

東京大学大学院新領域創成科学研究科  
社会文化環境学専攻

2019 年度  
修 士 論 文

# 座屈固有値問題の縮約による形状最適化と 高軸力領域での実験検証

---

Shape Optimizations by Contracting of the Buckling Eigenvalue Problem  
and Experimental Verification in Region of High Axial Stress

2020 年 1 月 20 日提出  
指導教員 佐藤 淳 准教授

高岡 俊一郎  
Takaoka, Shunichiro



# 目次

1. 序論 .....	1
1.1 背景 .....	1
1.2 既往研究 .....	3
1.2.1 座屈固有値問題の縮約に関する研究 .....	3
1.2.2 その他の線形座屈解析・座屈最適化に関する研究 .....	4
1.3 本論文の構成と目的 .....	5
1.4 本論文における表記手法 .....	6
2. 現行の座屈設計法と縮約手法 .....	7
2.1 現行の座屈設計法 .....	7
2.1.1 強度評価までの流れ .....	7
2.1.2 現行の座屈設計法の問題点 .....	10
2.2 縮約を用いた個材の座屈荷重の算出方法 .....	12
2.2.1 縮約とは .....	12
2.2.2 縮約手法 .....	15
2.2.3 縮約手法の問題点 .....	18
3. 高軸力領域における個材の座屈荷重の実験検証 .....	19
3.1 座屈荷重の検出に関する既往実験 .....	19
3.2 座屈荷重の実験検証 .....	24
3.2.1 実験概要 .....	24
3.2.2 実験結果 .....	27
3.3 実験結果に関する考察 .....	34
3.3.1 実験と解析値の比較検証 .....	34
3.3.2 試験体別検証 .....	35
3.3.3 実験総括 .....	41
3.3.4 今後検証されるべき点 .....	42
4. 縮約手法を用いた座屈最適化 .....	43
4.1 序 .....	43
4.1.1 モデルの分割数 .....	43
4.1.2 座屈最適化に関する既往研究 .....	47

4.2	個材の材端の回転剛性の具象化.....	48
4.2.1	回転に対する剛性と座屈モード.....	48
4.2.2	弾性剛性マトリクスの具象化による回転剛性の抽出.....	51
4.2.3	両端自由の個材の境界条件の具象化.....	61
4.3	材端の回転剛性による要素体積分配.....	66
4.3.1	両端自由端の材の最適化.....	66
4.3.2	材端がピン-自由の材の最適化.....	72
4.4	幾何剛性の具象化に関する一考.....	78
5.	結論と展望.....	82
	参考文献.....	83
	謝辞.....	84

# 1. 序論

## 1.1 背景

細長い材や薄い面材を含む構造体では、材料強度に達する前に座屈による不安定現象が生じ、塑性化に大きな影響を及ぼす場合が多い。合理的な形態を決定するには、座屈の影響を適切に評価することが重要な点となる。以下に該当する構造物の例を示す。



図 1-1 Sunny Hills 青山(撮影：堤千春)



図 1-2 アストラムライン新白島駅(撮影：堤千春)

一般に、座屈現象を含む複雑な形状の終局状態は材料非線形・幾何学的非線形を考慮した有限要素法により求められるが、微小な部材を1要素とすることから解析には非常に多くの時間を要する。そこで計算量及び実現象と解析結果の誤差の度合いを考慮し、現在は架構を部材単位で1本の線材としてモデル化し解析を行う手法が広く知られている。

我が国の鋼構造建築物の現行設計基準・指針<sup>(1)(2)</sup>では、部材の有効座屈長を材長及び材端の拘束条件から算出し、個材ごとに座屈耐力を評価する手法が提案されている。しかし複雑な架構において、隣接部材の剛性や荷重条件が材端に及ぼす影響を算出し拘束条件を明確にすることは非常に困難である。

以上の背景を踏まえて、近年では有限要素法による線形座屈解析が用いられている。この手法は構造全体系において架構の断面情報からなる弾性剛性マトリクス $[K_E]$ 及び荷重条件からなる幾何剛性マトリクス $[K_G]$ を用いて固有値問題を設定し、その固有値 $\lambda$ の中で最小のものを座屈荷重倍率とする。

$$[K_E]\{U\} = \lambda[K_G]\{U\} \quad (1-1)$$

$\{U\}$  : 座屈モード

この $\lambda$ と存在軸力の積を座屈荷重とし、終局状態の判定を行う。

この手法は一定の有効な結果を示すが、厳密には様々な問題が存在することが指摘されている。一例をあげると、この手法では式(1-1)で求まる $\lambda$ を架構中の全ての個材の軸力に対して乗算するため、軸力の小さい部材ではその拘束条件や個材の剛性に対し座屈荷重が小さく算出され、安全率を過剰に見込んでしまうというものがある。

そこで線形応力解析・線形座屈解析で得られる結果を用いて架構中の個材の座屈荷重を適切に評価することができれば、複雑な架構であっても経済面や環境面に配慮した合理的な設計が可能になる。

また個材の材端の拘束条件の評価を明確にすることで、架構形状の最適化を行える可能性がある。

## 1.2 既往研究

### 1.2.1 座屈固有値問題の縮約に関する研究

本論文の直接の過去研究にあたる論文を紹介する。

・堤<sup>(3)</sup>は、鈴木ら<sup>(4)</sup>が研究を行っていた縮約手法の改善手法として、弾性剛性マトリクス $[K_E]$ 及び幾何剛性マトリクス $[K_G]$ をガウスの消去法の要領で縮約し、当該個材にあたる行列のみのマトリクスにした上で座屈固有値問題を再構成する手法を提案している。この手法では固有値問題により求まる固有値を個材の座屈荷重倍率とし、存在軸力との積を求めることで個材の座屈荷重とする。以下の論文は全てこの手法についての研究であり、本論文における縮約もこの手法を用いている。

・高岡<sup>(5)</sup>は、縮約後の剛性マトリクスが境界条件を表すと考え、それを明らかにするために縮約後の個材の拘束の状態をばねによって表す具象化を試みた。

・朝原<sup>(6)</sup>は、この縮約手法によって算出される個材の座屈荷重倍率の逆数を個材の安全率とみなし、余裕度に応じて断面形状の操作を行う最適化手法の提案を行った。また、縮約手法によって算出される座屈荷重の値が適切であるか実験検証を行い、曲げ優勢の範囲において縮約手法の妥当性を示した。

・氏岡<sup>(7)</sup>は、朝原の提案した手法が限定的な条件下においてのみ成立することに着目し、最適化操作を2段階に分割して行うことで最適化手法の改善及び適用可能範囲の拡張を試みた。

実験検証については、上記のように曲げ優勢域に関する検証は行われたが高軸力領域については行われていない。

最適化手法の研究については一定の成果は得られているものの、縮約後の個材の座屈荷重倍率・安全率と断面情報の関係や縮約後の個材端の拘束条件について未だ不明瞭な点が多数存在する。

### 1.2.2 その他の線形座屈解析・座屈最適化に関する研究

縮約手法以外で、架構中の座屈荷重の導出手法や座屈に関する最適化手法の研究を紹介する。

- ・座屈荷重の過小評価を改善するための手法に高次固有値法<sup>(8) - (10)</sup>がある。先の節で述べたように、通常線形座屈解析では固有値問題を解いて求まる固有値 $\lambda$ の中で最小のものを座屈荷重倍率とするが、この手法ではそれを高次のものまで考慮する。しかし最小の座屈荷重倍率を用いることが不合理な材について高次の座屈モードを考える際、変形が卓越した部材を求める方法が設計者の主観に依るところが大きいという問題を抱えている。また、この手法を用いて導出される座屈荷重についてその妥当性は明確には示されていない。

- ・有効座屈長を導出する方法の1つに付加軸力法<sup>(8) (11)</sup>がある。構造体の耐力を最大化するためには全部材の座屈に対する余裕度が一律化されればよい。ため、座屈に対して余裕のある材の作用軸圧縮力のみ増加させ、各材の余裕度が等価になるまで繰り返し計算を行い有効座屈長を決定するというものである。この手法は複雑なものでは収束計算が必要であること、軸力を操作することによる他の材への拘束条件の変化の影響を考慮していないことなどの問題がある。また、こちらの手法も導出される座屈荷重についてその妥当性は明確には示されていない。

- ・座屈最適化に関しては、Keller ら<sup>(12)</sup>が確立した変分法を用いる手法が提案されている。浜田ら<sup>(13)</sup>は逆変分原理を用いた最適化手法の提案を行っており、支持条件ごとの1本柱の座屈に対する断面形状について、矩形及び円形それぞれ提案を行っている。本論文内ではこの浜田らの提案した形状を1本柱における最適形状とし扱っている。



### 1.3 本論文の構成と目的

本論文の要点は以下の2点である。

- ・座屈固有値問題の縮約によって導出される座屈荷重について、降伏曲面における高軸力領域について妥当性の検証を行う。
- ・縮約手法により算出される剛性マトリクスを用いて、材端の拘束条件の具象化を行い部材の要素分配の最適化を行う。

第2章では、既存の座屈設計法とその問題点、それを解決する手法として前節で述べた堤の提案した縮約手法を紹介する。

第3章では、既存の座屈設計法と縮約手法によって算出される座屈荷重について、その高軸力領域における妥当性を実験及び解析の結果から検証する。

第4章では、材端の拘束条件をばねにより具象化し、材端の回転剛性や軸力から個材の形状の最適化の手法を提案する。

第5章では、本論文の総括を行い、本研究の将来的な展望を述べる。

## 1.4 本論文における表記手法

本論文で用いる文字や図について、以下のように定義する。

$K_E[k, k]$  : 行列 $[K_E]$ の  $k$  行  $k$  列目の要素

$sym$  : 対称行列

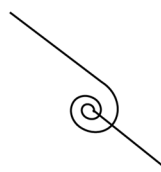
図に関して特に注釈のない節点の接合は剛接合であることを表しているものとする。

また、本論文における注釈の無いばねは、曲げ剛性を持たず軸剛性のみをもつ部材として扱っている。そのばねを単純ばねと呼び、以下の図で示す。回転剛性のみを持ち軸剛性を持たないばねは回転ばねと呼び、図示は以下のように行う。



軸剛性 :  $k$   
回転剛性 : 0

図 1-3 単純ばね



軸剛性 : 0  
回転剛性 :  $k_\theta$

図 1-4 回転ばね

## 2. 現行の座屈設計法と縮約手法

### 2.1 現行の座屈設計法

#### 2.1.1 強度評価までの流れ

現行の座屈解析手法の1つである座屈固有値問題を用いた線形座屈解析では、有限要素法を用いた仮想仕事の原理より、座屈状態での平衡方程式の固有値問題を構成することで全体系の座屈荷重倍率を算出する。この固有値問題は全体弾性剛性マトリクス $[K_E]$ と全体幾何剛性マトリクス $[K_G]$ を用いて以下のような式で、これを座屈固有値問題と呼ぶ。

$$(再掲) \quad [K_E]\{U\} = \lambda[K_G]\{U\} \quad (1-1)$$

$[K_E]$ ：全体弾性剛性マトリクス

$[K_G]$ ：全体幾何剛性マトリクス

$\lambda$ ：全体座屈荷重倍率(最小の値)

$\{U\}$ ：座屈モード

全体弾性剛性マトリクス $[K_E]$ と全体幾何剛性マトリクス $[K_G]$ は、架構を構成する部材から求められるマトリクスを、材端にて同じ節点を共有する材ごとに合成することによって求められる。極所座標における合成前の要素弾性剛性マトリクス $[k_e]$ 、要素幾何剛性マトリクス $[k_g]$ は以下の式で表すことができる。

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{12EI_x}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_x}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_x}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_x}{l^2} & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 \\ \frac{6EI_x}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_x}{l} & \frac{GJ}{l} & -\frac{6EI_x}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_x}{l^2} & 0 \\ -\frac{12EI_x}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_x}{l^2} & 0 & \frac{12EI_x}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_x}{l^2} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_x}{l} & 0 & 0 \\ \frac{6EI_x}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_x}{l} & 0 & -\frac{6EI_x}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

$E$ ：ヤング率

$G$ ：ねじり係数

$I_x, I_y$ ：断面2次モーメント

$J$ ：ねじりモーメント

$l$ ：部材長さ

$r$ ：断面積

$$[k_g] = \begin{bmatrix} \frac{6N}{5l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6N}{5l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{N}{10} & 0 & \frac{2Nl}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{N}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2Nl}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{M_{xi}}{l} & \frac{M_{yi}}{l} & 0 & \frac{Q_x l}{6} & \frac{Q_y l}{6} & \frac{Nr^2}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6N}{5l} & 0 & 0 & 0 & -\frac{N}{10} & \frac{M_{xi}}{l} & \frac{6N}{5l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6N}{5l} & 0 & \frac{N}{10} & 0 & -\frac{M_{yi}}{l} & 0 & \frac{6N}{5l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{N}{10} & 0 & -\frac{Nl}{30} & 0 & \frac{Q_x l}{6} & 0 & \frac{N}{10} & 0 & 0 & \frac{2Nl}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{N}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{Nl}{30} & \frac{Q_y l}{6} & -\frac{N}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2Nl}{15} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{M_{xi}}{l} & \frac{M_{yi}}{l} & 0 & -\frac{Q_x l}{6} & -\frac{Q_y l}{6} & -\frac{Nr^2}{l} & \frac{M_{xj}}{l} & -\frac{M_{yj}}{l} & 0 & \frac{Q_x l}{6} & \frac{Q_y l}{6} & \frac{Nr^2}{l} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{SYM.} \quad (2-2)$$

$N$  : 初期応力 (軸力)

$M$  : 初期応力 (曲げモーメント)

$Q$  : 初期応力 (せん断力)

$r$  : 式(2-3)

$$r^2 = (I_x + I_y)/A \quad (2-3)$$

そして部材の座屈荷重  $N_{cr}$  は、個材の存在軸力を  $N$  として以下の式(2-4)で求めることができる。ここで式(1-1)にて  $\lambda$  は複数求めることができるが、その中で最小のものを全体座屈荷重倍率  $\lambda$  として採用し、架構内の全ての部材の座屈荷重倍率を  $\lambda$  とする。

$$N_{cr} = \lambda N \quad (2-4)$$

$N_{cr}$  : 座屈荷重

この手法では架構内の全ての部材が同時に座屈するとみなすので、全体座屈解析における座屈の挙動は例えば以下の図 2-1 のようになる。

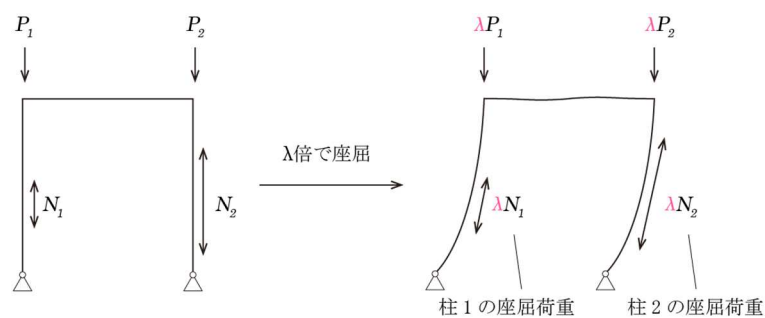


図 2-1 架構における全体座屈

この線形座屈解析は、外力により部材に軸力のみが生じ、曲げやねじれは考慮しない理想状態である。従って曲げモーメントを含めた柱梁の塑性化の判定には別の評価が必要となり、一般に軸力と曲げの強度相関式、通称 $M-N$ 相関曲線が用いられる。この曲げに関して、静定応力解析では考慮されない部材中間のたわみ $\delta$ や節点の移動 $\Delta$ によって曲げモーメントや軸力が付加される効果である $P-\delta$ 効果、 $P-\Delta$ 効果を考慮した場合、1軸曲げを受ける矩形断面の柱梁の $M-N$ 相関曲線は次の式(2-5)で表される。

$$\left(\frac{N}{N_y}\right)^2 + \frac{M}{M_p} = 1 \quad (2-5)$$

$N_y$  : 降伏荷重

$M_p$  : 全塑性モーメント

式(2-5)を見ても分かるように、降伏が先行する部材に関しては、圧縮力のみがかかっている場合の軸力の最大値は降伏耐力と等しくなる。しかし座屈を考慮する場合、鋼構造建築物の現行設計基準・指針では、軸力の最大値を部材の座屈荷重 $N_{cr}$ に置き換えた以下の式(2-6)を用いる。

$$\left(\frac{N}{N_{cr}}\right)^2 + \frac{M}{M_p} = 1 \quad (2-6)$$

$N_{cr}$  : 座屈荷重

引張側( $N$ が負の範囲)ではこの変化を考慮せず、降伏荷重の値を採用する。図にすると以下のようなになる。

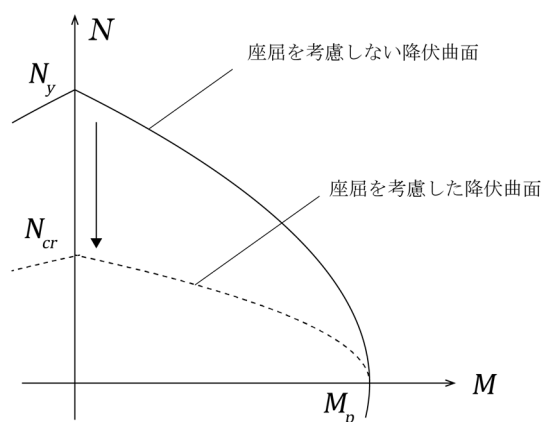


図 2-2  $M-N$  相関曲線

上記の式は、実現象と比較し安全側であることがわかっている。

### 2.1.2 現行の座屈設計法の問題点

以上の過程に則り、実際に以下のような架構の座屈設計を考える。材は全て同一、断面は全て一様であるとする。

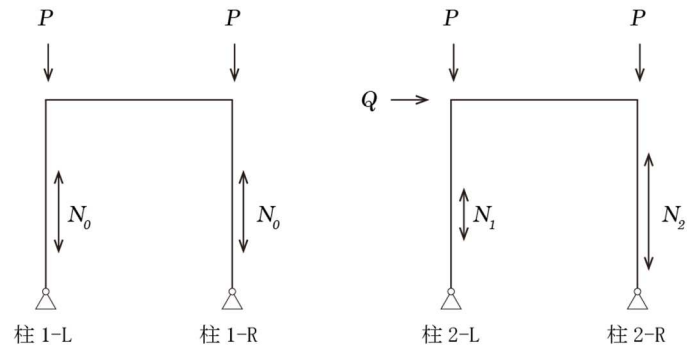


図 2-3 1 層門型ラーメン (左:Model 2-1 右:Model 2-2)

Model 2-1 は同一の鉛直荷重  $P$  のみがかかるモデル、Model 2-2 は Model 2-1 に水平力を加えたモデルである。それぞれ静的弾性解析を行い、先述の線形座屈解析を行うと結果は以下のようになる。

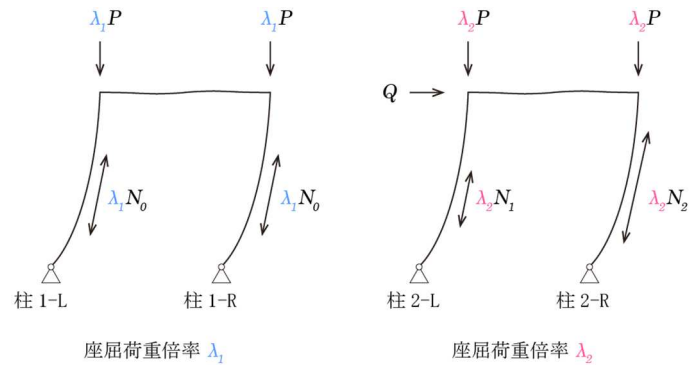


図 2-4 1 層門型ラーメン解析結果 (左:Model 2-1 右:Model 2-2)

Model 2-1 の座屈荷重倍率を  $\lambda_1$ 、Model 2-2 の座屈荷重倍率を  $\lambda_2$  とおく。そして全ての部材が同時に座屈するとみなすため、各部材の座屈荷重は軸力と座屈荷重倍率の積で求められる。この結果を  $M - N$  相関曲線で示すと以下のようになる。

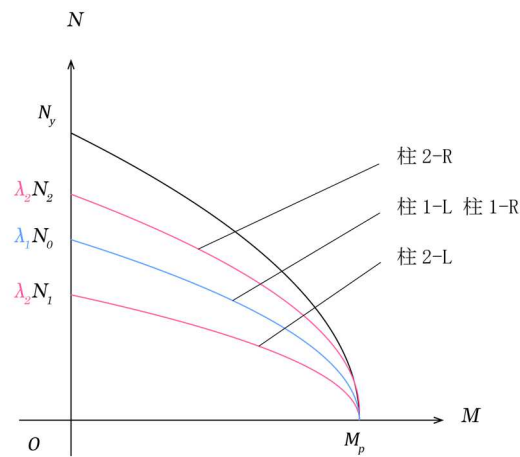


図 2-5 Model 2-1, 2-2 の各柱に関する  $M - N$  相関曲線

柱 1-L 及び柱 1-R は同一の座屈荷重  $\lambda_1 N_0$  で算出される。この条件下では図 2-5 のように左右の柱で同一の  $M - N$  相関曲線を得ることができる。

一方水平荷重を含む Model 2-2 のようなモデルでは、水平荷重により軸力が大きくなる柱（この場合では柱 2-R）の座屈荷重が柱 1-R に比べて大きくなる（ $\lambda_1 N_0 < \lambda_2 N_2$ ）ことが知られている<sup>(14)</sup> が、そのような荷重条件で解析を行った場合に軸力が小さくなる柱（この場合では柱 2-L）の座屈荷重が柱 1-L に比べて小さくなることを確認できる（ $\lambda_1 N_0 < \lambda_2 N_1$ ）。柱は全て同一の材であるという条件を踏まえると、同じ曲げモーメント  $M$  がかった状態であるにもかかわらず比較を行った際に柱 2-L と柱 2-R の座屈荷重が異なることから柱 2-L の座屈荷重は過小評価ではないかと考えられる。

このように、実際には座屈に至っていないと推測される材を座屈しているとみなしてしまうため、荷重条件を設定した際に軸圧縮力  $N$  が小さい材では座屈荷重も同様に個材の持つ性能に対して小さく算出され、塑性化の判定において過小評価してしまっている可能性がある。これは存在軸力  $N$  に対して座屈荷重倍率をかけ、座屈荷重を算出していることに起因する。

上記のような比較的現象の確認が容易な架構に関しては前章に挙げたような妥当性のある改善手法が提案されているが、複雑な架構において個材ごとの座屈荷重を適切に把握することは非常に困難である。複雑な架構においても主観的な判断を介することなく個材ごとの座屈荷重を評価することの可能である定型化された手法が発見されれば、この項で挙げた問題点が改善される可能性がある。

## 2.2 縮約を用いた個材の座屈荷重の算出方法

### 2.2.1 縮約とは

本節では、座屈固有値問題の縮約手法の説明を行う。これは鈴木による縮約手法の研究で残された問題点を解決し、**堤**によって示された手法である。これは前節で挙げた問題を改善するため個材ごとに座屈荷重倍率を算出することで個材の座屈荷重を算出するというものである。

この縮約手法のイメージは以下の図 2-6 のようなものである。

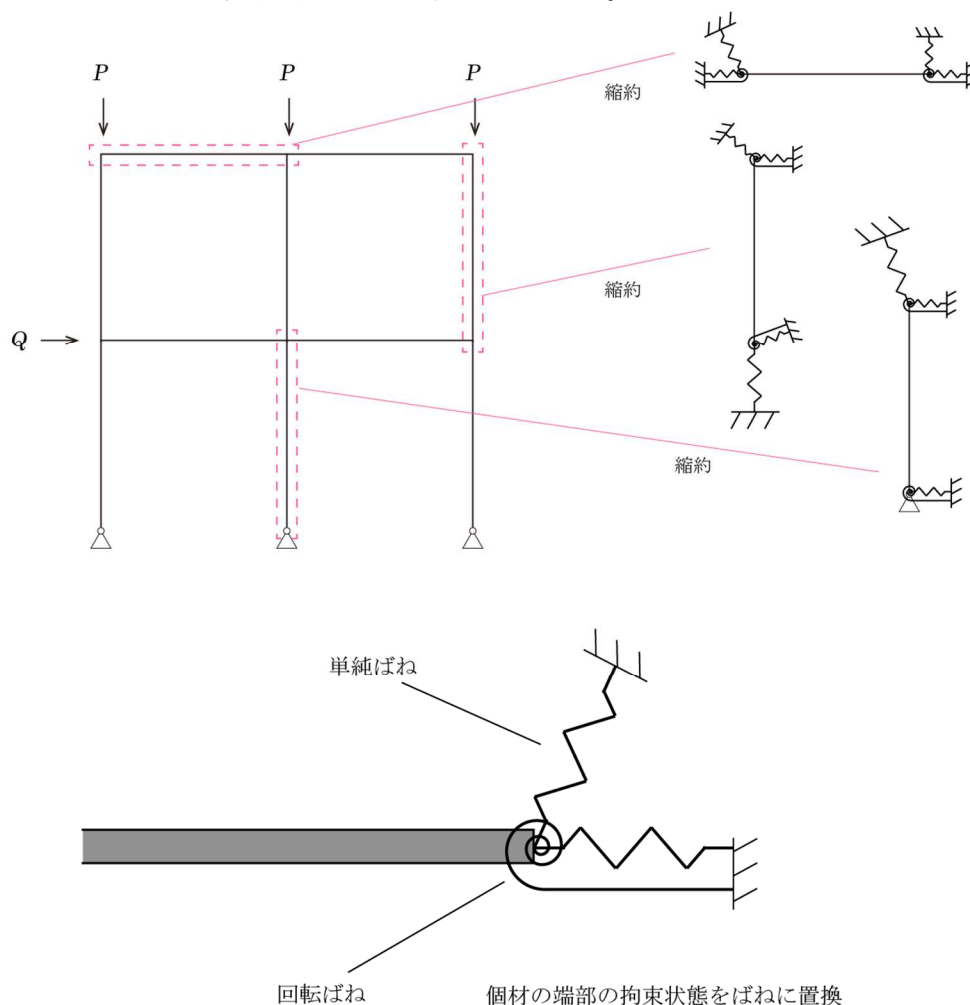


図 2-6 縮約のイメージ

個材の座屈荷重を検出するには、個材の材端の拘束条件を明確にする必要があるのはこれまでに述べた通りである。そのためにまず一つの個材に着目し、当該の個材以外の架構による個材の拘束の状態を、図 2-6 のようにばねで置換し等価な状態を再現することを考えるものである。これが縮約のおおまかなイメージであり以上の過程を全ての材に行うことで全ての材の座屈荷重を算出することが可能になる。

この操作をマトリクス及び座屈固有値問題の式で考える。

はじめに、要素弾性剛性マトリクス  $[k_e]$  から全体弾性剛性マトリクス  $[K_E]$  を生成する方法は以下の図のようになる。図中の数値は節点番号である。



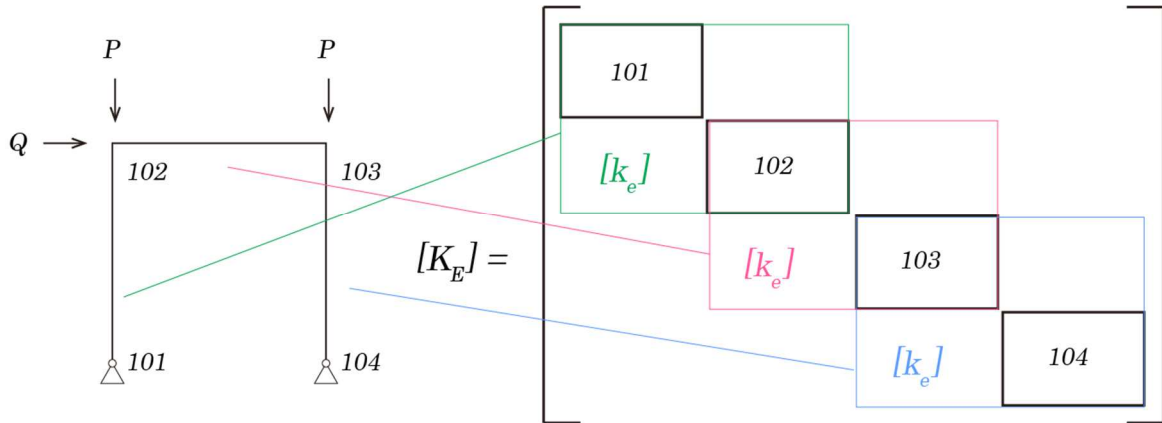


図 2-7  $[K_E]$  の生成

全体剛性マトリクスを生成するにはまず全節点を図のように対角に並べた状態を想定する。3 次元の架構の場合各節点に関する情報は 6 行 6 列の行列で表され、従って  $[K_E]$  は節点数  $\times$  6 の行と列を有する。次に架構中の個材の要素弾性剛性マトリクス  $[k_e]$  を全て算出(式 2-1)し、図のようにその個材の有する 2 節点に該当する部分に加えていく。そして全ての  $[k_e]$  に関する情報を加算したものが  $[K_E]$  である。これは要素幾何剛性マトリクス  $[k_g]$  から全体幾何剛性マトリクス  $[K_G]$  を生成する場合においても同様であり、現行の線形座屈解析ではこの  $[K_E][K_G]$  から座屈固有値問題を構成する。

この架構の梁部材に関して縮約操作を施すことを考える。これは次の図 2-8 のような操作である。

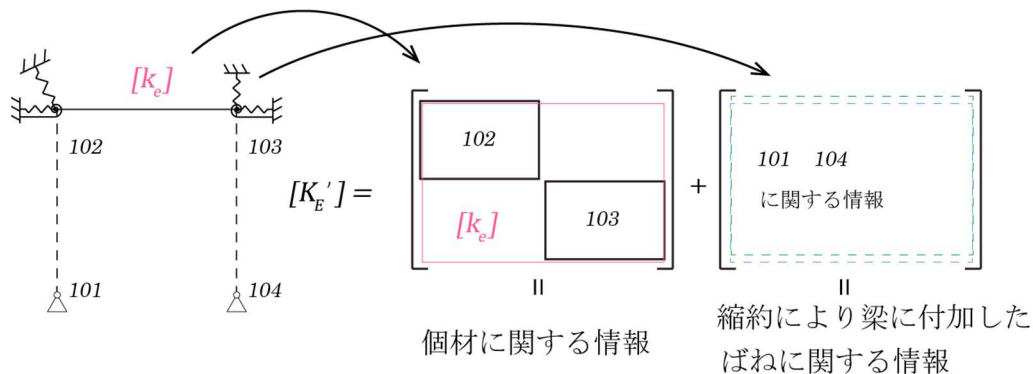


図 2-8 マトリクスの縮約

梁部材は節点 102 と 103 を有しており、この節点の拘束条件を明確にするためこの 2 節点以外の全ての情報を梁に関する行列に加えていく。その結果として 12 行 12 列の縮約された個材の弾性剛性マトリクス  $[K'_E]$  が求まる。この操作も幾何剛性マトリクスに対して同様に行い、縮約された個材の幾何剛性マトリクス  $[K'_G]$  を算出する。そしてこの  $[K'_E], [K'_G]$  を用いて座屈固有値問題を再構成する。

$$[K'_E]\{U'\} = \lambda'[K'_G]\{U'\} \quad (2-7)$$

$\lambda'$  : 縮約された個材の固有値、座屈荷重倍率

$\{U'\}$  : 縮約による個材の固有ベクトル

その結果算出される固有値  $\lambda'$  を個材の座屈荷重倍率とする。

$$N_{cr}' = \lambda' N \quad (2-8)$$

$N_{cr}'$  : 縮約による個材の座屈荷重

この  $\lambda'$  は全ての材に関して算出することができるため、上記の操作を全ての材に対して行うことで全ての個材の座屈荷重を算出することが可能である。

### 2.2.2 縮約手法

以下堤の提唱した縮約手法を紹介する。本論文における縮約操作は全てこの手法を採用している。

この手法では、全体弾性剛性マトリクス $[K_E]$  及び全体幾何剛性マトリクス $[K_G]$ の左右に同じ縮約マトリクスを掛けることで縮約された個材の弾性剛性マトリクス $[K_E']$  及び幾何剛性マトリクス $[K_G']$ を算出する。この操作はガウスの消去法に倣っている。

以下  $n$  行  $n$  列からなる両剛性マトリクスの  $k$  行  $k$  列を同時に縮約する手法に関し、堤の論文で紹介されたものをプログラム用に簡略化した式を紹介する。この操作を繰り返す行うことで目的の行列を抽出する。

$$[C_E^k][K_E^n][D_E^k]\{U'\} = \lambda'[C_G^k][K_G^n][D_G^k]\{U'\} \quad (2-9)$$

$$[C_E^k] = \begin{bmatrix} K_E[k, k] & & -K_E[1, k] & & & \\ & \ddots & \vdots & & & 0 \\ & & K_E[k, k] & -K_E[k-1, k] & & \\ & & & -K_E[k+1, k] & K_E[k, k] & \\ & 0 & & \vdots & & \ddots \\ & & & -K_E[n, k] & & K_E[k, k] \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

$$[D_E^k] = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_E[k, k]} & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 \\ & & \frac{1}{K_E[k, k]} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{K_E[k, k]} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \frac{1}{K_E[k, k]} \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

$$[C_G^k] = \begin{bmatrix} K_G[k, k] & & -K_G[1, k] & & & \\ & \ddots & \vdots & & & 0 \\ & & K_G[k, k] & -K_G[k-1, k] & & \\ & & & -K_G[k+1, k] & K_G[k, k] & \\ & 0 & & \vdots & & \ddots \\ & & & -K_G[n, k] & & K_G[k, k] \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

$$[D_G^k] = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_G[k, k]} & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 \\ & & \frac{1}{K_G[k, k]} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{K_G[k, k]} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \frac{1}{K_G[k, k]} \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

ここで  $[C_E^k]$  及び  $[C_G^k]$  は  $n-1$  行  $n$  列、 $[D_E^k]$  及び  $[D_G^k]$  は  $n$  行  $n-1$  列であり、縮約された後の行列は共に  $n-1$  行  $n-1$  列となる。 $\{U'\}$  は  $n-1$  行  $1$  列となる。

例として 6 行 6 列の両剛性マトリクスの 4 行 4 列を縮約する操作を以下に示す。具体的に行列の要素を以下のように設定する。

$$[K_E^6] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

$$[K_G^6] = \begin{bmatrix} b_{11} & b & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

実際に式(2-9)の左辺、右辺の計算を書き下すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} & [C_E^4][K_E^6][D_E^4]\{U'\} \\ &= \begin{bmatrix} a_{44} & & & & & \\ & a_{44} & & & & \\ & & a_{44} & & & \\ & & & a_{44} & & \\ & & & & a_{44} & \\ & & & & & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{44}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{a_{44}} & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{44}} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{a_{44}} & \\ & & & & \frac{1}{a_{44}} & \\ & & & & & \frac{1}{a_{44}} \end{bmatrix} \{U'\} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} - \frac{a_{14}a_{41}}{a_{44}} & a_{12} - \frac{a_{14}a_{42}}{a_{44}} & a_{13} - \frac{a_{14}a_{43}}{a_{44}} & a_{15} - \frac{a_{14}a_{45}}{a_{44}} & a_{16} - \frac{a_{14}a_{46}}{a_{44}} \\ a_{21} - \frac{a_{24}a_{41}}{a_{44}} & a_{22} - \frac{a_{24}a_{42}}{a_{44}} & a_{23} - \frac{a_{24}a_{43}}{a_{44}} & a_{25} - \frac{a_{24}a_{45}}{a_{44}} & a_{26} - \frac{a_{24}a_{46}}{a_{44}} \\ a_{31} - \frac{a_{34}a_{41}}{a_{44}} & a_{32} - \frac{a_{34}a_{42}}{a_{44}} & a_{33} - \frac{a_{34}a_{43}}{a_{44}} & a_{35} - \frac{a_{34}a_{45}}{a_{44}} & a_{36} - \frac{a_{34}a_{46}}{a_{44}} \\ a_{51} - \frac{a_{54}a_{41}}{a_{44}} & a_{52} - \frac{a_{54}a_{42}}{a_{44}} & a_{53} - \frac{a_{54}a_{43}}{a_{44}} & a_{55} - \frac{a_{54}a_{45}}{a_{44}} & a_{56} - \frac{a_{54}a_{46}}{a_{44}} \\ a_{61} - \frac{a_{64}a_{41}}{a_{44}} & a_{62} - \frac{a_{64}a_{42}}{a_{44}} & a_{63} - \frac{a_{64}a_{43}}{a_{44}} & a_{65} - \frac{a_{64}a_{45}}{a_{44}} & a_{66} - \frac{a_{64}a_{46}}{a_{44}} \end{bmatrix} \{U'\} \\ & [C_G^4][K_G^6][D_G^4]\{U'\} \\ &= \begin{bmatrix} b_{44} & & & & & \\ & b_{44} & & & & \\ & & b_{44} & & & \\ & & & b_{44} & & \\ & & & & b_{44} & \\ & & & & & b_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{b_{44}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{b_{44}} & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b_{44}} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{b_{44}} & \\ & & & & \frac{1}{b_{44}} & \\ & & & & & \frac{1}{b_{44}} \end{bmatrix} \{U'\} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} - \frac{b_{14}b_{41}}{b_{44}} & b_{12} - \frac{b_{14}b_{42}}{b_{44}} & b_{13} - \frac{b_{14}b_{43}}{b_{44}} & b_{15} - \frac{b_{14}b_{45}}{b_{44}} & b_{16} - \frac{b_{14}b_{46}}{b_{44}} \\ b_{21} - \frac{b_{24}b_{41}}{b_{44}} & b_{22} - \frac{b_{24}b_{42}}{b_{44}} & b_{23} - \frac{b_{24}b_{43}}{b_{44}} & b_{25} - \frac{b_{24}b_{45}}{b_{44}} & b_{26} - \frac{b_{24}b_{46}}{b_{44}} \\ b_{31} - \frac{b_{34}b_{41}}{b_{44}} & b_{32} - \frac{b_{34}b_{42}}{b_{44}} & b_{33} - \frac{b_{34}b_{43}}{b_{44}} & b_{35} - \frac{b_{34}b_{45}}{b_{44}} & b_{36} - \frac{b_{34}b_{46}}{b_{44}} \\ b_{51} - \frac{b_{54}b_{41}}{b_{44}} & b_{52} - \frac{b_{54}b_{42}}{b_{44}} & b_{53} - \frac{b_{54}b_{43}}{b_{44}} & b_{55} - \frac{b_{54}b_{45}}{b_{44}} & b_{56} - \frac{b_{54}b_{46}}{b_{44}} \\ b_{61} - \frac{b_{64}b_{41}}{b_{44}} & b_{62} - \frac{b_{64}b_{42}}{b_{44}} & b_{63} - \frac{b_{64}b_{43}}{b_{44}} & b_{65} - \frac{b_{64}b_{45}}{b_{44}} & b_{66} - \frac{b_{64}b_{46}}{b_{44}} \end{bmatrix} \{U'\}$$

この操作に関しては以下の2点留意する必要がある。

第一に、変位が既知の値である行に対応する行と列に関しては予め削除して縮約操作を行う必要がある。例えばピン支持されている節点に関しては変位が0で既知の値となる。固定された点は変位及び変形角が既知の値となる。具体的な操作は、例えば固有ベクトル $\{U\}$ の3, 6, 9列目が既知である場合、縮約操作を施す以前の全体弾性剛性マトリクス $[K_E]$ 及び全体幾何剛性マトリクス $[K_G]$ の3, 6, 9行目及び3, 6, 9列目を全て削除するというものである。これを過去研究に倣い境界条件の反映と呼ぶ。

次に、 $[K_G]$ の対角成分が0の場合、その行と列を削除するというものである。幾何剛性マトリクスはその式の性質上対角成分に0を含む場合があるが、その場合 $1/K_G[k, k]$ が発散するため $[D_E^k]$ を生成できなくなる(式2-13)。そのためこの場合のみ $[K_E]$ に関しては上記の $[C_E^k][D_E^k]$ を用いた操作をし、右辺は対象の全要素が0となっている行と列をそのまま削除する。この操作は固有値問題の両辺に異なった操作を行っているため式が等価でないように考えられるが、これは以下の式(2-16)のように $[K_G]$ にも $[C_G^k][D_G^k]$ を掛け合わせることに等しい。

$$[C_E^k][K_E^n][D_E^k]\{U'\} = \lambda' [C_E^k][K_G^n][D_E^k]\{U'\} \quad (2-16)$$

$$(K_G[k, k] = 0 \text{ の場合}) \quad (2-17)$$

よってこの操作でも左辺と右辺の等価性が損なわれることはない。

### 2.2.3 縮約手法の問題点

この縮約により算出される座屈荷重に関して、堤や朝原、氏岡が考察や実験による検証を行っている。その中で未だに確認されていない点について、本論文の今後の章に関係するものを以下に挙げる。

- ・縮約による座屈荷重の値の妥当性が現在確認されていない。朝原が行った既往実験により曲げ優位の範囲における $M - N$  相関曲線の検証が行われているため、高軸力領域における追加実験が行われれば縮約手法の有効性について確認できる。

- ・縮約手法を用い個材の座屈荷重倍率、安全率を用いた最適化の手法が検証されているが、適用範囲が非常に限定的かつまたその数学的な根拠も乏しい面がある。特に個材の残全率に関しては特性が現状解明しきれておらず、値を元にどのように形状を操作すれば座屈に対し強くなるのかが明確でない。安全率以外の情報から個材の体積の最適化を行う手法を提案したい。

1 点目については3 章、2 点目については4 章でそれぞれ実験や解析を行う。

### 3. 高軸力領域における個材の座屈荷重の実験検証

#### 3.1 座屈荷重の検出に関する既往実験

朝原は、本論文の前身にあたる研究で架構内の個材の座屈荷重の検出について問題の提起と実験を行っている。本論文ではこの朝原の実験手法を基本に数点の変更を加え、既往実験では未検証である  $M-N$  相関曲線における軸力優勢の範囲 ( $N > N'_{cr}/2$   $N'_{cr}$  : 縮約による座屈荷重) に関する実験を行った。(図 3-1)

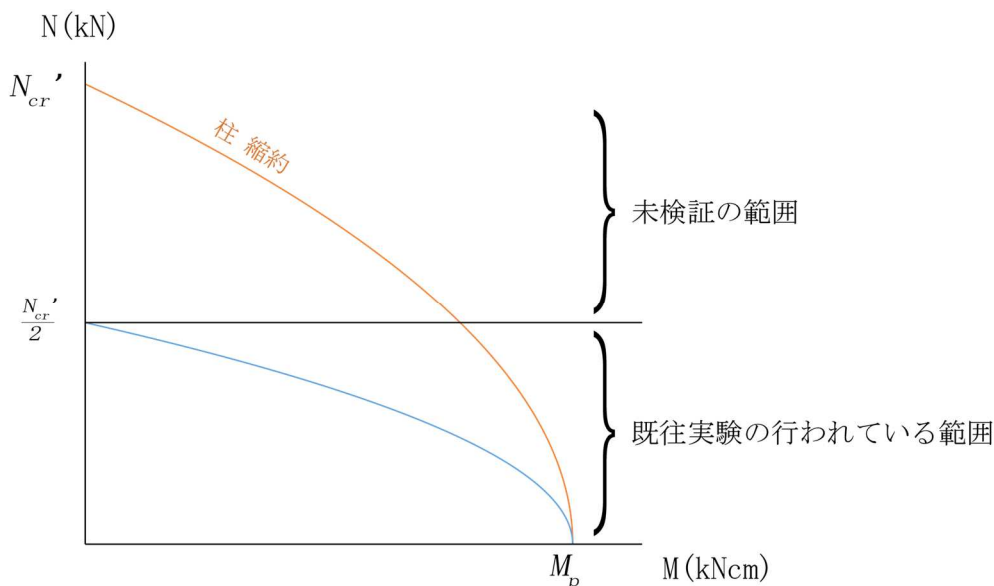


図 3-1 既往実験の検証範囲

個材の座屈荷重を検出するためには終局状態における軸力並びに曲げモーメントを検出する必要がある。複雑な架構に関してはこの軸力と曲げモーメントの検出は非常に困難であるが、1 層の門型ラーメンという単純な架構(図 3-2)に関しては加力方法を調節し、荷重条件、加力と変位の値から各柱材の終局状態の軸力  $N_1, N_2$  及び各柱材の曲げモーメントの和  $M_{total}(= M_1 + M_2)$  を以下の式(3-1) (3-2) (3-3) で求めることが可能である。この式は朝原の論文で紹介されているものであるが、均等荷重ではない場合にも適用できるよう改変を行っている。

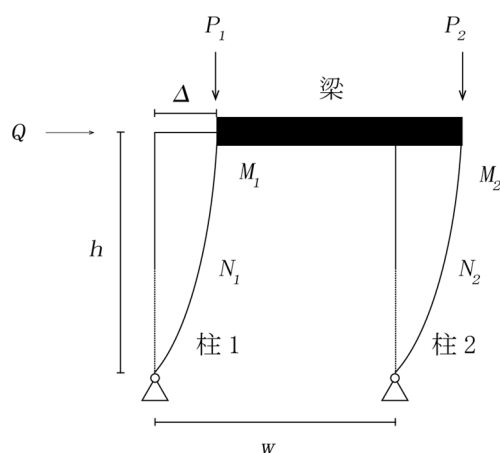


図 3-2 1 層ラーメン各部材の名称と文字

$$N_1 = \frac{(w - \Delta) \times P_1 - \Delta \times P_2 - Q \times h}{w} \quad (3-1)$$

$$N_2 = \frac{\Delta \times P_1 + (w + \Delta) \times P_2 + Q \times h}{w} \quad (3-2)$$

$$M_{total}(= M_1 + M_2) = (P_1 + P_2) \times \Delta + Q \times h \quad (3-3)$$

以上の方法で終局状態の軸力とモーメントを算出することが可能であるので、数パターンの荷重条件に関して全体座屈解析を用いて座屈荷重を算出し実験値と値を比較、妥当性の検証を行う。今回の実験では高軸力領域(図 3-1 における未検証の範囲)の検証を行いたいため、柱 2 の座屈荷重に着目する。以下実際に本論文中の実験で用いたモデル(図 3-3)について、想定される座屈荷重と  $M - N$  相関曲線を列挙する。

次項の 1-1frameA から 1-1frameD に関して、1-1frameA は鉛直荷重のみをかけた状態である。そしてから D にかけて水平荷重  $Q$  を増加させている。このとき柱 2 についてはいずれも座屈荷重が  $N'_{cr}/2$  より大きな値となり、高軸力領域に関する検証を行えていることが確認できる。

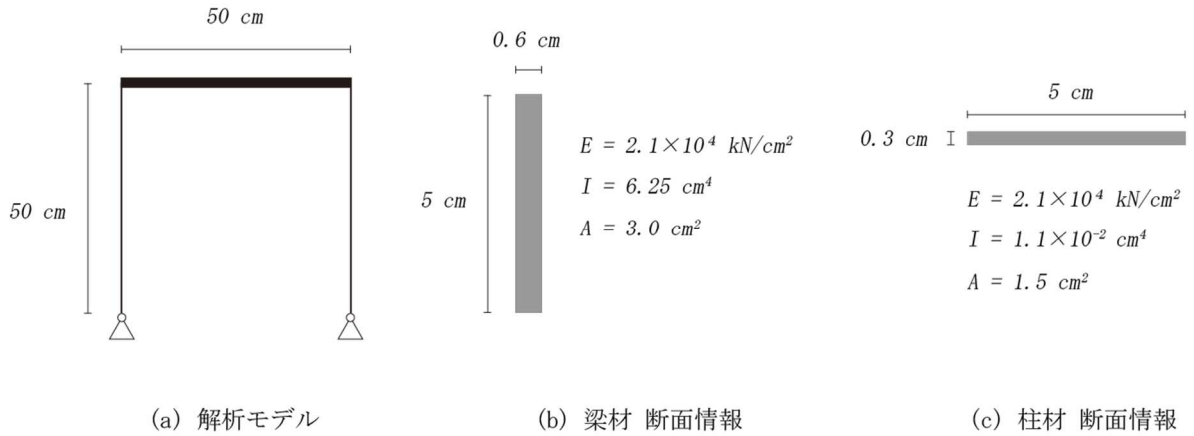


図 3-3 1 層ラーメン解析モデル

このモデルに関して先に数点解説をする。

- ・全体座屈解析を行うにあたり、本モデルは各柱梁部材を 10 分割している。この分割数と座屈荷重の関係については次章でも触れているためそちらを参照して頂きたい。
- ・この試験体は柱に対し梁が十分剛である。これは軸力が入った状態では柱頭の拘束度に影響を及ぼしてしまうため、その影響を極力小さくするためである。
- ・また、本解析では偏荷重を柱頭にかけている( $P_1 < P_2$ )。これは均等な荷重をかけてしまうと終局状態における  $N_2$  の値の大きさに限界があり、高軸力領域の範囲の実験が行えないためである。



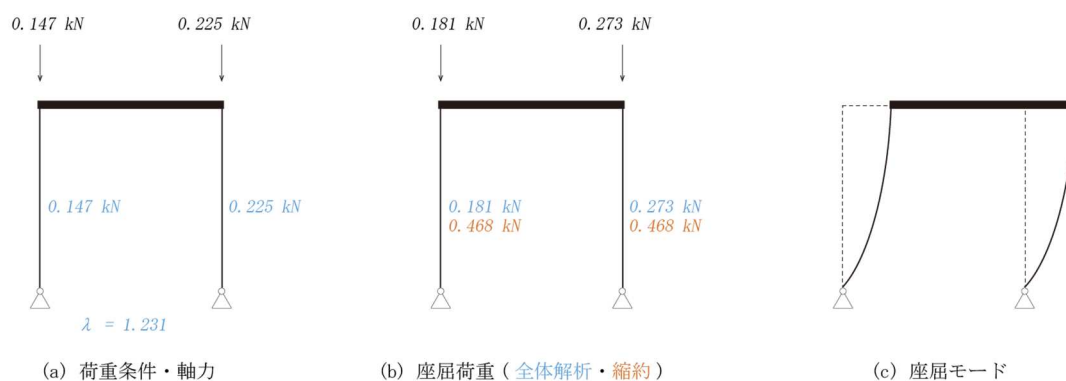


図 3-4 1-1frameA 解析結果

表 3-1 1-1frameA 解析結果

部材	軸力 $N$ (kN)	全体座屈解析		縮約	
		全体固有値 $\lambda$	座屈荷重 $N_{cr} = \lambda N$ (kN)	個材固有値 $\lambda'$	座屈荷重 $N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
柱 1	0.147	1.231	0.181	3.184	0.468
柱 2	0.225		0.273	1.714	0.468

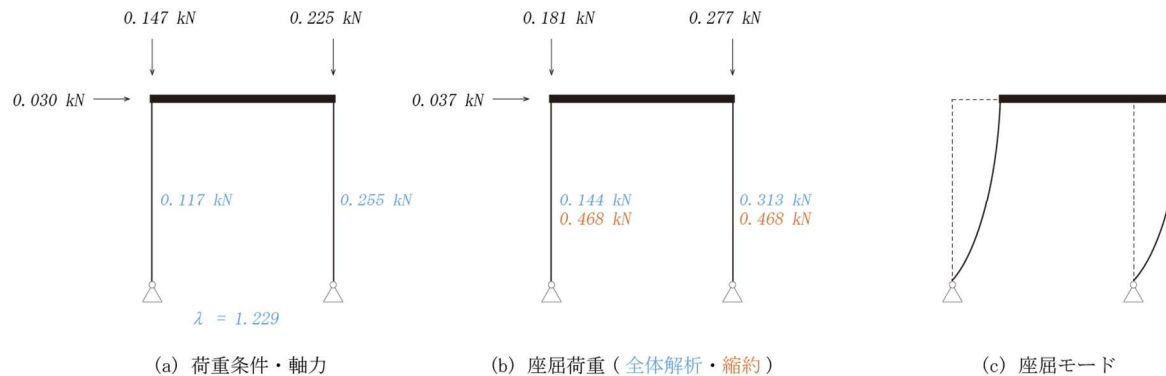


図 3-5 1-1frameB 解析結果

表 3-2 1-1frameB 解析結果

部材	軸力 $N$ (kN)	全体座屈解析		縮約	
		全体固有値 $\lambda$	座屈荷重 $N_{cr} = \lambda N$ (kN)	個材固有値 $\lambda'$	座屈荷重 $N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
柱 1	0.117	1.229	0.144	4.000	0.468
柱 2	0.255		0.313	1.835	0.468

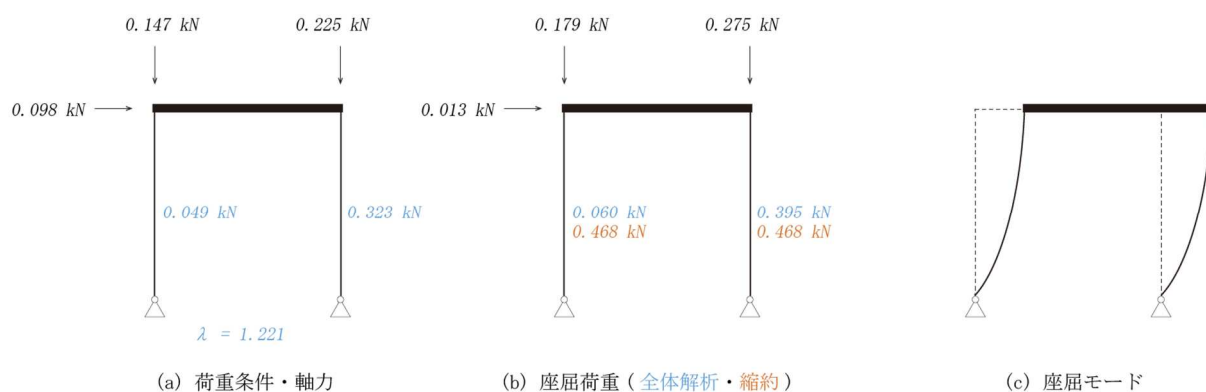


図 3-6 1-1frameC 解析結果

表 3-3 1-1frameC 解析結果

部材	軸力 $N$ (kN)	全体座屈解析		縮約	
		全体固有値 $\lambda$	座屈荷重 $N_{cr} = \lambda N$ (kN)	個材固有値 $\lambda'$	座屈荷重 $N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
柱 1	0.049	1.221	0.060	9.551	0.468
柱 2	0.323		0.395	1.449	0.468

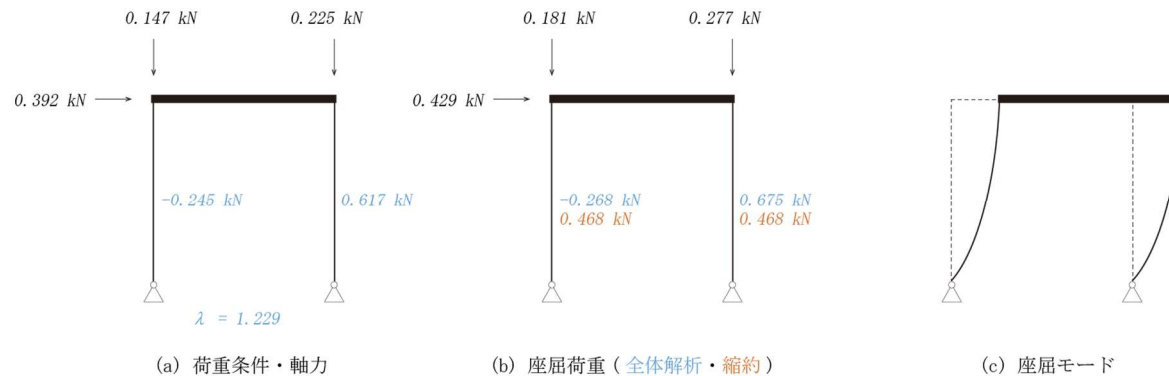


図 3-7 1-1frameD 解析結果

表 3-4 1-1frameD 解析結果

部材	軸力 $N$ (kN)	全体座屈解析		縮約	
		全体固有値 $\lambda$	座屈荷重 $N_{cr} = \lambda N$ (kN)	個材固有値 $\lambda'$	座屈荷重 $N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
柱 1	-0.245	1.094	-0.268	-1.910	0.468
柱 2	0.617		0.675	0.759	0.468

以上の結果から  $M - N$  相関曲線を描くと以下の図のようになる。

$$(再掲) \quad \left( \frac{N}{N_{cr}} \right)^2 + \frac{M}{M_p} = 1 \quad (2-6)$$

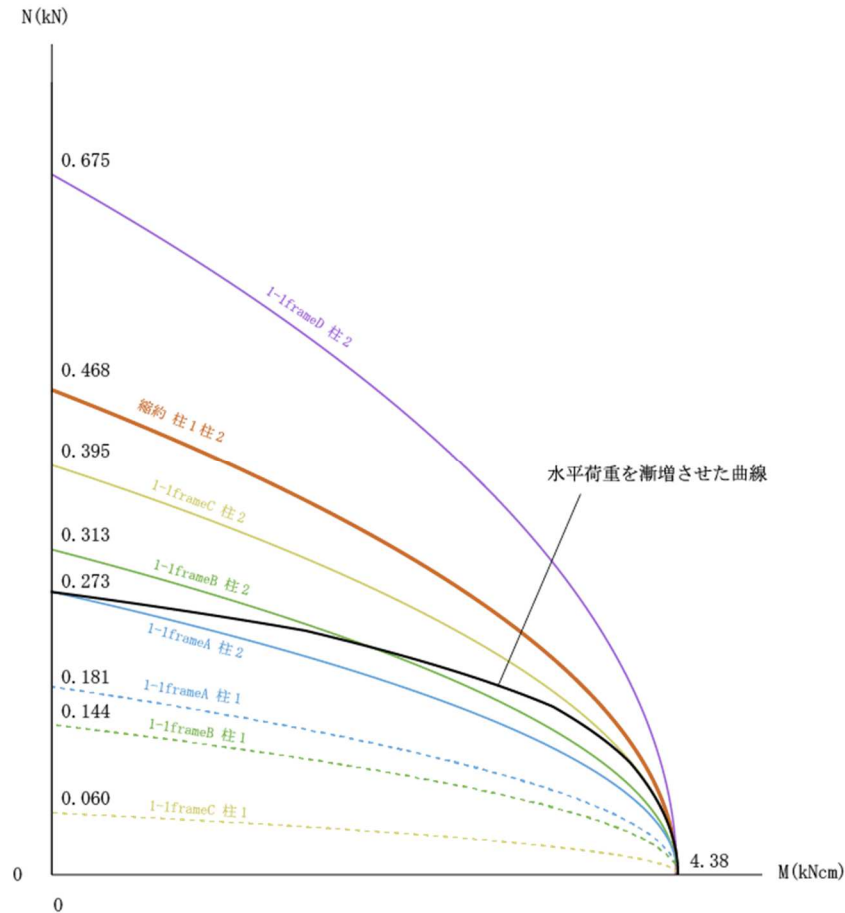


図 3-5 1-1frame から導かれる  $M - N$  相関曲線

全体座屈解析に着目すると、鉛直荷重のみの 1-1frameA から引ける  $M - N$  相関曲線は左右の柱で座屈荷重が異なるという点で合理的でない可能性がある。このモデルに水平荷重を加えていくと 1-1frameB, C, D の順に柱 2 の座屈荷重は大きくなっていくことが確認できるため、柱 2 の断面を小さくすることが可能であると考えられるが、柱 1 に関しては 1-1frameA に比べて座屈荷重が小さくなるためより過小評価してしまっている可能性がある。また、これら複数の  $M - N$  相関曲線のうちどの曲線を採用すればよいのかという点もより複雑な架構に関しては主観の介入が予想され、一般化には向かないと考えられる。

また、朝原は終局時の応力状態を再現する増分解析を行うことで、図の黒線のような曲線を  $M - N$  相関曲線の 1 つの可能性として提示している。朝原は線形座屈解析が軸力を比例増加させた状態を想定しているため、この水平荷重を漸増させた状態を表す曲線が安全側とは言い切れないことを指摘している。

縮約時は、柱ごとに座屈荷重倍率を算出することにより荷重条件に依らず等しい座屈荷重が得られているため、先述した左右柱の座屈荷重に関する不合理は解消されていることが確認できる。この縮約による  $M - N$  相関曲線が既往の解析手法に比べ実現象に近く、かつ実現象より安全側であることが確認できれば縮約手法の妥当性を示せると言える。

## 3.2 座屈荷重の実験検証

### 3.2.1 実験概要

実験セットアップ図は以下の図の通り。

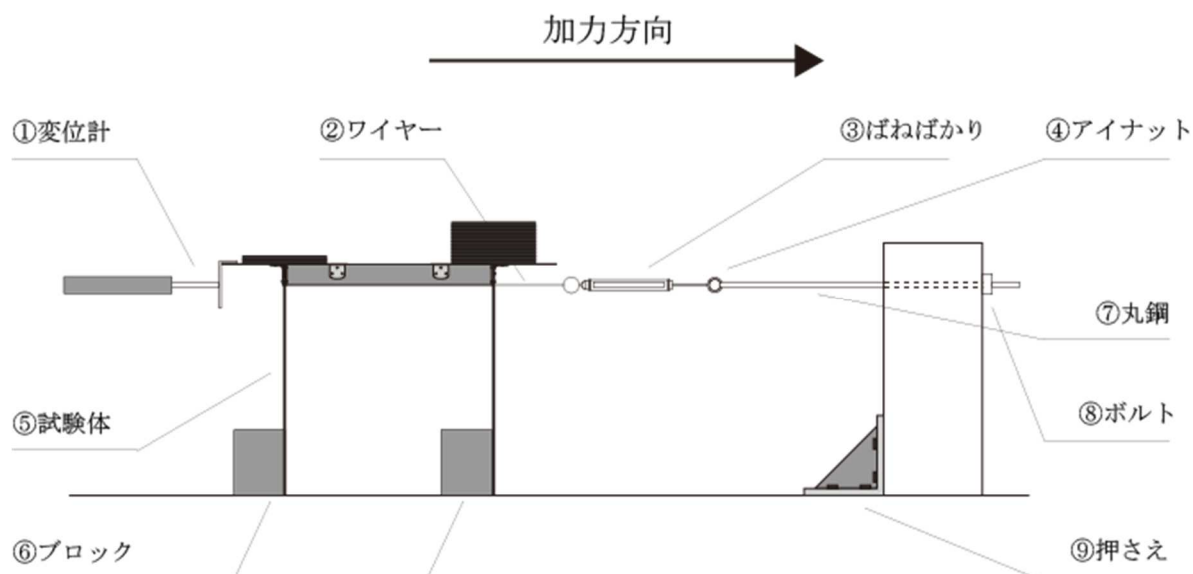


図 3-6 加力実験セットアップ図



図 3-7 加力の様子

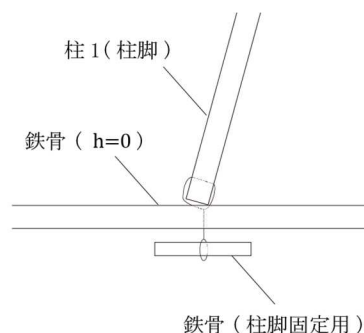


図 3-8 柱 1 柱脚の固定

各機器や部材の詳細は以下の通り。

①変位計：加力時の試験体倒壊の危険性を考慮し加力方向の反対側のみに設置。⑤試験体にプレートを固定し、そのプレートの水平変位を測定した。また、変位計の先端と試験体が接することにより試験体に力が加わることも考慮した( $Q = 0.004kN$ )。

②ワイヤー：⑤試験体及び③ばねばかりを固定するために使用。加力位置は梁の下端の高さで行った。

③ばねばかり：水平荷重はこのばねばかりにより計測した。

⑤試験体：次項以降に掲載。

⑥ブロック：柱脚はピン接合にする必要がある。鉛直荷重はかけ続けており、水平荷重による反力の方向が確定しているため柱脚が滑ることを防ぐため 1 方向のみブロックを試験体に隣接するように固定した。しかし柱 1 に関しては軸力が負になり柱脚が浮く可能性があったためワイヤーで固定した。(図 3-8)

⑧ボルト：ボルトにねじ加工した⑦丸鋼を通し、ボルトを回すことで水平方向の加力を行った。

試験体は以下の図 3-9 から図 3-11 のように作成した。

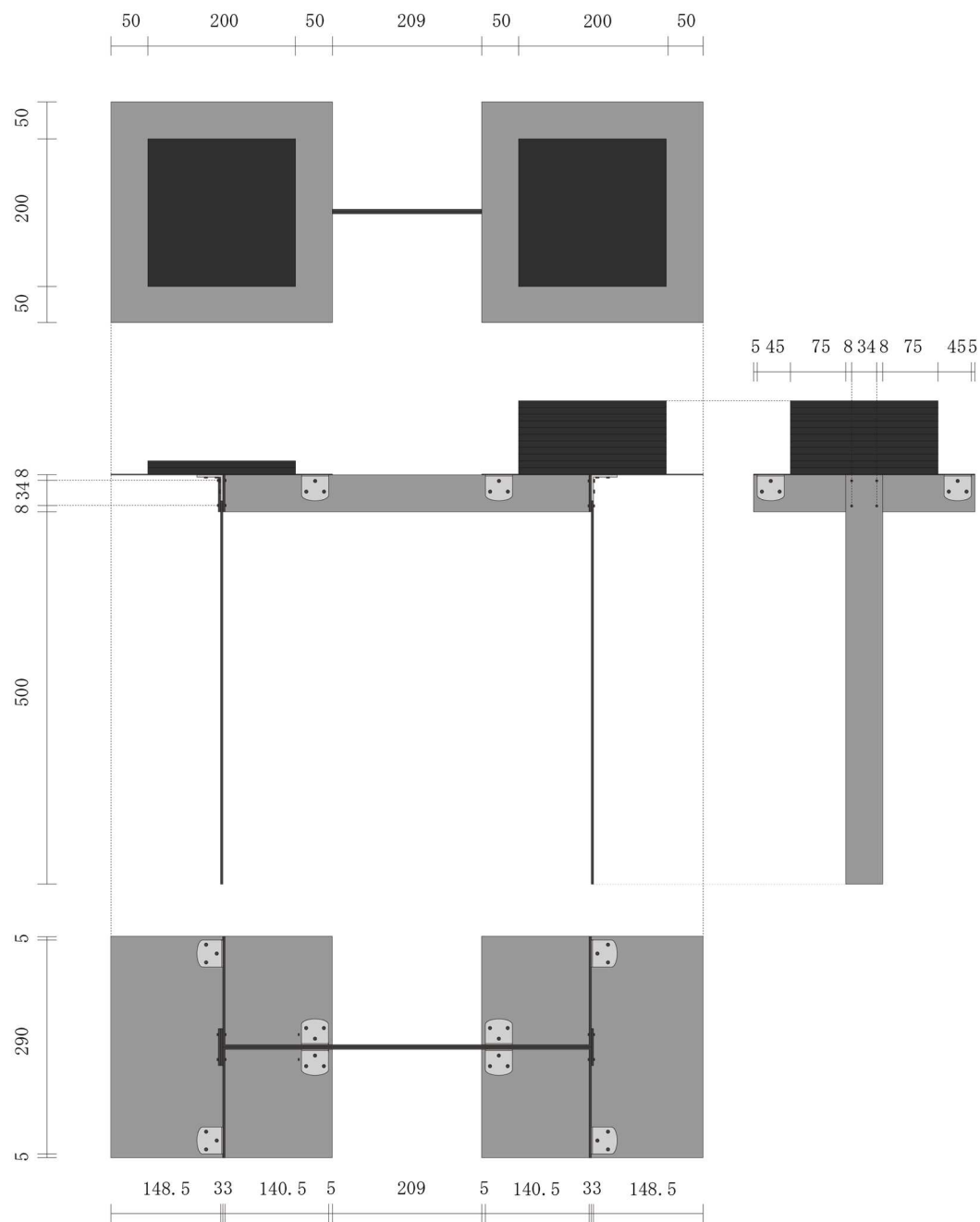


図 3-9 試験体 寸法 (mm)



図 3-10 曲げ加工を行った梁



図 3-11 柱頭の荷重

試験体に関しては、偏荷重を常に鉛直方向にかけることのできる必要がある。その上で柱梁共に 50cm となるよう試験体の寸法を決定した。材料には SS400 を使い、FB-3×50mm を用いた。梁はフラットバー 2 本をコの字になるよう曲げ加工を行い、背を向かい合わせに組み合わせることで作成した(図 3-10)。柱は 1 本で作成したため、断面情報は図 3-3 の (b) (c) のようになる。各柱梁は 3.2mm の下穴をあけ、3mm のステンレス製のボルトで固定した。

この柱頭に偏荷重をかける仕組みとして、300×300×9mm の鉄板をおもりをのせる土台として柱頭に固定した。この鉄板に L 字アングルで 200×200mm の枠を作り、200×200×9mm の鉄板をおもりとして乗せることで鉛直荷重とした(図 3-11)。

図 3-9 の試験体は右方向に加力するのだが、この時特に加工を行わなければ柱 2 は梁の下端で塑性が起こることに対し、柱 1 の塑性化は柱と梁を接合したボルトの高さで生じる(図 3-12)。しかし柱の長さが 50cm として計算を行いたいため、両柱の塑性化を梁の下端の高さで生じようにする必要がある。そのため柱 1 の上端に 50×50×3mm の鉄板を取り付けた(図 3-13)。

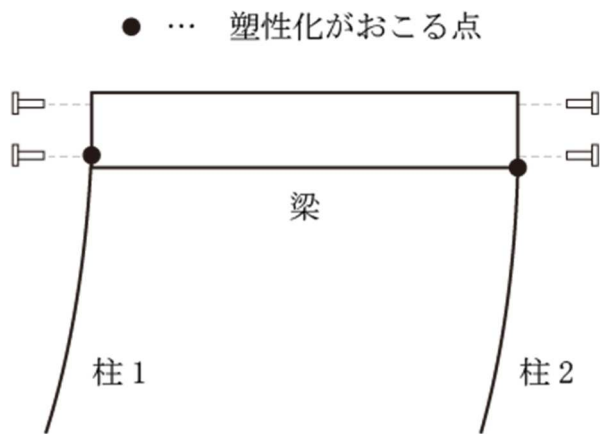


図 3-12 柱頭の塑性化



図 3-13 柱1 柱頭の固定

土台用の鉄板、鉄板、L 字アングル、ボルトなど柱材を除く全ての部材の質量を柱頭にかかる荷重とした。梁は質量を計測し、両柱頭に均等にかかる荷重として計算を行った。

材料強度は朝原の実験結果を用い全塑性モーメント  $M_p = 4.38 \text{ kNcm}$  とした。



### 3.2.2 実験結果

#### ・試験体 a



図 3-14 試験体 a 実験开始前 ( $Q = 0 \text{ kN}$ )



図 3-15 試験体 a 加力中 ( $Q = 0.0072 \text{ kN}$ )



図 3-16 試験体 a 終局時 ( $Q = 0.0115 \text{ kN}$ )



図 3-17 試験体 a 転倒 ( $Q = 0.0105 \text{ kN}$ )

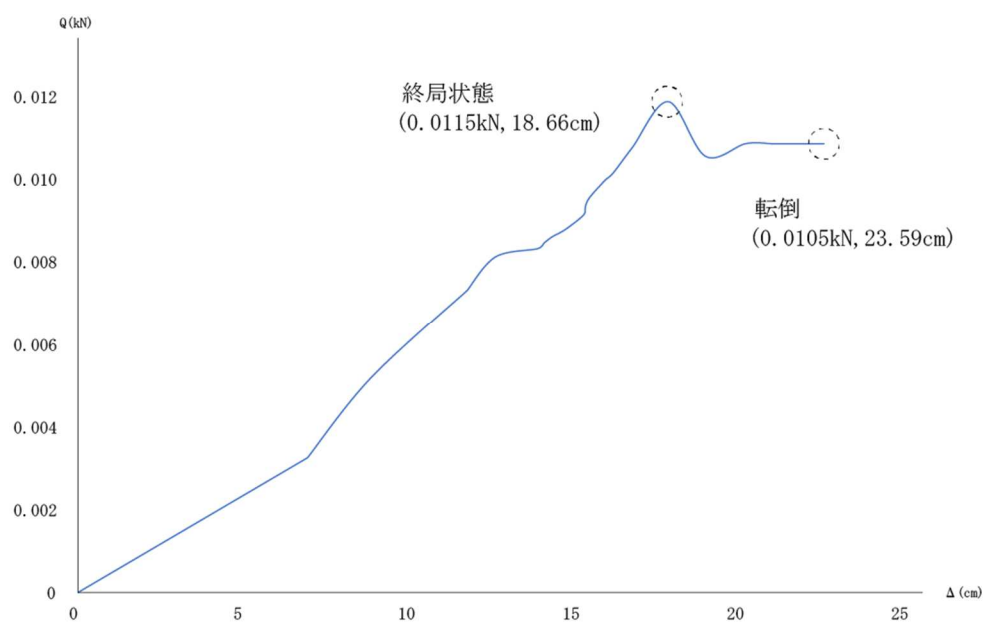


図 3-18 試験体 a 荷重変形曲線

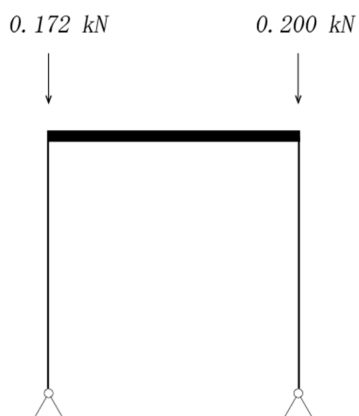


図 3-19 試験体 a 初期荷重条件

表 3-1 試験体 a 終局状態

鉛直荷重 $P_1$ (kN) $P_2$ (kN)		最大水平荷重 $Q_{\max}$ (kN)	最大水平変位 $\Delta_{\max}$ (cm)
0.172	0.200	0.0115	18.66
$N_1$ (kN)		$N_2$ (kN)	$M_{\text{total}}$ (kNcm)
0.022		0.351	7.535

初期状態から加力を続けていったところ 0.0115 kN で終局状態に到達した。その後もワイヤーを引き続けると転倒した。

最大水平荷重  $Q_{\max}$  は 0.011 kN、最大水平変位  $\Delta_{\max}$  は 18.66 cm となった。



・試験体 b



図 3-20 試験体 b 実験开始前 ( $Q = 0 \text{ kN}$ )



図 3-21 試験体 b 加力中 ( $Q = 0.0070 \text{ kN}$ )



図 3-22 試験体 b 終局時 ( $Q = 0.0129 \text{ kN}$ )

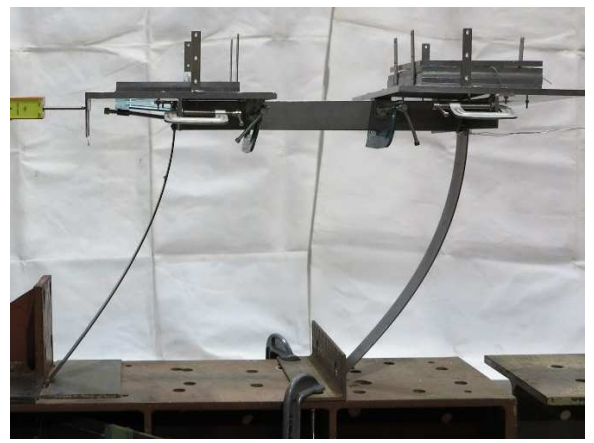


図 3-23 試験体 b 転倒直前 ( $Q = 0.0124 \text{ kN}$ )

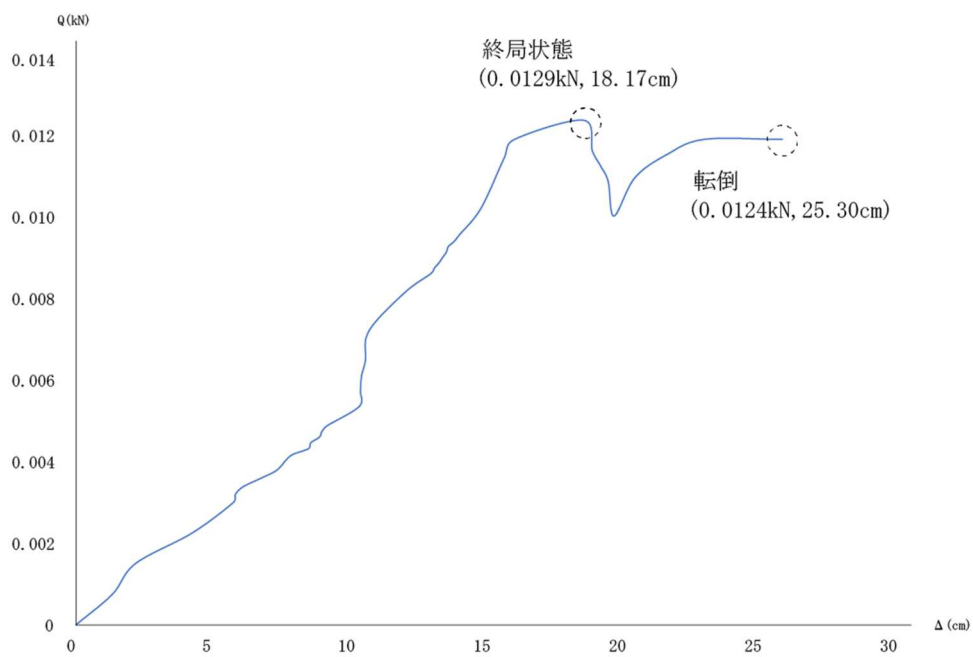


図 3-24 試験体 b 荷重変形曲線

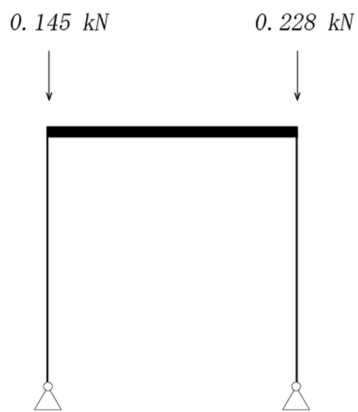


図 3-25 試験体 b 初期荷重条件

表 3-2 試験体 b 終局状態

鉛直荷重 $P_1$ (kN) $P_2$ (kN)		最大水平荷重 $Q_{\max}$ (kN)	最大水平変位 $\Delta_{\max}$ (cm)
0.145	0.228	0.0129	18.17
$N_1$ (kN)		$N_2$ (kN)	$M_{\text{total}}$ (kNcm)
-0.0039		0.377	7.361

初期状態から加力を続けていったところ 0.0129N で終局状態に到達した。その後もワイヤーを引き続けると転倒した。

最大水平荷重  $Q_{\max}$  は 0.0129N、最大水平変位  $\Delta_{\max}$  は 18.17m となった。

・試験体 c



図 3-26 試験体 c 実験开始前 ( $Q = 0 \text{ kN}$ )

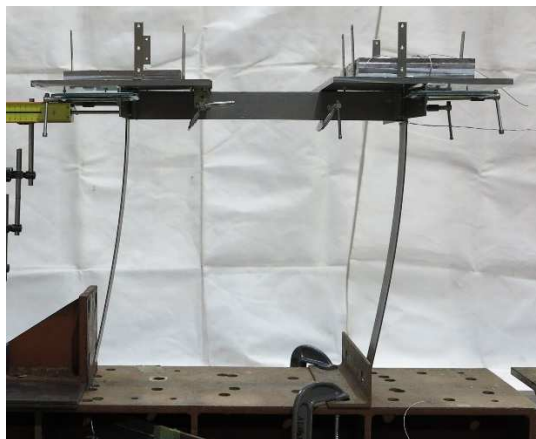


図 3-27 試験体 c 加力中 ( $Q = 0.0070 \text{ kN}$ )

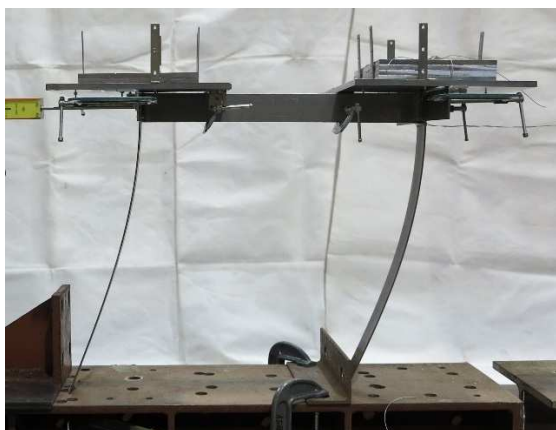


図 3-28 試験体 c 終局時 ( $Q = 0.0187 \text{ kN}$ )



図 3-29 試験体 c 実験終了 ( $Q = 0.0187 \text{ kN}$ )

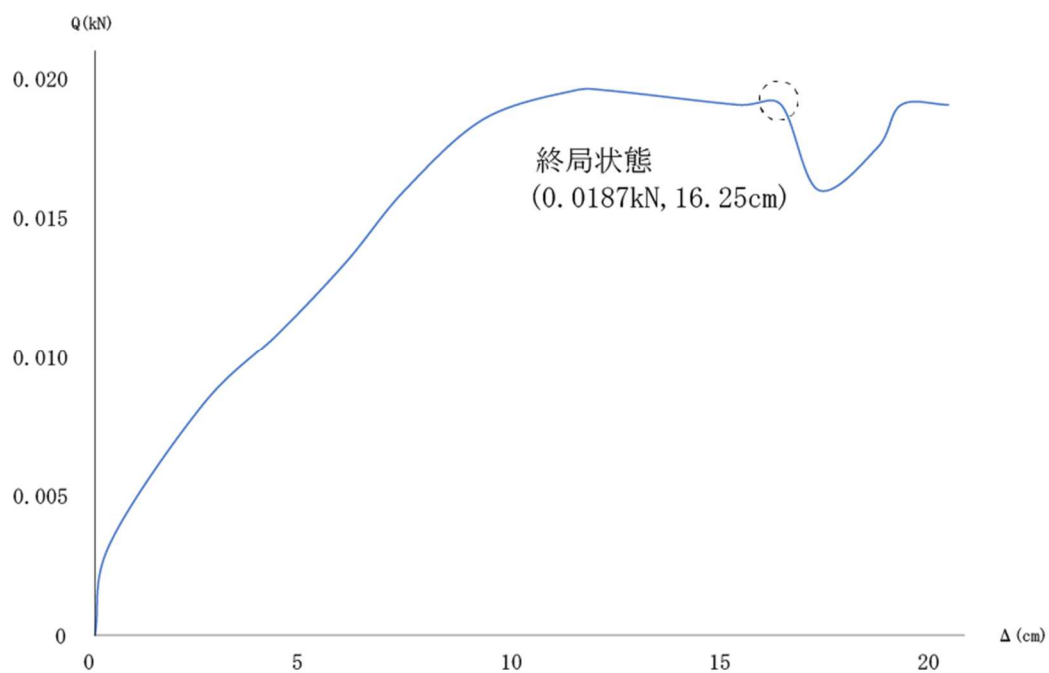


図 3-30 試験体 c 荷重変形曲線

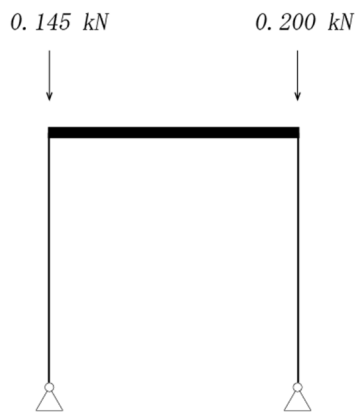


図 3-31 試験体 c 初期荷重条件

表 3-3 試験体 c 終局状態

鉛直荷重 $P_1$ (kN) $P_2$ (kN)		最大水平荷重 $Q_{\max}$ (kN)	最大水平変位 $\Delta_{\max}$ (cm)
0.145	0.200	0.0187	16.25
$N_1$ (kN)		$N_2$ (kN)	$M_{\text{total}}$ (kNcm)
0.014		0.331	6.545

初期状態から加力を続けていったところ 0.0187 kN で終局状態に到達した。その後もワイヤーを引き続け、変位が 20 cm に達した時点で実験を終了した。

最大水平荷重  $Q_{\max}$  は 0.0187 kN、最大水平変位  $\Delta_{\max}$  は 16.25cm となった。

なお、塑性化した試験体は以下の写真のようになった。



図 3-32 柱 1 柱頭の塑性化



図 3-33 柱 2 柱頭の塑性化

図 3-12 のように既往実験では柱 1 の塑性化はボルトの高さで生じていたが、図 3-32、3-33 を見ると塑性化が両柱とも梁の下端の高さで発生していることが確認できた。

また、表 3-1 及び 3-2 内の数値は実験値から以下の式(3-1) (3-2) (3-3)を用いて算出した。

$$\text{(再掲)} \quad N_1 = \frac{(w - \Delta) \times P_1 - \Delta \times P_2 - Q \times h}{w} \quad (3-1)$$

$$\text{(再掲)} \quad N_2 = \frac{\Delta \times P_1 + (w + \Delta) \times P_2 + Q \times h}{w} \quad (3-2)$$

$$\text{(再掲)} \quad M_{total}(= M_1 + M_2) \quad (3-3)$$

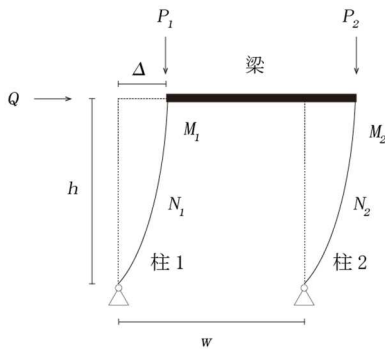
この時  $w = 50\text{cm}$  また  $h = 50\text{cm}$  として計算を行っている。この柱の長さ $h$  に関しては、鉛直方向の変位も生じているため正確ではない可能性がある。今回は鉛直方向の変位は計測しておらず、また鉛直荷重によるモーメントの影響が大きいため誤差は大きくないと考えられるが、より正確な計測を行うには鉛直方向の変位も計測する必要がある。

### 3.3 実験結果に関する考察

#### 3.3.1 実験と解析値の比較検証

実験結果から得られる終局状態の応力の情報は、柱1の軸力 $N_1$ 、柱2の軸力 $N_2$ 、柱1と柱2にかかる曲げモーメントの和 $M_{total}$ である。モーメントは個別には特定できないが、柱頭のモーメントの和が決まっているので、モーメントが単調減少であるため図3-34のようにモーメントの合計値から全塑性モーメントを減算した値を $M_{2min}$ としたときに描く曲線の候補を決定できる。

$$M_{2min} = M_{total} - M_p \quad (3-4)$$



(再掲) 図 3-2 1層ラーメン各部材の名称と文字

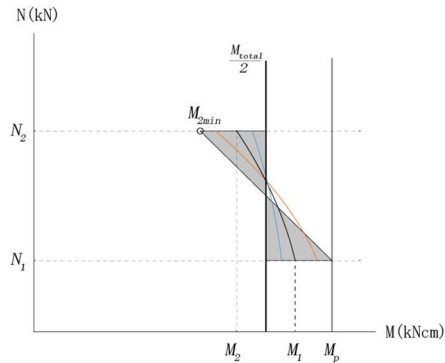


図 3-34 考えられる曲線の候補

これらの曲線と解析による座屈荷重から求まる曲線の比較を行う。

また、線形座屈解析を行うことで各柱の座屈荷重を算出し、 $M-N$  相関曲線を描き実験における柱1の軸力 $N_1$ 、柱2の軸力 $N_2$ との交点を求めることで、各柱の柱頭の塑性化が起こった時点でのモーメントの値を特定可能である。このモーメントの合計値と実験の値を比較することで、全体座屈解析や縮約による手法が実現象に対し安全側かどうかの検証を行う。

実験との比較を行うため解析を行ったモデルは以下の2つである。xには試験体名が入る。

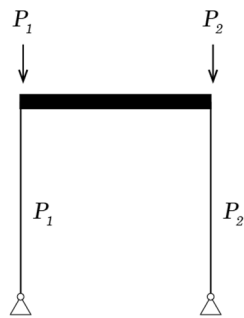


図 3-35 解析モデル frame\_xa

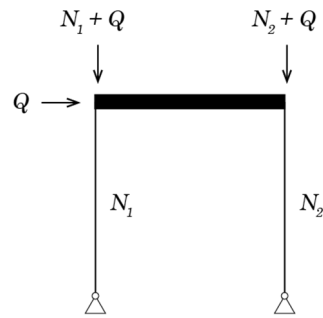


図 3-36 解析モデル frame\_xb

解析モデル frame\_xa は、鉛直荷重のみをかけたモデルである。解析モデル frame\_xb は、鉛直荷重に加え水平力をかけた状態の軸力が実験の終局時の状態を再現しているモデルである。xには試験体番号が入る。通常全体座屈解析では考慮できない $P-\Delta$  効果を含んだモデルであり、より実験の状態に近いと考えられる。以下試験体別に結果を示す。

### 3.3.2 試験体別検証

#### ・試験体 a

解析モデル及び座屈荷重は以下の通り。

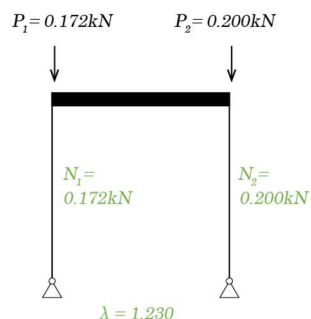


図 3-37 frame\_aa

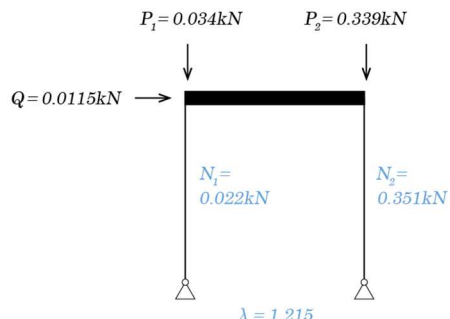


図 3-38 frame\_ab

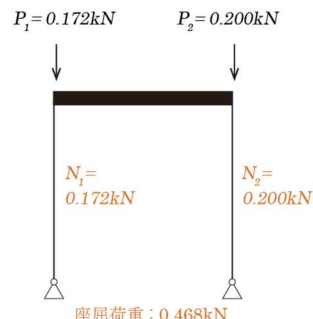


図 3-39 縮約時

表 3-4 試験体 a 解析結果

	frame_aa			frame_ab		
	軸力 $N$ (kN)	全体座屈 固有値 $\lambda$	座屈荷重 $N_{cr}$ (kN)	軸力 $N$ (kN)	全体座屈 固有値 $\lambda$	座屈荷重 $N_{cr}$ (kN)
柱 1	0.172	1.230	0.212	0.0220	1.215	0.0267
柱 2	0.200	1.230	0.246	0.351	1.215	0.426

縮約時の座屈荷重は解析モデルによらず一定である。

以下に  $M - N$  相関曲線を示す。frame\_aa について、柱 2 について描いた曲線である aa-2 と  $N_2$  の交点には存在しない。この時点で解析手法が適切ではない可能性が高いが、今回は終局時のモーメントの値を 0 と仮定し  $M_{total}$  を算出している。また、座屈荷重と降伏荷重  $N_y$  により描画される曲線は降伏荷重の値が座屈荷重に比べて非常に大きいのでこのグラフ上ではほぼ直線になっている。

表について、実験値は前項で述べたモーメントの取り得る値を元に計算している。具体的には  $M_{total}/2 < M_1 < M_p$  また  $M_{2min} < M_2 < M_{total}/2$  である。これは今後の試験体でも同様である。



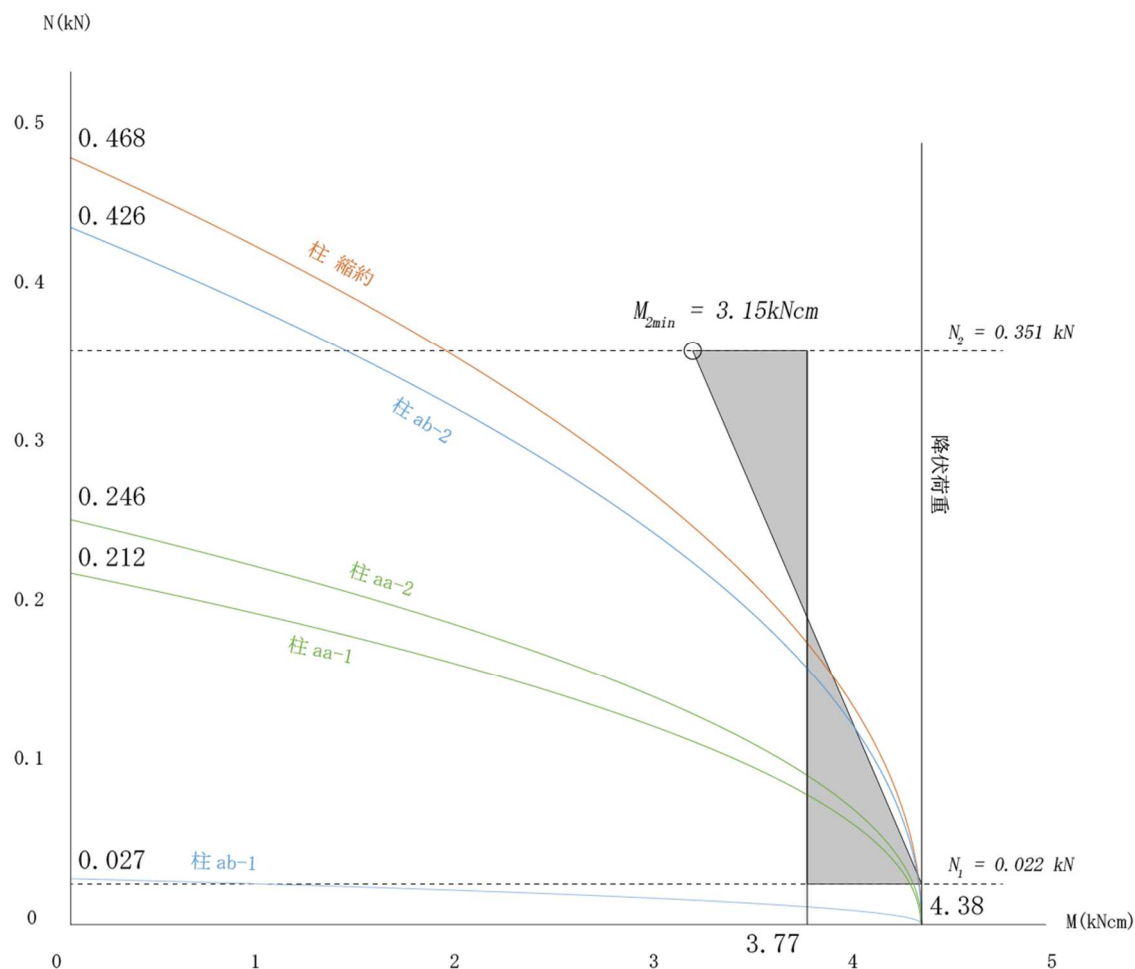


図 3-40 試験体 a 各種相関曲線の比較

表 3-5 試験体 a と解析モデルの比較

	frame_aa	frame_ab	縮約	実験値
$M_1$ (kNcm)	4.33	1.41	4.37	3.77 - 4.38
$M_2$ (kNcm)	0	1.41	1.91	3.15 - 3.77
$M_{total}$ (kNcm)	4.33	2.82	6.29	7.54

実験値との比較を行うと、 $M_1$ は frame\_aa 及び縮約手法について範囲内であることが確認できる。 $M_2$  についてはいずれも範囲外であるが、縮約手法が最も実験値に近く、次に frame\_ab となる。frame\_aa は先に述べたように座屈荷重が実験値の軸力より小さくなってしまうため、適切ではない可能性が高い。

また、 $M_{total}$  について実験値との比較を行うといずれも実現象に対して安全側であることが確認できる。こちらも縮約手法が最も実験値に近く、順に frame\_aa、frame\_ab となる。



・試験体 b

解析モデル及び座屈荷重は以下の通り。

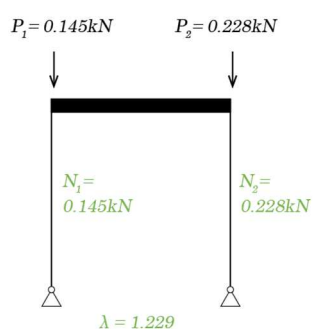


図 3-41 frame\_ba

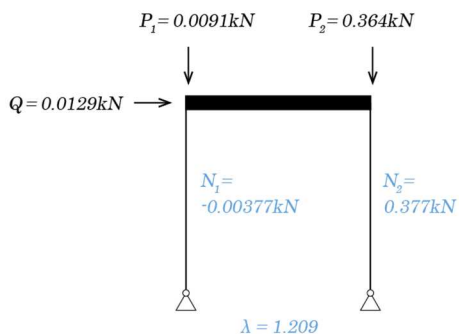


図 3-42 frame\_bb

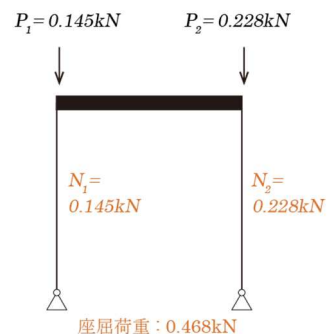


図 3-43 縮約時

表 3-6 試験体 b 解析結果

	frame_ba			frame_bb		
	軸力 $N$ (kN)	全体座屈 固有値 $\lambda$	座屈荷重 $N_{cr}$ (kN)	軸力 $N$ (kN)	全体座屈 固有値 $\lambda$	座屈荷重 $N_{cr}$ (kN)
柱 1	0.145	1.229	0.178	-0.00377	1.209	-0.00456
柱 2	0.228	1.229	0.281	0.377	1.209	0.456

以下に  $M - N$  相関曲線を示す。frame\_ba について、試験体 a と同様に柱 2 について描いた曲線である ba-2 との  $N_2$  の交点は存在しない。こちらも終局時のモーメントの値を 0 と仮定し  $M_{total}$  を算出している。また frame\_bb については柱 1 について軸力が負の値、すなわち引張となっている。微小な引張がかかった状態の部材が塑性化するのほぼ全塑性モーメント  $M_p$  であるため、その値を採用している。これは軸力が負の値の場合について  $M - N$  相関曲線は降伏荷重の値を用いるためである。

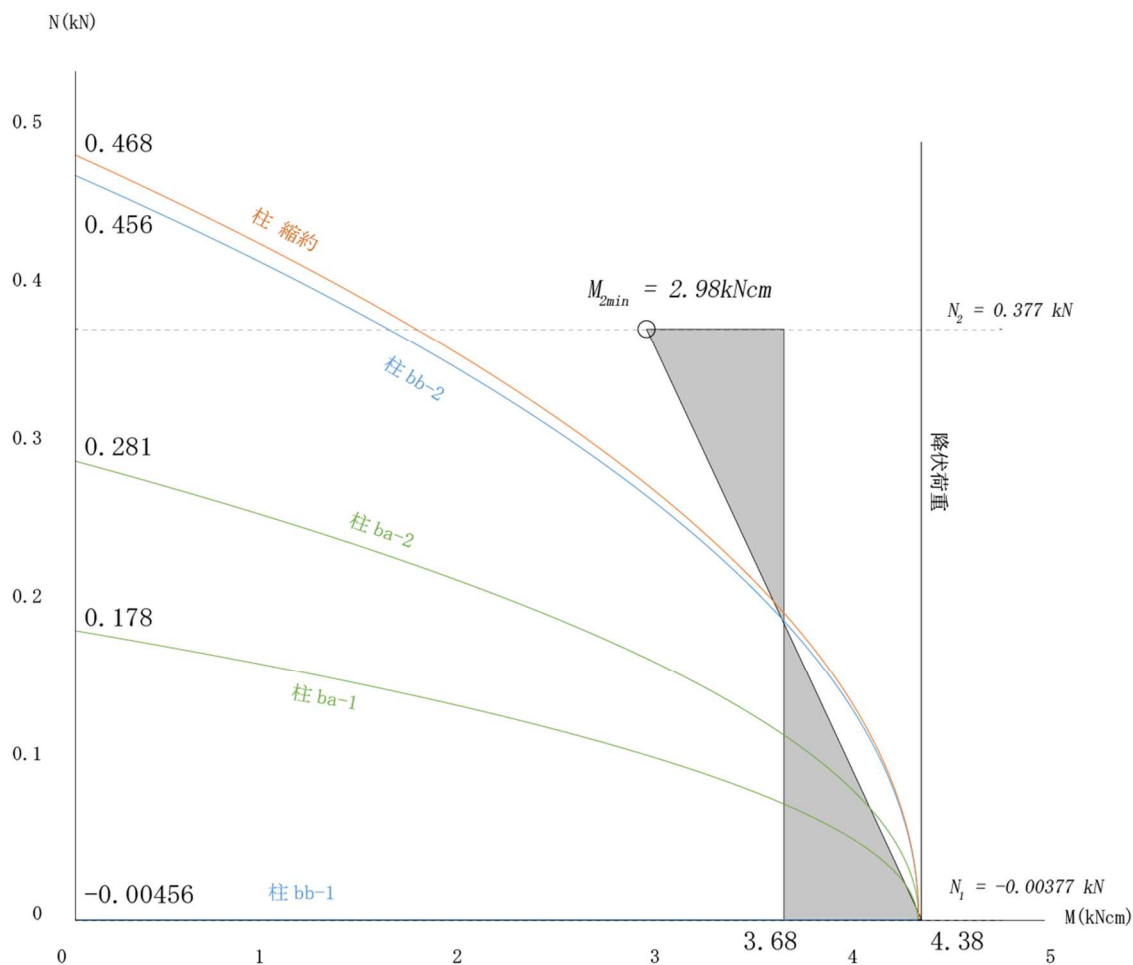


図 3-44 試験体 b 各種相関曲線の比較

表 3-7 試験体 b と解析モデルの比較

	frame_ba	frame_bb	縮約	実験値
$M_1$ (kNcm)	4.38	4.38	4.38	3.68 - 4.38
$M_2$ (kNcm)	0	1.38	1.54	2.98 - 3.68
$M_{total}$ (kNcm)	4.38	5.76	5.92	7.36

こちらは実験値との比較を行うと、 $M_1$ は全てのモデルで範囲内であることが確認できる。 $M_2$ についてはいずれも範囲外であるが、こちらも縮約手法が最も実験値に近く、次に frame\_bb となる。frame\_ba はこの条件下でも  $N_2$  との交点を持たない。

また、 $M_{total}$  について実験値との比較を行うといずれも実現象に対して安全側であることが確認できる。こちらも縮約手法が最も実験値に近く、順に frame\_bb、frame\_ba となる。

・試験体 c

解析モデル及び座屈荷重は以下の通り。

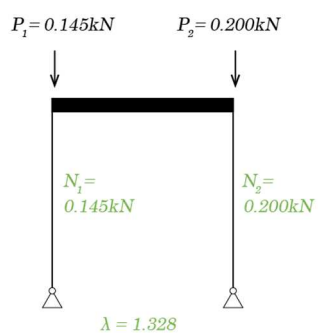


図 3-45 frame\_ca

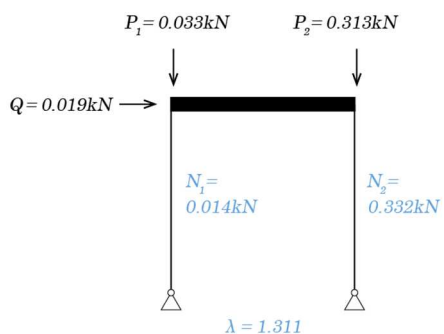


図 3-46 frame\_cb

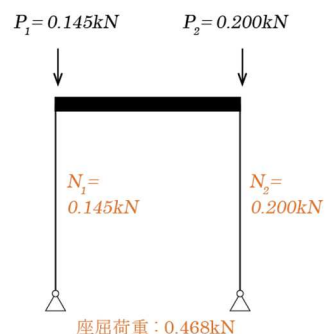


図 3-47 縮約時

表 3-8 試験体 c 解析結果

	frame_ca			frame_cb		
	軸力 $N$ (kN)	全体座屈 固有値 $\lambda$	座屈荷重 $N_{cr}$ (kN)	軸力 $N$ (kN)	全体座屈 固有値 $\lambda$	座屈荷重 $N_{cr}$ (kN)
柱 1	0.145	1.328	0.192	0.0135	1.311	0.0176
柱 2	0.200	1.328	0.266	0.332	1.311	0.435

縮約時の座屈荷重は解析モデルによらず一定である。

以下に  $M - N$  相関曲線を示す。

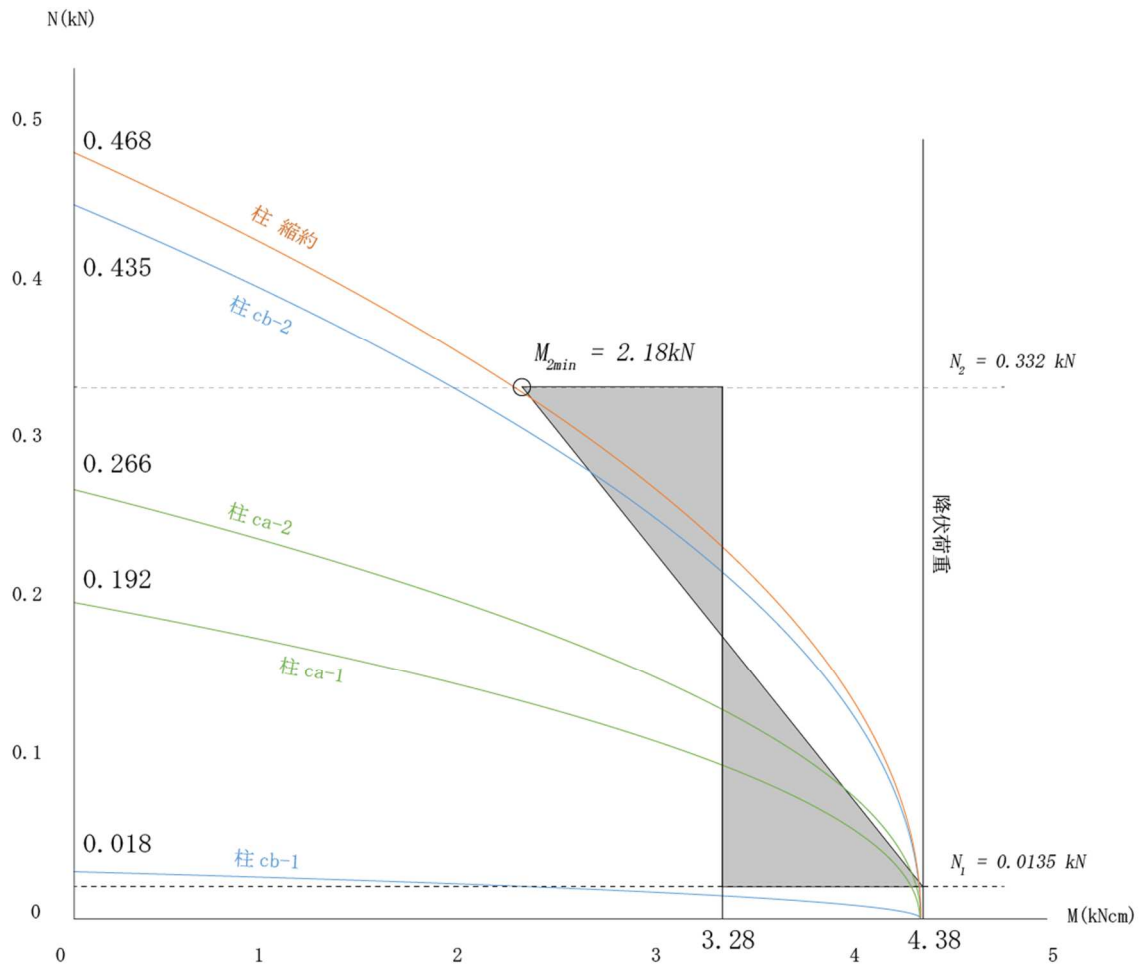


図 3-48 試験体 c 各種相関曲線の比較

表 3-9 試験体 c と解析モデルの比較

	frame_ca	frame_cb	縮約	実験値
$M_1$ (kNcm)	4.36	1.83	4.38	3.28 - 4.38
$M_2$ (kNcm)	0	1.83	2.18	2.18 - 3.28
$M_{total}$ (kNcm)	4.36	3.76	6.56	6.56

実験値について比較を行うと、 $M_1$  は frame\_ca 及び縮約時に範囲内となった。 $M_2$  は縮約時のみ実験値の範囲内となり、解析モデルはいずれも範囲外もしくは交点を持たないという結果になった。

こちらは $M_{total}$ について比較を行うと、実験値と縮約による解析値がほぼ一致した。有効数値 4 桁まで計算を行うと実験値が 6.564kN、縮約が 6.556kN と僅かに安全側となった。次に近い順に frame\_ca、frame\_cb となった。

### 3.3.3 実験総括

今回の実験により得られる知見を以下に示す。

前提として、実験値が降伏荷重による曲線より内側で描画できることから実験の値の妥当性が確認できる。先に述べた軸圧縮力の生じる状態では座屈荷重で評価する様子が表れている。参考として、 $M_{2min}$  と  $N_2$  の交点(図中の○)を通る降伏曲面を仮定した場合の座屈荷重を以下に示す。この値は実験値から考え得る座屈荷重の中で最小のものとなる。

表 3-10 実験値による座屈荷重

	試験体 a	試験体 b	試験体 c	縮約時座屈荷重	降伏荷重
$N_{cr}$ (kN)	0.662	0.684	0.468	0.468	5.38

このようにいずれも降伏荷重よりはかなり小さい値となり、その中で縮約手法は実験による座屈荷重に近くよい値を示していると言える。

解析モデル frame\_xa については、先にも述べたがいずれも柱 2 の座屈荷重が実験による柱 2 の軸力の値を下回る結果となり、座屈荷重を求める解析方法としては適切でないと考えられる。解析モデル frame\_xb については高軸力の領域に関しては誤差が解析モデル frame\_xa よりいずれも小さくなっている。この結果から水平力により柱 2 の柱頭の拘束が強くなる様子が確認できる。しかし柱 1 に関して微小な圧縮力がかかった状態に関しては、非常に誤差が大きいという結果になった。参考として、 $M_{total}$  に関して実験値に対する解析値の割合を以下の表で示す。

表 3-11 各試験体 $M_{total}$  比較

	frame_xa	frame_xb	縮約	実験値
試験体 a	4.33	2.82	6.29	7.54
試験体 b	4.38	5.76	5.92	7.36
試験体 c	4.36	3.76	6.56	6.56

軸力が圧縮側に小さく生じている試験体 a、試験体 c の解析は特に誤差が大きいことが改めて確認できる。解析として用いるにはいずれも安全側であるため、柱 1 に関しては frame\_xa、柱 2 に関しては frame\_xb の値を採用するなどといった手法も考えられるが、これはこの単純なフレームにのみ適用できる手法であり、さらに架構が複雑になっていくと採用する値の決定が困難になる。

次に縮約手法に関してだが、高軸力領域の $M_2$  に関してはいずれも縮約手法が実験値に近い値を示していることから、その妥当性が確認できる。 $M_{total}$  に関しても縮約による値がいずれも実験値に近く、またいずれも安全側である。

これらの結果から、縮約手法は全体的に良い値を示していると言える。

### 3.3.4 今後検証されるべき点

既往実験を含めると、今回の実験検証により降伏曲面に関して一通り実験検証を行うことができた。

合計して6つの結果が得られたのだが、柱2の軸力に関しては全ての試験体で安全側という結果になった。既往実験と合わせて、縮約手法による $M_2$ を $M_{2min}$ で除した値が以下の表である。

表 3-12 各試験体 $M_2/M_{total}$ 比較

	既往試験体 1	既往試験体 2	既往試験体 3	試験体 c	試験体 a	試験体 b
$N_2/N_{cr}'$	0.345	0.399	0.490	0.709	0.750	0.806
$M_2/M_{2min}$	0.891	0.840	0.950	1.00	0.606	0.517

このように実現現象と縮約による $M_2$ には誤差が生じていることが確認できる。特に曲げ優勢域では曲げそのものの値が大きいため誤差が小さくなることを考慮すると縮約による $M_2$ はいずれも実現現象より同程度の割合で安全側に逸脱している可能性がある。この誤差の要因は試験体の作成の過程で解析上には表れない剛性が生じている可能性などが考えられるが、それが形状に起因するものか試験体や実験環境に要因が存在するのか現状解明されていないため更なる検証が必要である。また、表 3-10 のように試験体の座屈荷重が試験体の軸力状態ごとに異なる可能性がある。部材ごとに降伏曲面を設定できる環境があれば材料非線形・幾何学的非線形の解析で同様の検証を行うことが可能である。

## 4. 縮約手法を用いた座屈最適化

### 4.1 序

#### 4.1.1 モデルの分割数

本題に入る前に、モデルの分割数と座屈荷重倍率及び座屈モードの関係性について明記しておく。

一般的に、有限要素法による線形座屈解析は節点数を増やすほど正確な座屈荷重倍率が求まるとされている。これは1つの部材の座屈した状態を3次曲線で近似するため、部材に中間節点を多く与えるとその近似曲線により近づくためである。堤は1本柱に関して分割数を増やすことで座屈荷重がオイラー座屈荷重の値に近づくことを確認している。

しかし膨大な節点数を持つモデルでは計算量も激増するため、分割数を増やしても座屈荷重倍率の値があまり変化しなくなる分割数を確認し、次節以降の解析はその分割数で行うものとする。

検証したモデルは以下の4つである。モデル内の部材は全て同一の断面を持つ材である。

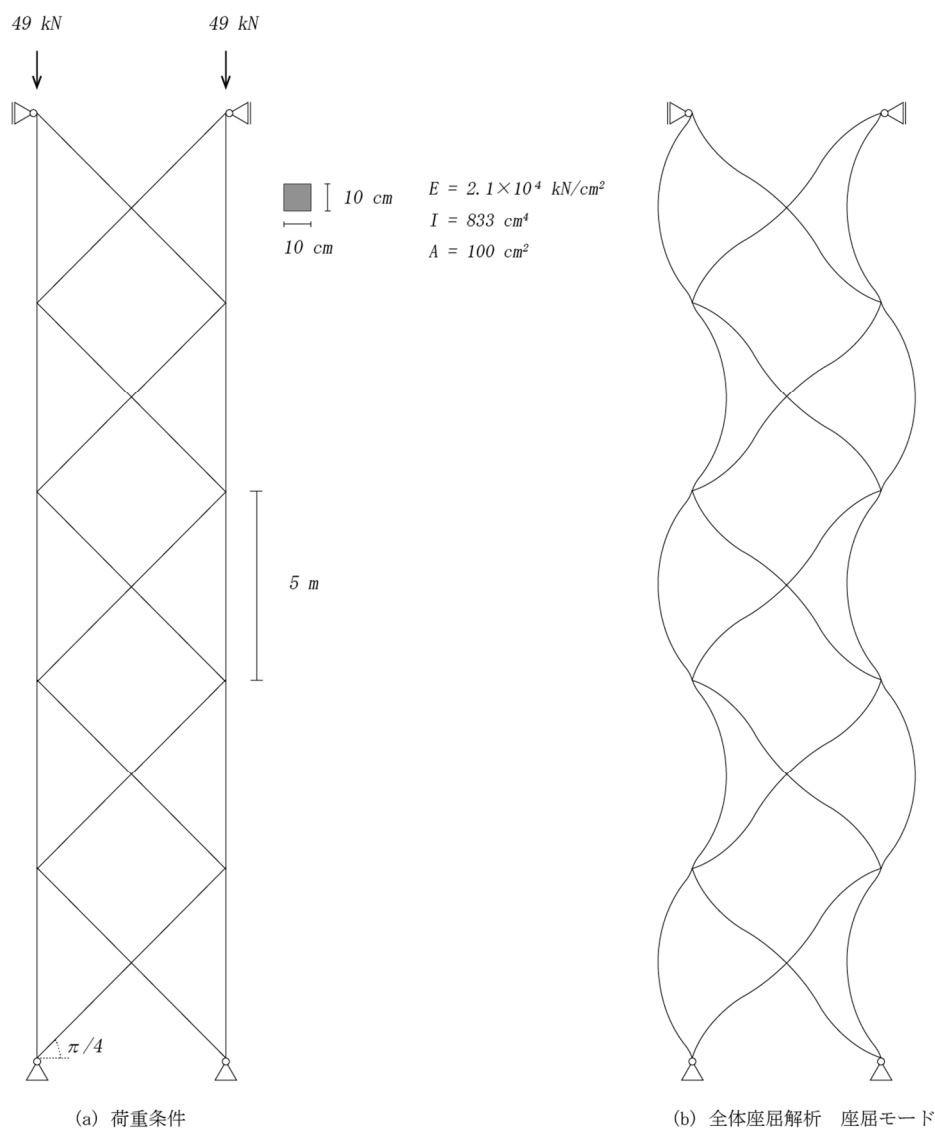


図 4-1 lattice 解析

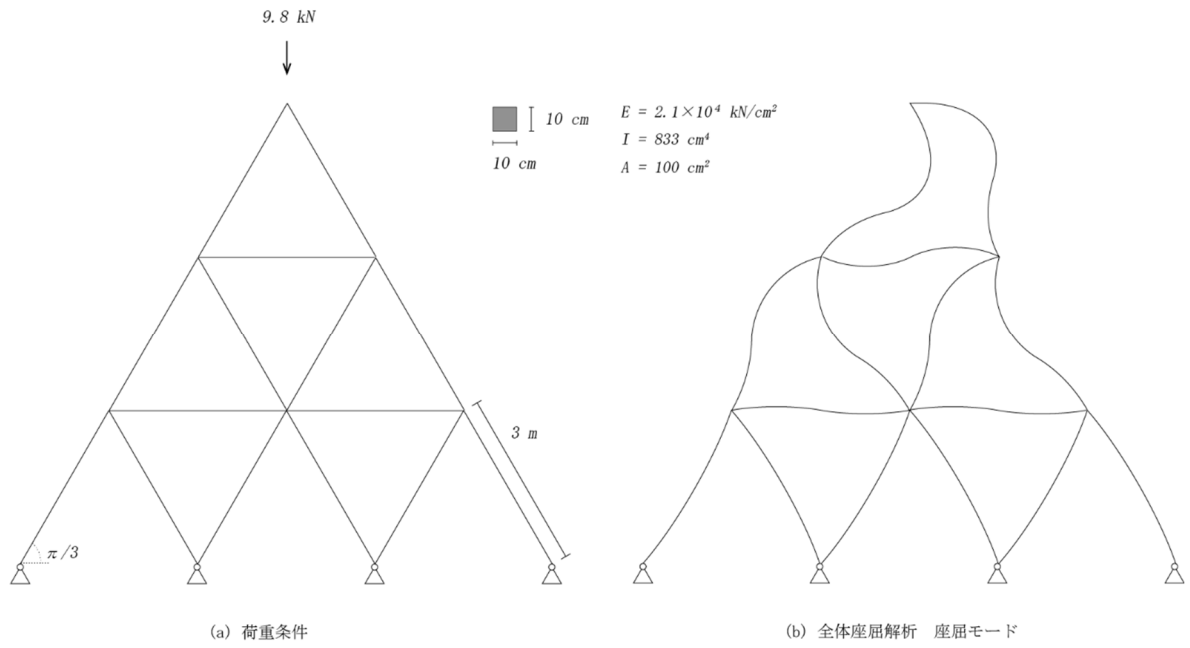


図 4-2 3-truss 解析

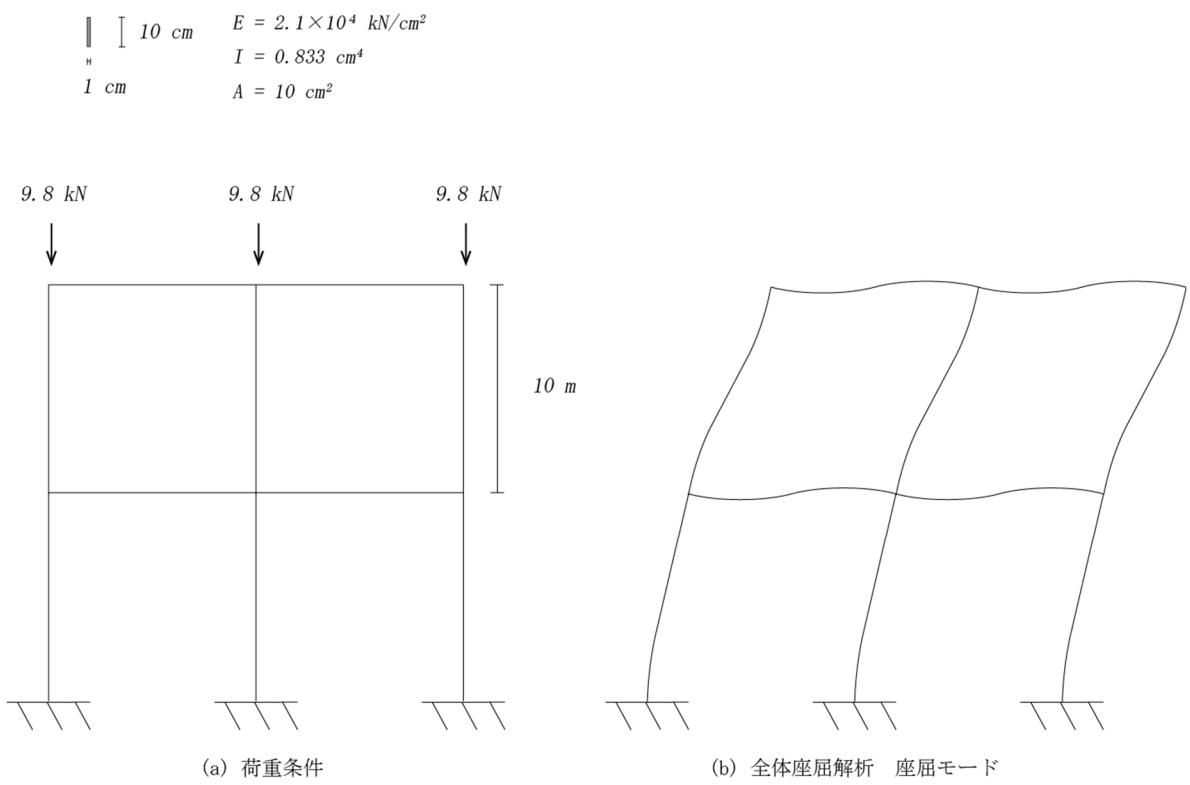


図 4-3 2-2frame 解析



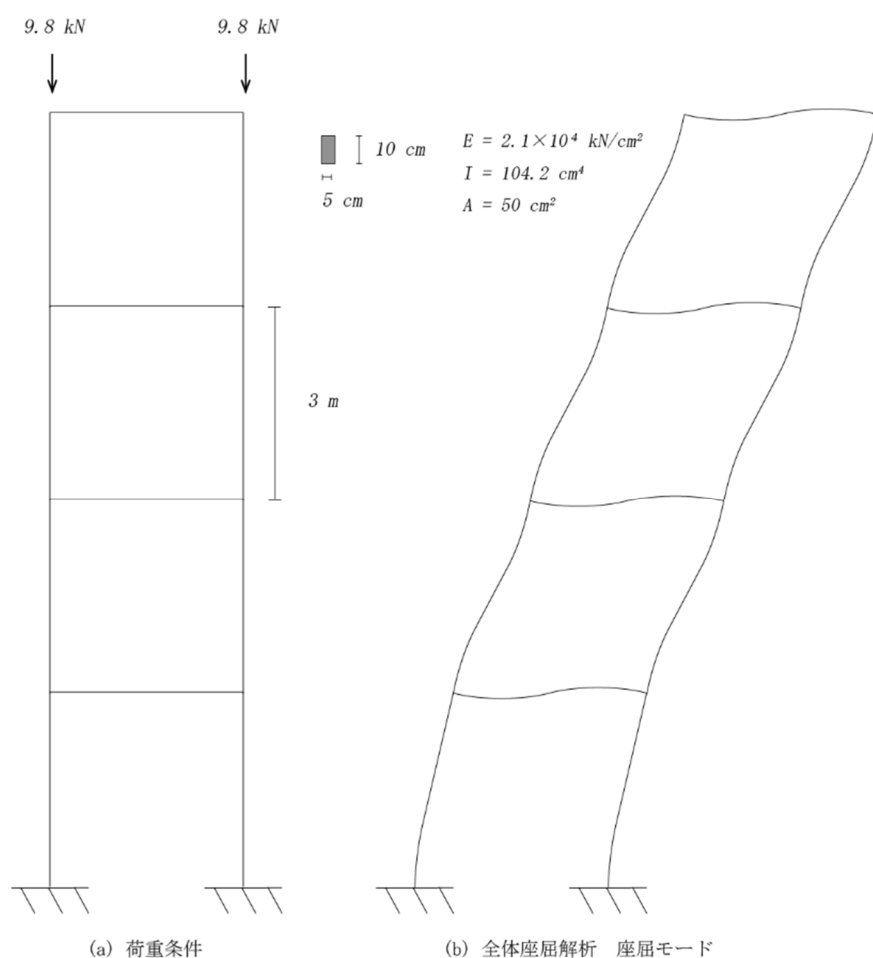


図 4-4 4-1frame 解析

表 4-1 全体座屈荷重倍率 解析結果一覧

分割数	lattice	3-3truss	2-2frame	4-1frame
1	64.4053	831.539	0.0118666	10.4429
2	33.5488	591.290	0.0118307	10.4305
$\lambda_2/\lambda_1$	52.09%	71.11%	99.70%	99.88%
4	33.2982	582.821	0.0118153	10.4249
$\lambda_4/\lambda_2$	99.25%	98.56%	99.87%	99.94%
8	33.2434	582.186	0.0118142	10.4245
$\lambda_8/\lambda_4$	99.83%	99.89%	99.99%	100.00%

$\lambda_k$  : k 分割時の座屈荷重倍率

座屈モードは全て 8 分割時のものを示している。

この結果から、境界条件や部材長、断面などを変えた架構で検証を行ったがモデルに関係なく分割数を増やすほど座屈荷重倍率は小さくなることが確認できる。そして値の誤差は 4 分割で十分小さくなることが確認できる。今後本論文では特に断りのない場合は全体座屈解析に関しては各部材を 4 分割した値を構造全体系の座屈荷重倍率として用いることとする。

座屈モードに関しては、分割数をさらに増やした状態のものを掲載する。座屈モードは分割数が少ないと正確な形状を求められないためである。例として、2-2frame の分割数別の座屈モードを以下に示す。

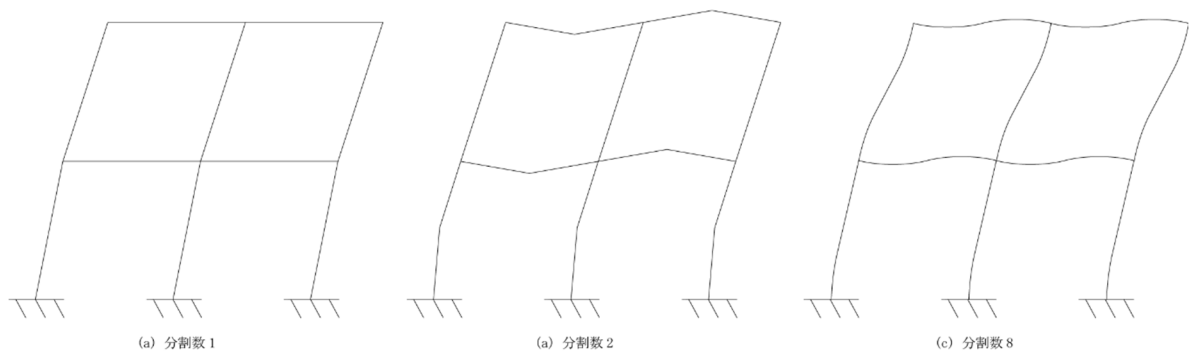


図 4-5 2-2frame 分割数別座屈モード

分割数が非常に少ないと変形が全く異なってしまうことが確認できる。

ただし本論文における縮約操作に関しては、特に部材の分割は行わず個材の剛性マトリクスを算出している。

#### 4.1.2 座屈最適化に関する既往研究

座屈に対する形状の最適化に関しては、座屈荷重倍率の逆数を個材の安全率とし、危険であれば材の剛性を大きく、安全であれば小さくという手法が研究されてきた。そのいずれも、初期形状に関して以下の制約を設けている。

- ・ 架構は二次元
- ・ 断面は矩形
- ・ 矩形断面の内  $xz$  平面に対し垂直方向の一边は固定、平面方向の見付け幅  $b$  のみを架構の変数とし、その他の材長や剛性は定数とし最適化のパラメータとはしない。
- ・ 架構全体の体積は一定とし、形状操作後の全体解析上における座屈荷重倍率  $\lambda$  によって座屈に対する最適化が行われたかを判断する。

本論文ではこの前提条件を踏まえ朝原はピン支持、部材長さ一定、剛接合の架構に関しては部材の見付け幅  $b$  を個材の座屈安全率の比に分配することで、座屈荷重倍率が上昇することを示した。座屈安全率とは個材の座屈荷重倍率  $\lambda'$  の逆数である。

また、氏岡は最適化を 2 段階に分けて行う手法を提唱した。1 段階目として架構全体の体積一定の状態でご材ごとの見つけ幅を操作する。この時個材の断面は一樣であり、これを部材体積分配と呼ぶ。2 段階目は個材ごとの体積が一定の状態でご材の見付け幅を操作するというものである。この段階では個材内でも断面が異なり、これを要素体積分配と呼ぶ。いずれも座屈安全率によって断面操作を行うが、こちらも座屈荷重倍率は上昇したが操作に主観を含むなどの問題を含む。

本論文では、座屈安全率とは別の手法でこの氏岡の提唱した 2 段階の最適化手法の 2 段階目である要素体積分配による座屈最適化に関する考察を行う。

## 4.2 個材の材端の回転剛性の具象化

### 4.2.1 回転に対する剛性と座屈モード

あらゆる構造物の中で、最も単純な構造物の1つは一本柱である。前節にて述べた要素体積分配について、まずは1本柱に関する考察を行う。各支持条件について、1本柱の座屈モードは以下ようになる。

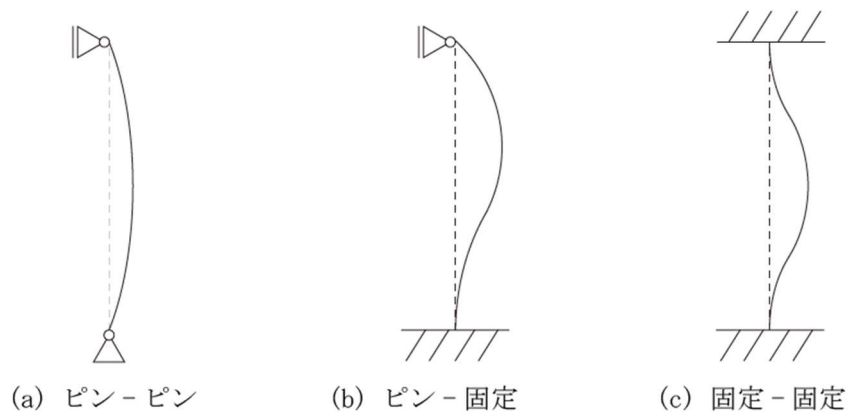


図 4-6 一本柱 座屈モード

そして一本柱に関しては、浜田ら<sup>(13)</sup>が柱頭から鉛直荷重のみを与えた状態について逆変分法を用い座屈に対する最適形状を示している。

左：最適形状    右：座屈モード

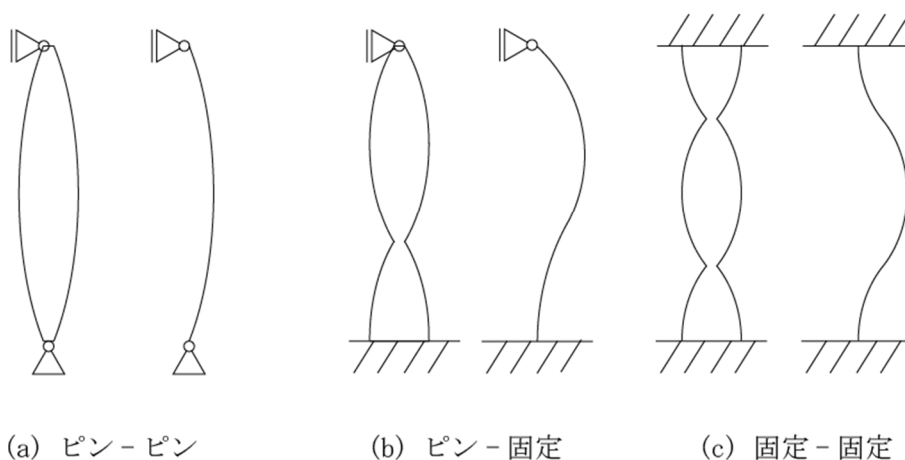


図 4-7 一本柱 最適形状

このように、支持がピンであれば先細らせるように、固定されているのであれば材端にかけて太くした状態が座屈に対する最適形状となる。ここで、ピン支持はピンによる柱の材端の回転に対する拘束の強さが0、固定端は固定による回転に対する拘束が限りなく大きい状態であると考えることができる。最適形状と合わせて考えると、柱の材端の回転剛性が小さいほど先を細く、大きいほど太くすることが座屈に対する最適化となる可能性がある。しかし複雑な架構中の部材は当然ピン支持や固定端以外の材が多くを占めているため、この最適形状をそのまま架構に適用することは不可能である。

ここで、例として前節の 3-3truss モデルの座屈モードを確認してみる。

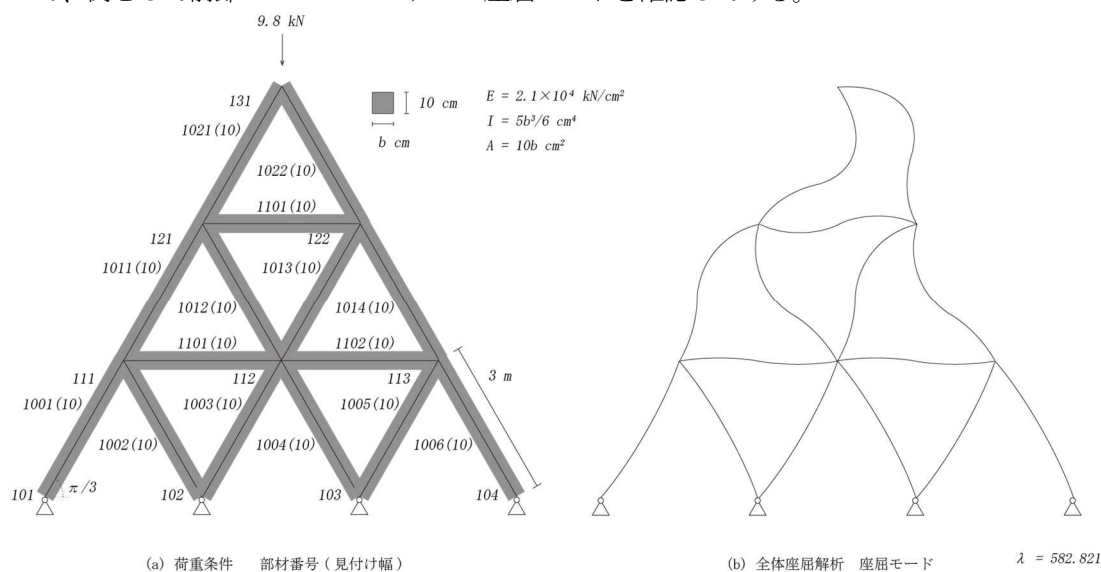


図 4-8 3-3truss 座屈モード

すると各材について、全体系における個材ごとの座屈の様子がパターンに分類できることが分かる。部材 1001 や部材 1101 は図 4-7 中の (a) ピン-ピンの 1 本柱の座屈モードに近い部材、部材 1011 や 1021 は (b) ピン-固定の座屈モードに近い部材である。

部材 1001 は片端ピン片端自由の材であるが、部材 1001 以外の架構による節点 111 側の柱頭の回転に対する拘束はピン支持による拘束よりは大きく固定されることによる拘束よりは小さいと推測できる。先ほどの拘束が強いほど材を太くすれば座屈固有値が大きくなるという仮定に基づくと、部材 1001 は以下の図のいずれかに最適形状があると考えられる。部材 1001 の場合座屈モードが (a) ピン-ピンに近いので、図 4-9 の左寄りに最適形状があると考えられる。

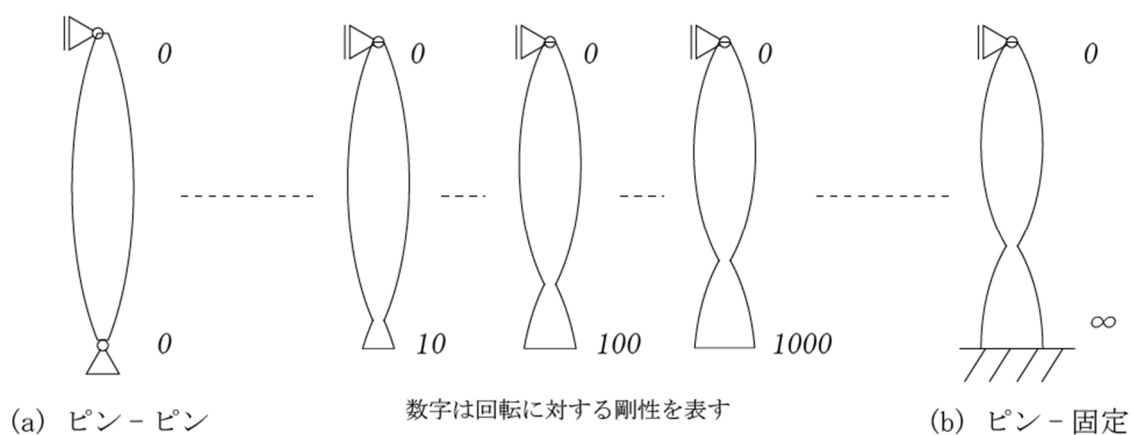


図 4-9 片端ピン支持の材 自由端側の回転剛性による最適形状の予測

同様に部材 1011 や 1021、1101 は両端自由の材であるが、同様に当該個材以外の架構による個材の材端の回転に対する拘束を考えると両端ともピンによる拘束より大きく固定によるものよりは小さい状態であ

ると推測ができる。そして、材端の回転に対する剛性を比較すると変形角が大きい側の回転に対する剛性が小さく、回転角の小さい端点の回転に対する剛性は大きいことが予想される。すると図 4-9 のような剛性による形状の変化が両端側で生じることとなる。このように架構中の部材であっても、材端の回転剛性が求められれば最適化を行える可能性がある。

#### 4.2.2 弾性剛性マトリクスの具象化による回転剛性の抽出

以上のことから、個材の材端の回転剛性を抽出することができれば、各個材ごとの最適化を行える可能性がある。この回転剛性を求めるために、縮約された剛性マトリクスの具象化を行う。具象化とは、縮約された剛性マトリクスからその境界条件を単純ばねと回転ばねにより図示し、そのばね定数の値から水平方向への硬さや回転に対する強さなどを具体的な数値で明らかにするものである。

本題の前に 2 次元の架構における全体弾性剛性マトリクス $[K_E]$  及び全体幾何剛性マトリクス $[K_G]$  の生成方法について述べる。全体座標系における二次元空間(y 方向への変形を拘束)において、部材の要素弾性剛性マトリクス $[k_e]$  及び要素幾何剛性マトリクス $[k_g]$  は以下の式で表される。

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{12k_\theta}{L^2}s^2 + kc^2 & \left(-\frac{12k_\theta}{L^2} + k\right)sc & \frac{12k_\theta}{L^2}c^2 + ks^2 & \text{sym.} \\ \frac{6k_\theta}{L}s & -\frac{6k_\theta}{L}c & 4k_\theta & \\ -\frac{12k_\theta}{L^2}s^2 - kc^2 & \left(\frac{12k_\theta}{L^2} - k\right)sc & -\frac{6k_\theta}{L}s & \frac{12k_\theta}{L^2}s^2 + kc^2 \\ \left(\frac{12k_\theta}{L^2} - k\right)sc & -\frac{12k_\theta}{L^2}c^2 - ks^2 & \frac{6k_\theta}{L}c & \left(-\frac{12k_\theta}{L^2} + k\right)sc & \frac{12k_\theta}{L^2}c^2 + ks^2 \\ \frac{6k_\theta}{L}s & -\frac{6k_\theta}{L}c & 2k_\theta & -\frac{6k_\theta}{L}s & \frac{6k_\theta}{L}c & 4k_\theta \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

$$[k_g] = \begin{bmatrix} \frac{6N}{5L}s^2 & -\frac{6N}{5L}sc & \frac{6N}{5L}c^2 & \text{sym.} \\ \frac{N}{10}s & -\frac{N}{10}c & \frac{2LN}{15} \\ -\frac{6N}{5L}s^2 & \frac{6N}{5L}sc & -\frac{N}{10}s & \frac{6N}{5L}s^2 \\ \frac{6N}{5L}sc & -\frac{6N}{5L}c^2 & \frac{N}{10}c & -\frac{6N}{5L}sc & \frac{6N}{5L}c^2 \\ \frac{N}{10}s & -\frac{N}{10}c & -\frac{LN}{30} & -\frac{N}{10}s & \frac{N}{10}c & \frac{2LN}{15} \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

$k(= EA/L)$  : 部材の軸剛性

$k_\theta(= EI/L)$  : 部材の回転剛性

$L$  : 部材の長さ

$N$  : 部材の軸力

$s, c$  : 部材の角度 $\theta$ からなる $\sin \theta, \cos \theta$

$\theta$  : 部材角

要素弾性剛性マトリクス $[k_e]$  は、軸剛性、回転剛性、部材長、部材角の 4 つの変数から、要素幾何剛性マトリクス $[k_g]$  は部材軸力、部材長、部材角の 3 つの変数からなる。部材長、部材角の 2 つは部材ごとに共通のため、架構 1 つに対して荷重条件を設定した際に両要素剛性マトリクスを生成するために必要な情報は 5 つとなる。

この 6 行 6 列のマトリクスは、次の図 4-10 のような情報を持つ。

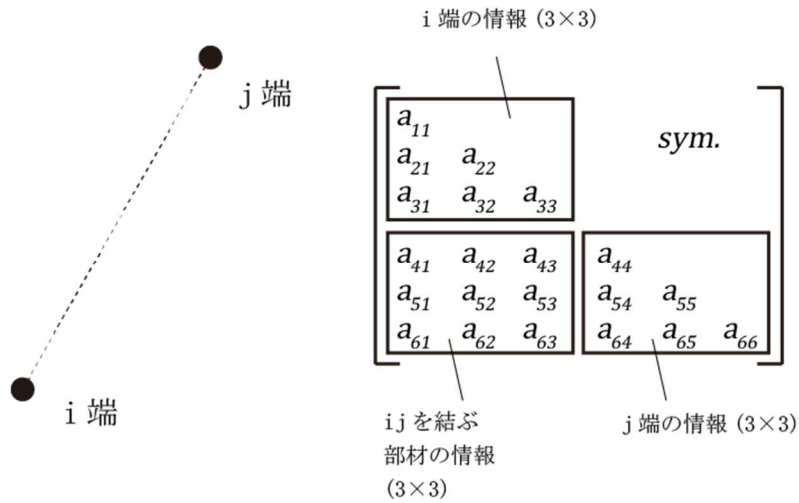


図 4-10 縮約後の剛性マトリクスの情報

以上の要素剛性マトリクスを図 2-7 のように節点を元に足し合わせ全体剛性とする。例として、図 4-11 のような具象化のサンプルモデルの全体剛性マトリクス $[K_E]$ を算出する。

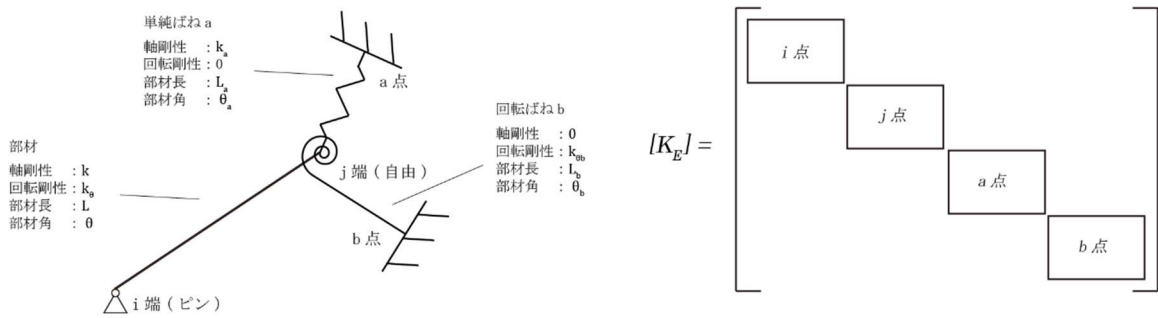


図 4-11 全体剛性マトリクス生成用モデル

ここで、特に単純ばね、回転ばねの要素弾性剛性マトリクスは以下の式(4-3) (4-4)で表される。

$$[k_e] = \begin{bmatrix} kc^2 & ksc & ks^2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ -kc^2 & -ksc & 0 & kc^2 & & \\ -ksc & -ks^2 & 0 & ksc & ks^2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{sym.} \quad (4-3)$$

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{12k_\theta}{L^2} S^2 & -\frac{12k_\theta}{L^2} SC & \frac{6k_\theta}{L} S & -\frac{6k_\theta}{L} C & 4k_\theta & \\ -\frac{12k_\theta}{L^2} SC & \frac{12k_\theta}{L^2} C^2 & -\frac{6k_\theta}{L} S & \frac{6k_\theta}{L} C & -2k_\theta & \\ \frac{6k_\theta}{L} S & -\frac{6k_\theta}{L} C & 4k_\theta & & & \\ -\frac{12k_\theta}{L^2} S^2 & \frac{12k_\theta}{L^2} SC & -\frac{6k_\theta}{L} S & \frac{6k_\theta}{L} C & -2k_\theta & \\ \frac{12k_\theta}{L^2} SC & -\frac{12k_\theta}{L^2} C^2 & \frac{6k_\theta}{L} S & -\frac{6k_\theta}{L} C & 2k_\theta & \\ \frac{6k_\theta}{L} S & -\frac{6k_\theta}{L} C & 4k_\theta & & & \end{bmatrix} \quad \text{sym.} \quad (4-4)$$

そして、図 4-11 のように 1 行目から順に i 点、j 点、a 点、b 点となるよう全体弾性剛性マトリクス $[K_E]$ を生成すると、次の式(4-5)のようになる。





モデルは変数が6個しかないため式を解くことが不可能となる。仮に未知数の数と変数の数が同じであっても式が解けない可能性はあり、回転剛性抽出のための具象化モデルはこれらの要素を全て踏まえて作成する必要がある。

さて、i 端の回転剛性を i 端に付加される回転ばねのばね定数と仮定すると、具象化は以下のような単純ばね3個、回転ばね3個を付加ばねとしたモデルで可能であることが分かった。

単純ばね a

軸剛性 :  $k_a$   
 回転剛性 : 0  
 部材長 : -  
 部材角 :  $\theta$

$$[k_e]_a = \begin{bmatrix} k_a c^2 & k_a s c & 0 \\ k_a s c & k_a s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{sym.}$$

水平単純ばね

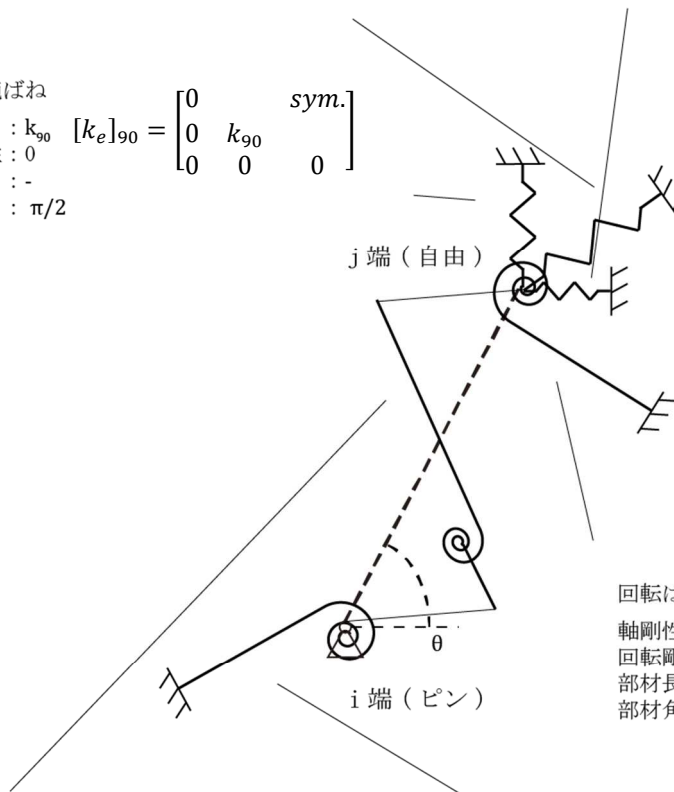
軸剛性 :  $k_0$   
 回転剛性 : 0  
 部材長 : -  
 部材角 : 0

$$[k_e]_0 = \begin{bmatrix} k_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{sym.}$$

鉛直単純ばね

軸剛性 :  $k_{90}$   
 回転剛性 : 0  
 部材長 : -  
 部材角 :  $\pi/2$

$$[k_e]_{90} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{90} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{sym.}$$



回転ばね j

軸剛性 : 0  
 回転剛性 :  $k_{\theta j}$   
 部材長 :  $L_j$   
 部材角 :  $\theta_j$

$$[k_e]_j = \begin{bmatrix} \frac{12k_{\theta j}}{L_j^2} s_j^2 & -\frac{12k_{\theta j}}{L_j^2} s_j c_j & 0 \\ -\frac{12k_{\theta j}}{L_j^2} s_j c_j & \frac{12k_{\theta j}}{L_j^2} c_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_{\theta j} \end{bmatrix} \quad \text{sym.}$$

回転ばね ij

軸剛性 : 0  
 回転剛性 :  $k_{\theta ij}$   
 部材長 :  $L_{ij}$   
 部材角 :  $\theta_{ij}$

$$[k_e]_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{4k_{\theta ij}}{L_{ij}} & \frac{6k_{\theta ij}}{L_{ij}} s_{ij} & \frac{12k_{\theta ij}}{L_{ij}^2} s_{ij}^2 & 0 \\ \frac{6k_{\theta ij}}{L_{ij}} s_{ij} & \frac{12k_{\theta ij}}{L_{ij}^2} s_{ij} c_{ij} & -\frac{12k_{\theta ij}}{L_{ij}^2} s_{ij} c_{ij} & \frac{12k_{\theta ij}}{L_{ij}^2} c_{ij}^2 \\ \frac{12k_{\theta ij}}{L_{ij}^2} s_{ij} c_{ij} & -\frac{12k_{\theta ij}}{L_{ij}^2} s_{ij} c_{ij} & \frac{12k_{\theta ij}}{L_{ij}^2} c_{ij}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\theta ij} \end{bmatrix} \quad \text{sym.}$$

回転ばね i  
 (i 端の回転剛性)

軸剛性 : 0  
 回転剛性 :  $k_{\theta i}$   
 部材長 : -  
 部材角 : -

$$[k_e]_i = [4k_{\theta i}]$$

図 4-13 回転剛性の具象化モデル

ここで、このモデルは i 節点の支持条件によらず、水平変位及び鉛直変位は起こらないものと仮定している。また、回転ばね ij は、i 端と j 端を結ぶ部材だが ij の位置関係に依らない部材長、部材角を有す

ると仮定している。これは、先に述べた架構における任意の 2 節点を結ぶ材が最大 1 つであると仮定した場合には  $K_E'[2,1], K_E'[3,1], K_E'[4,1]$  の 3 つの未知数に対してモデルが与えられる変数は回転剛性の 1 つのみとなり、式が解けなくなってしまうためである。仮に同一の 2 節点に複数のばねを付加できるとしても、式 (4-6) の  $K_E[2,1], K_E[3,1], K_E[4,1]$  は  $L, \theta$  が定数である限り、要素剛性の和を考えると変数は“全ての回転ばねの回転剛性の和”の 1 つとなることが分かる。このことから、i 端 j 端の位置により定まる  $L, \theta$  とは独立した部材長、部材角を持つ回転ばねの両端が i, j であると仮定する必要がある。この要素剛性マトリクスの和は以下の式(4-7)で表される。

$$[K_E] = \begin{bmatrix} 4k_{\theta ij} + 4k_{\theta i} & -\frac{6k_{\theta ij}}{L_{ij}}s_{ij} & \frac{12k_{\theta ij}}{L_{ij}^2}s_{ij}^2 + \frac{12k_{\theta j}}{L_j^2}s_j^2 + k_0 + k_a c^2 & \text{sym.} \\ \frac{6k_{\theta ij}}{L_{ij}}c_{ij} & -\frac{12k_{\theta ij}}{L_{ij}^2}s_{ij}c_{ij} - \frac{12k_{\theta j}}{L_j^2}s_jc_j + k_a sc & \frac{12k_{\theta ij}}{L_{ij}^2}c_{ij}^2 + \frac{12k_{\theta j}}{L_j^2}c_j^2 + k_{90} + k_a s^2 \\ 2k_{\theta ij} & -\frac{6k_{\theta ij}}{L_{ij}}s_{ij} - \frac{6k_{\theta j}}{L_j}s_j & \frac{6k_{\theta ij}}{L_{ij}}c_{ij} + \frac{6k_{\theta j}}{L_j}c_j & 4k_{\theta ij} + 4k_{\theta j} \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

このモデルは  $k_0, k_{90}, k_a, k_{\theta i}, k_{\theta ij}, k_{\theta j}, L_{\theta ij}, L_{\theta j}, \theta_{ij}, \theta_j$  の計 10 個の変数を持っている。縮約された弾性剛性  $[K_E]'$  は先に述べたように 10 の未知数を持つため、任意の  $[K_E]'$  の具象化についてこれら変数の値は部材長が正になるよう計算を行うと一意に求めることが可能である。

以下このモデルを用いて行う具象化について検証を行うが、縮約された剛性マトリクスから個材そのものの要素剛性マトリクスを減算したもの、すなわち当該個材以外の架構により個材に付加されている要素を表すマトリクスに対して具象化を行っている。

この具象化により抽出される i 端の回転剛性の値が適切であるか、以下の簡単なモデルで検証を行う。1-1trussA1 は左右対称、1-1trussA2 は右の部材のみ見付け b を 1.5 倍にしている。常に節点番号の小さい方の回転剛性を回転剛性 1、大きい方の回転剛性を回転剛性 2 とした。

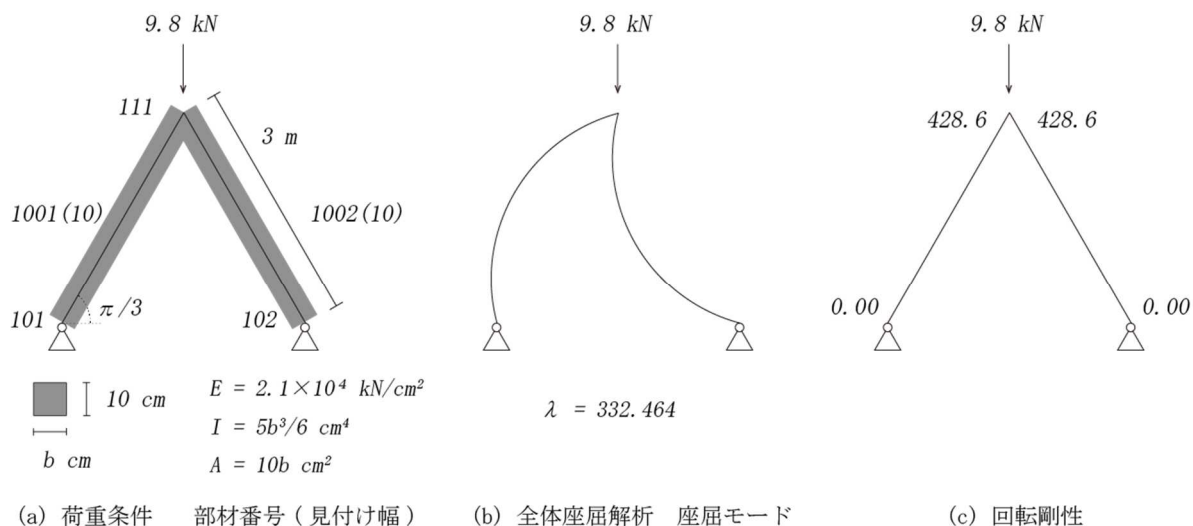


図 4-14 1-1trussA1 解析モデル

表 4-1 1-1trussA1 解析結果

部材	見付け幅 $b$ (cm)	個材固有値 $\lambda'$	回転剛性 1 ( $\times 10^6 \text{kNcm}^3$ )	回転剛性 2 ( $\times 10^6 \text{kNcm}^3$ )
1001	10	505.04	0.00	428.6
1002	10	505.04	0.00	428.6

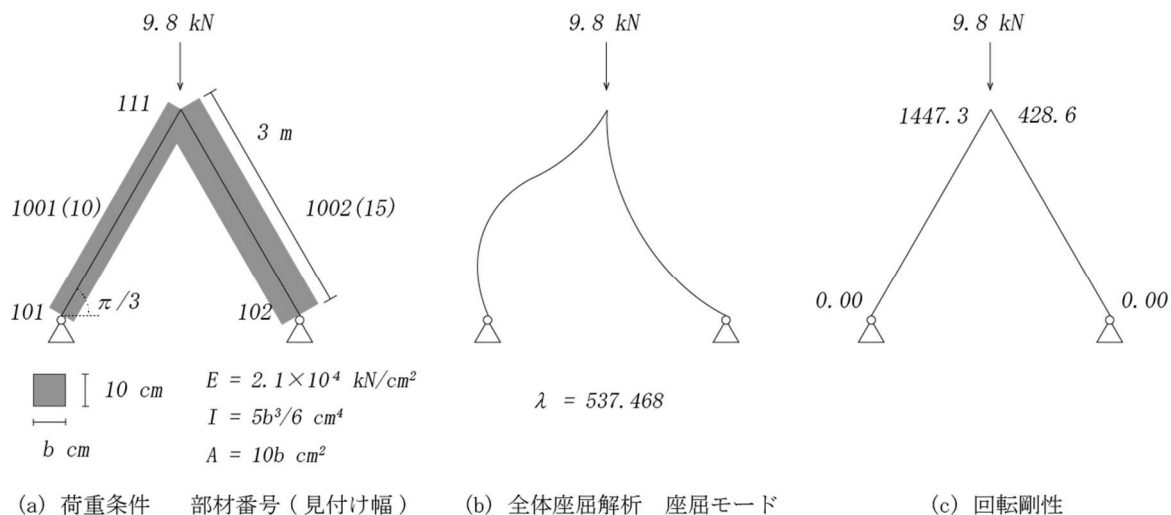


図 4-15 1-1trussA2 解析モデル

表 4-2 1-1trussA2 解析結果

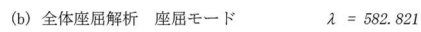
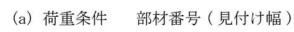
部材	見付け幅 $b$ (cm)	個材固有値 $\lambda'$	回転剛性 1 ( $\times 10^6 \text{kNcm}^3$ )	回転剛性 2 ( $\times 10^6 \text{kNcm}^3$ )
1001	10	774.12	0.00	1447.3
1002	10	1207.6	0.00	428.6

まず 1-1trussA1 の結果から、節点 101 及び 102 の回転剛性は 0 であることが確認できる。これはピン支持であることから回転に対する剛性を持たないことを表している。また、節点 111 に関しては両剛性とも 428.6 であることが確認できる。左右対称のモデルであることから、部材 1001 の回転剛性 2 及び部材 1002 の回転剛性は同じであると考えられ、こちらも合理的な結果が得られていることが確認できる。

次に 1-1trussA2 の結果から、同様にピン支持されている節点は回転剛性が 0 であることが確認できる。節点 111 に関しては、部材 1001 より部材 1002 の剛性が大きいため、回転の拘束に関しては部材 1001 の回転剛性 2 の方が大きい方が適切だと考えられるが、実際に部材 1001 の回転剛性 2 は部材 1002 の回転剛性より大きいという結果となった。

最後に 1-1trussA1 と 1-1trussA2 の結果を比較すると、部材 1002 の回転剛性 2 は同じであることが確認できる。部材 1002 の回転剛性 2 はすなわち部材 1001 による節点 111 の回転方向への拘束の大きさであるため、部材 1001 の見付け幅が同じである以上この値は一致することが合理的であると考えられるため、こちらもよい結果が得られていると考えられる。また部材 1001 の座屈モードに着目すると、回転剛性 2 の値が大きくなることで回転角が小さくなり、前項で述べたピン固定の座屈モードに近づいていることが確認でき、こちらもよい結果が得られている。

次にこの方法を用いて、前節の 3-3truss の回転剛性を考える。以下解析結果を示す。



58

表 4-3 3-3truss 解析・具象化結果

部材	見付け幅 $b$ (cm)	個材固有値 $\lambda'$	回転剛性 1 ( $\times 10^6 \text{kNcm}^3$ )	回転剛性 2 ( $\times 10^6 \text{kNcm}^3$ )
1001	10	1924.6	0.00	1447.3
1002	10	2789.9	590.8	428.6
1003	10	2640.4	601.1	2739.2
1011	10	2275.2	1520.7	1634.3
1012	10	2348.5	2750.0	1691.8
1021	10	908.3	1690.6	603.1
1101	10	3789.0	1674.0	2841.4
1201	10	2464.7	1766.7	1766.7

節点	部材数	部材数-1	平均回転剛性 ( $\times 10^6 \text{kNcm}^3$ )	付加部材 1 つあたりの回転剛性 ( $\times 10^6 \text{kNcm}^3$ )
101	1	0	0.00	-
102	2	1	595.9	595.9
111	4	3	1587.0	529.0
112	6	5	2841.4	568.3
121	4	3	1695.8	565.3
131	2	1	603.1	603.1

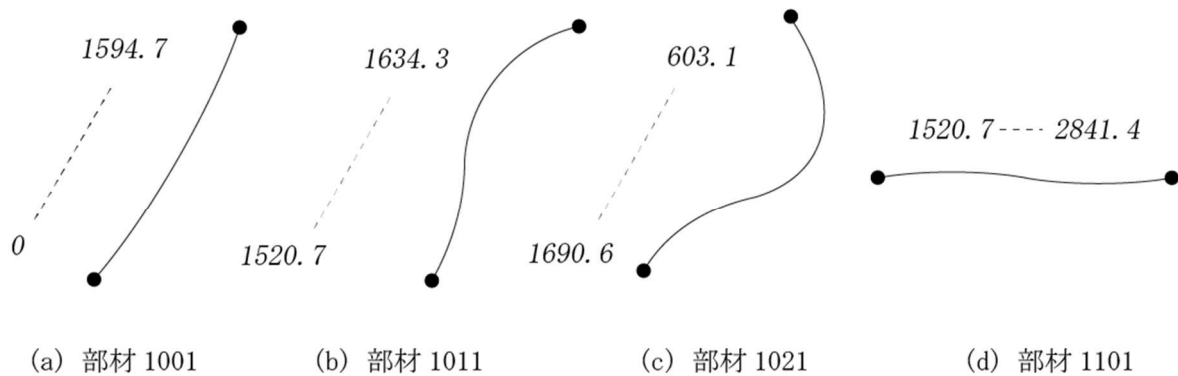


図 4-17 3-3truss 主要部材の回転剛性と座屈モード

このモデルの解析結果、具象化からは以下のことが確認できる。

図 4-16 を節点ごとに見ると、回転剛性は節点ごとに概ね一致している。このモデルは全ての材が同じ長さかつ同じ断面を持つので、同一の節点では回転剛性は近い値になることが望ましいと考えられるので、合理的であると言える。また、節点に集まっている部材の数は節点 101 では 1、102 では 2、111 では 4、112 では 6、121 では 4、131 では 2 となっている。この部材数から縮約対象の個材そのものを除くと、各節点において部材が一つ付加されることによる回転剛性の上昇値は節点ごとに大きな差がない。このことから回転剛性のオーダーについてはこのモデルに関してもよい結果が得られていると言える。そして例えば同じ 4 部材の集まる節点 111 と節点 121 でやや値に差が存在するのは、その架構の回転の拘束に関する特性である。トラス上部による下部の拘束より下部による上部の拘束の方が強いいため、節点 121 は 111 より値が全体的に大きくなっている。

このように、この手法は回転剛性の抽出はある程度の結果が出ている可能性がある。

次に、図 4-17 について確認する。こちらは架構中の部材を一部抜粋したものである。(a)部材 1001 は、回転剛性に大きな差があるにも関わらず両端ピンのような座屈をしている。(b)部材 1011 は、回転剛性の大きい節点側の方が変形の大きい片端ピン片端固定のような座屈をしている。(c)部材 1021 は、回転剛性の大きい節点側が変形の小さい片端ピン片端固定のような座屈をしている。(d)部材 1101 は、回転剛性に大きな差があるにも関わらず両端ピンの 2 次の座屈モードをしていることが確認できる。このように、縮約による回転剛性と全体解析時の座屈モードには相関性はあまり見られないことが分かった。

この原因は、荷重条件を考慮していない、すなわち $[K_G]$ を全く計算に含めていないことにあると考えられる。非常に硬い節点であっても、強力な曲げがかかっていたら変形は大きくなる。

最後に、今回提案した縮約モデルは、以下のような問題を抱えている。

第一に、実際には水平、鉛直方向に変形が起こる節点の変形を起らないものと仮定している点である。誤差の程度は現状大きくないと考えられるが、正確な回転剛性を抽出できていない可能性が高い。また、同一の個材について  $i$  端と  $j$  端を入れ替えて縮約した際に、回転ばね  $ij$  の回転剛性や部材長さが一致しない点である。この点に関しては、次項でこの問題が解消される近似モデルを提案する。



#### 4.2.3 両端自由の個材の境界条件の具象化

前項では i 端ピン、j 端自由の場合の具象化について述べた。この節では両端自由の個材の具象化を行う。目的は、前項のモデルでは不可能である i 端の水平方向・鉛直方向の剛性を捉えることに加え、前項の最後に述べた問題点を解消するためどちらの節点を i 端としても同様のばね定数を得ることのできるモデルを考えるというものである。

しかし、両端自由の個材は単純ばねと回転ばねのみでは正確な具象化は現状では不可能である。その理由について先に触れる。

両端自由の個材は、縮約後に 6 行 6 列の行列となる。ここで、要素剛性マトリクス $k_e[4,2]$ と $k_e[5,1]$ に注目すると、値が等しいことが確認できる。

$$(再掲) \quad [k_e] = \begin{bmatrix} \frac{12k_\theta}{L^2}s^2 + kc^2 & \left(-\frac{12k_\theta}{L^2} + k\right)sc & \frac{12k_\theta}{L^2}c^2 + ks^2 & & & \\ & \frac{6k_\theta}{L}s & -\frac{6k_\theta}{L}c & 4k_\theta & & \\ & & & & sym. & \\ -\frac{12k_\theta}{L^2}s^2 - kc^2 & \left(\frac{12k_\theta}{L^2} - k\right)sc & -\frac{6k_\theta}{L}s & \frac{12k_\theta}{L^2}s^2 + kc^2 & & \\ \left(\frac{12k_\theta}{L^2} - k\right)sc & -\frac{12k_\theta}{L^2}c^2 - ks^2 & \frac{6k_\theta}{L}c & \left(-\frac{12k_\theta}{L^2} + k\right)sc & \frac{12k_\theta}{L^2}c^2 + ks^2 & \\ \frac{6k_\theta}{L}s & -\frac{6k_\theta}{L}c & 2k_\theta & -\frac{6k_\theta}{L}s & \frac{6k_\theta}{L}c & 4k_\theta \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

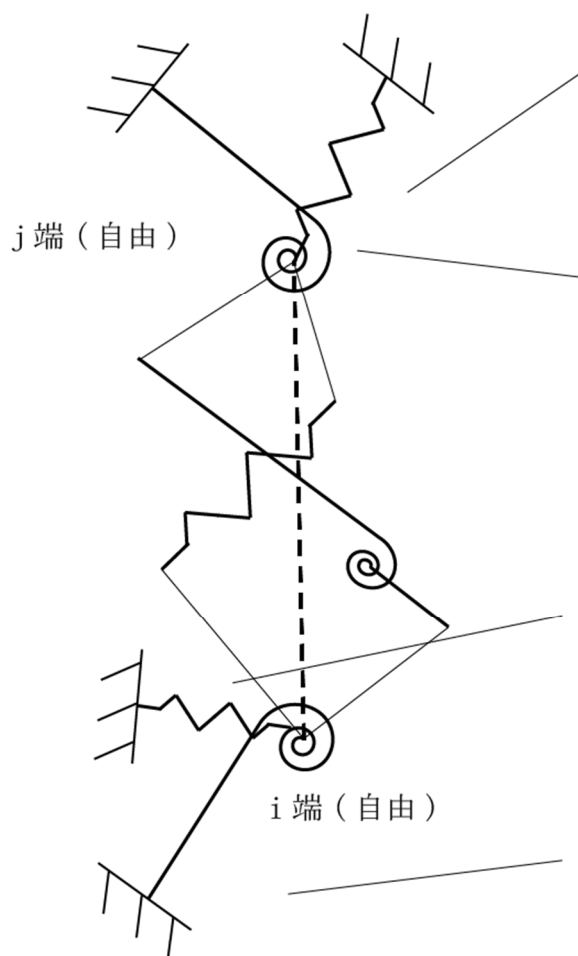
具象化モデルは $[k_e]$  の和であるため、どのようなばねを含むモデルを設定しても縮約後の弾性剛性マトリクス $[K_E]'$  の $K_E'[4,2]$ と $K_E'[5,1]$  が等しくない限り具象化による再現はできないことになる。しかし実際には $[K_E]'$  の $K_E'[4,2]$ と $K_E'[5,1]$  は同じ値とは限らない。

そこで本論文では近似モデルを提案する。この近似モデルは 15 の未知数を持つが、6 行 6 列の $[K_E]'$  は対象である要素を除くと 21 の要素を持っている。そのため $[K_E]'$ と近似モデルには 6 要素分の誤差があるが、節点の水平・鉛直方向の剛性や回転剛性の精度にも触れながら以下紹介を進める。

このモデルによる剛性マトリクスを $[K_E]_6$  と置くと、 $[K_E]' - [K_E]_6$  は 13 要素を 0 とすることが可能である。この 13 という値が近似モデルの未知数の 15 と一致していない点は後に解説を行う。

$$[K_E]' - [K_E]_6 = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ a_{21} & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & & \\ a_{51} & 0 & a_{53} & a_{54} & 0 & \\ a_{61} & a_{62} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

近似モデルは次の図 4-18 のようになる。



単純ばね j

軸剛性 :  $k_j$   
 回転剛性 : 0  
 部材長 : -  
 部材角 :  $\theta_{kj}$

$$[k_e]_j = \begin{bmatrix} k_j c_{kj}^2 & & \text{sym.} \\ k_j s_{kj} c_{kj} & k_j s_{kj}^2 & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

回転ばね j  
 (j 端の回転剛性)

軸剛性 : 0  
 回転剛性 :  $k_{\theta j}$   
 部材長 :  $L_j$   
 部材角 :  $\theta_j$

$$[k_e]_{\theta j} = \begin{bmatrix} \frac{12k_{\theta j}}{L_j^2} s_j^2 & & \text{sym.} \\ -\frac{12k_{\theta j}}{L_j^2} s_j c_j & \frac{12k_{\theta j}}{L_j^2} c_j^2 & \\ -\frac{6k_{\theta j}}{L_j} s_j & \frac{6k_{\theta j}}{L_j} c_j & 4k_{\theta j} \end{bmatrix}$$

単純ばね i

軸剛性 :  $k_i$   
 回転剛性 : 0  
 部材長 : -  
 部材角 :  $\theta_{ki}$

$$[k_e]_i = \begin{bmatrix} k_i c_{ki}^2 & & \text{sym.} \\ k_i s_{ki} c_{ki} & k_i s_{ki}^2 & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

回転ばね i  
 (i 端の回転剛性)

軸剛性 : 0  
 回転剛性 :  $k_{\theta i}$   
 部材長 :  $L_i$   
 部材角 :  $\theta_i$

$$[k_e]_{\theta i} = \begin{bmatrix} \frac{12k_{\theta i}}{L_i^2} s_i^2 & & \text{sym.} \\ -\frac{12k_{\theta i}}{L_i^2} s_i c_i & \frac{12k_{\theta i}}{L_i^2} c_i^2 & \\ \frac{6k_{\theta i}}{L_i} s_i & -\frac{6k_{\theta i}}{L_i} c_i & 4k_{\theta i} \end{bmatrix}$$

単純ばね ij

軸剛性 :  $k_{ij}$   
 回転剛性 : 0  
 部材長 : -  
 部材角 :  $\theta_{kij}$

$$[k_e]_{ij} = \begin{bmatrix} k_{ij} c_{kij}^2 & & & & & \\ k_{ij} s_{kij} c_{kij} & k_{ij} s_{kij}^2 & & & & \text{sym.} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ -k_{ij} c_{kij}^2 & -k_{ij} s_{kij} c_{kij} & 0 & k_{ij} c_{kij}^2 & & \\ -k_{ij} s_{kij} c_{kij} & -k_{ij} s_{kij}^2 & 0 & k_{ij} s_{kij} c_{kij} & k_{ij} s_{kij}^2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

回転ばね ij

軸剛性 : 0  
 回転剛性 :  $k_{\theta ij}$   
 部材長 :  $L_{ij}$   
 部材角 :  $\theta_{ij}$

$$[k_e]_{\theta ij} = \begin{bmatrix} \frac{12k_{\theta ij}}{L_{ij}^2} s_{ij}^2 & & & & & \\ -\frac{12k_{\theta ij}}{L_{ij}^2} s_{ij} c_{ij} & \frac{12k_{\theta ij}}{L_{ij}^2} c_{ij}^2 & & & & \text{sym.} \\ \frac{6k_{\theta ij}}{L_{ij}} s_{ij} & -\frac{6k_{\theta ij}}{L_{ij}} c_{ij} & 4k_{\theta ij} & & & \\ -\frac{12k_{\theta ij}}{L_{ij}^2} s_{ij}^2 & \frac{12k_{\theta ij}}{L_{ij}^2} s_{ij} c_{ij} & -\frac{6k_{\theta ij}}{L_{ij}} s_{ij} & \frac{12k_{\theta ij}}{L_{ij}^2} s_{ij}^2 & & \\ \frac{12k_{\theta ij}}{L_{ij}^2} s_{ij} c_{ij} & -\frac{12k_{\theta ij}}{L_{ij}^2} c_{ij}^2 & \frac{6k_{\theta ij}}{L_{ij}} c_{ij} & -\frac{12k_{\theta ij}}{L_{ij}^2} s_{ij} c_{ij} & \frac{12k_{\theta ij}}{L_{ij}^2} c_{ij}^2 & \\ \frac{6k_{\theta ij}}{L_{ij}} s_{ij} & -\frac{6k_{\theta ij}}{L_{ij}} c_{ij} & 2k_{\theta ij} & -\frac{6k_{\theta ij}}{L_{ij}} s_{ij} & \frac{6k_{\theta ij}}{L_{ij}} c_{ij} & 4k_{\theta ij} \end{bmatrix}$$

図 4-18 回転剛性の具象化 近似モデル

この近似モデルは i 端、j 端、そして ij に 1 つずつ単純ばねと回転ばねが付加されたモデルである。変数は単純ばねが剛性と部材角の 2 要素、回転ばねが剛性と部材角、そして部材長の 3 要素を持ち、合計で 15 となる。計算の過程は以下の通り。まずは  $k_{\theta ij}$  を算出する。

$$K_E'[6,3] = 2k_{\theta ij} \quad (4-9)$$

次に  $K_E'[6,1], K_E'[6,2], K_E'[4,3], K_E'[5,3]$  を近似的に処理する。この過程で先に述べた未知数と変数の差が生じている。この式で  $L_{\theta ij}, \theta_{ij}$  を決定する。

$$K_E'[6,2] - K_E'[5,3] = -12 \frac{k_{\theta ij}}{L_{\theta ij}} c_{ij} \quad (4-10)$$

$$K_E'[6,1] - K_E'[4,3] = 12 \frac{k_{\theta ij}}{L_{\theta ij}} s_{ij} \quad (4-11)$$

回転ばね ij が決定されるので、 $[K_E']$  から減算して、次に  $k_{\theta i}$  を決定する。以降の式では  $K_E'[k, k]$  の形で表記されたものであっても断りの入れた各要素剛性は減算したものとする。

$$K_E'[3,3] = 4k_{\theta i} \quad (4-12)$$

$$K_E'[6,6] = 4k_{\theta j} \quad (4-13)$$

そして次に  $K_E'[3,1], K_E'[3,2]$  から  $L_{\theta i}, \theta_i$  を決定する。

$$K_E'[3,1] = \frac{6k_{\theta i}}{L_i} s_i \quad (4-14)$$

$$K_E'[3,2] = -\frac{6k_{\theta i}}{L_i} c_i \quad (4-15)$$

これで回転ばね i が決定する。同様に j も  $K_E'[6,4], K_E'[6,5], K_E'[6,6]$  から計算を行い、回転ばね j を決定する。この 2 つのばねの要素剛性を減算する。次に  $K_E'[1,4], K_E'[2,5]$  から  $k_{ij}, \theta_{kij}$  を求める。

$$K_E'[1,4] = -k_{ij} c_{kij}^2 \quad (4-16)$$

$$K_E'[2,5] = -k_{ij} s_{kij}^2 \quad (4-17)$$

角度は 2 つの解が求まるが、そのいずれを採用しても剛性マトリクスは同一の値を示す。単純ばね ij の要素を減算し、最後に  $k_i, \theta_{ki}$  を決定する。

$$K_E'[1,1] = k_i c_{ki}^2 \quad (4-18)$$

$$K_E'[2,2] = k_i s_{ki}^2 \quad (4-19)$$

これで単純ばね i が決定し、同様に  $K_E'[4,4], K_E'[5,5]$  から単純ばね j が決定する。

実際に 3-3truss についてこの具象化を行った値を以下に示し、先のモデルの回転剛性と比較する。

表 4-4 3-3truss 解析結果

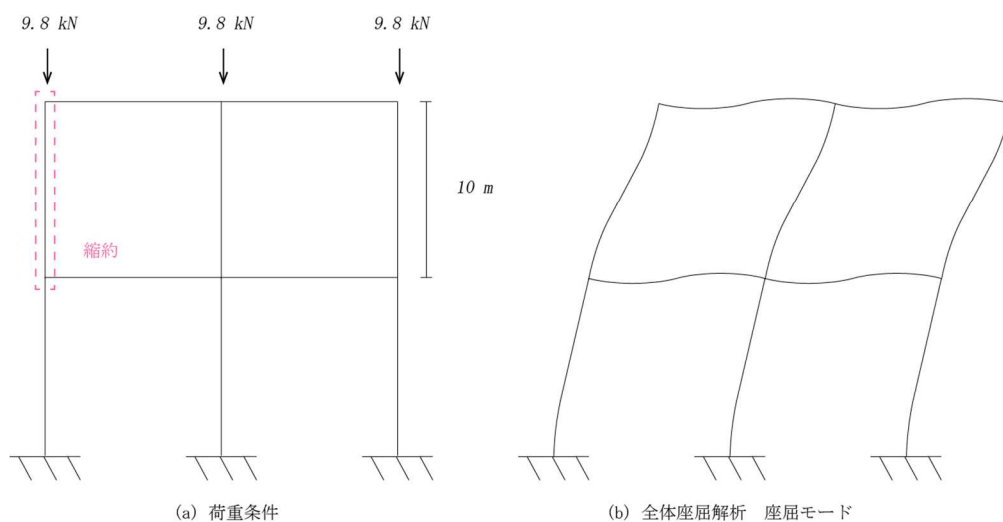
部材	回転剛性 1 ( $\times 10^6 \text{kNcm}^3$ )	近似モデル回転剛性 1 ( $\times 10^6 \text{kNcm}^3$ )	回転剛性 2 ( $\times 10^6 \text{kNcm}^3$ )	近似モデル回転剛性 2 ( $\times 10^6 \text{kNcm}^3$ )
1001	0.00	0.00	1447.3	1447.3
1002	590.8	590.8	428.6	428.6
1003	601.1	601.1	2739.2	2739.2
1011	1520.7	1520.7	1634.3	1634.3
1012	2750.0	2750.0	1691.8	1691.8
1021	1690.6	1690.6	603.1	603.1
1101	1674.0	1674.0	2841.4	2841.4
1201	1766.7	1766.7	1766.7	1766.7

このように先に示した具象化モデルと回転剛性の値が一致する。回転剛性のオーダーについては前項で確認したことよりこちらのモデルでも材端の回転に関する拘束はよく再現できていると考えられる。

また、先にこのモデルはいくつかの要素を無視している近似モデルであることを述べたが、特に水平方向と鉛直方向の部材のみで構成されるラーメンに関しては生じる誤差が非常に小さくなるよう具象化モデルを調整している。

例として、前節の 2-2frame の 2 層の柱部材の縮約された弾性剛性マトリクスを示す。

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{H} \\ \text{I} \end{array} \begin{array}{c} 10 \text{ cm} \\ \\ 1 \text{ cm} \end{array} \quad \begin{array}{l} E = 2.1 \times 10^4 \text{ kN/cm}^2 \\ I = 0.833 \text{ cm}^4 \\ A = 10 \text{ cm}^2 \end{array} \end{array}$$



(再掲) 図 4-3 2-2frame 解析

$$[K_E'] = \begin{bmatrix} 0.0138 & & & & & \\ 0 & 4200 & & & & \\ & & & & & sym. \\ 0.0002 & -0.0109 & 0.2465 & & & \\ -0.0064 & -0.0004 & -0.0114 & 0.0056 & & \\ 0.0005 & -2100 & -0.0003 & -0.0005 & 2100 & \\ 0.0110 & -0.0003 & 0.0430 & -0.0111 & -0.0103 & 0.1605 \end{bmatrix} \quad (4-20)$$

この時例えば式(4-8)では0にならない要素である $a_{51}$ について、上記の式によって無視される値を計算すると $a_{61} = -0.0002$ となる。その他の要素に関しても同程度の値となり、これらのことから架構に依存する形となるが比較的近似による誤差の影響が少ないモデルであると考えられる。

これは以下の要素剛性の式から、鉛直方向、水平方向の部材は部材角の正弦あるいは余弦が0であるため、 $k_e[2,1]$ など0になる要素が多数存在するためである。

$$(再掲) \quad [k_e] = \begin{bmatrix} \frac{12k_\theta}{L^2}s^2 + kc^2 & & & & & \\ \left(-\frac{12k_\theta}{L^2} + k\right)sc & \frac{12k_\theta}{L^2}c^2 + ks^2 & & & & sym. \\ \frac{6k_\theta}{L}s & -\frac{6k_\theta}{L}c & 4k_\theta & & & \\ -\frac{12k_\theta}{L^2}s^2 - kc^2 & \left(\frac{12k_\theta}{L^2} - k\right)sc & -\frac{6k_\theta}{L}s & \frac{12k_\theta}{L^2}s^2 + kc^2 & & \\ \left(\frac{12k_\theta}{L^2} - k\right)sc & -\frac{12k_\theta}{L^2}c^2 - ks^2 & \frac{6k_\theta}{L}c & \left(-\frac{12k_\theta}{L^2} + k\right)sc & \frac{12k_\theta}{L^2}c^2 + ks^2 & \\ \frac{6k_\theta}{L}s & -\frac{6k_\theta}{L}c & 2k_\theta & -\frac{6k_\theta}{L}s & \frac{6k_\theta}{L}c & 4k_\theta \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

次節では、これら具象化の結果を用いて個材ごとの最適形状を探る。

## 4.3 材端の回転剛性による要素体積分配

### 4.3.1 両端自由端の材の最適化

前節の近似モデルによる具象化を用いて材端の条件による最適形状を模索する。まずは対称形の材について考える。両端で荷重条件を反映させた回転剛性が同じである場合、その個材の最適形状は1本柱の最適形状から考えると以下の図のいずれかに該当する可能性が高い。

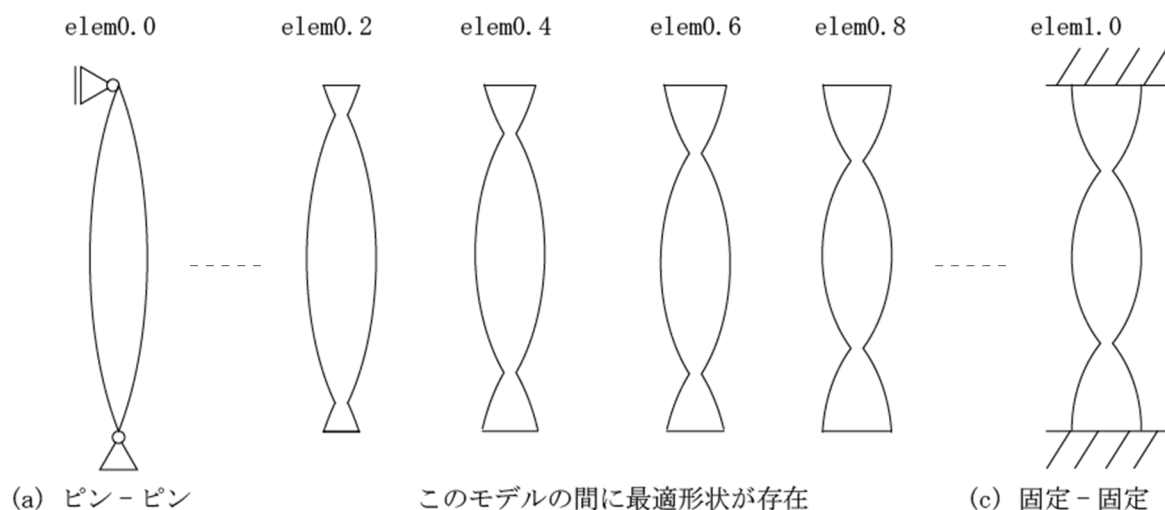


図 4-19 条件が対象である柱の最適形状

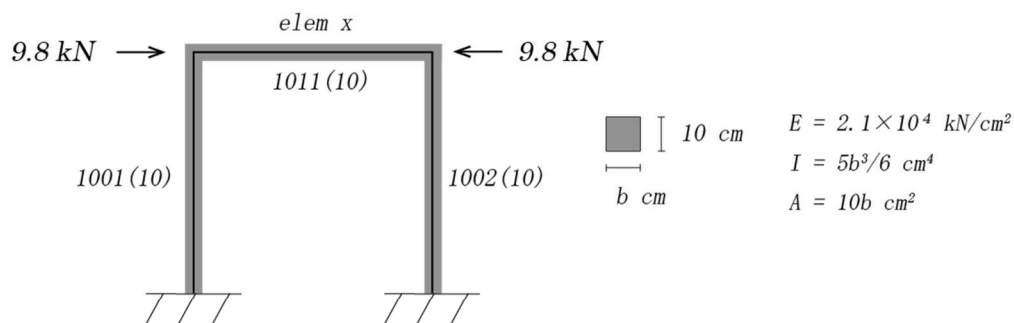
そこで、両端ピン柱の最適形状を elem0.0、両端固定の柱の最適形状を elem1.0 とし、回転剛性がその中間であるときに最適形状となると考えられる形状を elemx で表すこととし、回転剛性の値と x の値がどのような関係にあるのか探る。ここで、本論文では図中の  $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  の形状について、解析上で採用した見付け幅  $b$  の値を以下に示しておく。1001 が材端側であり、対称形のため半分まで記載する。

表 4-5 見付け幅  $b$  (cm)

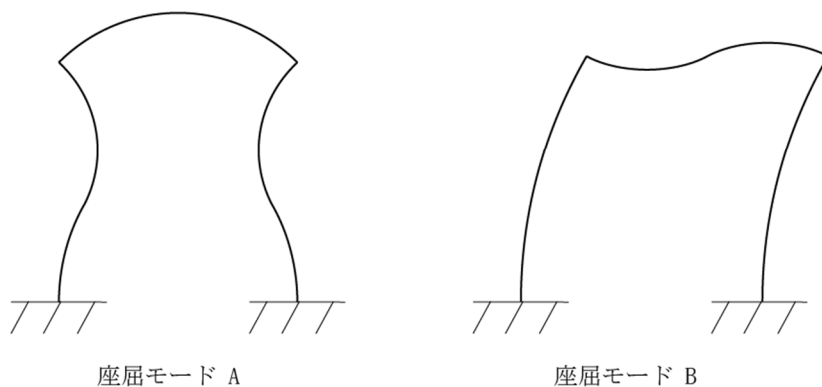
	elem0.0	elem0.2	elem0.4	elem0.6	elem0.8	elem1.0
分割数	10	12	14	16	18	20
1001	4.9	5.4	10.0	11.8	12.6	12.7
1002	9.2	5.4	5.4	9.8	11.4	12.2
1003	11.1	10.0	5.4	5.2	9.4	11.1
1004	12.2	12.1	10.0	5.2	5.1	9.2
1005	12.7	13.3	12.1	9.8	5.1	4.9
1006		13.8	13.3	11.8	9.4	4.9
1007			13.8	13.0	11.4	9.2
1008				13.5	12.6	11.1
1009					13.1	12.2
1010						12.7

モデルごとに分割数が異なることになるが、1 節で述べたように 4 分割以上の分割による座屈荷重倍率の変化は形状操作による座屈荷重倍率の変化のオーダーに対して非常に小さいため問題がない。

以下のモデルについて、梁に関する最適化を検証する。解析結果を以下に示す。



(a) 荷重条件 部材番号（見付け幅）



(b) 全体座屈解析 座屈モード

図 4-20 1-1frameA10 荷重条件と解析結果

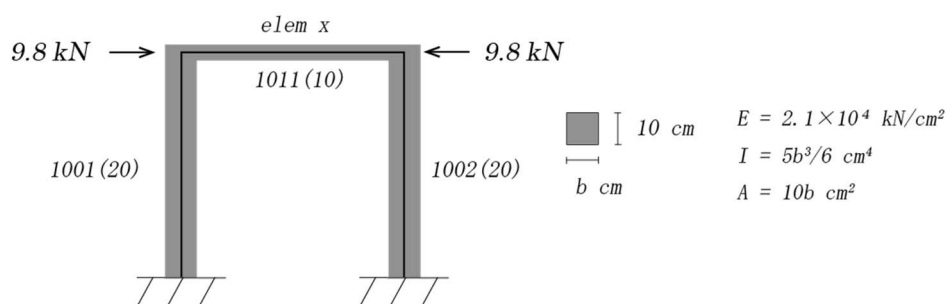
表 4-6 1-1frameA10 梁部材解析結果

	柱見付け幅 $b$ (cm)	回転剛性 1 (kNm)	回転剛性 2 (kNm)
1-1frameA10	10	583.1	583.1

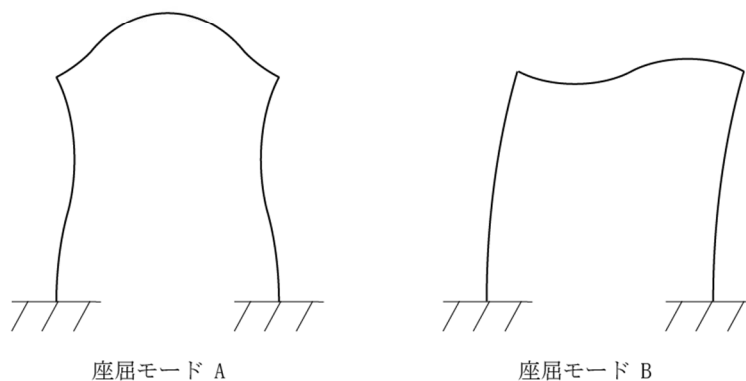
表 4-7 1-1frame10 梁の断面操作

	元モデル	elem0.0	elem0.2	elem0.4	elem0.6	elem0.8	elem1.0
座屈荷重倍率 $\lambda$	407.9	467.6	462.7	344.7	282.5	250.1	232.2
$\lambda$ 上昇率(%)	0	14.6	13.43	-15.5	-30.7	-38.7	-43.1
座屈モード	A	A	A	B	B	B	B

このモデルでは、elem0 の場合に最も座屈に対して強くなった。elem0.2 でも同程度の座屈荷重倍率の上昇が確認でき、この近辺に最適形状が存在すると考えられる。この結果からはこのモデルの両柱による梁の拘束が非常に小さいことが確認できるため、次に柱の見付け幅を倍にしたモデルで検証を行う。



(a) 荷重条件 部材番号 (見付け幅)



(b) 全体座屈解析 座屈モード

図 4-21 1-1frameA20 荷重条件と解析結果

表 4-8 1-1frame20 梁部材解析結果

	柱見付け幅 $b$ (cm)	回転剛性 1 (kNm)	回転剛性 2 (kNm)
1-1frameA20	10	4670	4670

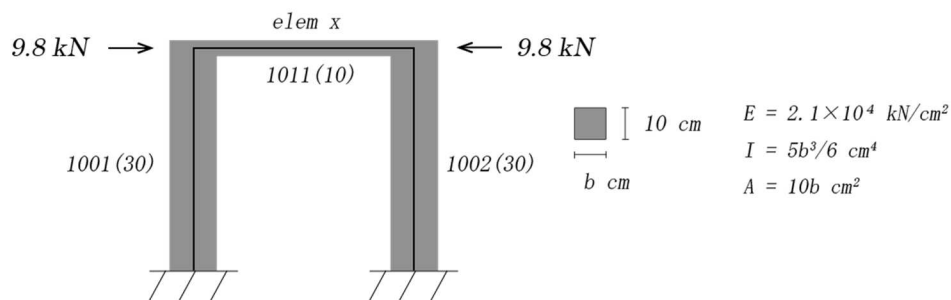
表 4-9 1-1frameA20 梁の断面操作

	元モデル	elem0.0	elem0.2	elem0.4	elem0.6	elem0.8	elem1.0
座屈荷重倍率 $\lambda$	684.7	524.2	589.9	721.5	633.4	537.2	467.9
$\lambda$ 上昇率 (%)	0	-23.4	-13.8	5.37	-7.49	-21.5	-31.7
座屈モード	A	A	A	B	B	B	B

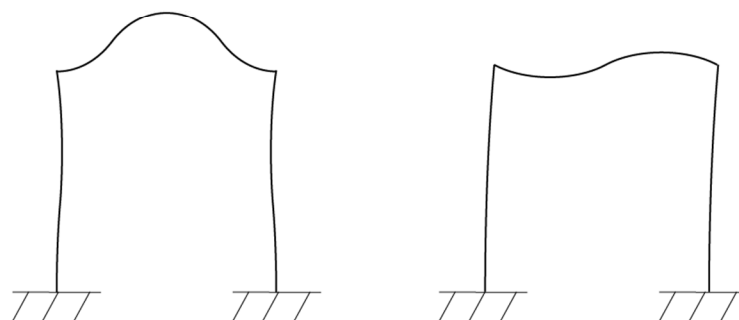
このモデルでは、elem0.4 の場合に最も座屈に対して強くなった。このように、軸圧縮力のみがかかるモデルであれば、回転剛性の値が大きいほど両端固定の最適形状である elem1.0 に近い形状が最も座屈荷重倍率が上昇する可能性がある。

さらに柱の見付け幅を 10mm 太くしたモデルで検証を行う。





(a) 荷重条件 部材番号（見付け幅）



(b) 全体座屈解析 座屈モード

図 4-22 1-1frame30 荷重条件と解析結果

表 4-10 1-1frame30 梁部材解析結果

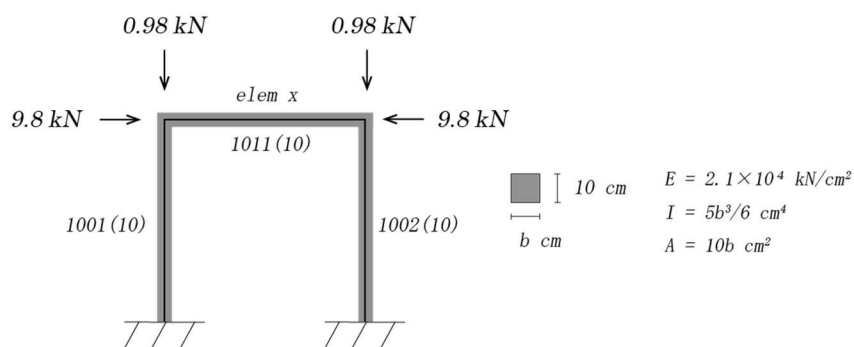
	柱見付け幅 $b$ (cm)	回転剛性 1 (kNm)	回転剛性 2 (kNm)
1-1frameA30	10	15750	15750

表 4-11 1-1frame30 梁の断面操作

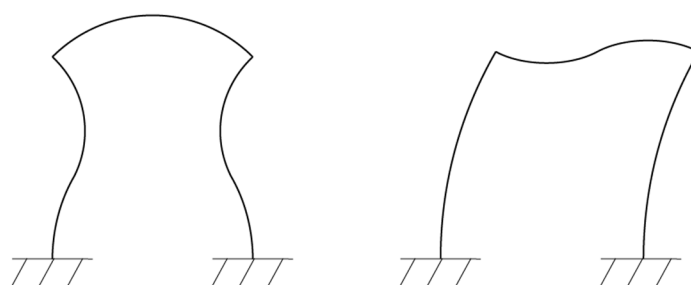
	元モデル	elem0.0	elem0.2	elem0.4	elem0.6	elem0.8	elem1.0
座屈荷重倍率 $\lambda$	742.4	532.2	605.2	748.8	845.3	829.5	724.7
$\lambda$ 上昇率 (%)	0	-28.3	-18.5	0.86	13.86	11.73	-2.38
座屈モード	A	A	A	A	A	B	B

このモデル 1-1frameA30 では、先ほどと同様(c)固定-固定側に最適形状がさらに近づき、elem0.6 から 0.8 の間の場合に最も座屈に対して強くなったと考えられる。

次に、柱に鉛直荷重がかかった場合でも同様の最適化が可能か検証を行う。



(a) 荷重条件 部材番号（見付け幅）



(b) 全体座屈解析 座屈モード

図 4-23 1-1frameB 荷重条件と解析結果

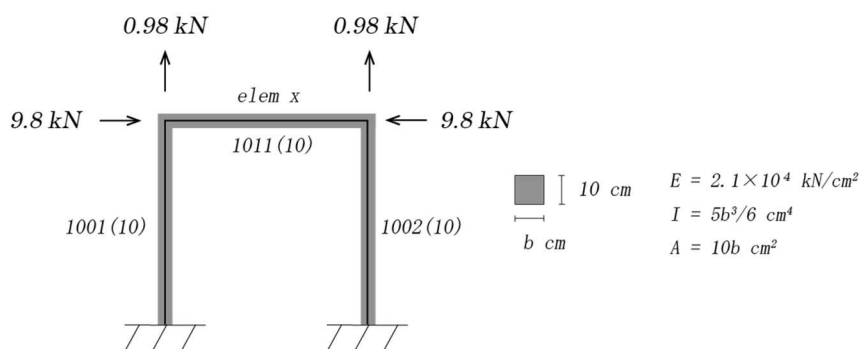
表 4-12 1-1frameB 梁部材解析結果

	柱見付け幅 $b$ (cm)	回転剛性 1 (kNm)	回転剛性 2 (kNm)
1-1frameB	10	583.1	583.1

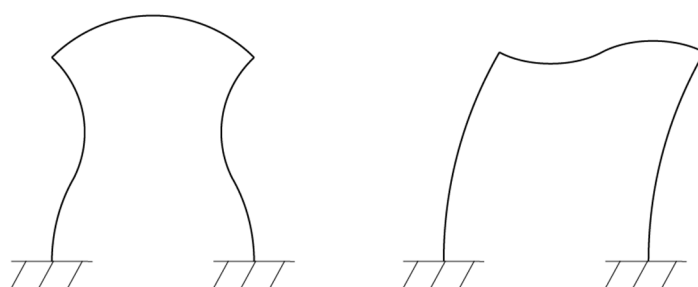
表 4-13 1-1frameB 梁の断面操作

	元モデル	elem0.0	elem0.2	elem0.4	elem0.6	elem0.8	elem1.0
座屈荷重倍率 $\lambda$	417.8	462.7	363.9	287.7	248.0	226.1	213.9
$\lambda$ 上昇率 (%)	0	10.8	-12.9	-31.1	-40.6	-45.9	-48.8
座屈モード	A	A	A	B	B	B	B

材端の回転剛性は 1-1frameA10 のモデルと同一であるにも関わらず、座屈荷重倍率の上昇の分布から鉛直荷重により柱頭の拘束が緩くなり、(a) ピン-ピン側に移動したことが確認できる。このように節点を共有する部材に軸力が加わることで柱頭の拘束が変化する様子は過去研究の部材体積分配での最適化<sup>(3) (6)</sup>でも指摘されている。次に鉛直荷重を上向きにしたモデルの検証を行う。



(a) 荷重条件 部材番号（見付け幅）



(b) 全体座屈解析 座屈モード

図 4-24 1-1frameC 荷重条件と解析結果

表 4-14 1-1frameC 梁部材解析結果

	柱見付け幅 $b$ (cm)	回転剛性 1 (kNm)	回転剛性 2 (kNm)
1-1frameC	10	583.1	583.1

表 4-15 1-1frameC 梁の断面操作

	元モデル	elem0.0	elem0.2	elem0.4	elem0.6	elem0.8	elem1.0
座屈荷重倍率 $\lambda$	397.4	471.7	486.0	401.9	317.2	273.7	249.9
$\lambda$ 上昇率 (%)	0	18.7	22.3	1.13	-20.2	-31.1	-37.1
座屈モード	A	A	A	B	B	B	B

モデル 1-1frameB とは逆に、柱部材に軸力が発生することにより最適形状が(c)固定-固定側に近づいていることが確認できる。これは柱に加えられる引張力により梁の材端の回転が拘束が強くなっていると考えられる。

ここまでは両材端が自由である材の検証を行ってきたが、次項では片端ピン片端自由の材について同様の最適化を試みる。

#### 4.3.2 材端がピン-自由の材の最適化

続いて片端ピン支持片端自由の材について同様の検証を行う。前項と同様に最適形状が存在すると思われる形を分割し、図 4-25 のように elemx の名称で呼ぶこととする。

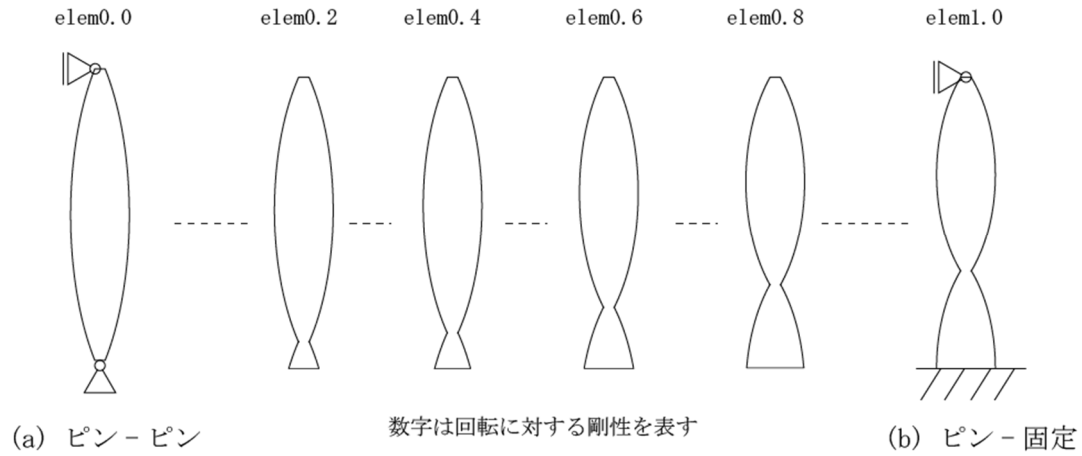


図 4-25 片端がピンである柱の最適形状予測

本論文で図中の  $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  の形状について、解析上で採用した見付け幅  $b$  の値を以下に示しておく。1001 がピン支持側であり、要素番号が大きい側が自由端側の要素を表す。

表 4-16 見付け幅  $b$  (cm)

	elem0.0	elem0.2	elem0.4	elem0.6	elem0.8	elem1.0
分割数	10	11	12	13	14	15
1001	4.9	5.1	5.2	5.1	5.0	4.9
1002	9.2	9.6	9.6	9.5	9.3	9.2
1003	11.1	11.6	11.6	11.5	11.3	11.1
1004	12.2	12.8	12.8	12.7	12.4	12.2
1005	12.7	13.3	13.3	13.2	12.9	12.7
1006	12.7	13.3	13.3	13.2	12.9	12.7
1007	12.2	12.8	12.8	12.7	12.4	12.2
1008	11.1	11.6	11.6	11.5	11.3	11.1
1009	9.2	9.6	9.6	9.5	9.3	9.2
1010	4.9	5.1	5.2	5.1	5.0	4.9
1011		5.1	5.2	5.1	5.0	4.9
1012			9.6	9.5	9.3	9.2
1013				11.5	11.3	11.1
1014					12.4	12.2
1015						12.7

以下のモデルについて、柱に関する最適化を検証する。解析結果を以下に示す。

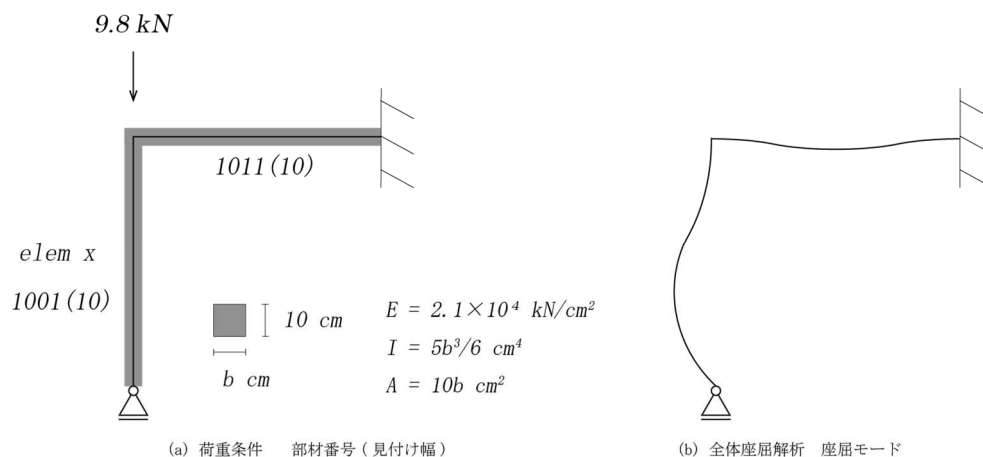


図 4-26 1-1frameD10 荷重条件と解析結果

表 4-17 1-1frameD10 柱部材解析結果

	梁見付け幅 $b$ (cm)	回転剛性 1 (kNm)	回転剛性 2 (kNm)
1-1frameD10	10	0	233.2

表 4-18 1-1frameD10 梁の断面操作

	元モデル	elem0.0	elem0.2	elem0.4	elem0.6	elem0.8	elem1.0
座屈荷重倍率 $\lambda$	287.5	307.9	347.3	344.7	295.1	246.0	209.0
$\lambda$ 上昇率(%)	0	7.10	20.80	19.90	2.64	-14.43	-27.30

このモデルでは、elem0.2 から elem0.4 の中ほどの場合に最も座屈に対して強くなった。先ほどのモデルと同様に梁部材の見付け幅  $b$  を 10cm 大きくしたモデルと比較検証を行う。

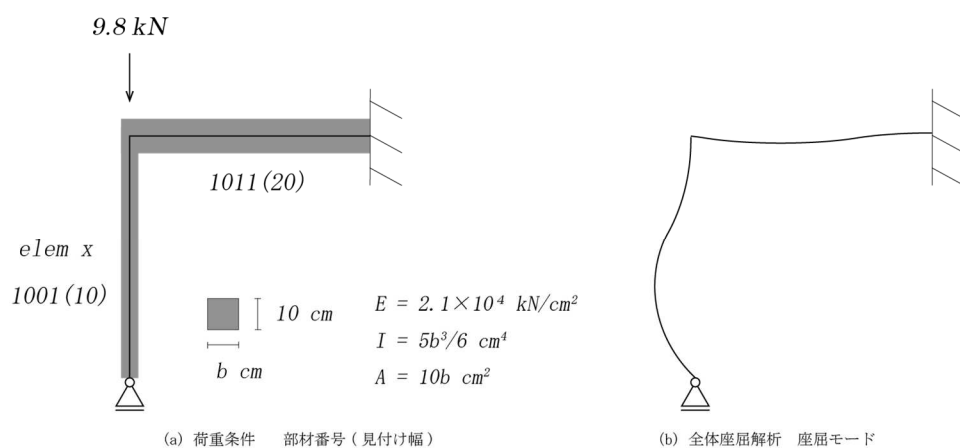


図 4-27 1-1frameD20 荷重条件と解析結果

表 4-19 1-1frameD20 柱部材解析結果

	梁見付け幅 $b$ (cm)	回転剛性 1 (kNm)	回転剛性 2 (kNm)
1-1frameD20	10	0	1867

表 4-20 1-1frameD20 梁の断面操作

	元モデル	elem0.0	elem0.2	elem0.4	elem0.6	elem0.8	elem1.0
座屈荷重倍率 $\lambda$	370.7	318.0	378.7	431.3	458.5	457.9	428.6
$\lambda$ 上昇率 (%)	0	-14.2	2.2	16.3	23.7	23.5	15.6

このモデルでは、elem0.6 から elem0.8 の中ほどの場合に最も座屈に対して強くなることが分かった。1-1frameD10 との比較からこちらも材端の回転の拘束が大きくなるにつれて最適形状が (b) ピン-固定側に近づいていく様子が確認できる。さらに見付けを 10cm 増やしたモデルが次の 1-1frameD30 である。

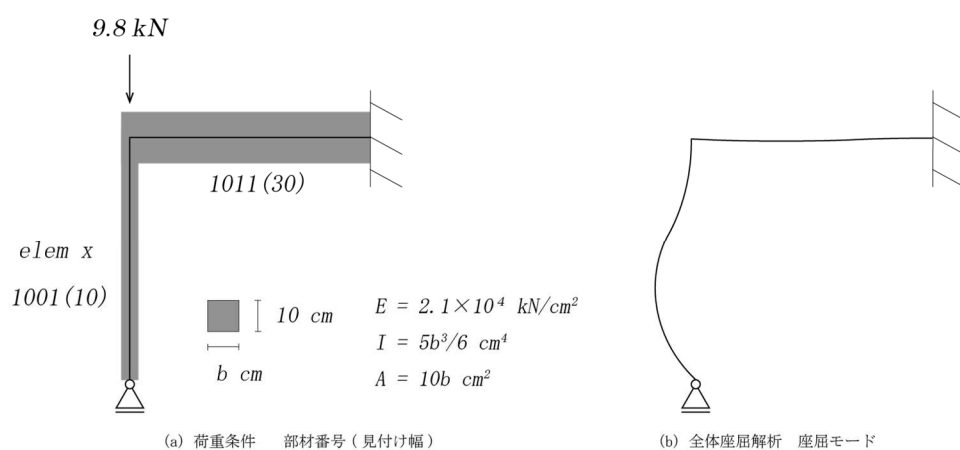


図 4-28 1-1frameD30 荷重条件と解析結果

表 4-21 1-1frameD30 柱部材解析結果

	梁見付け幅 $b$ (cm)	回転剛性 1 (kNm)	回転剛性 2 (kNm)
1-1frameD30	10	0	6300

表 4-22 1-1frameD30 梁の断面操作

	元モデル	elem0.0	elem0.2	elem0.4	elem0.6	elem0.8	elem1.0
座屈荷重倍率 $\lambda$	388.3	321.0	383.9	440.4	475.1	487.7	473.9
$\lambda$ 上昇率 (%)	0	-17.3	-1.1	13.4	22.4	25.6	22.0

このモデルは elem0.8 で最も座屈に対して強くなることが分かった。やはり材端の拘束が強くなることにより最適形状は elem1.0 に近づいていくことが確認できた。

このモデルに関しても梁に軸力を与え、柱頭の拘束の影響を考える。1-1frameD10 の梁に荷重を加えた結果が次のモデルである。

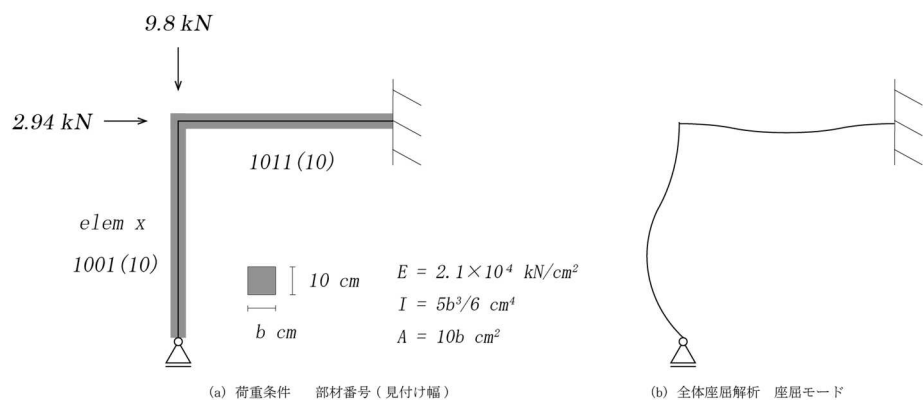


図 4-29 1-1frameE 荷重条件と解析結果

表 4-23 1-1frameE 柱部材解析結果

	梁見付け幅 $b$ (cm)	回転剛性 1 (kNm)	回転剛性 2 (kNm)
1-1frameE	10	0	233.2

表 4-24 1-1frameE 梁の断面操作

	元モデル	elem0.0	elem0.2	elem0.4	elem0.6	elem0.8	elem1.0
座屈荷重倍率 $\lambda$	276.7	305.9	345.0	324.1	274.1	230.2	197.7
$\lambda$ 上昇率(%)	0	10.6	24.7	17.1	-0.9	-16.8	-28.6

1-1frameD10 の結果と比べると、わずかに elem0.0 側に数値が近づいたが最適形状に大きな変化はなかった。前項の両端自由のモデルでは接合部材の軸力による柱頭の拘束の影響があるという結果になったが、このモデルでは影響が比較的小さいことが確認できた。従って材端がピン支持のモデルでは回転剛性による最適化がより効果的である可能性がある。



これらの結果から、先に述べたように回転剛性が大きくなるにつれて柱材の最適形状が(b)ピン-固定よりに移行していく様子が確認できた。架構中の1部材の最適化のみで座屈に対して25%ほどの耐力上昇を見せ、こちらも効果的な手法であると考えられる。

また前節の結果と比較を行うと、1-1frameA30は回転剛性15750kNmでelem0.7近傍に最適形状が存在し、1-1frameD30にて回転剛性は6300kNmだがelem0.8近傍に最適形状が存在する。このように片端ピン片端自由の部材は比較的小さめの拘束であっても(b)ピン-固定の最適形状に近づいていくことが確認できる。対照的に1-1frameA10と1-1frameB、1-1frameD10と1-1frameEの比較から周辺部材に軸力が存在することによる影響は両端自由の材に比べて小さくなっていることが分かる。

この節では回転剛性と最適形状の関係性について考察を行った。今後さらに要素体積分配を正確に行うためには、軸力による柱頭の拘束についての影響を数値化し当該個材以外の軸力も含めて回転に対する拘束の強さ、とする必要があると考えられる。また、今回具象化モデルの中で回転ばね $i, j$ の値のみを用いた。しかし、残りのばね定数が座屈荷重倍率に全く寄与しないとは考え難い。例えば回転ばね $ij$ の回転剛性は両節点に同等に作用するためおそらく材端の回転の生じやすさの差は生まないが、そもそも2節点の座屈が生じにくいことを意味するため最適化の1段階目である部材体積分配の最適化には有効である可能性がある。また、ピンや固定支持は水平・鉛直方向の変形を拘束するが、個材にピン支持が付加されることはすなわち剛性 $\infty$ の単純ばねの付加と等価と考えることができ、単純ばねの軸剛性も座屈に影響を与えている可能性がある。具象化モデルを用いた更なる最適化について、次節では荷重条件による柱頭の拘束の度合いの検出のための具象化を試みる。

#### 4.4 幾何剛性の具象化に関する一考

前節より回転剛性の具象化により最適化を行える可能性が示されたと同時に、回転剛性に加えて荷重条件によるその他の部材の軸力が個材の形状の決定に影響を与えることが明らかになった。最後に、将来的な荷重条件の反映に関連する可能性のある $[K_G']$ の具象化に関連する内容について以下に明記しておく。

$[K_E']$ と同様に $[K_G']$ の具象化を行う前に、座屈固有値問題及び要素幾何剛性マトリクスの式を確認する。

$$(再掲) \quad [K_E]\{U\} = \lambda[K_G]\{U\} \quad (1-1)$$

$$(再掲) \quad [k_g] = \begin{bmatrix} \frac{6N}{5L}s^2 & -\frac{6N}{5L}sc & \frac{6N}{5L}c^2 & & & \\ & \frac{N}{10}s & -\frac{N}{10}c & \frac{2LN}{15} & & \\ & -\frac{6N}{5L}s^2 & \frac{6N}{5L}sc & -\frac{N}{10}s & \frac{6N}{5L}s^2 & \\ & \frac{6N}{5L}sc & -\frac{6N}{5L}c^2 & \frac{N}{10}c & -\frac{6N}{5L}sc & \frac{6N}{5L}c^2 \\ & \frac{N}{10}s & -\frac{N}{10}c & -\frac{LN}{30} & -\frac{N}{10}s & \frac{N}{10}c \\ & & & & & \frac{2LN}{15} \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

式(4-2)から、要素剛性一つが与えられる変数は軸力、部材長、部材角の3つであることが確認できる。両端自由の近似モデルの各ばねに軸力が発生している状態を想定すれば21の未知数に対し $3 \times 6$ の変数を与えられるため弾性剛性と同様に近似的に一見解けるように思えるが、この場合部材長と部材角は既知の値となるため変数は軸力のみになり、6つしか与えられないこととなる。さらに軸力の生じている軸剛性、曲げ剛性0のばねを付加してよいと仮定すれば変数を増やすことは可能だが、その具象化が成功したとして得られた10を超える軸力情報の中から求めたい柱頭の拘束に関する情報をどのように抽出するのか非常に難解となる。

ここで、座屈固有値問題の式及び要素剛性の $k_g[3,3]$ ,  $k_g[6,3]$ ,  $k_g[6,6]$ に着目する。固有値問題の右辺は、書き下すと次の式(4-21)になる。

$$[K_E]\{U\} = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & & \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ z_i \\ \theta_i \\ x_j \\ z_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (4-21)$$

このように、回転角に関する項は幾何剛性の3行、6行、3列、6列である。その中でも、特に $x_i, z_i$ が固定されている具象化モデルに関しては、i端に影響のある項は $k_g[3,3]$ ,  $k_g[4,3]$ ,  $k_g[5,3]$ ,  $k_g[6,3]$ のみとなる。この4項の中で、 $k_g[3,3]$ はi端に付加する全ての材の軸力情報、 $k_g[4,3]$ ,  $k_g[5,3]$ ,  $k_g[6,3]$ はijを結ぶ部材の軸力情報であることは先に述べた通りである。弾性剛性の場合と同様に、以下の図4-18のように縮約後の幾何剛性マトリクスを分解すると、 $k_g[4,3]$ ,  $k_g[5,3]$ ,  $k_g[6,3]$ による $k_g[3,3]$ の値の変化を除いた値をi端の柱頭の拘束の度合いと仮定できる。

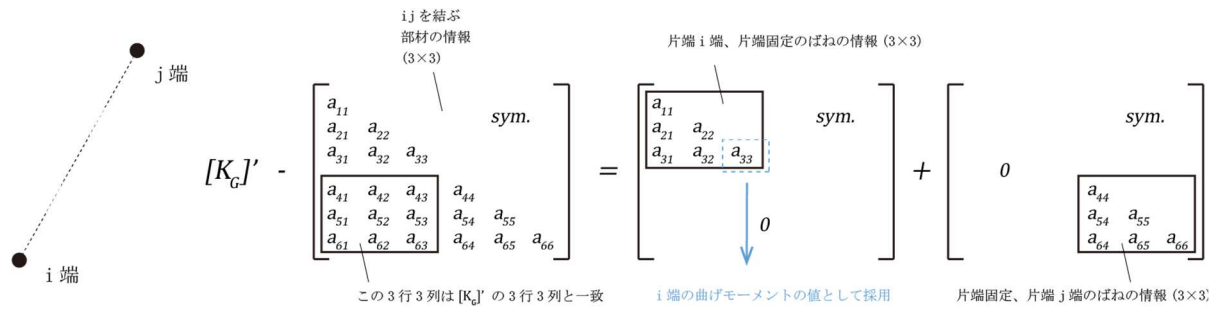


図 4-30 縮約後の幾何剛性の分解

感覚的には理解が難しいが、軸力による柱頭の回転の拘束を表す値の次元は kNm であり、このマトリクス中に kNm で表される値は  $k_g[3,3]$ ,  $k_g[6,3]$ ,  $k_g[6,6]$  の 3 要素しか存在しないことからこれを仮説とし考察を続ける。

ここで  $k_g[3,3] = 2LN/15$ ,  $k_g[6,3] = -LN/30$  より以下の式の関係にあることが確認できる。

$$k_g[3,3] = -4k_g[6,3] \quad (4-22)$$

具象化による全体幾何剛性は要素剛性の和であるため、この具象化をどのように行っても ij を節点に持つばねによる要素幾何剛性の和はこの式のように 3 行 3 列の要素が 6 行 3 列の要素の -4 倍となる。よって、 $[K_G]'$  の i 端の曲げに相当する値は具象化のモデルに依らず以下の式 (4-23) で求めることができる。

$$M_i' = K_G'[3,3] + 4K_G'[6,3] \quad (4-23)$$

$M_i'$  : 縮約時に i 端にかかる柱頭を拘束する力

拘束する力、と明記したが拘束を緩める軸力の存在も 1-lframeB や 1-lframeE から確認されたため負の値をとる可能性がある。j 端も同様であり、

$$M_j' = K_G'[6,6] + 4K_G'[6,3] \quad (4-24)$$

$M_j'$  : 縮約時に j 端にかかる柱頭を拘束する力

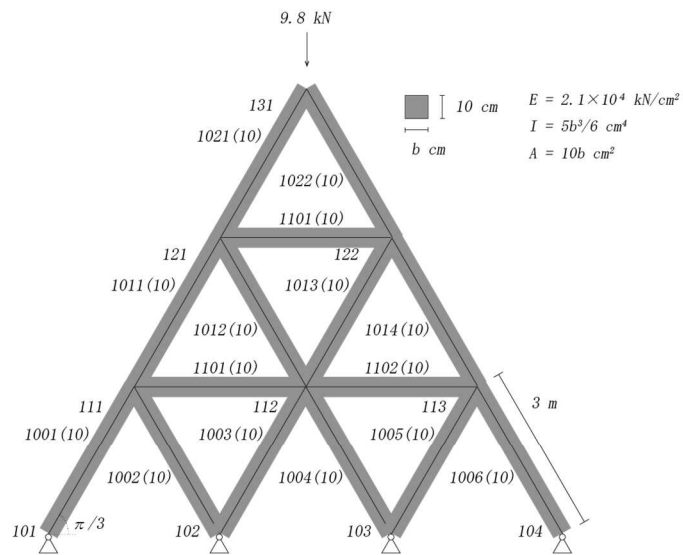
そして ij を通る材の数や軸力によらず、ij 端の柱頭を同時に拘束する力は  $k_g[6,3]$  で表される。

例えばこの  $M_i'$  を柱頭にかかる曲げモーメントのような力だと考えると、縮約された剛性マトリクスの具象化による回転剛性で割った値は縮約時の変形角  $\delta'$  とすることができる。

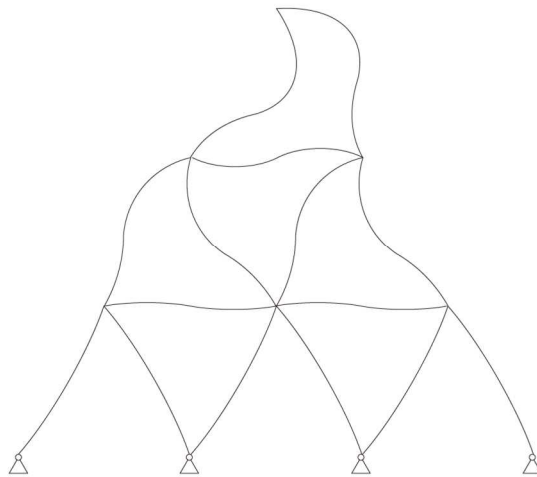
$$\delta' = M_i' / k_{\theta i} \quad (4-25)$$

$\delta'$  : 具象化による変形角

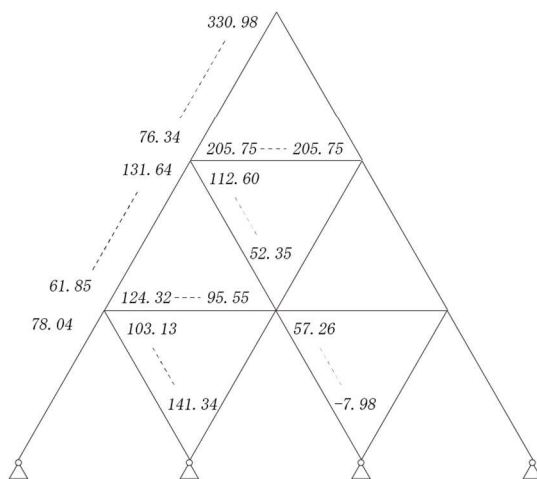
この  $\delta'$  について以下 3-3truss モデルについて検証を行う。



(a) 荷重条件 部材番号 (見付け幅)



(b) 全体座屈解析 座屈モード  $\lambda = 582.821$



(c) 縮約による変形角 ( $\times 10^{-6}$ )

図 4-31 3-3truss 変形角

表 4-25 3-3truss 解析結果

部材	回転剛性 1	回転剛性 2	曲げ 1	曲げ 2	変形角 $\delta'_1$ ( $\times 10^{-6}$ )	変形角 $\delta'_2$ ( $\times 10^{-6}$ )
1001	0.00	1447.3	0.00	0.124	—	78.04
1002	590.8	428.6	0.0835	0.1607	141.34	103.13
1003	601.1	2739.2	-0.0048	0.1568	-7.98	57.26
1011	1520.7	1634.3	0.0940	0.2151	61.85	131.64
1012	2750.0	1691.8	0.1439	0.1905	52.35	112.60
1021	1690.6	603.1	0.1291	0.1996	76.34	330.98
1101	1674.0	2841.4	0.2081	0.2715	124.32	95.55
1201	1766.7	1766.7	0.3635	0.3635	205.75	205.75

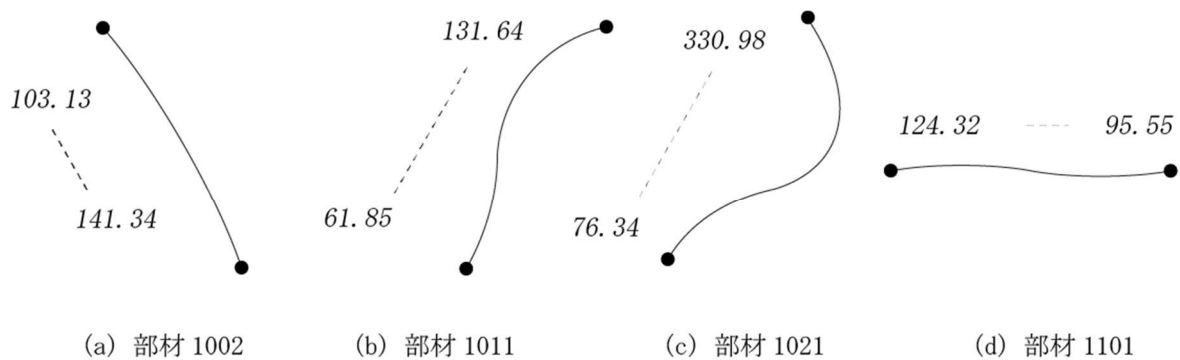


図 4-32 3-3truss 主要部材の縮約による変形角と座屈モード

図 4-32 について比較を行うと、(b)部材 1011 及び(c)部材 1021 に関して、変形角 $\delta'_1$ と変形角 $\delta'_2$ の大きさと座屈モードには明確な相関性が見られる。変形角が大きいほど全体系の座屈時の変形が大きい。次に (d)部材 1101 に関して変形角 $\delta'_1$ と変形角 $\delta'_2$ の値が近く、また部材 1201 と比較しても変形角の大小の関係と座屈モードの変形量は相関性がある。しかし高次の座屈モードであることは検出できていない。最後に(a) 部材 1002 に関しては、変形角の値が近いいためピンのような座屈をしていることは望ましい結果と言える。しかし、(b)と比較すると、(a)の変形角 $\delta'_1$ と変形角 $\delta'_2$ 、(b)の変形角 $\delta'_2$ は値が近いにも関わらず全体系での座屈時の変形は(b)が非常に大きい。この点に関しては、ij を結ぶ材に入る軸力も考慮することで解決する可能性がある。(a)は節点 ij を繋ぐ材にかかる軸力が柱頭を拘束する力 $M_{ij}'$ が 0.38kN であるが、(b)は $M_{ij}'$ が 0.97kN である。このように両端の縮約による変形角の比と ij 端にかかる軸力から座屈モードを検出できる可能性があることが分かり、また $M_i'$ の値のオーダーが一定の評価を得た。しかし、部材 1001, 1002, 1003 は値のばらつきも大きく、値が正確ではない可能性がある。

以上の結果から、材端の回転剛性と柱頭を拘束する力の関係から座屈モードが適切に検出できている可能性がある。今回はこの得られた $M_i'$ や $M_j'$ の値と最適形状の関係性の言及には至らなかったが、今回縮約マトリックスの具象化から座屈モードを得ることができたように $[K_G']$ に関する情報を適切に選択することが座屈最適化に大きく関わる可能性は非常に高いと思われる。

## 5. 結論と展望

本論文では、既往研究にて示された縮約という手法について、その妥当性の検証及び縮約手法を用いた最適化の検討を行った。

3 章では、高軸力領域における縮約手法の妥当性の検証を実験を通じて行った。直接の検出が困難である架構中の個材の座屈荷重を求めた既往実験の試験体を改良し、従来の手法では実験を行えなかった偏荷重を実現することで高軸力領域における実験検証を行った。既往研究と合わせ  $M - N$  相関曲線について一通りの検証を終えたことになる。実験値と解析手法の比較を行うと多くの試験体について縮約による座屈荷重は既往の解析手法よりは実験値に近い値を示し、その全てが安全側であった。しかし実験値と縮約による座屈荷重から求まる  $M - N$  相関曲線は大きく差がある試験体もあり、縮約手法による座屈荷重の妥当性の検証は今後も行う余地がある。

4 章で述べた最適化について、個材の体積一定で要素体積分配に関する解析・考察を行った。片端ピン片端自由の材及び両端自由の部材について単純ばね 3 個と回転ばね 3 個のモデルで境界条件を具象化できることを示した。両端自由の材の具象化については一部の要素を無視してしまっているが、計算に含めない値を小さくするような近似モデルを提案した。そしてその具象化モデルから求められる材端の回転剛性と 1 本柱の最適形状の関係性を模索した。周辺部材に軸力が加わっていない個材は 1 本柱の最適形状の操作から最適化を行える可能性を示した。また隣接部材の軸力による当該個材の柱頭の拘束を考え、荷重条件による影響を数値化する術を模索した。

本論文の内容は縮約手法を用いて算出した剛性マトリクスを元に最適形状を模索しようと試みたものであるが、今後の研究は縮約手法に限らず例えば共役勾配法など新たな最適化手法を用いてこのモデルの最適形状を探り、今回提唱した手法によって最適形状にどれだけ近づいたかを検証することが求められる。得た知見が定性的に正しいかの検証を行うのは困難だと考えられるため、最適形状から逆算的に剛性マトリクスや具象化モデルを考える過程が必要である。

# 参考文献

- (1) 日本建築学会 (2009) “鋼構造座屈設計指針”
- (2) 日本建築学会 (2005) “鋼構造設計基準—許容応力度設計法”
- (3) 堤千春(2018) “弾性剛性と幾何剛性を用いた座屈固有値問題の縮約による個材座屈荷重の検出法とその最適化” 東京大学大学院新領域創成科学研究科社会文化環境学専攻, 2017 年度修士論文
- (4) 鈴木宏之 他 (2013) “骨組モデルを用いた座屈固有値問題の縮約” 日本建築学会大会学術講演梗概集
- (5) 高岡俊一郎 他 (2018) “弾性剛性と幾何剛性を用いた座屈固有値問題の縮約による個材座屈荷重の検出法 その 1 : 縮約方法の提案と縮約された剛性マトリクスの具象化” 日本建築学会大会学術講演梗概集
- (6) 朝原真知子(2019) “座屈固有値問題の縮約による個材座屈荷重の検出方法とその実験検証” 東京大学大学院新領域創成科学研究科社会文化環境学専攻, 2018 年度修士論文
- (7) 氏岡啓威(2019) “座屈固有値問題の縮約を利用した座屈最適化における部材境界条件への影響” 東京大学工学部建築学科, 2019 年度卒業論文
- (8) 野上邦栄・山本一之(1994) “構造全体系の固有値解析による骨組部材の合理的な有効座屈長の評価” 土木学会論文集, No. 489/I-27, pp. 157-166
- (9) 尾下里治・吉田昭仁(1992) “高次の座屈固有値を用いた有効座屈長の決定方法の提案” 土木学会第 47 回年次学術講演会, pp. 248-249
- (10) 荒木慶一・高木次郎・上谷宏二 (2014) “線形座屈解析を用いた鋼構造平面骨組の座屈設計” 日本建築学会鋼構造系論文集
- (11) 野上邦栄・高瀬弘・山本一之(1992) “微小軸圧縮力を受ける骨組部材の有効座屈長に関する一考察” 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第 16 巻, pp. 385-390
- (12) I. Tadiakhsh and J. B. Keller(1962) Strongest column and isoperimetric inequalities for eigenvalues. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.
- (13) 浜田実・瀬口靖幸・多田幸生(1980) “逆変分原理による構造物の形状決定問題: 第 2 報, 座屈問題と振動問題” 日本機械学会論文集 A 編, 46 巻 402 号, pp. 187-196
- (14) 井上一朗・多田元英(2007) “鋼柱の座屈長さに関する一考察” 日本建築学会近畿支部研究報告集, 第 47 号・構造系, pp. 193-196

# 謝辞

修士論文を執筆するにあたり、非常に長い期間多くの方にお世話になりました。ここに謝辞として感謝の意を述べさせていただきます。

佐藤淳先生には研究室ミーティングで何度もご指導頂きました。私のアイデアに対し真摯に向き合って頂き、適切なアドバイスを毎回頂けたことで今回の修士論文を書き終えることができました。回転剛性の抽出に関しての意見は剛性マトリクスと向き合っている中自分の研究が迷走しかけていた時に軌道修正をするきっかけになりました。

荒木美香さんと古市渉平さん、ケンさんには、ミーティングの時間外であっても多くのアドバイスを頂きました。実験の設備に関する知識やソフトウェアの使い方、疑問に思った点を伺うと全て迅速に連絡を頂きました。

佐藤研究室の同期である藤本・宮本・大霜さん及び同時に修士論文を提出することとなった小島さんとは論文に関し様々な話をし、時に助けて頂くこともありました。同期というのは心強く、皆の研究の話を聞く時間は楽しくまた心の癒しにもなっていました。加えて修士論文を共に進めるという意識が自身の助けになっていました。

佐藤研究室の後輩にも多くお世話になりました。特に2か月前に縮約に関する卒業論文を提出した氏岡は実験の手伝いだけでなく研究の過程でも多く助けになってくれるとても頼もしい存在でした。永淵、金澤、下山田も私の慣れない実験の手伝いを長い時間に渡って手伝ってくれました。

佐藤研究室に所属してからあつという間の2年間でしたが、多くの経験をさせて頂きました。驚くほど優秀な方々に囲まれて過ごした時間は自分のかけがえのない糧となりました。

私の修士論文執筆に関わって頂いた全ての方々に対して、この場を借りてお礼とさせていただきます。本当に有難うございました。