}(\phi (1 - S_w) \rho_i L_f) = \frac{\partial \phi}{\partial T}(1 - S_w) \rho_i L_f + \phi \frac{\partial (1 - S_w)}{\partial T} \rho_i L_f \tag{168}$$

となる。これと同様に圧力に関する偏微分を行うと

$$\frac{\partial}{\partial p}(\text{1st term}) = \frac{\partial}{\partial p}(\phi \cdot S_w \rho_w (c_w T + gz)) = S_w (c_w T + gz) \cdot \frac{\partial}{\partial p}(\phi \rho_w) \tag{169}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}(\text{2nd term}) = \frac{\partial}{\partial p}(\phi \cdot S_i \rho_i c_i T) = S_i \rho_i c_i T \cdot \frac{\partial \phi}{\partial p} \tag{170}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}(\text{3rd term}) = \frac{\partial}{\partial p}((1-\phi) \cdot \rho_s c_s T) = -\rho_s c_s T \cdot \frac{\partial \phi}{\partial p} \tag{171}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}(\text{4th term}) = \frac{\partial}{\partial p}(\phi (1 - S_w) \rho_i L_f) = \frac{\partial \phi}{\partial p}(1 - S_w) \rho_i L_f \tag{172}$$

となる。

9 結言

本研究ではメタルピー保存形式の地下水流動–熱輸送連成解析シミュレータ開発とそれを用いた数値実験を行った。以下に結論をまとめる。

9.1 結論

地下水流動による熱輸送過程において、流体のエネルギーとしてエンタルピーを用いることは鉛直方向に温度誤差を生じさせる。Stauffer らは温度誤差に対して定量的な説明を試みるとともに、問題の解決策として熱収支計算で保存されるべき量としてメタルピーを挙げた。そこで本研究は、メタルピー保存形式のシミュレータ開発のため地下水流動–熱輸送連成解析の数学モデルを整理した。地下のモデル化の仮定の上でシミュレーションプログラムを構築し、解析解との比較により開発したシミュレータの妥当性を検証した。また Stauffer らの鉛直流シミュレーションとの比較によりメタルピー保存形式での計算機能の検証を行った。

次に、エンタルピー保存形式による温度誤差について複数の数値実験を行い以下の知見を得た。

1. 定常状態における温度分布に対して地下水流速の大きさは寄与しない。
2. 圧力勾配は定常状態における温度分布に対して寄与するが、温度誤差に対しては寄与しない。
3. 鉛直方向の流動に対してエンタルピーが含む温度誤差の大きさは $g\Delta z/c_p$ で与えられる。
4. エンタルピーは、鉛直上向き流れのときは実際よりも高く温度を見積もり、鉛直下向き流れのときは実際よりも低く温度を見積もる。

水と氷の相転移付近の温度域でのシミュレーションを見据えて地下水凍結のシミュレーション機能を、開発したシミュレータに付与した。温度が 0 度以上のときには間隙中を占める氷の飽和度はゼロとなり、凍結シミュレート機能を付与する前の支配方程式と完全に一致する。

9.2 今後の課題

本研究ではメタルピー保存形式での計算機能を備えた地下水流動–熱輸送連成解析シミュレータを開発した。このシミュレータはエンタルピー保存形式のシミュレータと比べて鉛直方向の大きな地下水流動に伴う地下温度の推定に高い精度を持つ。しかし、理論的な整合性のあるシミュレータを開発しても実用性に乏しかったらシミュレータの存在価値も高くはない。今後、実際の観測データを用いた将来予測等のシミュレーションを行うことで、シミュレータの実用性が確認されるとともに新たな問題点の発見と改善の糸口が見えると考えられる。

参考文献

[1] Tóth, J. (1963), A theoritical analysis of groundwater flow in small drainage basins, Journal of Geophysical Research 68, 4795-812.

[2] 宮越昭暢, 内田洋平 (2001)：関東平野における地下温度分布と地下水流動系, 地質調査研究報告, 52, 253-290.

[3] Cermak, V. (1971), Underground temperature and inferred climatic temperature of the past millenium, Palaeogeogr., Palaeoclimatrol., Palaeoecol., 10, 1-19.

[4] Jessop, A. M. (1990), Thermal Geophysics, Elsevier, Amsterdam, 306p.

[5] 斎藤健志, 小松登志子 (2014)：地中熱ヒートポンプが地下環境に与える影響 – 持続的利用に向けて –, 地下水学会誌, **56**(1), 15–25.

[6] Sanner, B. (1986), Schwalbach ground-coupled heat pump (GCHP) research station, IEA Heat Pump Center Newsletter, 4(4), 8-10.

[7] Rybach, L. and Sanner, B. (2000), Ground-source heat pump systems: the European experience. Geo-Heat Center(GHC) Bulletin, March, 16-26.

[8] Rybach, L. and W. J. Eugster (1998), Reliable long term performance of BHE systems and market penetration - the Swiss success story. Proceedings of the Second Stockton International Geothermal Conference, 15p.

[9] W. J. Eugster and Rybach, L. (1998), Sustainable production from borehole heat exchanger systems. Proceedings World Geothermal Congress 2000, 825-830.

[10] Sowers, L., K.P. York and L. Stiles (2006), Impact of thermal buildup on groundwater chemistry and aquifer microbes. Proceedings of the Tenth International Conference on Thermal Energy Storage (ECOSTOCK 2006 Conference), 7p.

[11] M.A. Bernier, A. Chahla, P. Pinel (2008), Long-term ground temperature changes in geo-exchange systems, ASHRAE Transactions, 114, pp. 342-350.

[12] Banks, D. (2008), An introduction to thermogeology: ground source heating and cooling. Blackwell Publishing, 339p. ASHRAE Transactions, 114, pp. 342-350.

[13] Gabrielsson, A., U. Bergdahl and L. Moritz (2000), Thermal energy storage in soils at temperatures reaching 90 ℃. Journal of Solar Energy Engineering, 122(1), 3-8.

[14] Bonte, M., P.J. Stuyzand, A. Hulsmann and P. van Beelen (2011), Underground thermal energy storage: environmental risks and policy developments in the Netherlands and European Union, Ecology and Society, 16(1), 22.

[15] 滝沢智 (2011)：地下熱利用技術「8. 地下熱利用のための水質対策」, 地下水学会誌, 53(4), 401-409.

[16] Bonte, M., B.M. van Breukelen, P.W.J.J. Van Der Wielen and P.J. Stuyzand (2012), Biogeochemical impacts of aquifer thermal energy storage at 5, 12, 25 and 60oC investigated with anoxic column experiments. Geophysical Research Abstracts, 14, EGU2012-5592-1.

[17] 藤縄克之 (2010)：環境地下水学, 共立出版.

[18] Dodson M. H. (1971): Isenthalpic Flow, Joule-Kelvin Coefficients and Mantle Convection, Nature, 234,1971.

[19] Philip Stauffer, Joshua Stein, Bryan Travis (2003) : The correct form of the energy balance for fully coupled thermodynamics in water, Joule-Thomson Paper, LA-UR-03-1555, 1-9.

[20] Philip H. Stauffer, K. C. Lewis, Joshua S. Stein, Bryan J. Travis, Peter Lichtner, George Zyvoloski (2014) : Joule-Thomson Effects on the Flow of Liquid Water, Transport in Porous Media, **105**(3), 471-485.

[21] Steve Ingebritsen, Ward Sanford and Chris Neuzil (2006): Groundwater in Geologic Processes, SECOND EDITION, CAMBRIDGE.

[22] Bear, J. (1979), Hydraulics of Groundwater, McGraw-Hill, 567p.

[23] Freeze, R.A. and J.A. Cherry (1979), Groundwater, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 604p.

[24] Alan Jeffrey, Hui-Hui Dai (2008), Handbook of Mathematical Formulas and Integrals, FOURTH EDITION, ELSEVIER, 347p.

[25] Diao NR, Li QY, Fang ZH (2004), Heat transfer in ground heat exchangers with groundwater advection, Int J Therm Sci, 43, 1203-1211.

謝辞

本研究を進めるにあたり、ご指導をくださった東京大学大学院新領域創成科学研究科環境システム学専攻愛知正温講師に深く感謝いたします。また、副査として助言をくださった同 飯本武志教授に心からお礼申し上げます。そして、同じ学生居室において共に切磋琢磨した森川慎也さん、森垣勇人さん、馬振宇さん、押味良太さんに感謝いたします。