

東京大学大学院新領域創成科学研究科
基盤科学研究系
先端エネルギー工学専攻

平成 25 年度
修士論文

境界から熱的に駆動される
静電プラズマ乱流の構造形成

2014 年 1 月提出

指導教員 吉田 善章 教授

47126064 大野 裕司

概要

核融合プラズマにおける zonal flow などの構造形成は、閉じ込めの改善や劣化をもたらすとして注目されている。このような乱流中の構造形成は、特に 2 次元乱流であればエネルギーの逆カスケードによって説明される。そして逆カスケードされるエネルギーは、プラズマのように力学的にエネルギー入力がない場合、傾圧効果を通じて熱 $\delta Q = T ds$ によって入力される。このように、逆カスケードによる構造形成と傾圧効果、そして熱の間には深い関わりがある。さらに核融合プラズマのような乱流は開放系であり、系の外から境界を通じて熱が入力することが重要である。

本研究では以上の関係に着目し、傾圧効果を含んだドリフト波方程式の構造形成に関して数値解析を用いて調べた。その結果、これまでのドリフト波方程式ではあまり考慮されていなかった密度勾配というパラメータが、zonal flow のような構造形成に大きく影響することが明らかになった。さらに本研究では、ドリフト波方程式という運動方程式に対して、非散逸かつ閉じた境界のときに成立する Hamilton 形式と呼ばれる概念を応用することで、熱エネルギーを定め、境界から流入する熱流束の定式化をおこなった。そして境界における熱流束の値を制御した計算をおこなった結果、zonal flow が形成されているときに、境界から流入する熱流束を増加させると、密度勾配や温度勾配といった背景勾配が増加することが明らかになった。

目次

概要	ii
図目次	vi
第 1 章 序論	1
1.1 乱流における構造形成と核融合プラズマ	1
1.2 エネルギーの逆カスケード	2
1.3 ドリフト波方程式	3
1.3.1 Hasegawa–Mima 方程式	4
1.3.2 ドリフト波方程式と惑星大気方程式	4
1.4 傾圧効果と渦生成	5
1.4.1 傾圧効果とは	5
1.4.2 Kelvin の循環定理と傾圧効果	6
1.4.3 傾圧効果と Bénard 対流	7
1.5 流体運動と熱力学法則	8
1.6 プラズマ乱流の熱的駆動	10
1.7 研究概要	11
第 2 章 熱的に駆動されるドリフト波乱流モデル	13
2.1 物理的な条件	13
2.2 傾圧 Hasegawa–Mima 方程式	15
2.2.1 導出	15
2.2.2 他のドリフト波方程式との違い	16
2.2.3 線形分散関係	17

2.2.4	Hamilton 形式と熱エネルギー	20
2.3	ドリフト波乱流の自己組織化と熱的駆動	22
2.3.1	背景勾配の修正	22
2.3.2	境界条件の設定	23
第 3 章	数値解析	26
3.1	数値解析の手法	26
3.2	線形不安定性・非線形飽和・大規模構造形成	29
3.3	密度勾配・温度勾配と構造形成との関係性	36
3.4	背景密度勾配・温度勾配の修正	45
3.5	ドリフト波乱流の熱的駆動	50
3.6	熱流束のオーダー	57
第 4 章	結論	58
補足 A	ドリフト波方程式	60
A.1	ドリフト波方程式の導出	60
A.1.1	ドリフトオーダリング	60
A.1.2	Hasegawa–Mima 方程式	62
A.1.3	傾圧 Hasegawa–Mima 方程式	64
A.2	一般化 Hamilton 形式	65
A.2.1	一般化 Hamilton 形式と流体方程式	65
A.2.2	ドリフト波方程式の Hamilton 形式	67
補足 B	数値解析の手法	69
B.1	Arakawa Jacobian	70
B.2	多段階法	71
B.3	ADI 法	73
	参考文献	77
	謝辞	81

目次

1.1	(a) 木星大気に形成された縞模様と大赤斑 [NASA Photojournal, PIA00343]	
	(b) トカマク断面における zonal flow と streamer の模式図	2
1.2	熱力学法則と流体運動との関係図	10
2.1	トカマクプラズマ断面の模式図	13
2.2	傾圧 Hasegawa-Mima 方程式の線形不安定性による成長率を (k_x, k_y) に対し てプロットした図	19
2.3	ドリフト波乱流の背景勾配への影響と熱流束の流入に関する模式図	22
3.1	初期条件として与えた静電ポテンシャル ϕ と渦度 $\omega = \triangle\phi$	28
3.2	数値計算のプロセス	28
3.3	揺動のエネルギーの時間発展	30
3.4	線形不安定性で成長している間の分布	31
3.5	非線形飽和した直後での分布	32
3.6	非線形飽和から長時間経過したあとの分布	33
3.7	エネルギースペクトルの時間変化	34
3.8	エネルギーとエンストロフィーで重み付けした平均波数の時間発展	35
3.9	$\beta = 1.0, \alpha = 0.070$ の場合での構造	37
3.10	$\beta = 1.6, \alpha = 0.120$ の場合での構造	38
3.11	$\beta = 1.6, \alpha = 0.040$ の場合での構造	39
3.12	x 方向の平均波数と y 方向の平均波数の比較	40
3.13	$\beta = 1.60, \alpha = 0.20$ の場合での構造 (粘性が大きいとき)	42
3.14	$\beta = 1.60, \alpha = 0.25$ の場合での構造 (粘性が大きいとき)	43

3.15	$\beta = 1.00, \alpha = 1.00$ とした場合の構造 (粘性が大きいとき)	44
3.16	背景密度・温度の修正 ($\beta = 1.60, \alpha = 0.20$)	46
3.17	背景勾配の時間変化 ($\beta = 1.60, \alpha = 0.20$)	47
3.18	背景密度・温度の修正 ($\beta = 1.00, \alpha = 1.00$)	48
3.19	背景勾配の時間変化 ($\beta = 1.00, \alpha = 1.00$)	49
3.20	熱浴のみを設定し, 熱流束はないものとして $t = 1000$ まで計算したもの, . . .	51
3.21	$F = 1.0$ としたときの静電ポテンシャル, 渦度, 温度揺動の図	52
3.22	$F = 3.0$ としたときの静電ポテンシャル, 渦度, 温度揺動の図	53
3.23	$F = 5.0$ としたときの静電ポテンシャル, 渦度, 温度揺動の図	54
3.24	熱流束が流入したときの, ドリフト波による背景密度・背景温度の修正	55
3.25	熱流束が流入したときの, 背景の密度勾配・温度勾配の時間発展の図	56

第 1 章

序論

1.1 乱流における構造形成と核融合プラズマ

乱流とはその名のとおりに非常に乱れた (Reynolds 数の高い) 流れのことをいうが、その中にも秩序的な構造が形成されることが知られている。このように系の中に自律的に秩序的な構造が生まれることを自己組織化 (self-organization) といい [1], 非線形性によって引き起こされる特徴的な現象である。自己組織化する乱流の代表的な例として、木星大気が挙げられる。木星大気には図 1.1(a) のように縞模様や大赤斑といった秩序的な構造が形成されている [2, 3] が、これらの領域での風速は 100 m/s にも達しており [4], 乱流状態にあると考えられる*。縞模様の部分では東西方向の流れの向きが交互に変化しており (シアを持っている), このような流れのことを zonal flow と呼ぶ。赤道地域 (高温な領域) から極地域 (低温な領域) への方向と垂直に流れているのが特徴である。

核融合プラズマの乱流においても、この zonal flow と同様の構造が形成されることが知られている。図 1.1(b) にトカマク断面の模式図を示した。断面の中心部 (高温領域) から端 (低温領域) への方向と垂直な向き、すなわちポロイダル方向へ流れて、半径方向にシアを持つ構造が zonal flow である [1, 6, 7]。Zonal flow は中心部と端との間の熱輸送を阻害するので、核融合装置における閉じ込めの改善をもたらすと考えられる。これと関連して考えられているのが、輸送障壁と呼ばれる現象である。輸送障壁とはプラズマ中の密度や温度の勾配が急激に大きくなる現象で、その形成によって閉じ込め効率は向上する [8]。輸送障壁は、プラズマに入力する熱を大きくしていったときに、閾値を超えると現れる。輸送障壁によって閉じ込め効率が

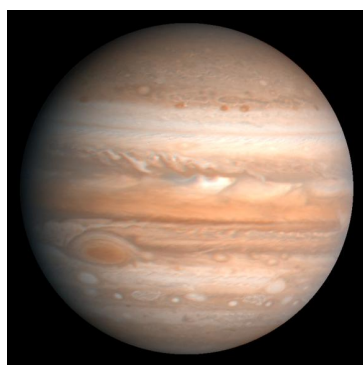
* 例えば台風の階級分けでは、最も強い階級でも風速 54 m/s 以上である [5, p. 325]。

向上した状態を H モードといい，向上する前の状態を L モードという（この変化は LH 遷移と呼ばれる）．H モードは核融合開発には必須のものと考えられており，ITER（国際熱核融合実験炉）の実験シナリオにも含まれている [9]．Zonal flow に対して，断面の半径方向を向いた対流構造も形成されうることが知られており，streamer と呼ばれている [10]．こちらは逆に，中心部と端との熱のやりとりを促進するので，閉じ込めを劣化させると考えられる．熱の閉じ込め効率を向上させることは核融合開発の鍵になるので，zonal flow や streamer といったプラズマ乱流中の構造形成は重要視されている．

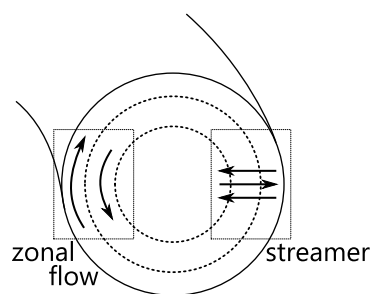
1.2 エネルギーの逆カスケード

Zonal flow のような大規模な構造はどのようにして生まれるのだろうか．大規模な構造が生まれるということは，大きな空間スケール（＝小さな波数スケール）のモードにエネルギーが集中していることを意味する．ゆえにこの現象を理解するためには，波数空間におけるエネルギーの輸送を理解する必要がある．

Kolmogorov [11] は，3 次元等方乱流に対して波数空間におけるエネルギー輸送の現象論的な説明を示した．流体の運動方程式（Navier–Stokes 方程式）には対流項 $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ が含まれており，Reynolds 数が高い乱流状態ではこの項が支配的になる．対流項は非線形であるから，異なる波数のモードが結合し，波数空間においてエネルギーの輸送をもたらす．Reynolds 数が



(a)



(b)

図 1.1 (a) 木星大気に形成された縞模様と大赤斑 [NASA Photojournal, PIA00343, <http://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA00343>]. (b) トカマク断面における zonal flow と streamer の模式図.

高いので粘性項は非線形項に比べて非常に小さいが、高波数の領域では効くようになる。すなわち、外力のスケール程度の低波数領域で入力されたエネルギーは、非線形項によって高波数側へ輸送され、最終的に粘性によって散逸する。非線形項が支配する波数領域を慣性領域といい、エネルギーが慣性領域を高波数側へ輸送されることをエネルギーカスケードという。3次元の乱流においては、エネルギーは細かな構造への集中するのである。

Kolmogorov の説明は 3 次元等方乱流に対するもので、2 次元等方乱流に対する説明は Kraichnan [12] や Leith [13] によって示された。2 次元乱流が 3 次元乱流と大きく異なるのは、エネルギー以外にエンストロフィー（渦度の二乗の積分）も保存するということである*。エネルギーと同様に、エンストロフィーも非線形項（対流項）によって波数空間内を輸送される。そして 2 次元流体の場合、エネルギーは低波数領域へ輸送され、エンストロフィーは高波数領域へ輸送されるという、双カスケードと呼ばれる現象が起こる。エネルギーが低波数領域へ輸送されることを、エネルギーの逆カスケードという。エネルギーは逆カスケードによって大規模な構造に集中し、エンストロフィーはカスケードによって構造の隙間に強い乱れとして集中する。この理論はいくつも仮定をおいて導かれたものであるが、例えば Batchelor によって数値計算を利用した検証がなされている [14]。

以上のように、3 次元乱流ではエネルギーはカスケードによって細かな構造に集中する一方、2 次元乱流では逆カスケードによって大きな構造に集中する。つまり、乱流系における構造形成には、その系の次元性が重要になる。核融合プラズマでは強力な磁場によって、そして惑星大気では水平方向と鉛直方向のスケールの違いによって運動は 2 次元的になる。そのためエネルギーの逆カスケードによる大規模構造の形成が期待される。

1.3 ドリフト波方程式

トカマクのようなトーラス型の核融合装置においては、トロイダル方向に強い磁場が作られる。これによって、プラズマの運動は磁場に垂直な方向の 2 次元と平行な方向の 1 次元に分離される。ドリフト波とは、磁場を横切る方向への輸送の主要なメカニズムと考えられているものである [15]。

* 3 次元では渦の引き伸ばしと呼ばれる効果が働き、エンストロフィーは保存しない。渦度方程式 (A.12) における $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ という項がこの効果を表す。2 次元では渦度 ω は z 成分のみで、速度 \mathbf{v} は x, y 方向にしか変化しないので、この項はゼロになる。

1.3.1 Hasegawa–Mima 方程式

ドリフト波を記述する最も単純な方程式は、Hasegawa–Mima 方程式 [16]

$$\partial_t(\phi - \Delta\phi) - [\phi, \Delta\phi] + \beta\partial_y\phi = 0 \quad (1.1)$$

である（変数は規格化されている）。ただし x をトカマク断面の半径方向、 y をポロイダル方向にとる。 ϕ は静電ポテンシャルで、電子に対する Boltzmann 分布と準中性条件から密度揺動と同一視できる。 $\Delta\phi$ は $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト $\mathbf{v}_E \propto \mathbf{e}_z \times \nabla\phi$ の渦度 ω , $[\phi, \Delta\phi]$ は $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトによる渦の対流微分 $\mathbf{v}_E \cdot \nabla\omega$ を表している。そして β は、背景密度 n_0 の勾配の大きさを表しており、 $\beta \propto (-d \ln n_0 / dx)$ を満たす（定義は式 (2.5)）。この方程式の導出など、詳しいことは A.1 節で述べている。Hasegawa–Mima 方程式 (1.1) は、2 次元非圧縮性流体の渦度方程式とよく似た構造を持っている。特に、エネルギーとエントロフィーを一般化した形で保存量として持っているので、2 次元乱流と同様に双カスケードが起こる。エネルギーの逆カスケードによって大規模構造が形成されるが、ここで 2 次元乱流との違いが現れる。その違いとは、式 (1.1) の $\beta\partial_y\phi$ の項に現れている非等方性である。Hasegawa–Mima 方程式は背景密度が x 方向の勾配を持つために非等方になっているのである。この非等方性により、 x 方向と y 方向とで逆カスケードの傾向が異なったものになる。数値計算によって、 y 方向では波数ゼロまで逆カスケードし x 方向では途中でカスケードが止まる、つまり zonal flow が形成されることがわかっている [17]。

1.3.2 ドリフト波方程式と惑星大気方程式

プラズマと惑星大気という、まったく異なったところに zonal flow のような構造が共通して現れるのはなぜだろうか。実は、ドリフト波方程式と惑星大気を記述する方程式とは非常によく似た方程式になっているのである。例えば Hasegawa–Mima 方程式は、惑星大気の Rossby 波と呼ばれる波を記述する Charney 方程式 [18] と同一の方程式になっている。そのためこれらの方程式は Charney–Hasegawa–Mima 方程式とも呼ばれる [17, 19]。プラズマの 2 次元的な運動は強い磁場によるものであったが、惑星大気は鉛直方向と水平方向のスケールの違いによって 2 次元的な運動をする。そしてプラズマでの背景密度の非一様性は、惑星大気では Coriolis 力の非一様性に対応する。他にも 2.2.2 節で述べるように、Hasegawa–Mima 方程式

に含まれる β は惑星流体における β 面近似と呼ばれる方程式に現れる β 項という項と類似している。

ただし注意しなくてはならないのは、方程式の形が似ている、または同じであっても、パラメータがとりうる範囲まで同様だとは限らないということである。Hasegawa–Mima 方程式に現れる β は、密度 n_0 の微分を密度自身で割ったもの $(-d \ln n_0 / dx)$ である。そのためオーダーは $\beta \sim 1$ となる。対して β 面近似方程式に現れる β は、定義は Corioris パラメータ $f = 2\Omega \sin \varphi$ (Ω は自転速度、 φ は緯度) の変化 df/dy (y は惑星の南北方向) そのものである。これを規格化すると、代表的なスケール L 、代表的な風速 U 、赤道半径 a を用いて $\beta = (L^2/U)(2\Omega \cos \varphi/a)$ となる。スケール L に a をとれば $\beta = (a/U)2\Omega \cos \varphi$ となる。つまり、惑星の大きさや自転速度によって β の値が大きく異なるのである。理科年表 [5] の値を利用すると、例えば地球の半径は 6.4×10^6 m で、木星の半径は 7.2×10^7 m なので、木星のほうが 10 倍程度大きい。自転速度についても、地球では $7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ で、木星では $1.8 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ で、木星のほうが大きい。風速についても木星のほうが大きいと思われるので、これらの差は少し縮まるが、結果として β は地球で数十程度、木星で数百程度になる。惑星大気の β はドリフト波のそれよりも大きな値になり、惑星によって値はさらに異なるものになる。

このようにとる値が大きく変わるので、たとえ方程式において同じ意味をもつ項であっても、及ぼす影響は変わる可能性がある。

1.4 傾圧効果と渦生成

1.4.1 傾圧効果とは

エネルギーのカスケード・逆カスケードという考え方によって、2次元乱流における大規模構造形成が説明される。次に問題になるのは、カスケード機構において輸送されるエネルギーがどこから入力されるかである。先の説明では、外力によって入力されたエネルギーといった。例えば翼や飛翔体の周りにできる乱流は、物体の形状によって流体（気体）が力を受け、力学的なエネルギーが入力される。しかしプラズマや大気などでは、このような力学的なエネルギーの入力があるわけではない。

このことは、流体の「渦」という観点からも考えることができる。エネルギーのカスケード

は渦が細かく分裂していくことを意味し、逆カスケードは渦が結合してより大きな渦を作ることとを意味すると考えられる。すなわち、カスケードされるエネルギーがどのように入力されるかという問題は、分裂・結合する元の渦がどのように生成されるかという問題になるのである。力学的なエネルギーの入力があるということは、流体が物理的にかき混ぜられて渦が作られるということである。翼や飛翔体などのエネルギーの入力は、物体の周囲を通る流れに Kármán 渦が形成される例を考えればわかりやすいだろう。

プラズマや大気のように、力学的なエネルギー入力がないところで渦を形成するのは、傾圧効果と呼ばれる効果である [20, 21]。傾圧とは、流体の密度 n と圧力 p の勾配の方向が一致しない状態、すなわち $\nabla n \times \nabla p \neq 0$ となる状態のことをいう。傾圧でない、すなわち $n = f(p)$ という関係が成り立つ状態を順圧という。

粘性も外力も無い流体では、運動方程式は

$$m[\partial_t \mathbf{v} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] = -\nabla \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) - \frac{\nabla p}{n} \quad (1.2)$$

と表されるから*、両辺に $\nabla \times$ を作用させて渦度方程式にすると

$$m[\partial_t \boldsymbol{\omega} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})] = \frac{\nabla n \times \nabla p}{n^2} \quad (1.3)$$

となり、傾圧効果が渦を作り出すことがわかる。

1.4.2 Kelvin の循環定理と傾圧効果

式 (1.3) によって、傾圧効果によって渦が形成されることがわかった。これを少し別の視点で捉える。そのために、流体力学においてよく知られている Kelvin の循環定理 [22] を通じて傾圧効果を見る。Kelvin の循環定理は次のようなものである：

非粘性順圧流体とともに動く閉曲線 $L(t)$ を考えると、その閉曲線に沿った循環 $\oint_{L(t)} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ は時間的に不変である。

Kelvin の循環定理、すなわち循環の保存は傾圧効果によって破れるが、数式上でどのようにして保存が破れるかを見てみる。これによって、傾圧効果の、特に熱力学的な意味がわかるよ

* 式 (A.10) を参照されたい。外力がないとしたが、電磁場に関しては一般化運動量 $m\mathbf{v} + e\mathbf{A}$ やエネルギー $mv^2/2 + e\phi$ として運動に付随するものとみなせる。

うになる．式 (1.2) を利用すれば，循環の時間変化は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \oint_{L(t)} m \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \oint_{L(t)} m [\partial_t \mathbf{v} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &= - \oint_{L(t)} \nabla \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \cdot d\boldsymbol{\ell} - \oint_{L(t)} \frac{\nabla p}{n} \cdot d\boldsymbol{\ell}\end{aligned}\quad (1.4)$$

と書ける．さらに熱力学関係式 $dh = n^{-1} dp + T ds$ (h : エンタルピー, T : 温度, s : エントロピー) を用いれば，この式は

$$\frac{d}{dt} \oint_{L(t)} m \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \oint_{L(t)} \nabla H \cdot d\boldsymbol{\ell} + \oint_{L(t)} T \nabla s \cdot d\boldsymbol{\ell}\quad (1.5)$$

とまとめられる．ただし $H = mv^2/2 + h$ は一般化エンタルピーである．右辺の第 1 項は完全形式なので積分するとゼロになる．つまり，

$$\frac{d}{dt} \oint_{L(t)} m \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_{L(t)} T \nabla s \cdot d\boldsymbol{\ell}\quad (1.6)$$

という関係が成り立つ．順圧であれば $n^{-1} \nabla p$ や $T \nabla s$ は完全形式であり，式 (1.6) の右辺はゼロになって循環が保存する．式 (1.6) は，流体の循環（渦）が傾圧効果を通じて熱 $\delta Q = T ds$ によって作られることを意味している．傾圧効果は，流体に渦を作り，熱という形でエネルギーを入力しているのである．

1.4.3 傾圧効果と Bénard 対流

傾圧効果が流れの構造を作る例として，Bénard 対流 [23, Ch. II] について述べる．Bénard 対流とは，層状の流体を下側から加熱したとき，下部の流体の密度が減少して浮力が生じることで起こる現象である．

一様重力下で，下側から加熱される流体の運動を考える．運動方程式は，重力場を \mathbf{g} と書けば

$$m(\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -n^{-1} \nabla p + m \mathbf{g}\quad (1.7)$$

となる．この式の静止平衡状態は $\mathbf{v}_* = 0$, $-n_*^{-1} \nabla p_* + m \mathbf{g} = 0$ と表される．静止平衡からの摂動を考える．Boussinesq 近似によって密度の摂動 $\tilde{n} = n - n_*$ と温度の摂動 $\tilde{T} = T - T_*$ と

が比例すると仮定し,

$$\tilde{n} = -\alpha n_* \tilde{T} \quad (1.8)$$

と表す. すると, 式 (1.7) は

$$m(\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -n_*^{-1} \nabla p + (1 - \alpha \tilde{T}) m \mathbf{g} \quad (1.9)$$

と書くことができる. この方程式に粘性項を加え, 線形化して安定性解析すると, 温度勾配 (空間の両端での温度差) が一定以上ある場合に対流が起こる. これが Bénard 対流である (もしくは単に熱対流とも呼ばれる).

以上は Bénard 対流に関してよくおこなわれる説明で, 先に述べたとおり浮力 $(1 - \alpha \tilde{T}) m \mathbf{g}$ によって対流が生まれるとされる. もちろんこれは正しい解釈だが, 実は突き詰めると, 傾圧効果, すなわち $T ds$ の非完全性に結びつけることができる [24]. Maxwell の関係式 $(\partial s / \partial p)_T = -(\partial V / \partial T)_p = n^{-2} (\partial n / \partial T)_p$ と式 (1.8) から, $\nabla s_* = -\alpha n_*^{-1} \nabla p_*$ という関係が得られる. これを用いれば, 式 (1.9) は

$$m(\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -\nabla(\tilde{h} - T_* \tilde{s}) + \tilde{T} \nabla s_* \quad (1.10)$$

と書き換えられる. ただし $dh = n^{-1} dp + T ds$ より $\nabla \tilde{h} = n_*^{-1} \nabla \tilde{p} + T_* \nabla \tilde{s}$ となることを利用した. この式から, Bénard 対流の渦形成は $\tilde{T} \nabla s_*$ の非完全性に起因することがわかる. 重力場が存在するという情報は, 静止平衡でのエントロピーに勾配 ∇s_* があるということに含まれている. 流体の加熱が一様であれば, \tilde{T} は ∇s_* と同じ向きにしか変化しないので, $\tilde{T} \nabla s_*$ は完全形式になり, 渦は形成されない. しかし流れ \mathbf{v} が存在すれば対称性は破れ, \tilde{T} は ∇s_* 以外の向きにも変化して $\tilde{T} \nabla s_*$ は非完全形式になる. Bénard 対流の問題は, 重力場が平衡状態のエントロピーに勾配を作ることから, 傾圧効果による渦生成と結びつけて考えることができるのである.

1.5 流体運動と熱力学法則

1.4.2 節で述べたことから, 流体の渦形成は傾圧効果を通じて熱 $\delta Q = T dS$ と関係していることがわかる. ここで, 熱力学法則と流体運動との関係について述べておく.

熱力学第 1 法則はいわゆるエネルギー保存則で, 系のエネルギー変化 dE が系になされた力

学的仕事 δW と系に流入した熱 δQ の和で書けるといものである：

$$dE = \delta W + \delta Q. \quad (1.11)$$

この d は熱力学的な状態変数の変化を表す記号であり，すなわち状態空間における経路上の移動を表している． δ は状態変数でない一般の変化について用いる記号である．流体運動を扱う上で，非平衡系のランダムな運動すべてを扱いきることは不可能である．そこで流体エレメント（流体要素）を考え，個々のエレメントでは熱力学法則が成り立つとする．なお簡単のため，各流体エレメントにおいて密度 n と体積 V に対して $nV = 1$ となるように粒子数を規格化する． E は流体エレメントが持つ全エネルギーである． δW は圧力 p による $-pdV$ 以外にも要因が存在するが， E を調整して $\delta W = -pdV$ となるようにする．これは働く力をポテンシャルエネルギーとして E に含ませるなどすればよい．流体エレメントの全エネルギーは，熱エネルギー \mathcal{E} と流体の運動エネルギー E_F からなる．後者は状態変数でないので， $dE = d\mathcal{E} + \delta E_F$ と表される．よって，流体エレメントに対して第 1 法則 (1.11) は

$$d\mathcal{E} + \delta E_F = -pdV + \delta Q \quad (1.12)$$

と表される．エンタルピー $h = \mathcal{E} + Vp$ を導入すると，この式は

$$dh + \delta E_F = n^{-1} dp + \delta Q \quad (1.13)$$

とも表される．

ここで変動 d の意味を明確にしよう．これによって普通の熱力学法則と流体運動を含んだ熱力学法則の違いが浮き彫りになる．流体の運動がなくて準静的であれば (δE_F がなくて $\delta Q = TdS$)，式 (1.12) は式 (1.11) に，そして式 (1.13) はよく知られた関係式 $dh = n^{-1} dp + TdS$ に帰着する．このときの d は系に対する準静的操作による状態空間上の変化であり，必ずしも時空間と結びついた変化ではない*．一方で流体の運動を考えると，物理量の変動は流体運動にともなって起こる．すなわち d は流体エレメントの時空間上の軌道に沿った変化（物質微分）になる．

以上のようにして，熱力学法則は流体運動を含むような形で定式化される．これと傾圧効果を合わせると，熱力学法則と流体運動との関係が図 1.2 のようにまとめられる．流体の運動

* 例えばピストンを動かしたときのような，温度や体積で表される状態空間での変化である．

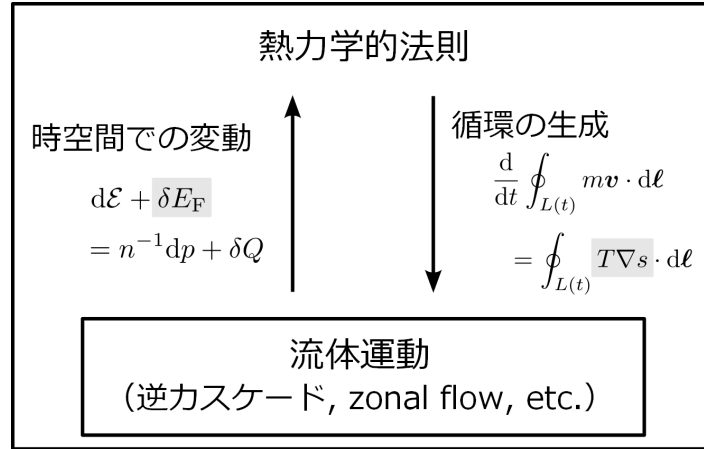


図 1.2 熱力学法則と流体運動との関係図. 流体運動は熱力学法則の中では変動 d が時空間の変化であることとして記述され, 流体の循環 (渦) は傾圧効果を通じて熱 $\delta Q = T ds$ によって生まれる.

は, 熱力学法則の関係式 (1.12), (1.13) において変動 d が時空間の変化であることとして記述される. 一方で熱は, 傾圧効果を通じて流体の運動にエネルギーの流入, 渦の形成として変化をもたらす. それをわかりやすく示すのが Kelvin の循環定理の破れ (1.4.2 節) であり, 代表例が Bénard 対流 (1.4.3 節) である. なお図 1.2 において, 流体の逆カスケードや zonal flow といったものは流体運動の枠組みの中に存在するものである.

1.6 プラズマ乱流の熱的駆動

ここまで述べたことをまとめれば, zonal flow などのプラズマ乱流中の構造は, 傾圧効果によって熱力学的に生成された渦が, 流体力学的にエネルギー逆カスケードによって大規模な構造に結びついたものだといえる. 傾圧効果による渦生成やエネルギーカスケードは, それぞれ独立してはよく研究されているものであるが, これらを組み合わせた研究はあまり行われていない.

Yoshida–Mahajan [25] は, 前節で述べたような流体運動を含んだ熱力学法則の視点から, 現象論的な熱力学モデルを構成して解析した. 熱によって乱流が駆動され, 逆カスケードによって大規模構造が形成されている系を想定し, その熱力学的特性について解析した研究である. そこでは, 系に流入する熱流束が制御されていることが重要になる. 熱流束を制御するこ

とに違和感があるかもしれないが、核融合プラズマや惑星大気において、温度が制御されているとは考えにくい。むしろ高温な中心部から流入する熱や、太陽から入射する熱を扱うほうが自然である。さらに境界から熱が流入するということは、以下のように重要な意味を持つ。孤立した系は熱力学第 2 法則に従い熱的死に向かうので、秩序的な構造が保たれ続けるにはエネルギーの入力が必要になる。これは系を開放系に設定することを意味している。そして傾圧効果は渦を形成し力学的エネルギーを作るが、そのエネルギー源になるのは熱である。つまりこの熱が、系の外から境界を通して流入すると考えるのである。

もう 1 つ重要になるのは、乱流に大規模構造が形成されることによって、熱輸送に変化を及ぼすということである。例えば zonal flow は熱輸送を妨げると考えられるから、熱流束に対するインピーダンスとして働くと考えられる。以上の定式化の下で、系に zonal flow が形成されているとき、境界条件として熱流束を制御することによって、熱流束がある閾値を超えたときに温度勾配が増大する（エントロピー生成率が増大する）分岐が起こることが示された。これは、LH 遷移を説明したことを意味している。なお、それに続く研究で、制御する量を熱流束から温度に変更した場合や、系に形成されている構造を streamer 型に変更した場合についての解析もなされている [26]。

輸送障壁の形成や LH 遷移については、渦形成や熱流束についてモデル化した研究は多くなされている。例えば Hinton [27] は、ポロイダル方向のシアに関する新古典理論に基づいて、熱輸送方程式から LH 遷移について説明した。本研究では、渦形成について直接的に運動方程式（渦度方程式）を解き、熱輸送と結合させて解析をおこなう。

1.7 研究概要

本研究では、以上のような背景のもとで、傾圧効果によって渦が形成され、エネルギーの逆カスケードによって大規模構造が発現するプラズマのモデルに関する解析をおこなう。特に本研究は、プラズマの運動方程式（ドリフト波方程式）そのものを解析することによって、現象論的な熱力学モデル [25] で得られた結果を検証することを目的とする。そのために、傾圧効果によって駆動されるようなドリフト波方程式を用いる。圧力項を含んだドリフト波方程式は多く提案されているが、ほとんどは反磁性ドリフトによって傾圧効果が打ち消されている。そこで本研究では、近年提案された傾圧 Hasegawa–Mima 方程式 [28] というドリフト波方程式を利用する。まず傾圧効果によってエネルギーが入力される様子、そしてエネルギーの逆カス

ケードによって大規模構造が形成される様子を見る．そして続いて，どのような構造がどのようなときに形成されるかを，方程式に含まれるパラメータを変化させて調べる．その後，構造形成が熱輸送に影響を及ぼす場合，そして境界から熱流束が流入する場合について解析する．特に後者では境界条件の設定が重要である．何故ならば，多くの研究で用いられている周期境界条件や Dirichlet 境界条件では熱流束の流入が実現できないためである．本研究ではこれを正しく定式化するために，傾圧 Hasegawa-Mima 方程式が非散逸かつ閉じた境界のときに持つ Hamilton 形式を利用する．

本論文の構成は以下のようにになっている．第 2 章ではモデルの定式化をおこなう．2.1 節では，方程式の導出をする前に系の物理的な条件を設定する．2.2 節では本研究で用いるドリフト波方程式について述べる．設定した条件のもとでの方程式の導出をおこない，そしてその方程式が持つ特徴として，線形不安定性と Hamilton 形式について述べる．方程式の導出と Hamilton 形式に関しては本文では概要にとどめ，補足 A で解説をおこなう．2.3 節ではドリフト波乱流の熱的駆動の定式化について述べる．乱流中の構造形成が背景勾配に及ぼす影響や，境界からの熱流束の流入がドリフト波方程式でどのように実現されるか，本研究で用いた手法を述べる．第 3 章では，第 2 章で定式化したモデルについての数値解析の結果を述べる．3.1 節では数値解析の手法や条件に関して簡単に説明する．数値解析の手法に関しては補足 B に解説を設けた．3.2 節以降は数値解析の結果を示し，第 4 章で得られた結果をまとめる．

第 2 章

熱的に駆動されるドリフト波乱流 モデル

2.1 物理的な条件

本研究で対象とするのは，トーラス状のトカマクプラズマである．トロイダル方向の磁場が十分に強いとし，トーラス断面でのイオンの 2 次元的な運動を考える．

模式図を図 2.1 に示す． z をトロイダル方向， x を断面の半径方向， y をポロイダル方向にとる．断面全体ではなく一部の領域に制限する．磁場はトロイダル方向を向いていて，大きさは一様かつ一定とする： $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ ．すなわち，静電プラズマを考える．磁場が時間変化しないので，電場は静電ポテンシャル ϕ の勾配で表される： $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ ．

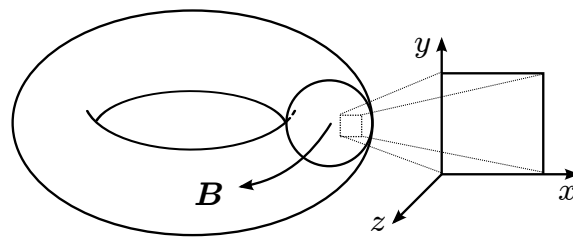


図 2.1 対象とする系（トカマクプラズマ断面）の模式図．トロイダル方向を z ，断面の半径方向を x ，ポロイダル方向を y とする．

イオンの運動を $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{1}{B} \begin{pmatrix} -\partial_y \phi \\ \partial_x \phi \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

で近似する．他にも圧力で表される反磁性ドリフトを用いるモデルもあるが [29, 30]，本研究では傾圧効果に注目するので，圧力は $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトに働く力として考える．式 (2.1) から， $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトは非圧縮流れ ($\nabla \cdot \mathbf{v}_E = 0$) であり，静電ポテンシャル ϕ は流れ関数の役割を果たすことがわかる．そして渦度は ϕ の Laplacian で表される： $\omega = (\nabla \times \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{e}_z = B^{-1} \Delta \phi$ ．流体方程式において現れる対流微分 $\mathbf{v} \cdot \nabla$ は， $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトに対しては Jacobian $[f, g] = \partial_x f \partial_y g - \partial_y f \partial_x g$ を用いて $\mathbf{v}_E \cdot \nabla = B^{-1} [\phi, \circ]$ と表される．

イオンの密度や温度，圧力については，背景量からの揺動を解く．すなわち

$$\begin{aligned} n_i &= n_{i0} + \tilde{n}, \\ T_i &= T_{i0} + \tilde{T}, \\ p_i &= p_{i0} + \tilde{p} \end{aligned} \quad (2.2)$$

のように展開し， \tilde{n}/n_{i0} ， \tilde{T}/T_{i0} ， \tilde{p}/p_{i0} は微小量だとする．ただし背景量 n_{i0} ， T_{i0} ， p_{i0} には，半径方向，すなわち x 方向に勾配があるものとする．なお温度には Boltzmann 定数が含まれていて，単位はエネルギーになっている．これらの間には， $p_i = n_i T_i$ ，そして $p_{i0} = n_{i0} T_{i0}$ という関係が成り立っているものとする．この関係から，圧力の揺動成分に関して

$$\tilde{p} = n_{i0} \tilde{T} + \tilde{n} T_{i0} \quad (2.3)$$

という関係が成り立つ．

電子はイオンに比べると質量が非常に小さいので，磁力線に平行な向きに激しく運動してすぐに緩和すると考えられる．そのため，電子は Boltzmann 分布に従うとする：

$$n_e = n_0 \exp \left(\frac{e\phi}{T_e} \right). \quad (2.4)$$

ただし電子温度 T_e は一定とする．さらに準中性条件を課して $n_i \approx n_e$ とする．その結果， $\tilde{n}_i/n_{i0} = \tilde{n}_e/n_{e0} = e\phi/T_e$ という関係が得られる．以降では密度の添字 i , e と圧力の添字 i を省略する．

2.2 傾圧 Hasegawa–Mima 方程式

2.2.1 導出

前節で述べたような設定のもとで、本研究で用いる方程式が導かれる。計算過程については補足 A.1 節に記した。

規格化に用いる定数は、イオンの質量 m を用いて表される、サイクロトロン周波数 $\omega_{ci} = eB/m$ 、イオン音速 $c_s = \sqrt{T_e/m}$ 、そしてサイクロトロン半径 $\rho_s = c_s/\omega_{ci} = \sqrt{mT_e}/eB$ である。背景密度 n_0 と背景温度 T_{i0} の勾配長をそれぞれ $L_n = -(\mathrm{d} \ln n_0 / \mathrm{d} x)^{-1}$ 、 $L_T = -(\mathrm{d} \ln T_{i0} / \mathrm{d} x)^{-1}$ と表す。システム長を L として、密度勾配と温度勾配の大きさを表す無次元数を定義する：

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{L}{L_n} = L \left(-\frac{\mathrm{d} \ln n_0}{\mathrm{d} x} \right), \\ \beta_T &= \frac{L}{L_T} = L \left(-\frac{\mathrm{d} \ln T_{i0}}{\mathrm{d} x} \right).\end{aligned}\tag{2.5}$$

その他の無次元数として、温度勾配と密度勾配の比 $\eta_i = L_n/L_T = \beta_T/\beta$ 、イオン温度と電子温度の比 $\tau = T_{i0}/T_e$ 、そしてサイクロトロン半径とシステム長の比 $\epsilon = \rho_s/L$ を定義する。 ϵ は微小量であり、変数の規格化に用いられる。

規格化を以下のように定める：

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \frac{x}{\rho_s}, & \hat{y} &= \frac{y}{\rho_s}, & \hat{t} &= \epsilon \omega_{ci} t = \frac{c_s}{L} t, \\ \hat{\phi} &= \epsilon^{-1} \frac{e\phi}{T_e}, & \hat{p} &= \epsilon^{-1} \frac{\tilde{p}}{n_0 T_e}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

微分に関しても、同様に $\hat{\Delta} = \rho_s^2 \Delta$ 、 $[\circ, \circ]_{\text{norm}} = \rho_s^2 [\circ, \circ]$ と規格化する。

流体の運動方程式、連続の式、そして断熱の式

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{nm} \nabla p_i, \\ \partial_t n + \nabla \cdot (n \mathbf{v}) = 0, \\ \partial_t p + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{cases}\tag{2.7}$$

からドリフト波方程式が導かれる。ただし γ は比熱比で $\gamma = 5/3$ である。運動方程式は、両辺

に $\nabla \times$ を作用させて渦度方程式

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla)(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_{ci}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) - \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{1}{mn^2} \nabla n \times \nabla p_i \quad (2.8)$$

に書き換えられる。右辺第 1 項は、2 次元運動では $\boldsymbol{\omega}$ が z 成分のみを持つので消去できる。連続の式を $\nabla \cdot \mathbf{v} = d \ln n / dt$ と書き換えることで、渦度方程式と断熱の式から $\nabla \cdot \mathbf{v}$ を消去する。順圧であるか、またはイオン温度が無視できる場合には、渦度方程式から

$$\partial_t(\hat{\phi} - \hat{\Delta}\hat{\phi}) - [\hat{\phi}, \hat{\Delta}\hat{\phi}]_{\text{norm}} + \beta \partial_y \hat{\phi} = 0 \quad (2.9)$$

が得られる。これが Hasegawa–Mima 方程式である [16]。傾圧効果を含めて計算すれば、次の方程式が得られる (式 (A.22), (A.26))。

$$\begin{cases} \partial_t(\hat{\phi} - \hat{\Delta}\hat{\phi}) - [\hat{\phi}, \hat{\Delta}\hat{\phi}]_{\text{norm}} + \beta\{1 + \tau(1 + \eta_i)\}\partial_y \hat{\phi} + [\hat{\phi}, \hat{p}]_{\text{norm}} - \beta \partial_y \hat{p} = 0, \\ \partial_t(\hat{p} - \Gamma \hat{\phi}) + [\hat{\phi}, \hat{p}]_{\text{norm}} + \beta\tau(1 + \eta_i - \gamma)\partial_y \hat{\phi} = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

これを傾圧 Hasegawa–Mima 方程式と呼ぶ [28]。

ここで、無次元数 α を

$$\alpha = \beta\tau(1 + \eta_i - \gamma) \quad (2.11)$$

と定義する。あとで述べるように、この数は傾圧効果による不安定性において重要なものである。さらに式 (2.3) から圧力揺動を $\hat{p} = \hat{T} + \tau \hat{\phi}$ として温度揺動に置き換えれば (ただし $\hat{T} = \epsilon^{-1}(\tilde{T}/T_e)$)、式 (2.10) は

$$\begin{cases} \partial_t(\phi - \Delta\phi) - [\phi, \Delta\phi] + (\beta + \alpha)\partial_y \phi + [\phi, T] - \beta \partial_y (T - (\gamma - 1)\tau\phi) = 0, \\ \partial_t(T - (\gamma - 1)\tau\phi) + [\phi, T] + \alpha \partial_y \phi = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

と書き換えられる。ハットなどの規格化の記号を省略した。

2.2.2 他のドリフト波方程式との違い

Hasegawa–Mima 方程式や傾圧 Hasegawa–Mima 方程式以外にも、すでに様々なドリフト波方程式が研究されている。その中でも圧力項を含むものには、例えば Hamaguchi–Horton 方程式 [29] や Kim–Horton–Hamaguchi 方程式 [30] などがある。これらの方程式と傾圧

Hasegawa–Mima 方程式の違いを 2 つ述べておく。

まず 1 つ目の違いは、イオンの速度に関することである。Hamaguchi–Horton 方程式や Kim–Horton–Hamaguchi 方程式など、ほとんどの方程式においては、イオンの速度を $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトと反磁性ドリフト（+分極ドリフト）によって近似している。すると運動方程式における圧力項は、反磁性ドリフトによってキャンセルされる。本研究では特に傾圧効果に注目しているので、イオンの速度は $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト（+分極ドリフト）で近似している。

もう 1 つの違いは、規格化に関することである。本研究では、微小パラメータとしてサイクロトロン半径 ρ_s とシステム長 L の比 $\epsilon = \rho_s/L$ を用いている。対して多くのモデルにおいては、システム長 L でなく密度勾配長 L_n を用いている（温度勾配長 L_T を用いる例もある）。すると、式 (2.5) で定義した β は 1 に規格化される。しかしこの β という量は、第 3 章で実際に数値解析によって確かめるように、構造形成において非常に重要な役割を果たす。傾圧 Hasegawa–Mima 方程式で密度勾配の大きさを表す β は、地球流体力学における β 面近似 [31, Sec. 3.17] に現れる β という量（Coriolis パラメータの変化率）と類似している。参考として β 面近似の方程式を示すと、渦度 ζ と流れ関数 ψ によって

$$\partial_t \zeta + [\psi, \zeta] + \beta \partial_x \psi = \nu \Delta \zeta \quad (2.13)$$

と表される*。Hasegawa–Mima 方程式 (2.9) と β 面近似 (2.13) とを見比べると、前者で渦度に密度の項が付け加わっていることを除けば、全く同一のものである（ ∂_x と ∂_y との差は、座標軸の取り方＝背景密度・温度や Coriolis パラメータの変化する方向の取り方によるものである）。 β 面近似 (2.13) において zonal flow が形成されること [32]、そしてその形成は β の値に依存すること [33, 34] が示されている。1.3 節で述べたように、 β 面近似での β と Hasegawa–Mima 方程式における β では取りうる値の範囲が違うが、それでもやはり構造形成に重要な役割を果たすと考えられるので、規格化せずに残している。

2.2.3 線形分散関係

傾圧 Hasegawa–Mima 方程式には、その名のとおり傾圧効果が含まれているので、不安定性が存在する。それを確認するために、傾圧 Hasegawa–Mima 方程式の線形分散関係を導く。

まず式を簡単にするために、 $s = T - (\gamma - 1)\tau\phi = p - \Gamma\phi$ とおく。これはエントロピーの摂

* 扱うモデルによって、右辺に外力などの項が加わることがある。

動量である。式 (2.12) は

$$\begin{cases} \partial_t(\phi - \Delta\phi) - [\phi, \Delta\phi] + (\beta + \alpha)\partial_y\phi + [\phi, s] - \beta\partial_y s = 0, \\ \partial_t s + [\phi, s] + \alpha\partial_y\phi = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

という形になる。非線形項を無視して、 $\phi = \phi_{\omega, \mathbf{k}} e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$, $s = s_{\omega, \mathbf{k}} e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ を代入すると

$$\begin{cases} -i\omega(1 + k^2)\phi_{\omega, \mathbf{k}} + ik_y(\beta + \alpha)\phi_{\omega, \mathbf{k}} - ik_y\beta s_{\omega, \mathbf{k}} = 0, \\ -i\omega s_{\omega, \mathbf{k}} + ik_y\alpha\phi_{\omega, \mathbf{k}} = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

となるから (ただし $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, $k^2 = k_x^2 + k_y^2$), 整理すれば分散関係式が得られる:

$$(1 + k^2)\omega^2 - (\beta + \alpha)k_y\omega + \beta\alpha k_y^2 = 0. \quad (2.16)$$

第 1 項と第 2 項からは y 方向に伝搬する波の分散関係

$$\omega = \frac{\beta + \alpha}{1 + k^2} k_y \quad (2.17)$$

が得られる。そして第 1 項と第 3 項から得られる

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{-\beta\alpha}{1 + k^2}} k_y. \quad (2.18)$$

という関係は、 $\beta\alpha > 0$ であれば成長または減衰を表す。以上より、非線形項がほとんど影響しないときには、 y 方向への伝搬と、線形不安定性による成長が起こることがわかる。

厳密には、式 (2.16) を解いた

$$\omega = \frac{\beta + \alpha \pm \sqrt{(\beta + \alpha)^2 - 4\beta\alpha(1 + k^2)}}{2(1 + k^2)} k_y \quad (2.19)$$

が解になる。この虚部、つまり線形不安定性による成長率の k_x, k_y に対する依存性は図 2.2 のようになる。 $k_y = 0$ のモード、すなわち zonal flow のモードは線形不安定性では成長しないこと、そして、 k_x が小さく k_y が大きいモードのほうが線形不安定性による成長率が大きいことがわかる。

式 (2.18) が不安定になる条件は $\beta\alpha > 0$ で、 β は定義 (2.5) から基本的に正である。そのため、 $\alpha > 0$ であれば線形不安定性が発生する。 α の定義 (2.11) より、この条件は

$$\eta_i > \gamma - 1 = \frac{2}{3} \quad (2.20)$$

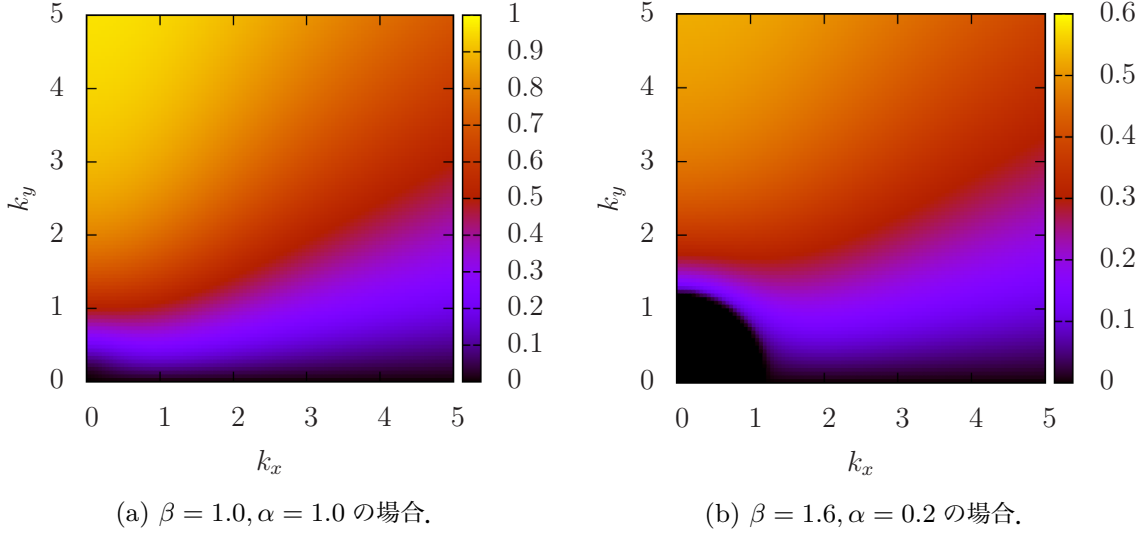


図 2.2 線形分散関係式 (2.19) の虚部を (k_x, k_y) に対してプロットしたもの. $k_y = 0$ のモードは成長しないこと, そして k_y が大きいほうが成長率が大きいことがわかる. (a) と (b) で β, α の値を変えているが, 傾向は同じである.

と表される. つまり, イオンの背景温度勾配と背景密度勾配の比が大きくなると不安定性が発生する. このような不安定性はイオン温度勾配 (ion temperature gradient, ITG) 不安定性と呼ばれる [35].

注意しておく点は, ここでの ITG 不安定性は通常の ITG 不安定性と呼ばれるものと原因が異なることである. 普通 ITG 不安定性といった場合, 不安定性の原因になるのは磁力線方向の運動 v_{\parallel} や磁場曲率 ∇B である. これらが温度勾配と結びついて不安定性が駆動される. 磁力線方向の運動 v_{\parallel} に起因するものをスラブ ITG モードといい, 磁場曲率に起因するものをトロイダル ITG モードという. 傾圧 Hasegawa–Mima 方程式はどちらも含んでおらず, 傾圧効果によってのみ不安定性が駆動される.

不安定性が現れるする条件を η_i の形で記述したが, 実は $\alpha > 0$ も重要な意味を持つ. ゼロ次のエントロピーは $s_0 = \ln p_{i0} n_0^{-\gamma} = \ln T_{i0} n_0^{1-\gamma}$ であり, この勾配は次のように L_n, L_T で表される:

$$\frac{ds_0}{dx} = (1 - \gamma) \frac{d \ln n_0}{dx} + \frac{d \ln T_{i0}}{dx} = -\frac{1 - \gamma}{L_n} - \frac{1}{L_T}. \quad (2.21)$$

ここでエントロピーの勾配長を $L_s = (-ds_0/dx)^{-1}$, 勾配の大きさを $\beta_s = L/L_s$ で定義すれ

ば, α は

$$\alpha = \frac{T_{i0}}{T_e} \frac{L}{L_n} \left(1 - \gamma + \frac{L_n}{L_T} \right) = \frac{T_{i0}}{T_e} \frac{L}{L_s} = \frac{T_{i0}}{T_e} \beta_s \quad (2.22)$$

のように, β_s にイオン温度と電子温度の比をかけたものになる. すなわち, 不安定性が生じる $\alpha > 0$ という条件は, エントロピー s_0 が x 方向 (半径方向) へ向かって減少する ($\beta_s > 0$) という条件に他ならない. 1.4.3 節で Bénard 対流を重力場に起因したエントロピー勾配による渦生成と関連付けて述べたが, 同じことがドリフト波方程式でも起こっているのである.

2.2.4 Hamilton 形式と熱エネルギー

揺動が駆動されるということは, そのエネルギー源になるものが存在するということである. 傾圧 Hasegawa-Mima 方程式の駆動のメカニズムは傾圧効果であるから, そのエネルギー源は熱であると考えられる. 揺動のエネルギー

$$E = \frac{1}{2} \int \left(\phi^2 + |\nabla \phi|^2 + \frac{s^2}{\Gamma} \right) d^2x \quad (2.23)$$

の時間変化を見ると, 境界項を無視すれば次のようになる:

$$\frac{dE}{dt} = - \left(\beta + \frac{\alpha}{\Gamma} \right) \int s \partial_y \phi d^2x. \quad (2.24)$$

ここで $s = T - (\gamma - 1)\tau\phi$, $v_x = -\partial_y \phi$ を用いれば,

$$\frac{dE}{dt} = \left(\beta + \frac{\alpha}{\Gamma} \right) \int T v_x d^2x \quad (2.25)$$

という形にできて, 揺動のエネルギーが成長することがわかる.

式 (2.24), (2.25) の右辺を生む源が, 熱エネルギーであると考えられる. すなわち, 何らかの量 Q が存在して, 揺動のエネルギー (2.23) と合わせて $E + Q$ が時間変化しないと考えるのである. しかしただ適当な量を考えて Q とするわけにはいかない. そこで本研究では, これを明確に書き下すために, 一般化 Hamilton 形式という概念を利用する. Hamilton 形式に関する事柄は A.2 節にまとめた. 結果だけを述べると, 傾圧 Hasegawa-Mima 方程式 (2.12) の Hamilton 形式は次のようになる. ただし境界条件には, Dirichlet 境界条件や周期境界条件など, 境界項がゼロになる閉じた境界条件を用いる.

- 状態変数を $q := \phi - \Delta\phi - \beta x$, $\sigma := s - \alpha x = T - (\gamma - 1)\tau\phi - \alpha x$ と定義する．これらは密度*とエントロピーに，それぞれ背景の勾配 β, α によって補正を加えたものである．
- Hamiltonian は次のように定められる：

$$H = \frac{1}{2} \int \left[\phi^2 + |\nabla\phi|^2 + \frac{s^2}{\Gamma} - 2 \left(\beta + \frac{\alpha}{\Gamma} \right) xs \right] d^2x. \quad (2.26)$$

- Poisson 作用素は，状態変数 q, σ に対して

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} [q, \circ] + [\sigma, \circ] & [\sigma, \circ] \\ [\sigma, \circ] & 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

と定められる．

- 以上を用いれば，傾圧 Hasegawa–Mima 方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} q \\ \sigma \end{pmatrix} = \mathcal{J} \begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta q} \\ \frac{\delta H}{\delta \sigma} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

と表される．

Hamiltonian は，揺動のエネルギー E に別の項が加わって構成されている．これを $E + Q$ とみなす．すなわち，ただ $E + Q$ が保存するというだけでなく，Hamiltonian という，運動を支配する意味を持つものを利用するのである．

ここで注意しなくてはならないのは，Hamilton 形式はあくまで粘性などの散逸が存在しないこと，そして境界が閉じていることが条件になる．本研究で扱うのは，散逸がある上に開いた系である．そのため Hamilton 形式は原則として利用できない．ただ，揺動のエネルギーが線形不安定性によって成長する，そのエネルギー源を明示するために Hamilton 形式を利用したのである．そのためこの H は，Hamiltonian と呼ばずに「全エネルギー」と便宜的に呼ぶことにする．

* $\phi - \Delta\phi$ は渦度であるが，密度が ϕ と表されていることから，密度に対して有限サイクロトロン半径効果による補正 $(1 - \rho_s^2 \Delta)$ がかったものとみなすこともできる．

2.3 ドリフト波乱流の自己組織化と熱的駆動

序論で述べたように，プラズマ乱流における zonal flow などの構造は，核融合プラズマにおける熱の閉じ込めに影響するとされている．すなわち，プラズマ乱流中の構造によって，背景の勾配が影響されて変化するはずである．そして加えて，境界からの熱流束の流入を考える．図 2.3 に模式図を示した．前節で述べた線形不安定性は，密度・温度勾配からドリフト波乱流へ向う矢印（傾圧効果）を表している．残りの矢印，すなわち背景勾配への影響と，境界との熱のやりとりに関して本節で定式化する．

2.3.1 背景勾配の修正

傾圧 Hasegawa–Mima 方程式において解いているのは，密度揺動（静電ポテンシャル） $\tilde{n} = e\phi/T_e$ と温度揺動 \tilde{T} である．これらを用いて背景勾配 β, β_T を修正する．本研究では [28] と同様に， $n = n_0 + \langle \tilde{n} \rangle$ ， $T_i = T_{i0} + \langle \tilde{T} \rangle$ としたうえで，これらの勾配を用いて β, β_T を定義しなおす．ただし $\langle \cdot \rangle$ は y 方向に平均を取ることを意味する．規格化して $\hat{\phi}$ や \hat{T} で書けば，これらの式は

$$\begin{cases} n = n_0 \left(1 + \epsilon \langle \hat{\phi} \rangle \right), \\ T_i = T_{i0} \left(1 + \epsilon \frac{T_e}{T_{i0}} \langle \hat{T} \rangle \right) \end{cases} \quad (2.29)$$

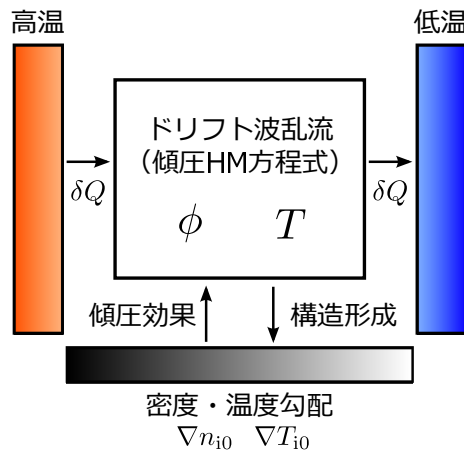


図 2.3 ドリフト波乱流の背景勾配への影響と熱流束の流入に関する模式図

と表される。数値解析で実装する際には、各ステップで式 (2.29) から最小二乗法によるフィッティングで β と β_T を再計算する。そして α も式 (2.11) に従って再計算する。

以上の設定によって、ドリフト波乱流は傾圧効果によって背景勾配の大きさに依存した熱エネルギーの inputs を受けながら (式 (2.25)), その勾配を自身で変化させるというモデルが構成される。

2.3.2 境界条件の設定

次に、ドリフト波方程式の境界条件の設定について考える。本研究では x 方向をトカマク断面の半径方向とし、 y 方向をポロイダル方向としている。そのため y 方向に関しては周期境界条件を課す。 x 方向に関しては、多くの研究で用いられているような周期境界条件や Dirichlet 境界条件では不十分である。熱力学モデルによる研究 [25] にならい、高温側から流入する熱流束を制御することを考える。低温側については、熱流束の制御ではなく、熱浴に吸収されていると考えて境界条件を設定する。

2.3.2.1 高温側：熱流束の制御

高温側では、熱流束が境界から流入するような境界条件を設定する。ここでの「熱流束」を定式化するために、2.2.4 節で定めた熱エネルギーを利用する。その項は、全エネルギー H から揺動のエネルギー E を引いた

$$Q = H - E = - \int \left(\beta + \frac{\alpha}{\gamma} \right) x s \, d^2x \quad (2.30)$$

である。ただしこれに含まれる x は、 β や α などが x 方向の勾配を表すことから、 βx というような項を微分して β が残るように現れたものである。そのため、原点 ($x = 0$) の設定には意味が無いことに注意しておく*。

熱流束とは熱の「流れ」のことであるから、全空間での積分量でなくて、全エネルギー H の密度に関する輸送方程式を考える。 H の密度を \mathcal{H} とおく ($H = \int \mathcal{H} \, d^2x$)。するとその輸送方

* この x の原点をずらすことは、全エネルギーには s の定数倍を加えることを意味するが、これは Hamilton 形式の言葉でいえば Casimir 不変量を Hamiltonian に加えていることになる (A.2.2 節)。

程式は、傾圧 Hasegawa-Mima 方程式から

$$\partial_t \mathcal{H} = -[\phi, \mathcal{H}] + \partial_y \left\{ \beta \phi s + \left(\beta + \frac{\alpha}{\Gamma} \right) x s - (\beta + \alpha) \frac{\phi^2}{2} \right\} - \left[\frac{\phi^2}{2}, s \right] + \nabla \cdot (\phi \partial_t \nabla \phi) \quad (2.31)$$

となる。右辺の第1項は $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトによる H の密度 \mathcal{H} の輸送を表す。第2項は Rossby 波によって y 方向へ伝搬する部分である。第3項は、傾圧効果のうち、揺動同士のカップリングによる部分である（不安定性を引き起こすのは、揺動と背景勾配とが結びついた部分である）。第4項は、運動エネルギーを $(\phi^2 + |\nabla \phi|^2)/2$ で書いているところから、渦度 $\phi - \Delta \phi$ で書き換える際に発生する項である。右辺はすべて空間微分から構成されており、積分すれば境界項になる。第2項と第4項はそのまま Gauss の発散定理を用いればよい。第1項と第3項に関しては

$$[f, g] = \partial_x f \partial_y g - \partial_y f \partial_x g = \partial_x (f \partial_y g) - \partial_y (f \partial_x g) \quad (2.32)$$

と変形すれば Gauss の発散が適用できる。そのため Hamilton 形式のように、周期境界条件や Dirichlet 境界条件（ゼロ固定）など、境界項を無視するような閉じた境界条件を課す場合、式 (2.31) の右辺は積分すればすべて消える。これは \mathcal{H} の積分が Hamilton 形式における Hamiltonian であり、保存するので当然のことである。

式 (2.31) の $[\phi, \mathcal{H}]$ という項から、式 (2.30) で表される熱エネルギーは H の一部として $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトによって輸送されていることがわかる。そこで、熱エネルギー Q の密度の輸送項を y 方向へ積分した

$$F = - \left(\beta + \frac{\alpha}{\Gamma} \right) \int s \partial_y \phi \, dy = \left(\beta + \frac{\alpha}{\Gamma} \right) \int T v_x \, dy \quad (2.33)$$

を熱流束として、高温側の境界で値を制御する。

ここでポイントになるのは、境界から揺動のエネルギーを入力しているわけではないということである。あくまで入力しているのは「熱」というエネルギー源であり、系の内部で式 (2.25) を通じて揺動を駆動させる。

2.3.2.2 低温側：熱浴の設定

次に低温側の境界条件を考える。低温側では系の外側に熱浴の領域を設定する。熱浴は十分な大きさがあって、ほとんど常に平衡であるとする。そのため、ドリフト波のような揺動は熱

浴内では減衰すると考えられる．そこで

$$\begin{cases} \partial_t(\phi - \Delta\phi) = \mathcal{D}_\phi, \\ \partial_t(T - (\gamma - 1)\tau\phi) = \mathcal{D}_T \end{cases} \quad (2.34)$$

というような，散逸項 $\mathcal{D}_\phi, \mathcal{D}_T$ による時間発展方程式を解く．これは，熱浴は対流や Rossby 波のような輸送がほとんど起こらないほど平衡に近く，揺動はただ減衰すると考えていることを意味する．散逸項の具体的な形に関してはここでは明示しない．次章で傾圧 Hasegawa–Mima 方程式の数値解析について述べ，その際に方程式 (2.12) に散逸項を付け加えるが，それと同じものを用いる．

なお，熱浴として系の外部に領域を設定したので，今度はその領域での境界条件を課す必要がある． y 方向には系内部と同様に周期境界条件を課す． x 方向には，系からある程度離れたところでゼロになるように Dirichlet 境界条件を課す．これは，それだけ離れていれば十分に減衰すると考えられるということである．熱浴の幅をその距離に設定しているわけではないことに注意されたい．

第 3 章

数値解析

本章では、前節で説明した傾圧 Hasegawa–Mima 方程式に関する数値解析の結果を述べる。3.1 節では数値解析の手法について概要を述べる。詳細は補足 B を参照されたい。3.2 節では、傾圧効果によって乱流が駆動され、逆カスケードによって大規模構造が形成することを見る。続く 3.3 節では、背景勾配や温度勾配によって、形成される構造にどのような違いが現れるかを調べる。3.4 節では、2.3.1 節で述べたように、ドリフト波の構造が背景密度や背景温度に及ぼす影響を見る。これは既に [28] で調べられているが、3.5 節の結果と比較するために必要なので本研究でも改めて計算をおこなった。3.5 節では、2.3.2 節で定式化したように、境界から流入する熱流束を制御して計算した結果を述べる。特に、zonal flow が形成されているときに、熱流束と背景勾配への修正との関係を調べる。

3.1 数値解析の手法

数値計算の際には傾圧 Hasegawa–Mima 方程式 (2.12) に対して散逸項を加える。 ϕ に関する第 1 式の右辺には $-\nu\Delta(\Delta\phi)$ を加え、 T に関する第 2 式には $\kappa\Delta(T - (\gamma - 1)\tau\phi) = \kappa\Delta s$ を加える。これらは物理的には粘性散逸と熱拡散を表す。

空間離散化には x, y の両方向に有限差分法を利用する。微分は 1 階微分 ∂_y 、2 階微分 Δ の両方とも中心差分によって近似する。ただし非線形項（対流を表す Jacobian $[f, g] = \partial_x f \partial_y g - \partial_y f \partial_x g$ ）の計算については、Arakawa Jacobian [36] という計算手法を用いる。これは対流によって保存されるべき物理量（エネルギー・エントロフィー）を有限差分法で精度よく保存させるための手法である。

空間領域は $(x, y) \in [0, 20\pi] \times [0, 20\pi]$ とする（規格化を解けば $(x, y) \in [0, 20\pi\rho_s] \times [0, 20\pi\rho_s]$ ）。境界条件は、 y 方向（ポロイダル方向）には周期境界条件を課す。 x 方向（半径方向）に対する境界条件は計算によって変える。3.2 節と 3.3 節の前半では傾圧 Hasegawa–Mima 方程式の性質を調べるためにスペクトルも見るので、 x 方向にも周期境界条件を課す。3.3 節の後半と 3.4 節では Dirichlet 境界条件を課し、揺動は境界でゼロになるようにする。3.5 節では 2.3.2 節で定式化したように、高温側 ($x = 0$) の境界では熱流束を与え、低温側 ($x = 20\pi\rho_s$) の境界では熱浴を連結させる。

時間進行法には、Karniadakis–Israeli–Orszag [37] によって提案された多段階法の 2 段法を用いる。非線形項と 1 階微分項は陽的に扱い、散逸項は半陰的に扱って ADI 法（交互方向陰解法）によって解く。初期条件には、静電ポテンシャル ϕ に微小な揺動を与え、温度揺動 T はゼロとする。 ϕ と渦度 $\omega = \Delta\phi$ の初期状態を図 3.1 に示した。ただし 3.5 節はこれと異なり、大規模構造 (zonal flow) が形成した状態から計算をはじめている。

ϕ の方程式において時間発展するのは $\phi - \Delta\phi =: \Phi$ なので、 ϕ を求めるには Poisson 方程式 $\Delta\phi = \phi - \Phi$ を解く必要がある。この計算では、 y 方向に周期境界条件を課していることを利用して Fourier 変換をおこない、 x 方向には中心差分で離散化することで解く*。

数値計算のプロセスを図 3.2 に示す。まず 3.2 節と 3.3 節では、傾圧 Hasegawa–Mima 方程式と Poisson 方程式を交互に解き続ける (1)。3.4 節で示す計算では、各ステップごとに 2.3.1 節での定式化に従い背景勾配を修正する (2)。そして 3.5 節での計算では、境界での熱流束の値から揺動の境界値を逆算する (3)。

* このスキームについては補足 B にも記していないが、B.3 節の内容と同様に三重対角行列の逆行列を求めることで、緩和法を使わずに直接解くことができる。

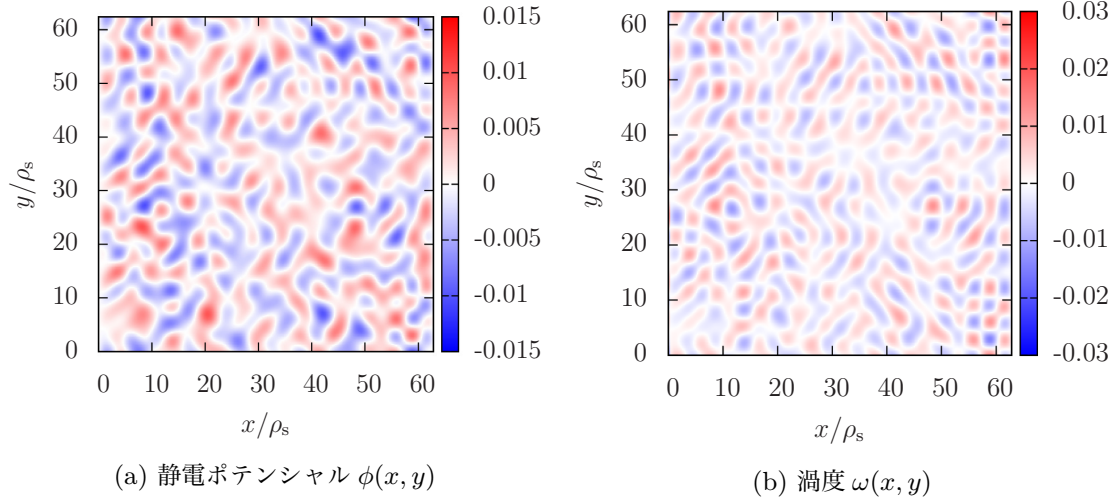


図 3.1 初期条件として与えた静電ポテンシャル ϕ と渦度 $\omega = \Delta\phi$ の図. 微小で細かな揺動を与えている. 温度揺動 T はゼロとした.

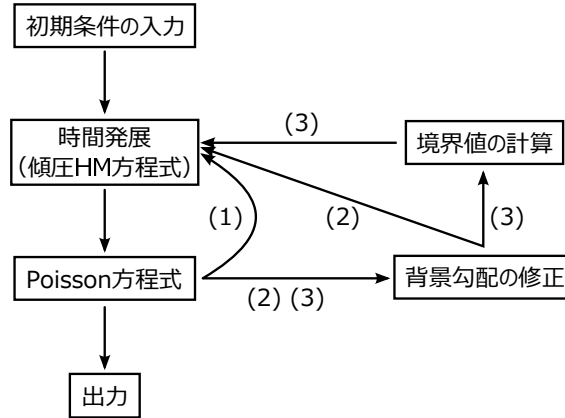


図 3.2 数値計算のプロセスの模式図. 初期条件を入力したのち, 傾圧 Hasegawa–Mima 方程式に従った時間発展と Poisson 方程式 $\Delta\phi = \phi - Q$ を解き続ける. 3.2 節と 3.3 節の計算は図の (1) に従い, ループを繰り返すだけである. 3.4 節では (2) のように各ステップごとに背景の勾配を修正する. 3.5 節ではさらに, (3) のように熱流束を固定するという境界条件から揺動の境界値を計算する.

3.2 線形不安定性・非線形飽和・大規模構造形成

まずはじめに、パラメータを $\beta = 1.6$, $\alpha = 0.065$, $\tau = 1.0$, $\nu = 1.0 \times 10^{-2}$, $\kappa = 1.0 \times 10^{-3}$ として計算した。そのときの揺動のエネルギー E の時間発展を図 3.3 に示す。 $t = 100$ 過ぎから $t = 200$ ごろまで、エネルギーが線形不安定性によって指数的に増加していることがわかる。それ以降もエネルギーは増加しているが、非線形飽和したことによって散逸が大きく効くようになり、増加は抑えられている。

$t = 165$ での静電ポテンシャル ϕ , 渦度 $\omega = \Delta\phi$, そして温度揺動 T の分布を図 3.4 に示す。式 (2.17) で得られるような Rossby 波が形成されていることがわかる。 x 方向には低波数で広がり、 y 方向には高波数で細かい波が存在している、これは線形不安定性の傾向 (図 2.2) と一致している。この段階では、まだ非線形項はほとんど効いておらず、線形分散関係 (2.16) から推測される結果が現れている。

エネルギーの成長が抑えられた後 ($t = 210$) での様子を図 3.5 に示す。図 3.4 と異なり、Rossby 波で見えていた、 x 方向に低波数で y 方向に高波数な波が崩れていることがわかる。

さらに時間発展したあとの、 $t = 1000$ での分布が図 3.6 である。静電ポテンシャル ϕ や温度揺動 T には、 y 方向 (ポロイダル方向) へ伸びた、大規模な構造が現れていることがわかる。つまり zonal flow が形成されているといえる。渦度 $\omega = \Delta\phi$ の図を見ると、静電ポテンシャル ϕ の大規模な構造の隙間に局在していることがわかる。これは、非線形効果によってエネルギーが低波数領域へ逆カスケードし、エンストロフィーが高波数へカスケードした結果だといえる。

図 3.7 に揺動エネルギー E のスペクトルを示す。線形不安定性によって成長しているとき ($t = 165$, 図 3.4), 非線形飽和した直後 ($t = 210$, 図 3.5), zonal flow が形成されているとき ($t = 1000$, 図 3.6), そして非線形飽和から zonal flow 形成の間 ($t = 500$) のものを色分けしてプロットしている。 $t = 165$ のとき (赤線) は線形分散関係のとおり x 方向に低波数で y 方向に高波数な波ができており、低波数成分と高波数成分にそれぞれ強いスペクトルがある。 $t = 210$ のとき (緑線) では Rossby 波が壊れており、低波数のスペクトルが減少して高波数側に偏っている。このスペクトルと $t = 500$ のとき (紫線), そして $t = 1000$ のとき (青線) のスペクトルを比べると、時間経過とともに低波数領域へエネルギーが逆カスケードしていることがわかる。

カスケードをより明確に見るために、運動エネルギーやエントロフィーで重み付けした平均波数

$$\begin{aligned}\langle k \rangle_{\text{energy}} &= \frac{\sum_k k E_{\text{kinetic}}(k)}{\sum_k E_{\text{kinetic}}(k)}, \\ \langle k \rangle_{\text{enstrophy}} &= \frac{\sum_k k W(k)}{\sum_k W(k)},\end{aligned}\tag{3.1}$$

の時間変化を調べる．ただし $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ で、 $E_{\text{kinetic}}(k)$ は運動エネルギー密度 $(\phi^2 + |\nabla\phi|^2)/2$ の Fourier 成分で、 $W(k)$ はエントロフィー密度 $(|\nabla\phi|^2 + |\Delta\phi|^2)/2$ の Fourier 成分である．図 3.8 に $\langle k \rangle_{\text{energy}}$ と $\langle k \rangle_{\text{enstrophy}}$ の時間発展を示す．線形不安定性によって Rossby 波が成長している間は、どちらの平均波数も時間とともに大きくなっている．しかしその後非線形飽和したときに、 $\langle k \rangle_{\text{energy}}$ は減少し、 $\langle k \rangle_{\text{enstrophy}}$ は増加している．これはエネルギーの逆カスケードとエントロフィーのカスケードが起こっていることを示している．なお、 $\langle k \rangle_{\text{enstrophy}}$ の増加が途中で止まっているのは、高波数成分が粘性によって散逸されるためである．

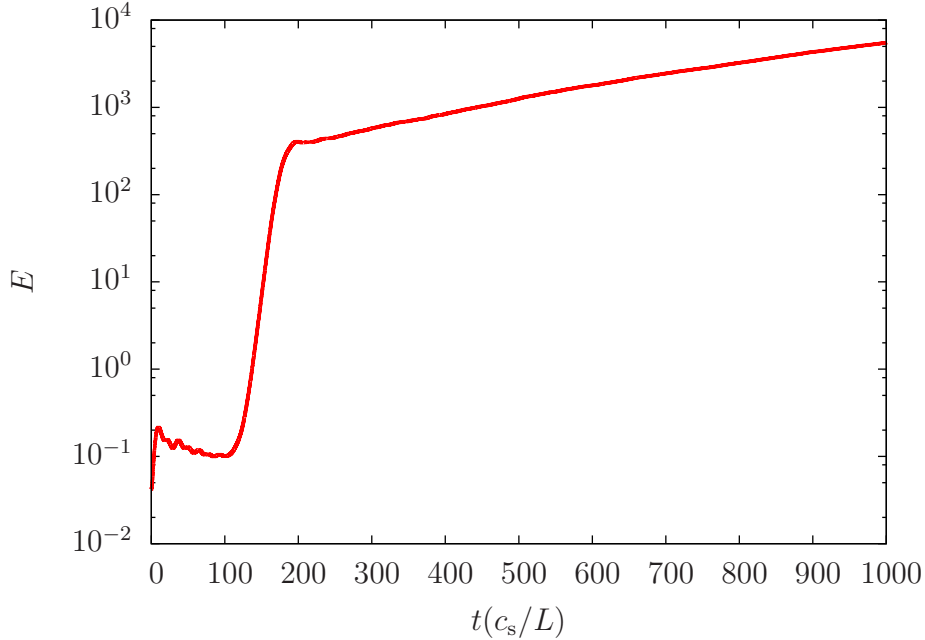


図 3.3 揺動のエネルギー $E = \frac{1}{2} \int \left(\phi^2 + |\nabla\phi|^2 + \frac{s^2}{\Gamma} \right) d^2x$ の時間発展をプロットしたもの． $t = 100$ ごろから $t = 200$ ごろまで線形不安定性によって指数的に成長した後、非線形飽和して成長が抑えられていることがわかる．

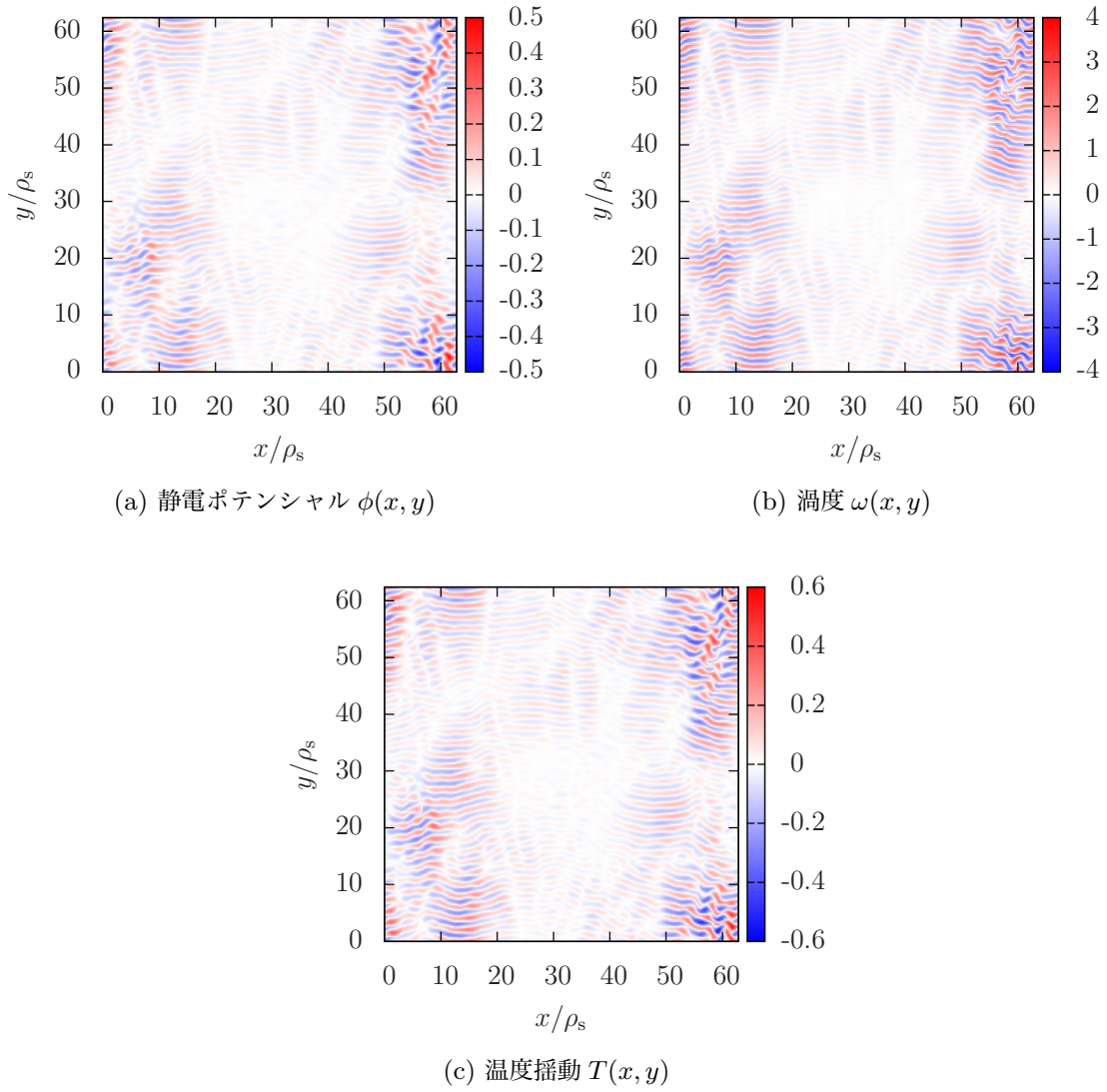


図 3.4 線形不安定性によって成長している間 ($t = 165$) での静電ポテンシャル ϕ , 渦度 $\omega = \triangle\phi$, 温度揺動 T を描画したもの. どれを見ても, y 方向に高波数な Rossby 波が現れていることがわかる.

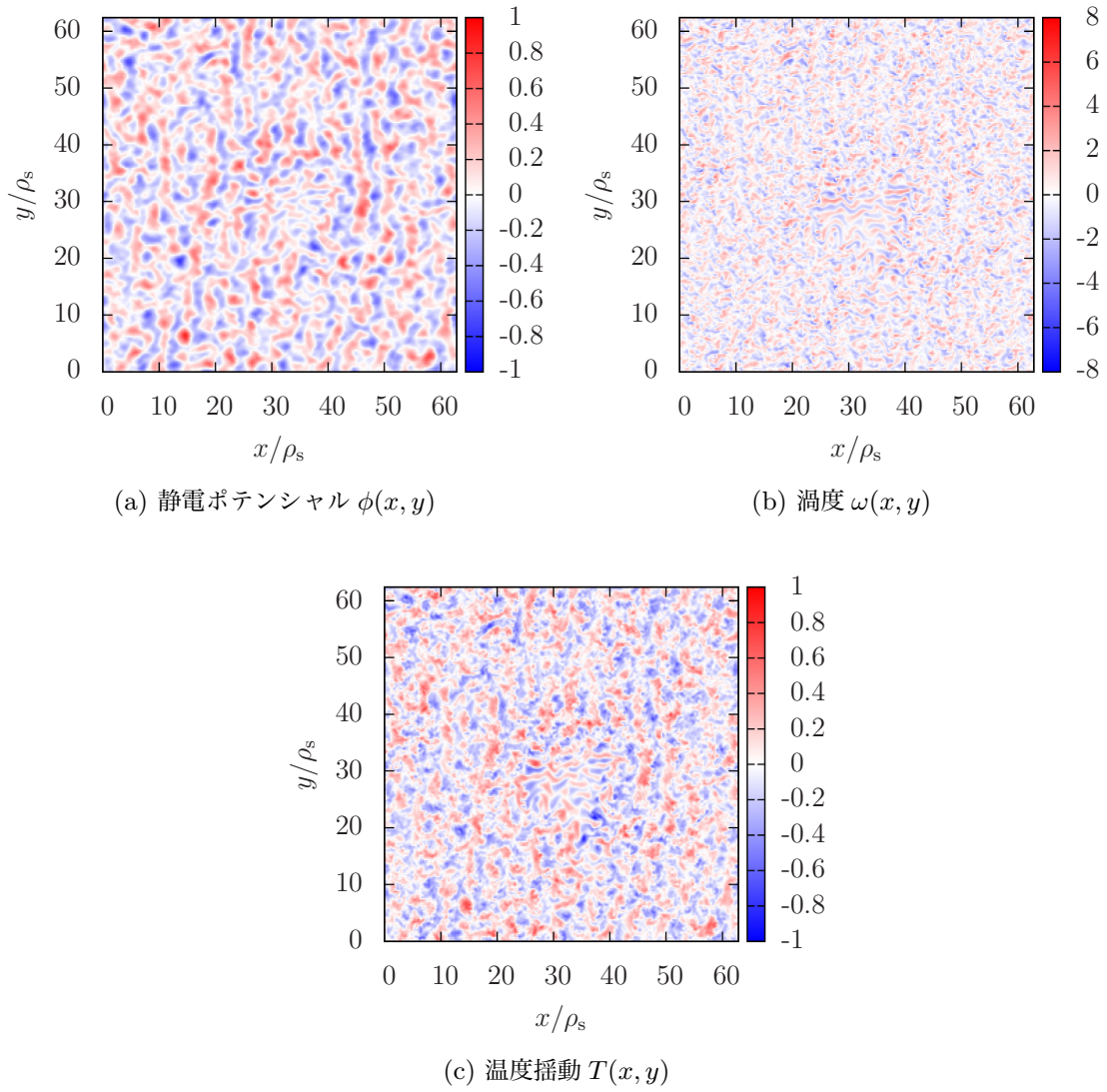


図 3.5 非線形飽和した直後 ($t = 210$) での静電ポテンシャル ϕ , 渦度 $\omega = \Delta\phi$, 温度揺動 T を描画したもの. 非線形項が効きはじめ, 図 3.4 で見えていた Rossby 波の構造が壊れている.

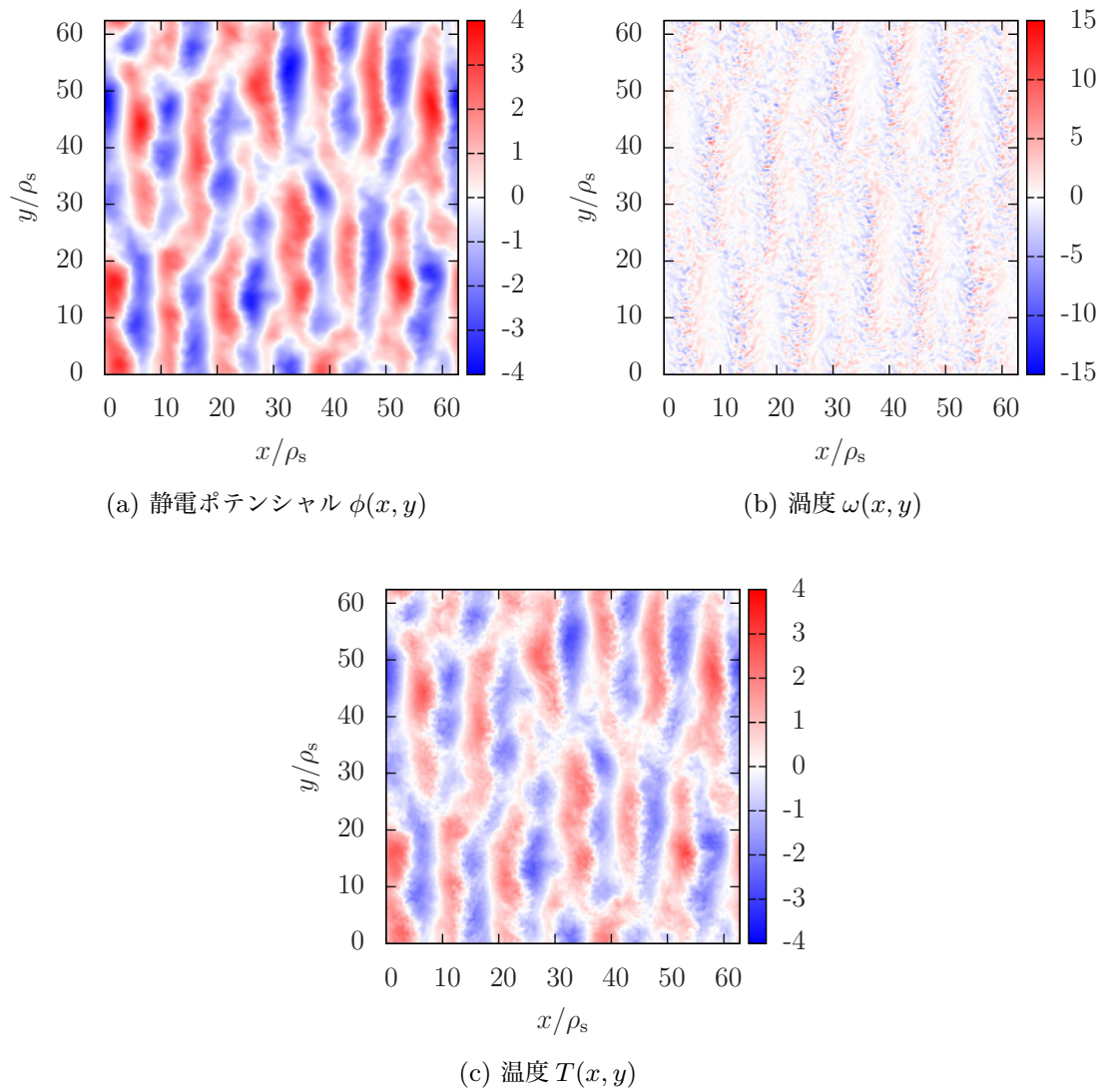


図 3.6 非線形飽和のあと、さらに長時間経過したとき ($t = 1000$) の静電ポテンシャル ϕ 、渦度 $\omega = \triangle\phi$ 、温度揺動 T の描画. ϕ と T にはポロイダル方向に伸びた zonal flow が形成されており、渦度 ω は ϕ の構造の隙間に局在して大きな値を持っている.

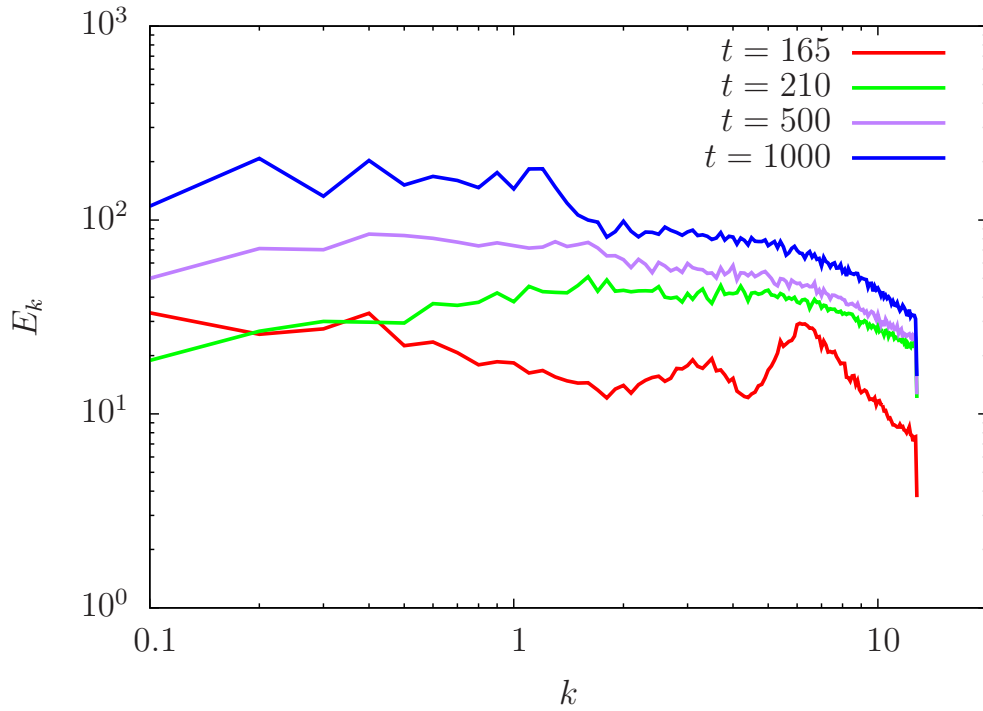


図 3.7 エネルギースペクトル E_k の時間変化の様子．赤線は線形不安定性による成長の間 ($t = 165$)，緑線は非線形飽和した直後 ($t = 210$)，そして紫線 ($t = 500$) と青線 ($t = 1000$) は非線形飽和の後さらに時間経過したもの． $t = 165$ では，線形分散関係から予測できるように低波数成分 (x 方向) と高波数成分 (y 方向) が成長している． $t = 210$ では Rossby 波の構造が壊れて，その後は逆カスケードで低波数領域にエネルギーが輸送される．

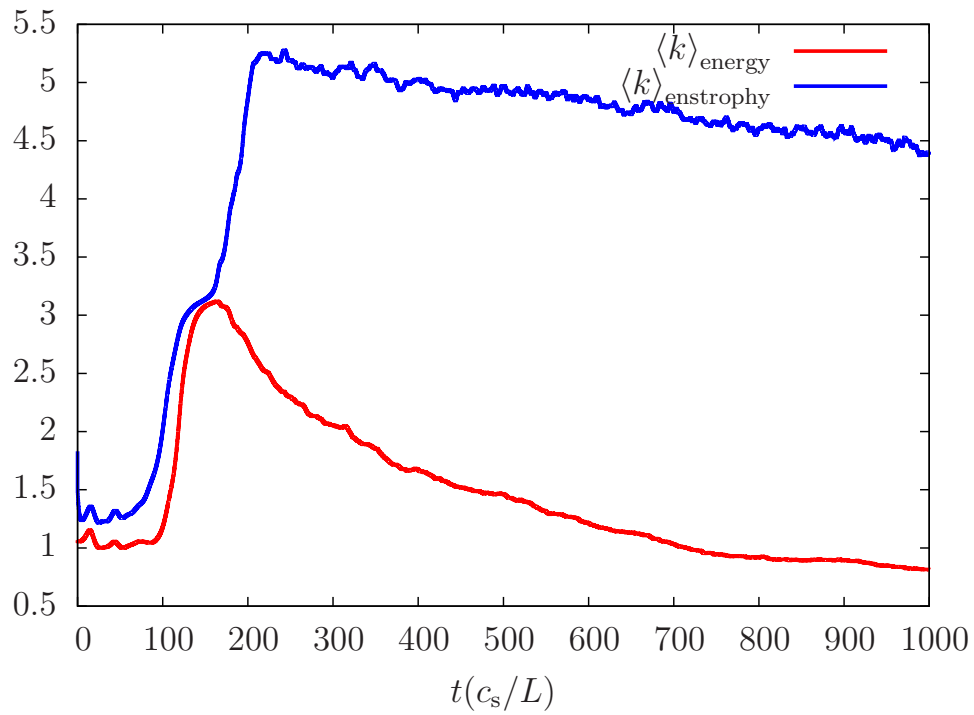


図 3.8 エネルギーとエントロフィーでそれぞれ重み付けした平均波数 $\langle k \rangle_{\text{energy}}$ と $\langle k \rangle_{\text{enstrophy}}$ の時間発展の図。線形不安定性による成長の間はどちらも時間とともに増加し、非線形項が効くと $\langle k \rangle_{\text{energy}}$ は減少し、 $\langle k \rangle_{\text{enstrophy}}$ は増加する。すなわち双カスケードが起きているといえる。

3.3 密度勾配・温度勾配と構造形成との関係性

前節では、傾圧 Hasegawa–Mima 方程式において傾圧効果によって揺動が成長し、エネルギーの逆カスケードによってポロイダル方向へ伸びた zonal flow が形成されることをみた。続いて本節では、密度勾配や温度勾配が構造の形成にどのような影響をもたらすかを調べる。 $\tau = 1.0$, $\nu = 1.0 \times 10^{-2}$, $\kappa = 1.0 \times 10^{-3}$ は固定する。

まず、 $\beta = 1.0$, $\alpha = 0.070$ として計算したときの、 $t = 1000$ での静電ポテンシャル ϕ 、渦度 ω 、温度揺動 T を図 3.9 に示す。前節の図 3.6 と比べると、大規模な構造はできているがポロイダル方向へ伸びているわけではない。 $\beta = 1.6$, $\alpha = 0.120$ として計算したときも、図 3.10 のように、大規模だがポロイダル方向へ伸びてはいない構造が形成される。

$\beta = 1.6$, $\alpha = 0.040$ として計算した結果を図 3.11 に示す。このときは大規模な構造も形成されておらず、乱れたままである。初期条件（図 3.1）と比べると、揺動の強度は 10 倍以上になっているが、非線形項が十分に効いておらず、エネルギーの逆カスケードが起こっていないと考えられる。

これらの構造を定量的に比較するために、 x 方向の平均波数と y 方向の平均波数（どちらもエネルギーで重み付けした）の時間発展を図 3.12 に示した。 $\beta = 1.6$, $\alpha = 0.065$ （図 3.6）のときは y 方向の平均波数が x 方向のそれよりも小さくなっており、zonal flow の形成が説明できる。対して $\beta = 1.0$, $\alpha = 0.070$ （図 3.9）や $\beta = 1.6$, $\alpha = 0.120$ （図 3.10）のときには、 x 方向の波数と y 方向の波数がほとんど同じように減少している。そのため zonal flow のように引き伸ばされていない構造が形成されている。 $\beta = 1.6$, $\alpha = 0.040$ （図 3.11）のときは平均波数がほとんど減少していない。

以上の結果は、以下のようにまとめられる。まず $\beta = 1.6$, $\alpha = 0.065$ と $\beta = 1.0$, $\alpha = 0.070$ の結果の比較から、ポロイダル方向へ伸びた構造が形成されるには密度の非等方性が強い必要がある。これは、 β の値の範囲こそ違えど、 β 面近似において zonal flow の形成が β の大きさに依存すること [33, 34] と同様の結果である。そして $\beta = 1.6$, $\alpha = 0.120$ の結果と比較すると、線形不安定性が強すぎる（ α が大きい）場合には、zonal flow のように引き伸ばされた構造にはならないことがわかる。逆に $\beta = 1.6$, $\alpha = 0.040$ のように線形不安定性が弱すぎる（ α が小さい）場合には、非線形項が効くまで成長せず、エネルギーの逆カスケードが起こっていない。

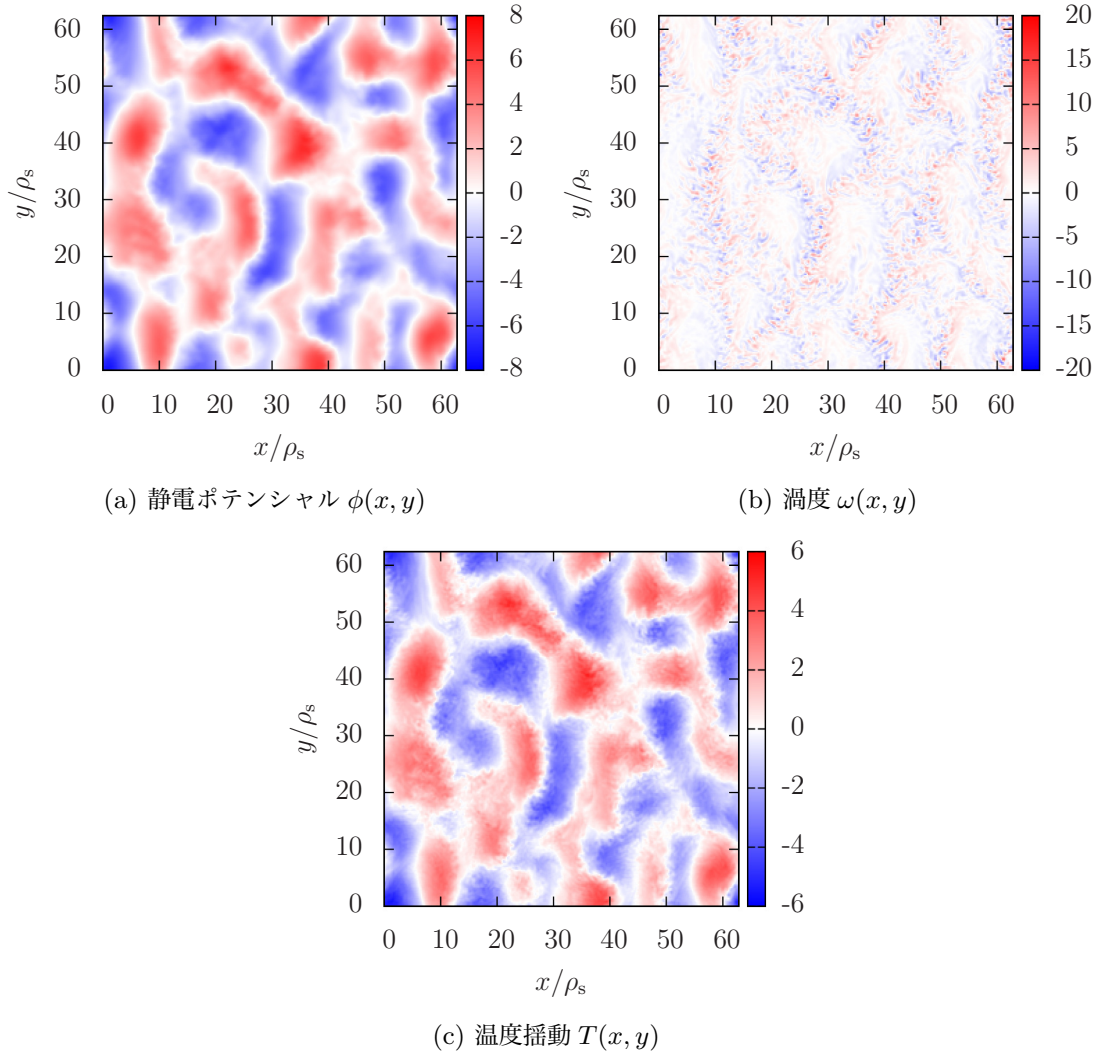


図 3.9 $\beta = 1.0$, $\alpha = 0.070$ の場合での, $t = 1000$ における静電ポテンシャル ϕ , 渦度 ω , 温度揺動 T を描画したもの. ϕ や T に大規模な構造は形成されており, ω が局在していることから, 双カスケードが起こっていることがわかる. しかし図 3.6 のように zonal flow は形成されていない.

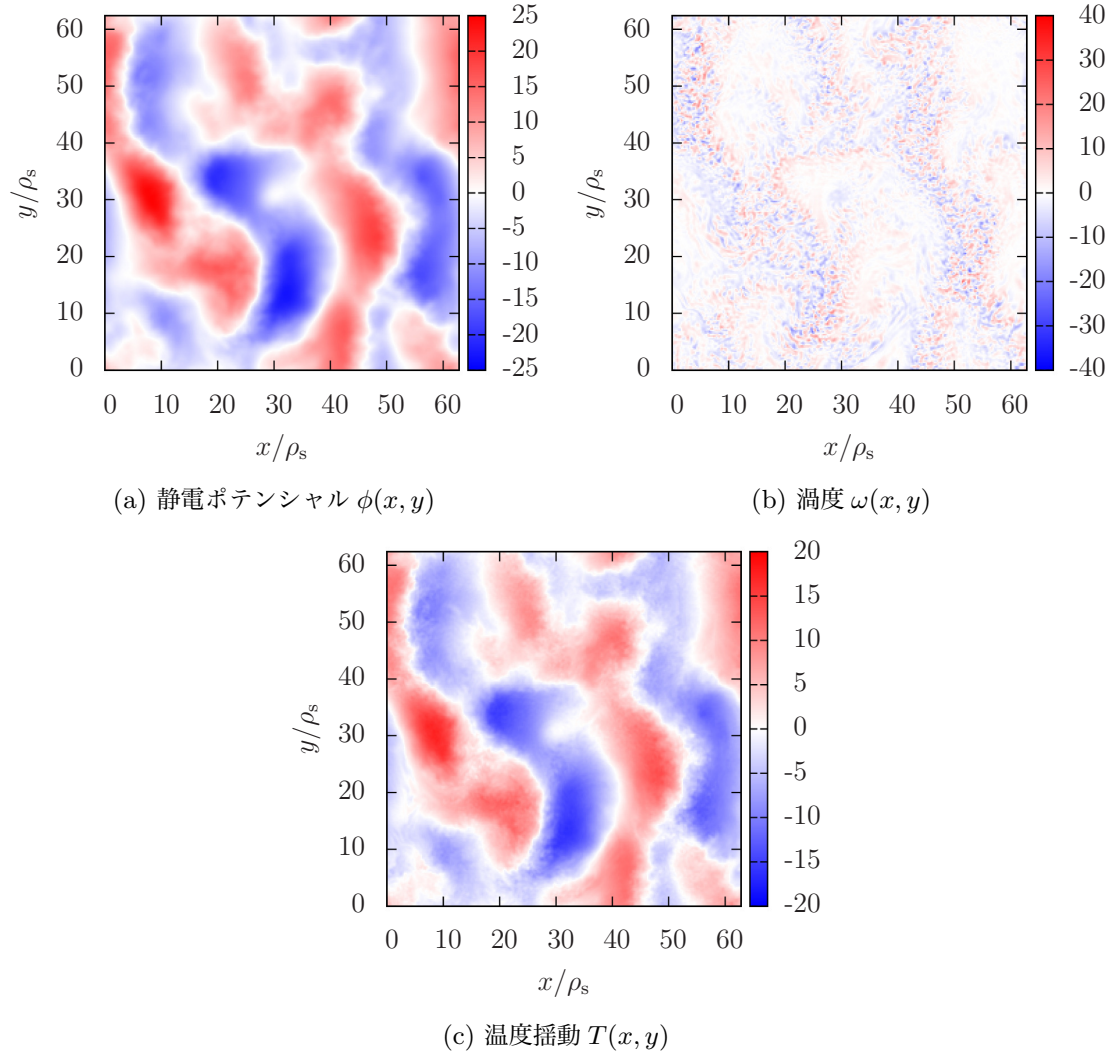


図 3.10 $\beta = 1.6$, $\alpha = 0.120$ の場合での, $t = 1000$ における静電ポテンシャル ϕ , 渦度 ω , 温度揺動 T を描画したもの. 図 3.9 と同様に, 双カスケードによって大規模構造と局在した渦度ができているが, zonal flow のようにポロイダル方向に伸びているわけではない.

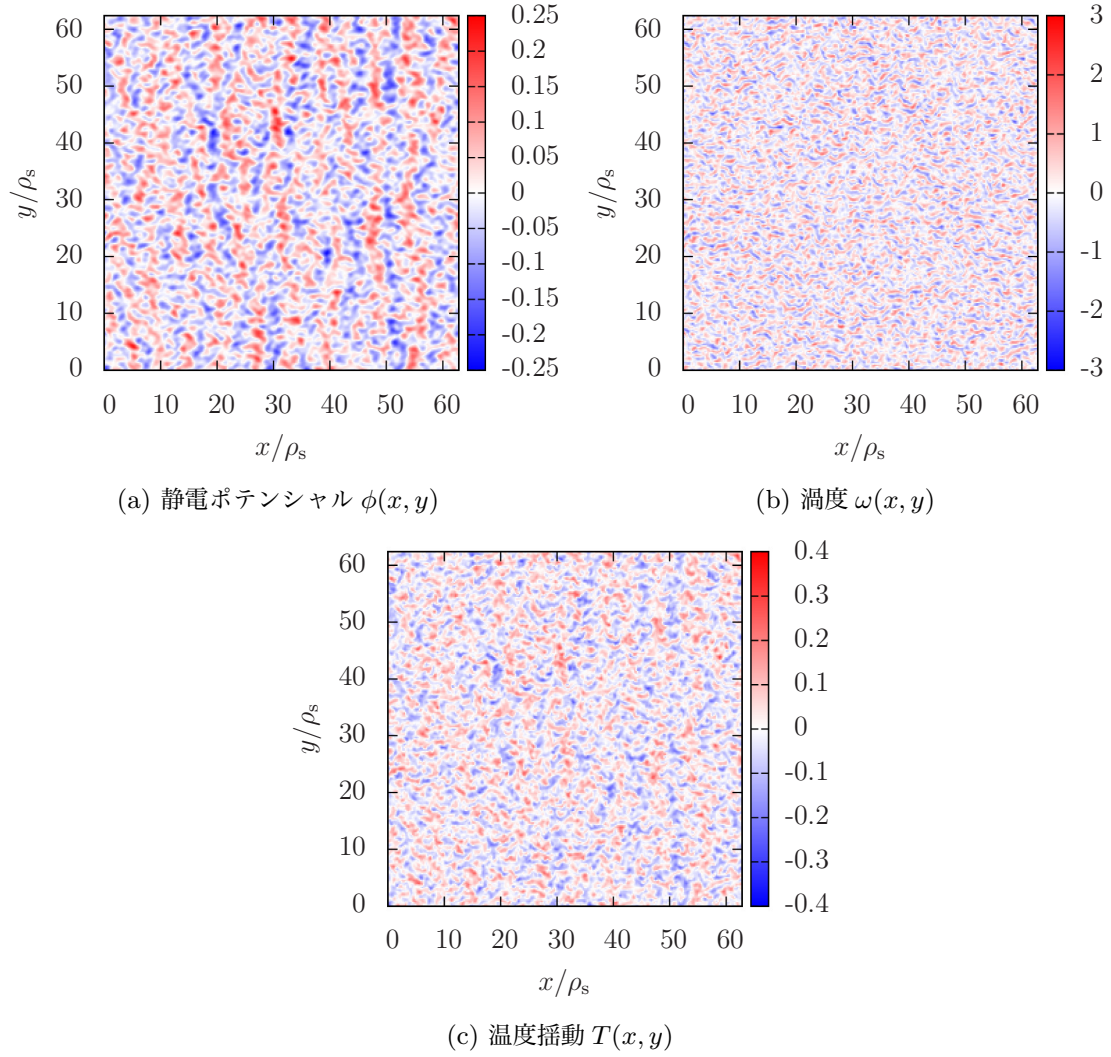


図 3.11 $\beta = 1.6$, $\alpha = 0.040$ の場合での, $t = 1000$ における静電ポテンシャル ϕ , 渦度 ω , 温度揺動 T を描画したもの. 初期状態 (図 3.1) に比べると強度は 10 倍以上になっているが, 非線形項が十分に働くほどではなく, エネルギーの逆カスケードが起らず大規模な構造は形成されていない.

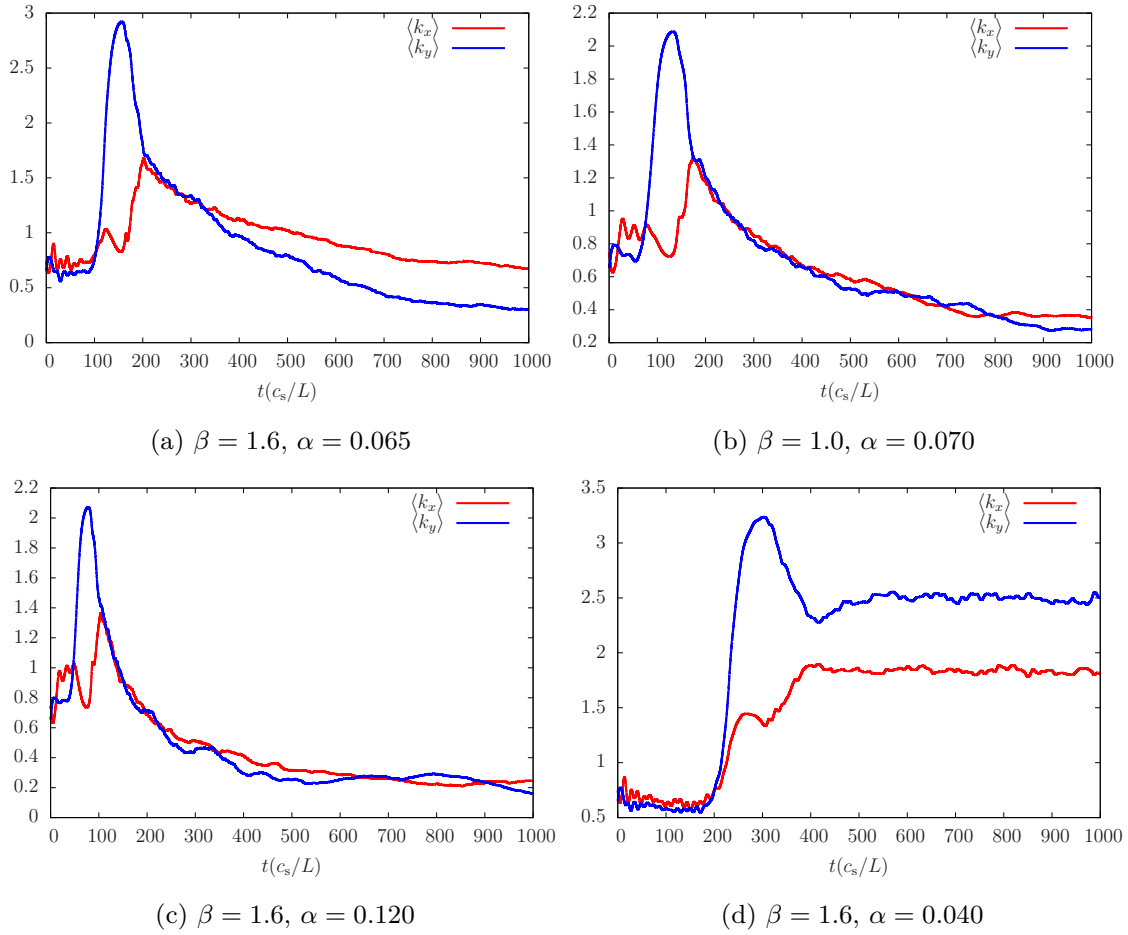


図 3.12 エネルギーで重み付けした、 x 方向・ y 方向それぞれの平均波数の時間発展を各パラメータに対してプロットしたもの。 x 方向の平均波数を赤線で、 y 方向の平均波数を青線で描いている。 Zonal flow が形成されている (a) では y 方向の平均波数が x 方向の平均波数よりも低いのに対し、 (b) や (c) ではどちらも同じ程度になっている。 (d) では他に比べて波数が減少していない。

3.5節ではドリフト波乱流の熱的駆動を解析するが、熱流束が境界から流入すると数値計算は不安定になりやすい。そこで以降では粘性係数を $\nu = \kappa = 5.0 \times 10^{-2}$ と変更する ($\tau = 1.0$ はそのままとした)。またここまでは、傾圧 Hasegawa–Mima 方程式の性質を調べるのが目的であり、スペクトルも調べる対象であったから、 x 方向に周期境界条件を課していた。これは現実的には、 x 方向はトカマク断面の半径方向なので不適切であり、変更しなくてはならない。これらの、粘性係数と境界条件の変更が構造形成に影響を及ぼさないかを確認する。粘性係数を大きくしたので、揺動が成長するために必要な不安定性は大きなものになる。そのため α の値は前よりも大きなものとする。熱的駆動の境界条件については 2.3.2 節で述べたとおりだが、まずは Dirichlet 境界条件を課して揺動が端点でゼロになるとする。境界からの熱流束がなく、さらに熱浴で極めて速く揺動が減衰するとすれば、 x 方向の両端で揺動はゼロになるとみなせる。そのため Dirichlet 境界条件は、周期境界条件よりは設定したい境界条件に近いものである。

結論を述べれば、 β や α に対する傾向は変わらない。図 3.13 に $\beta = 1.60$, $\alpha = 0.20$ として計算した結果を示す。静電ポテンシャル ϕ や温度揺動 T にはポロイダル方向へ伸びた構造が形成されている。渦度 ω は、図 3.6 ほどではないが、やはり ϕ に比べて局在していることがわかる。図 3.6 ほど局在していないのは、粘性が大きいために高波数のモードの散逸が強くなっているためである。ここから α の値を大きくして、 $\beta = 1.60$, $\alpha = 0.25$ としたときの計算結果を図 3.14 に示す。 α が大きくなったことで、図 3.13 ほどポロイダル方向へ伸びていないことがわかる。これは図 3.6 と図 3.10 との関係と同様である。他のパラメータとして、 $\beta = 1.0$, $\alpha = 1.0$ として計算した結果を図 3.15 に示す。このときは ϕ や T に非常に大きな構造が形成されている。これは次節で図 3.18 や図 3.19 に示すように、背景勾配を著しく低下させ、熱の閉じ込めを悪化させる。

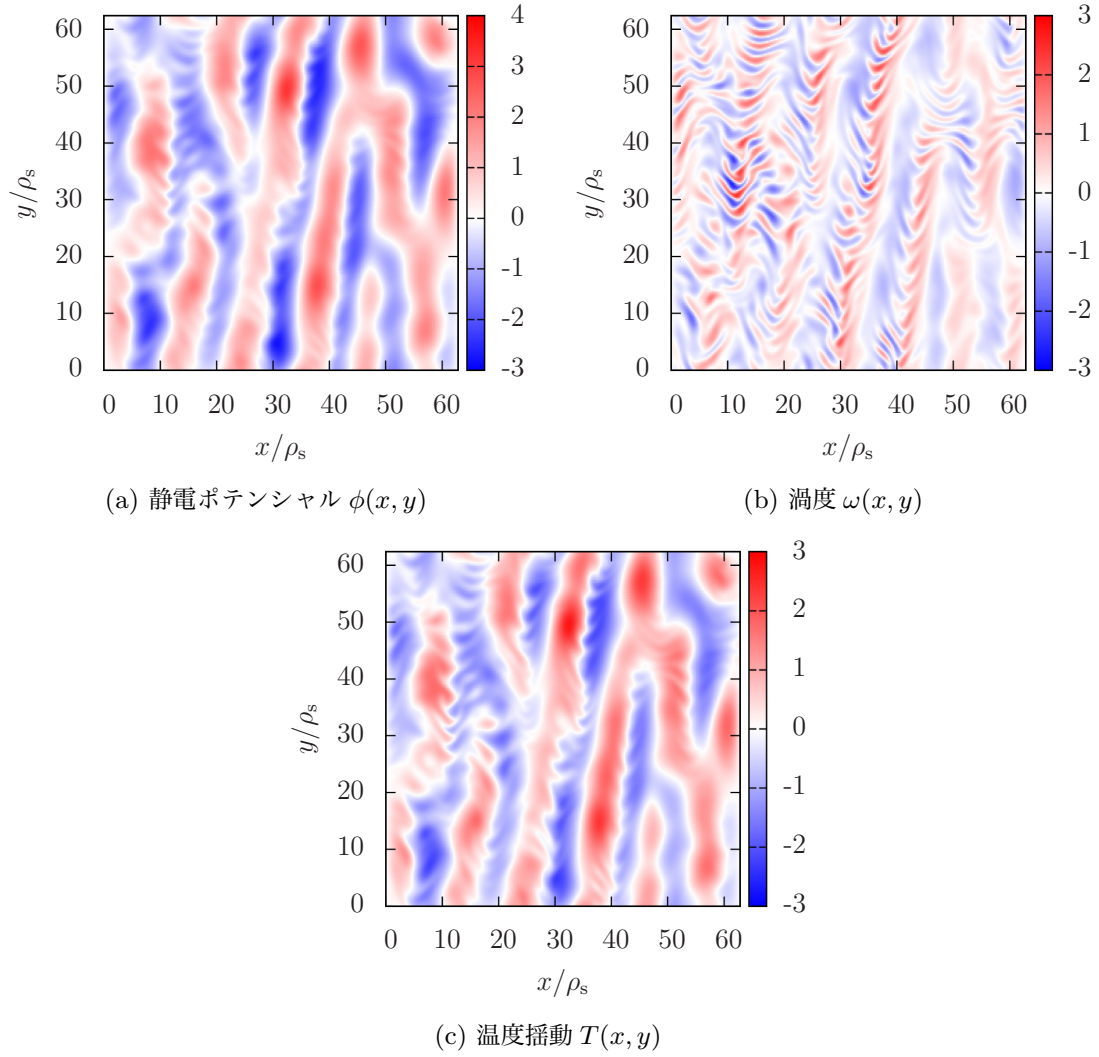


図 3.13 $\beta = 1.60$, $\alpha = 0.20$ として計算したときの，静電ポテンシャル ϕ ，渦度 ω ，温度揺動 T の図．静電ポテンシャル ϕ や温度揺動 T にはポロイダル方向へ伸びた構造が形成されている．渦度 ω は，粘性が大きいの図 3.6 ほどではないが， ϕ に比べると小さなスケールに局在していることがわかる．

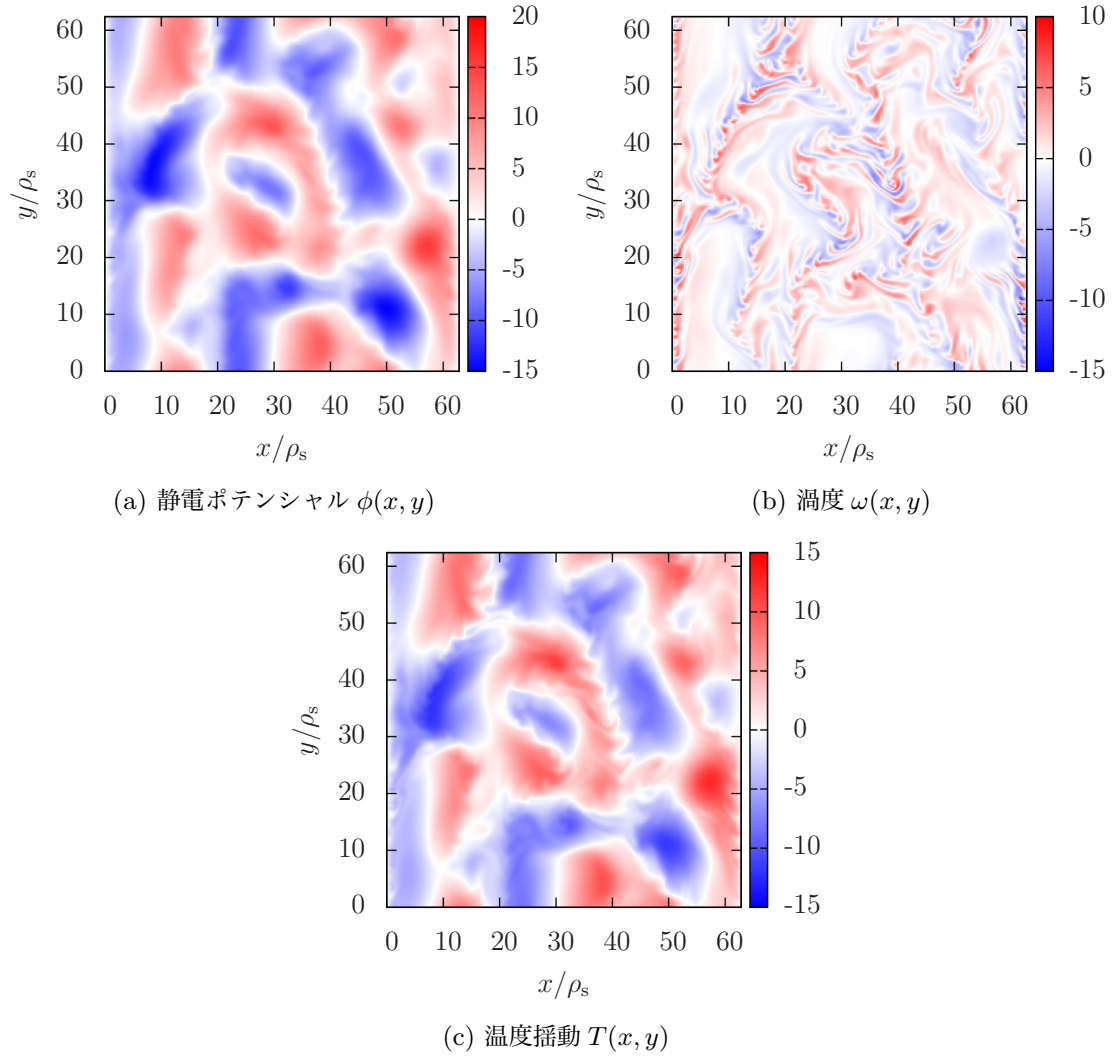


図 3.14 $\beta = 1.60$, $\alpha = 0.25$ としたときの静電ポテンシャル ϕ , 渦度 ω , 温度揺動 T の図. 図 3.13 から α を大きくした結果, ポロイダル方向への伸び方が弱くなっている.

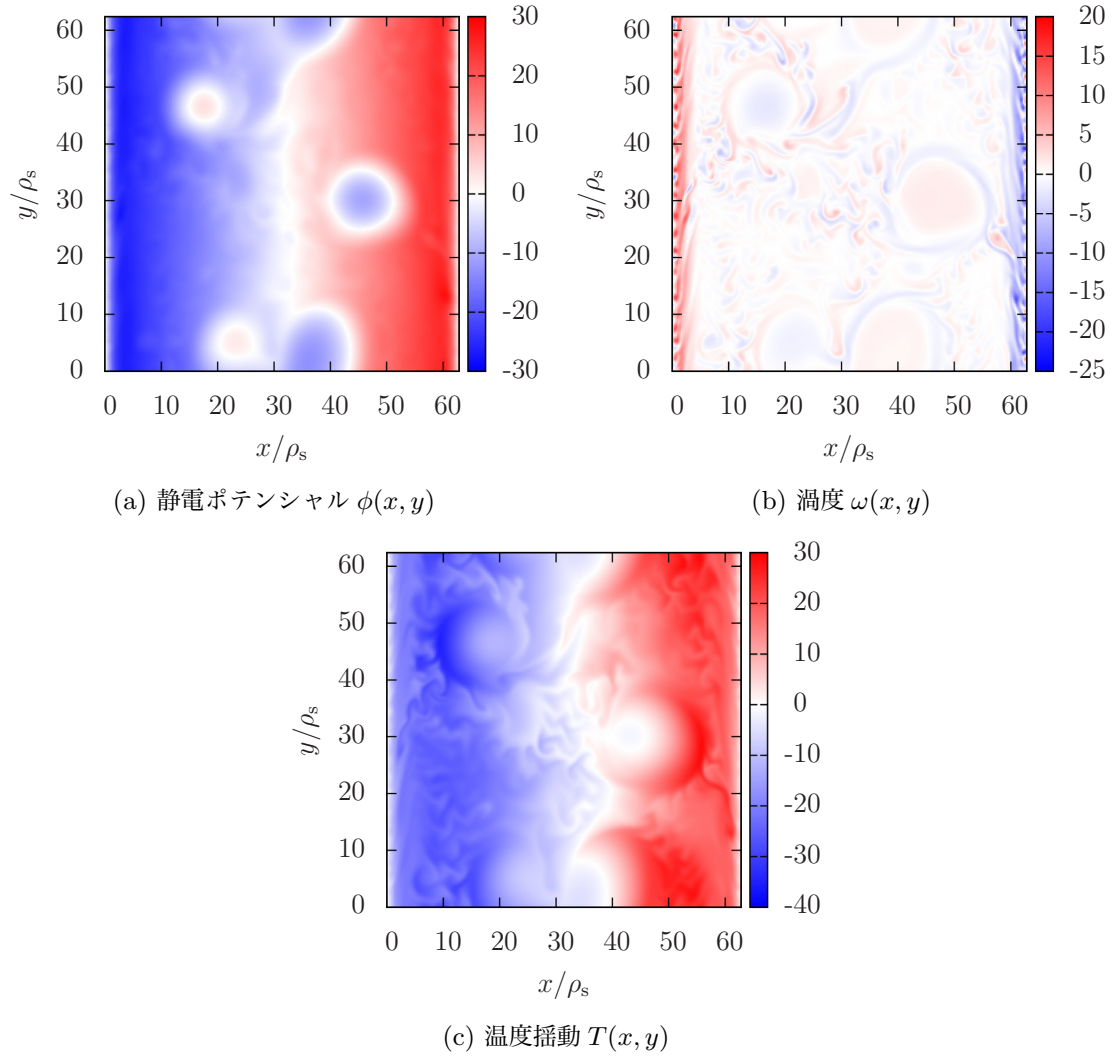


図 3.15 $\beta = 1.00$, $\alpha = 1.00$ としたときの静電ポテンシャル ϕ , 渦度 ω , 温度揺動 T の図. 極めて大規模な構造が形成されている. 次節で図 3.18 や図 3.19 に示すように, この構造は背景勾配を著しく低下させる.

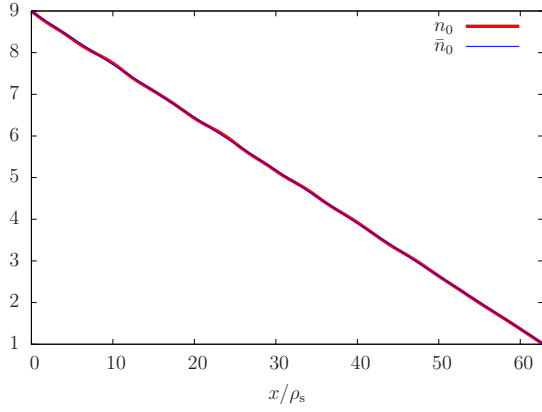
3.4 背景密度勾配・温度勾配の修正

2.3.1 節で述べたように，式 (2.29) に基づいて背景の勾配を修正する．

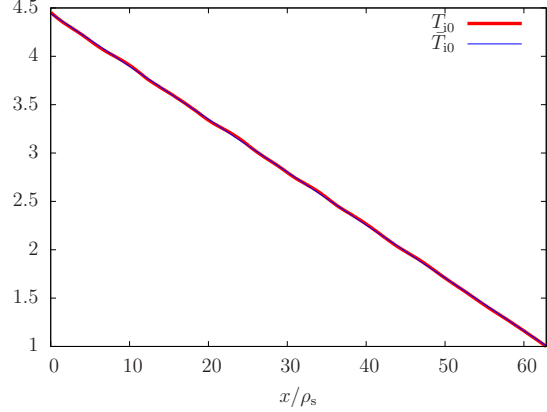
図 3.16 と図 3.17 に， $\beta = 1.60$, $\alpha = 0.20$ として zonal flow が形成されているときの計算結果を示す．図 3.16 の (a) と (b) はそれぞれ，式 (2.29) にしたがって背景の密度と温度を修正した結果である．ただしドリフト波の計算の中では β や α の値は修正せず，ただ背景成分と揺動成分を組み合わせたのみである．(c) と (d) は，ドリフト波の計算の中で β や α の値を修正した，背景勾配の修正がドリフト波へフィードバックされたものである．このパラメータの場合には，ほとんどドリフト波乱流から温度勾配や密度勾配への影響はないように見える．しかし図 3.17 に示した β や β_T の時間発展をみると，フィードバックしているときもしていないときも，背景の勾配は減少していることがわかる．すなわち，ドリフト波乱流が傾圧不安定性によって成長したことによって，背景から自由エネルギーが減少しているのである．この計算では Dirichlet 境界条件を課しているため，孤立した系になっている．そのためエネルギーの入力がなく，系は熱的死に向かうのである．

$\beta = 1.00$, $\alpha = 1.00$ の場合の結果を図 3.18 と図 3.19 に示す．それぞれの図の意味は図 3.16 や図 3.17 と同じである．背景密度・温度の変化をドリフト波へフィードバックすることで，フィードバックがない場合に比べれば勾配の現象は抑えられていることがわかる．これは，駆動する力（背景の自由エネルギー）が減少したことによってドリフト波乱流の強度が抑えられ，背景勾配の減少も抑えられたことを表している．しかし背景の勾配が大きく低下することには変わりはない．

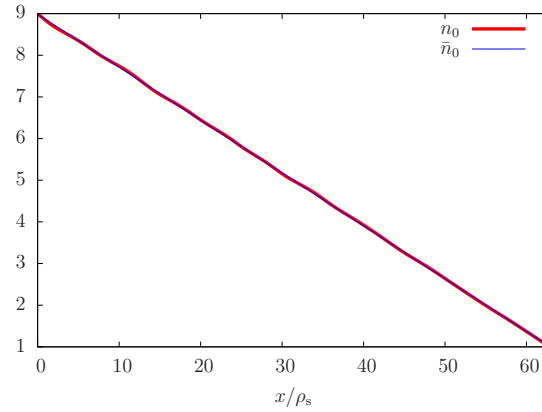
次節では，境界条件を変更して，外部から熱流束によってエネルギーが流入するようにして計算をおこなう．



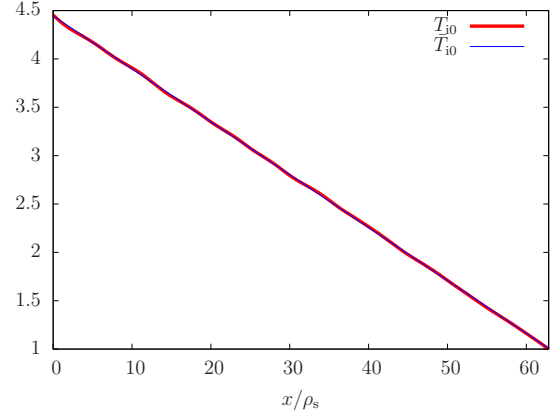
(a) ドリフト波による n_0 の修正（フィードバックなし）



(b) ドリフト波による T_{i0} の修正（フィードバックなし）

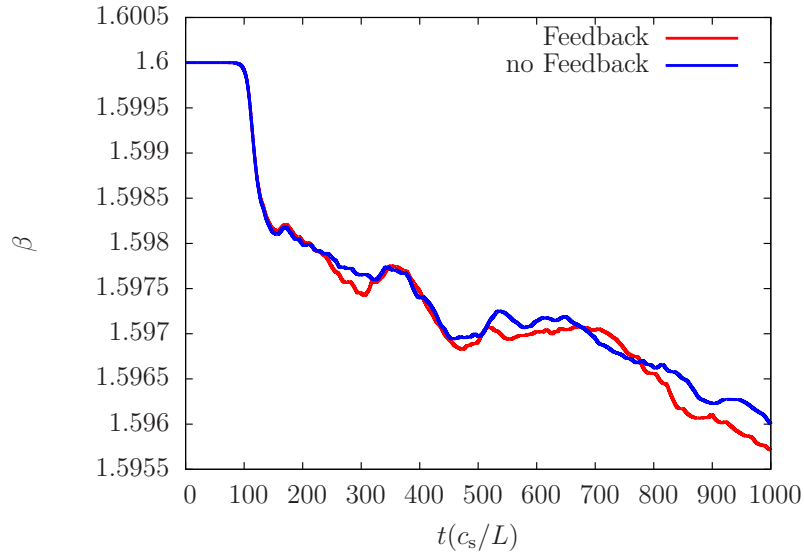


(c) ドリフト波による n_0 の修正（フィードバックあり）

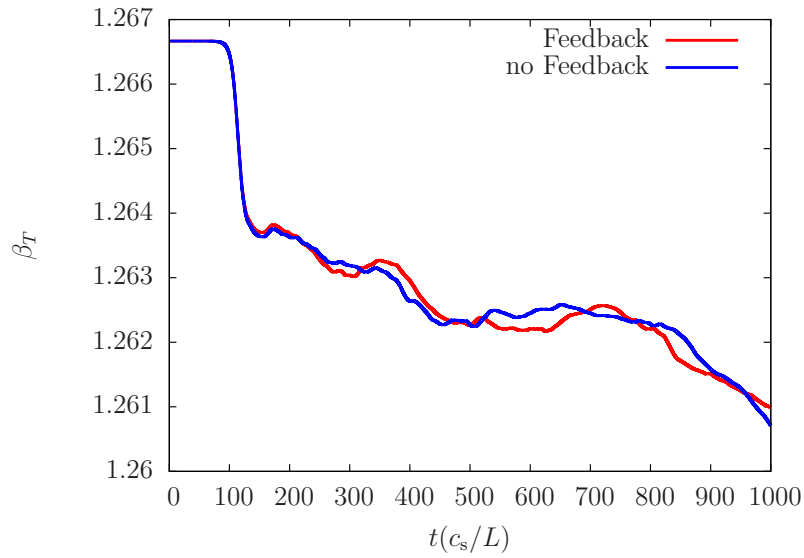


(d) ドリフト波による T_{i0} の修正（フィードバックあり）

図 3.16 $\beta = 1.60$, $\alpha = 0.20$ として, zonal flow が形成されているときの, ドリフト波による背景密度・温度の修正. $n_0(x = L)$ または $T_{i0}(x = L)$ で割って規格化している. (a) と (b) は背景の修正によるドリフト波へのフィードバックがない場合を表し, (c) と (d) はフィードバックがある場合を表す. この場合はほとんど差はみられない.

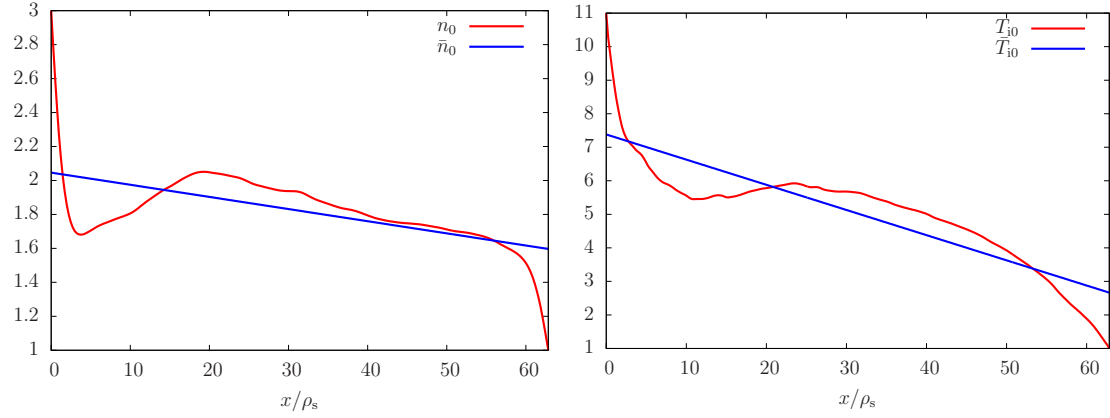


(a) 密度勾配 β

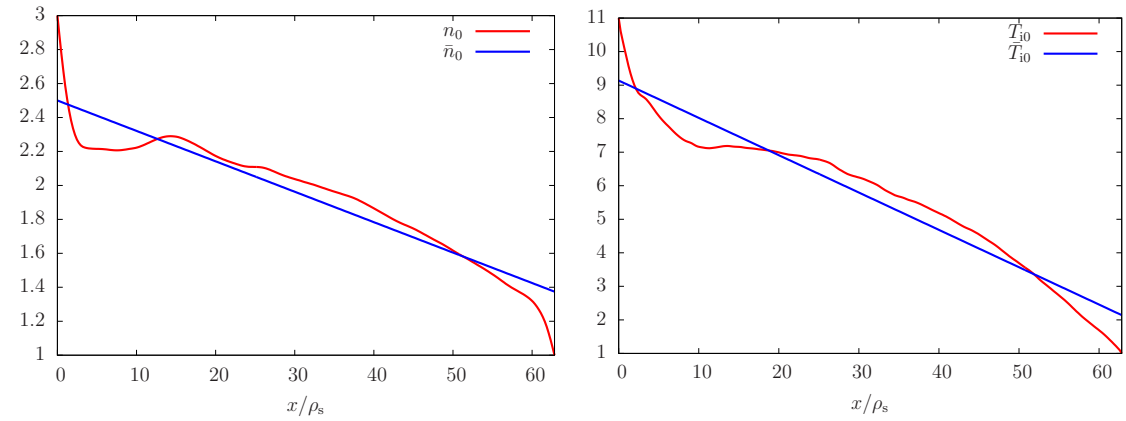


(b) 温度勾配 β_T

図 3.17 $\beta = 1.60$, $\alpha = 0.20$ として, zonal flow が形成されているときの, ドリフト波による背景勾配の修正の時間変化をプロットしたもの. フィードバックがない場合もある場合も, どちらの場合も背景勾配は時間とともに減少する.

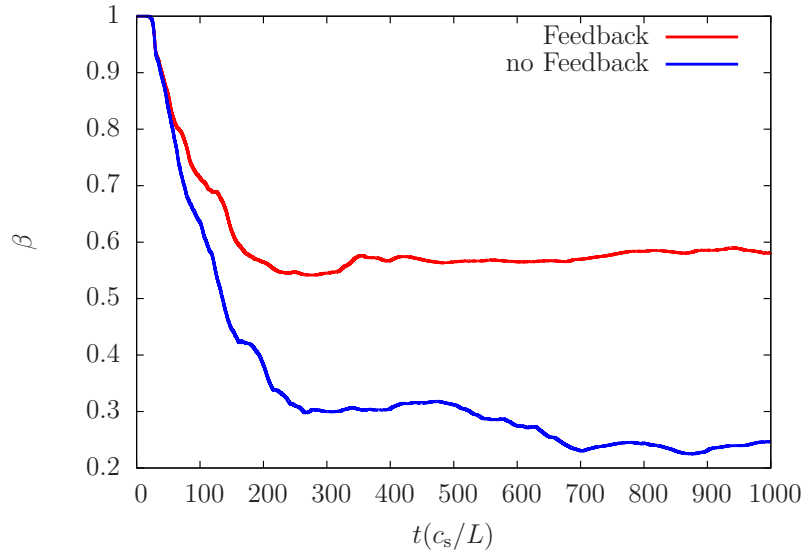


(a) ドリフト波による n_0 の修正 (フィードバックなし) (b) ドリフト波による T_{i0} の修正 (フィードバックなし)

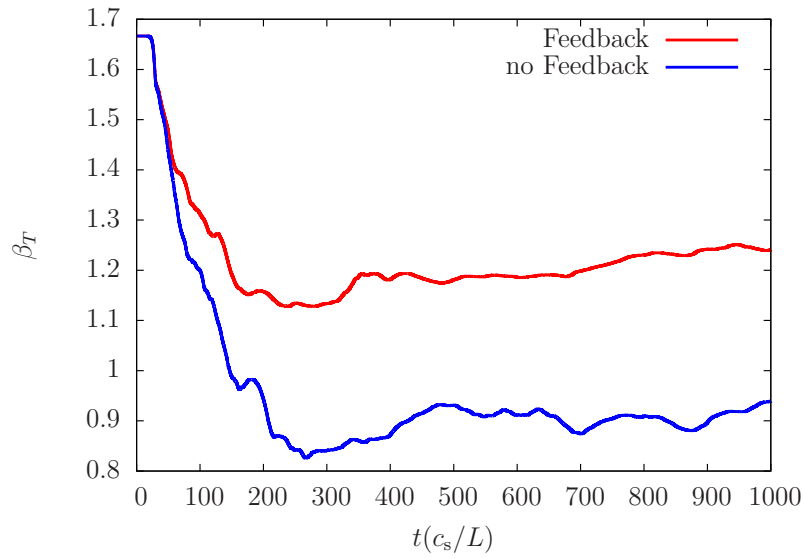


(c) ドリフト波による n_0 の修正 (フィードバックあり) (d) ドリフト波による T_{i0} の修正 (フィードバックあり)

図 3.18 $\beta = 1.00, \alpha = 1.00$ として, zonal flow が形成されているときの, ドリフト波による背景密度・温度の修正. $n_0(x = L)$ または $T_{i0}(x = L)$ で割って規格化している. (a) と (b) は背景の修正によるドリフト波へのフィードバックがない場合を表し, (c) と (d) はフィードバックがある場合を表す. いずれの場合も, 背景の勾配は著しく低下していることがわかる.



(a) 密度勾配 β



(b) 温度勾配 β_T

図 3.19 $\beta = 1.00, \alpha = 1.00$ としたときの，ドリフト波による背景勾配の修正の時間変化をプロットしたもの．フィードバックがないときの勾配の減少は著しいものであることがわかる．フィードバックがある場合，勾配の減少は抑えられるが，それでも元の勾配に比べると大きく減少していることがわかる．

3.5 ドリフト波乱流の熱的駆動

2.3.2節で述べた定式化に基づき、ドリフト波乱流に境界から熱流束が流入する場合について解析する。低温側では熱浴を設定する。既に述べたように、熱浴の中である程度系から離れたところで揺動がゼロになるという境界条件を設定するが、その距離は仮定する必要がある。まずその距離を大きくとって計算し、その後揺動の熱浴内における減衰の様子を見て、十分に減衰しているところをその距離と定めることにする。何回か計算を試行し、本研究では、系のサイズ L に対して $L/4$ の距離をとって揺動がゼロになるとした。

境界から流入する熱流束は、式 (2.33) である：

$$F = \left(\beta + \frac{\alpha}{\Gamma} \right) \int T v_x dy \Big|_{x=0}. \quad (3.2)$$

さらに β や α に対しては、前節で述べたようにドリフト波によって修正をおこなう。 F の値を固定し、 β や α の値から揺動の大きさを計算して境界条件とするのである。

まずはじめに、熱流束がない状況で熱浴のみを設定し、 $\beta = 1.60$, $\alpha = 0.20$ として $t = 1000$ まで数値計算をおこなった。図 3.13 と同じパラメータだが、熱浴を設定しているので改めて計算した。結果は図 3.20 のようになり、熱浴を設定した場合でも zonal flow が形成されている。

次に、図 3.20 の結果を初期条件として境界での熱流束を有限の値に設定する。はじめから F を大きな値にすると計算が不安定になるので、 $t = 1100$ まで徐々に F の値を上げていき、 $t = 1100$ から $t = 1500$ までは F の値を保って計算した。

$F = 1.0, 3.0, 5.0$ と変えて数値計算をおこなった。それぞれで最終的に得られた静電ポテンシャル ϕ 、渦度 ω 、そして温度揺動 T の様子を図 3.21、図 3.22、図 3.23 に示す。 $F = 1.0$ のときは初期状態とあまり変わっていない。 $F = 3.0, 5.0$ のときは、初期状態よりも揺動の強度が大きくなっているが、ポロイダル方向へ伸びた zonal flow の構造は維持されている。

熱流束 F の値を変えたときの背景密度・温度の様子を図 3.24 に、勾配の時間発展を図 3.25 に示す。 $F = 1.0$ のときは、前節で示した、Dirichlet 境界条件での計算結果と同様に、背景勾配は時間とともに減少する。しかし $F = 3.0$ や $F = 5.0$ のときを見ると、時間とともに勾配が増加していることがわかる。 F の値が大きいくほど勾配の増加は大きく、さらにただ増加するだけでなく、ドリフト波が存在していないとき ($t = 0$) の勾配の値 (点線でプロットした) を超えて増加していることがわかる。

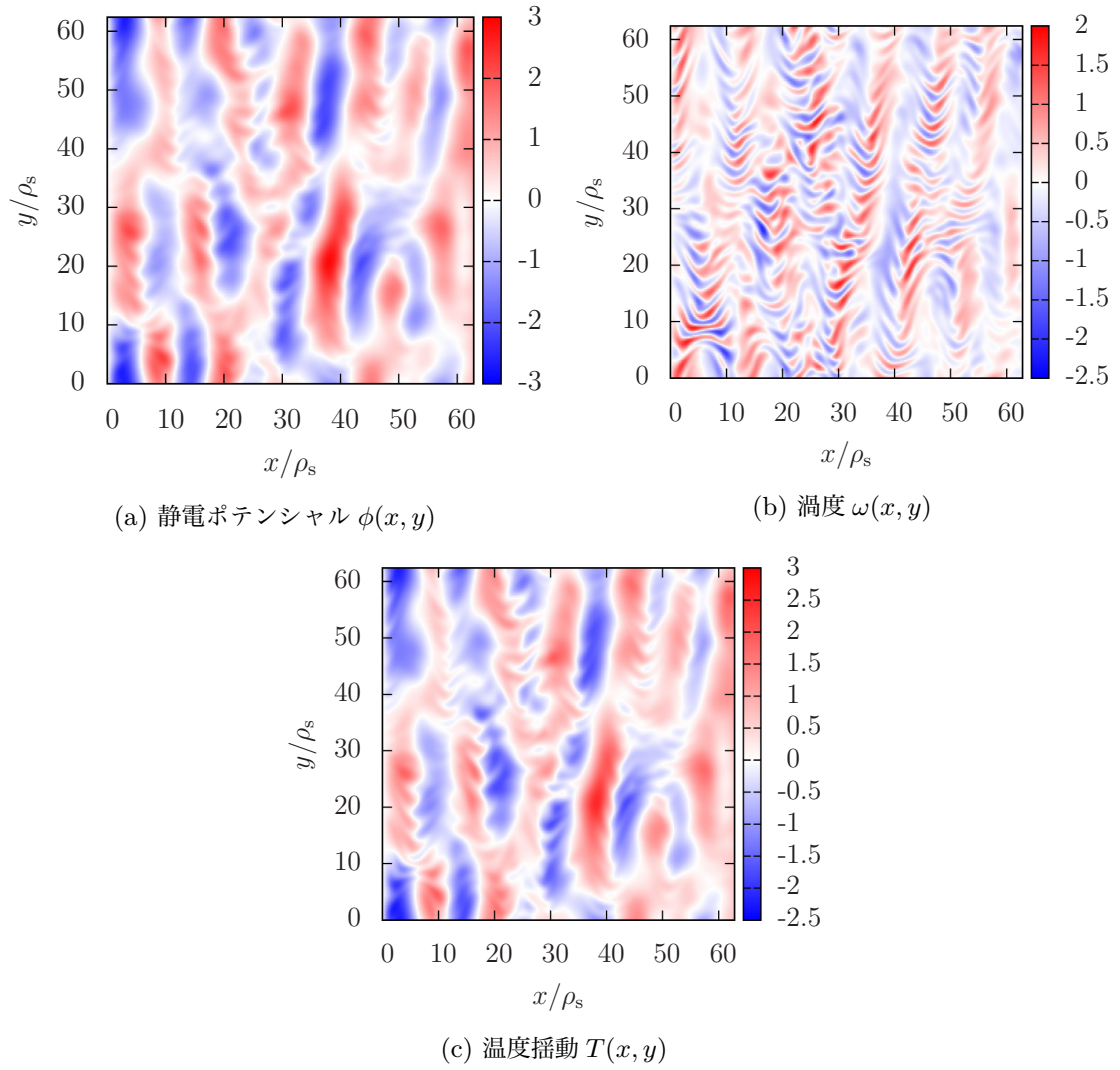


図 3.20 $\beta = 1.60$, $\alpha = 0.20$ として，熱浴のみを設定し，熱流束はないものとして $t = 1000$ まで計算したもの．図 3.13 と境界条件がわずかに変化しているが，同様に zonal flow が形成されている．

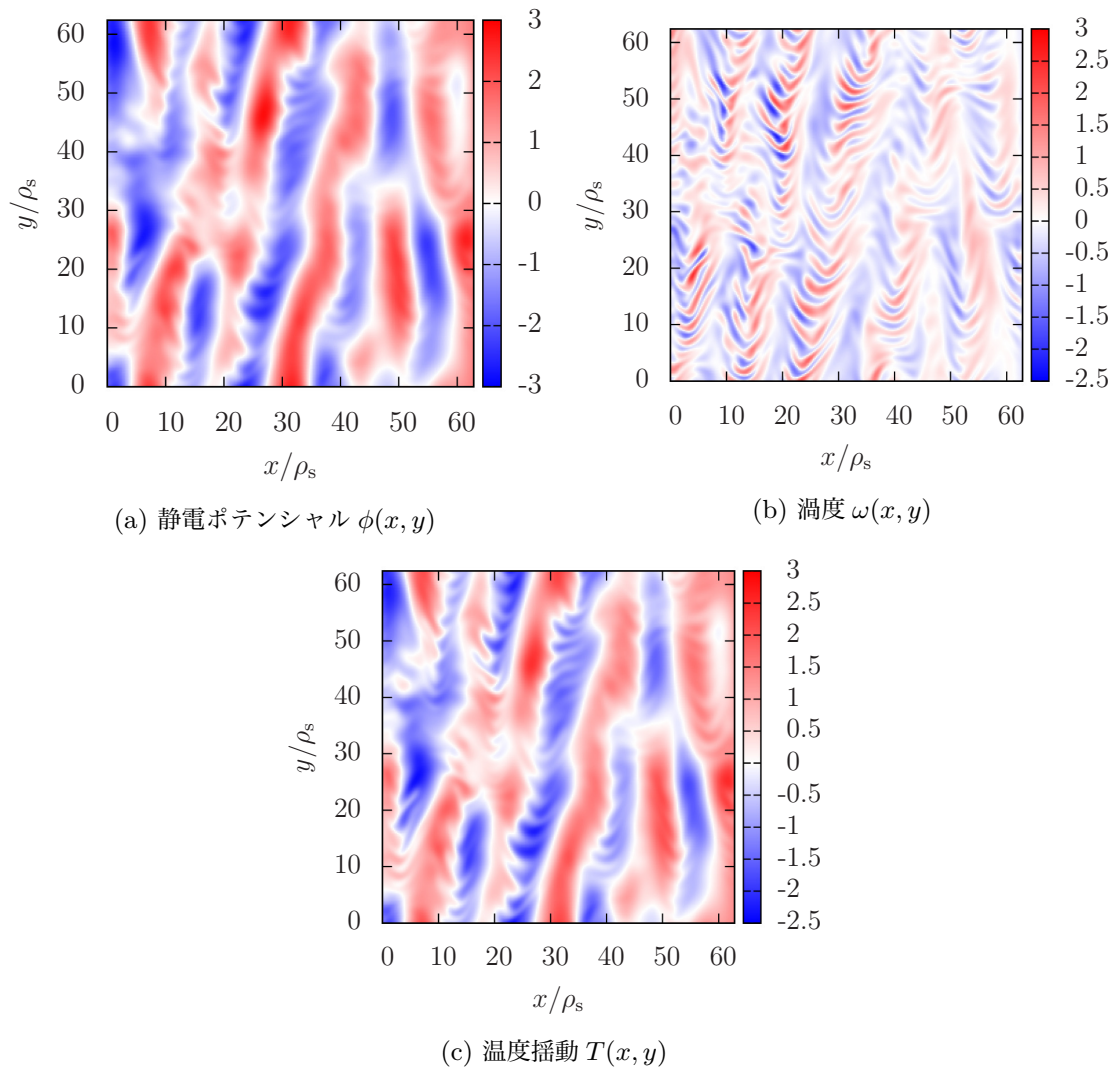


図 3.21 $F = 1.0$ としたときの静電ポテンシャル，渦度，温度揺動の図．図 3.20 に比べてわずかに揺動の強度が大きくなっているが，ほとんど変わっていない．

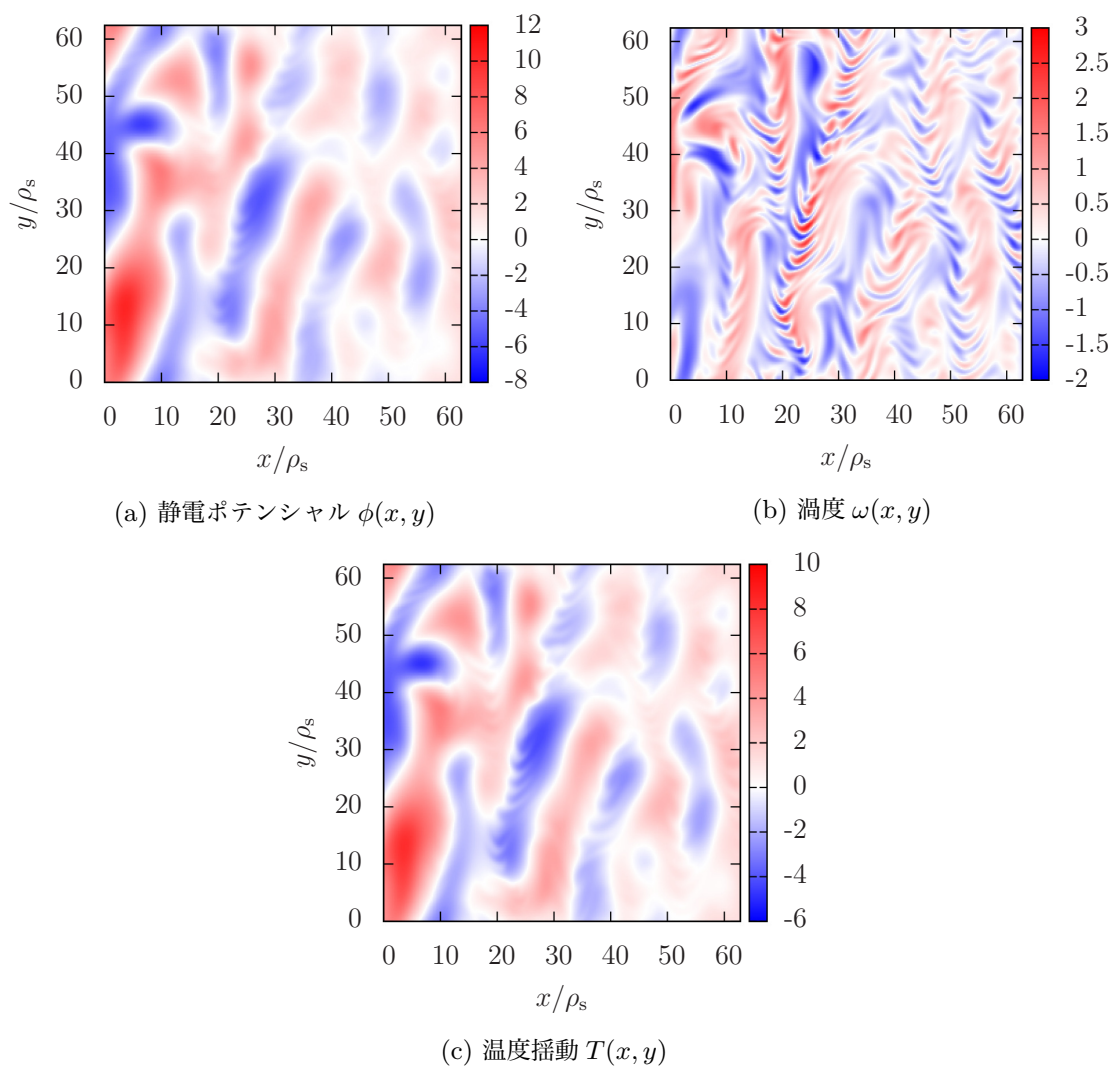


図 3.22 $F = 3.0$ としたときの静電ポテンシャル，渦度，温度揺動の図．特に熱流束の流入を受ける左側で，揺動の強度が大きくなっている．

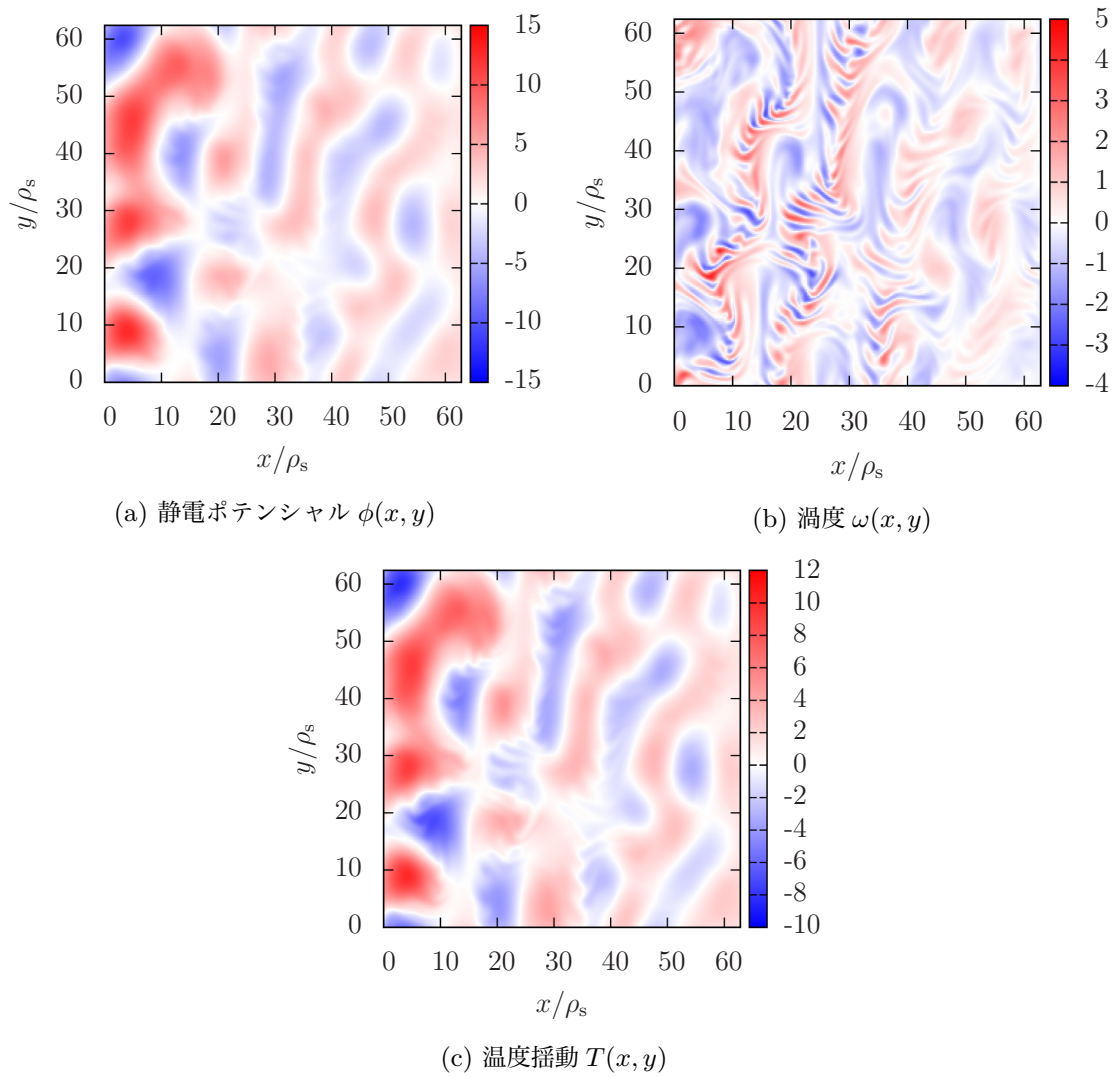
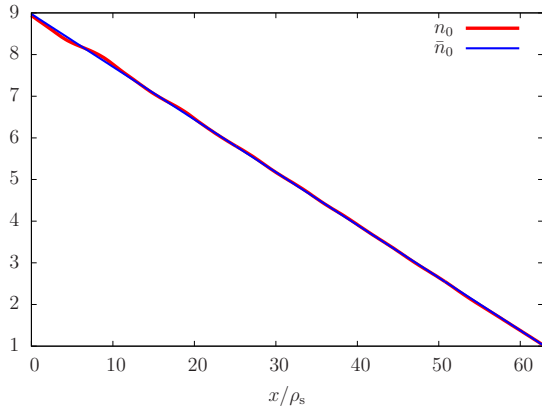
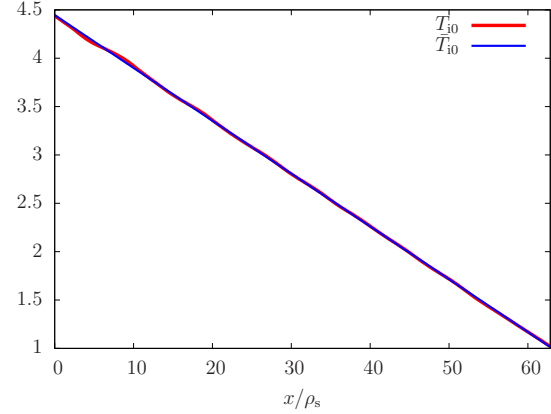


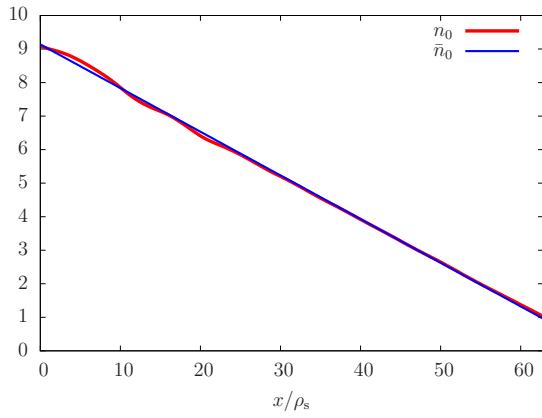
図 3.23 $F = 5.0$ としたときの静電ポテンシャル，渦度，温度揺動の図． $F = 3.0$ のときの図 3.22 よりも，さらに揺動の強度が大きくなっている．



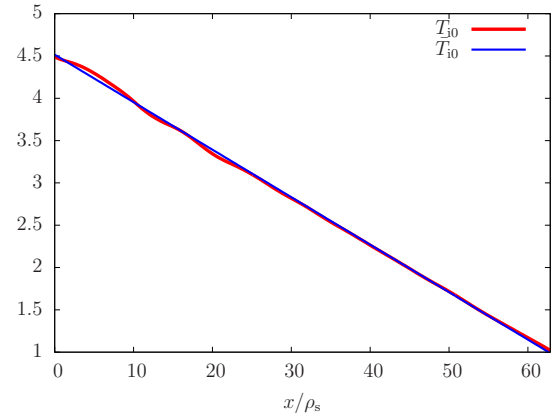
(a) $F = 1.0$ のときの n_0 の修正



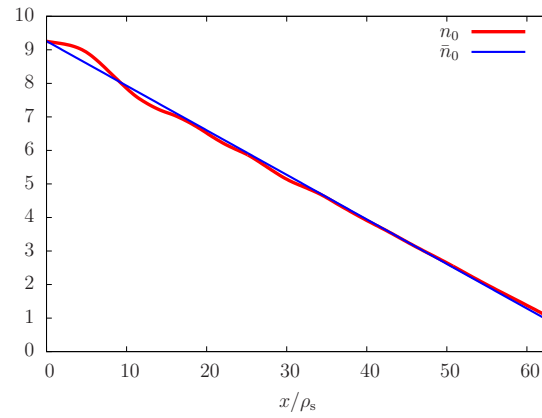
(b) $F = 1.0$ のときの T_{i0} の修正



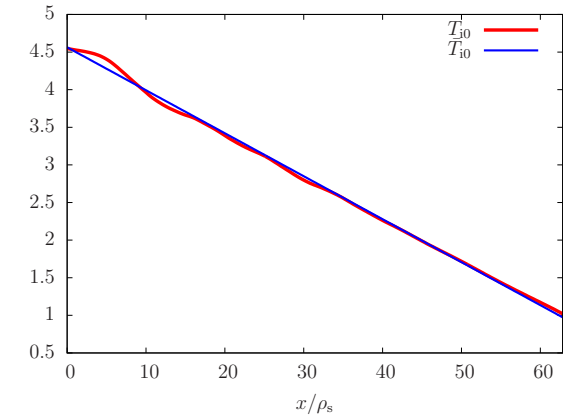
(c) $F = 3.0$ のときの n_0 の修正



(d) $F = 3.0$ のときの T_{i0} の修正



(e) $F = 5.0$ のときの n_0 の修正



(f) $F = 5.0$ のときの T_{i0} の修正

図 3.24 熱流束が流入したときの、ドリフト波による背景密度・背景温度の修正の図。どれも $n_0(x=L)$ または $T_{i0}(x=L)$ で割って規格化している。(a) と (b) は $F = 1.0$ のとき、(c) と (d) は $F = 3.0$ のとき、(e) と (f) は $F = 5.0$ のときのもの。 F が大きいときに、背景への修正も大きい。

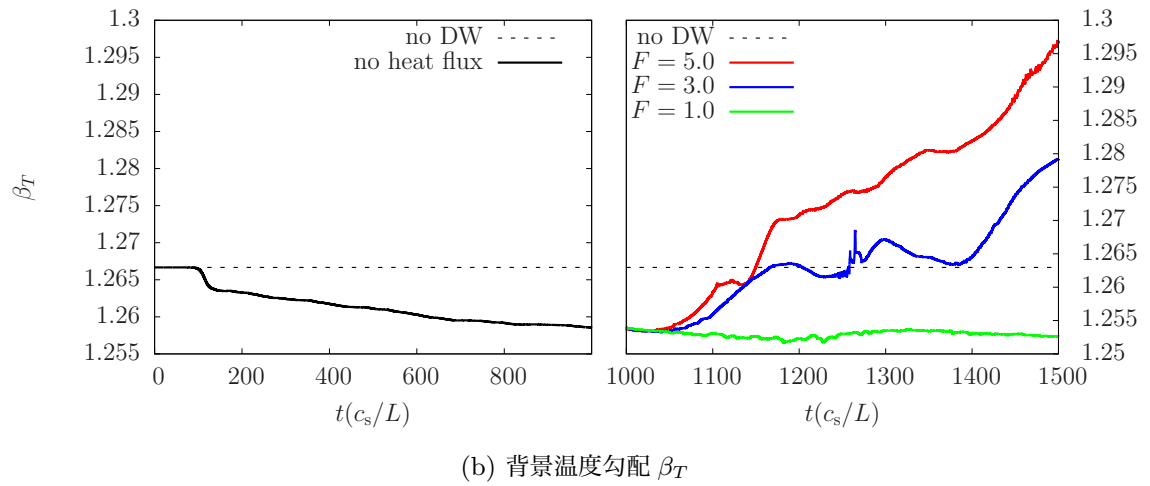
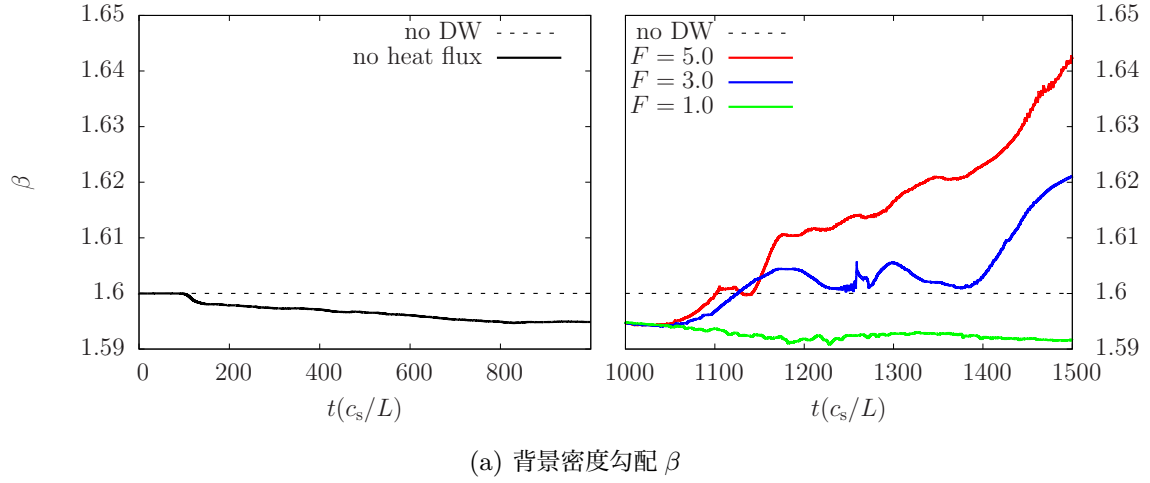


図 3.25 熱流束が流入したときの，背景の密度勾配，温度勾配の時間発展を各 F に対してプロットしたもの．それぞれ左側には熱流束を流入する前の変化をプロットし，右側に熱流束を流入したあとの変化をプロットした．点線に $t = 0$ での傾き，すなわちドリフト波 (DW) が存在しない場合の傾きを表した． $F = 1.0$ のときは，勾配は熱流束の流入前と同様に時間とともに減少する． $F = 3.0, 5.0$ のときは増加し， $t = 0$ ，つまりドリフト波がないときの勾配よりも大きくなる．

3.6 熱流束のオーダー

本研究では $F = 1.0, 3.0, 5.0$ などと、熱流束について $F = \mathcal{O}(1)$ のオーダーで解析をおこなった。これが実際にはどの程度の大きさなのか、規格化を解いて評価する。ここでは規格化された物理量を \hat{E}, \hat{F} などと書き、規格化されていないものを E, F などと書く。 F の単位は $W = J/s$ である。式 (2.6) や式 (A.4) から、エネルギーの規格化は $E_{3D} = \epsilon^2 \rho^2 \ell_z n_0 T_e \hat{E}_{3D}$ となっている。本研究で扱っているのは 2 次元断面なので、トロイダル方向の長さ ℓ_z をかけている。 F に対しては、この式を時間で割った

$$F = \epsilon^3 \rho^2 \ell_z n_0 T_e \omega_{ci} \hat{F} \quad (3.3)$$

が規格化になる。 n_0 や T_e などの値を、[9] を参考にして以下のように評価する：

$$n_0 \sim 10^{20} \text{ m}^{-3}, \quad T_e \sim 1 \text{ keV}, \quad B \sim 1 \text{ T}, \quad a \sim 1 \text{ m}, \quad \ell_z \sim 10 \text{ m}. \quad (3.4)$$

ただし a は小半径である。そしてイオンは水素イオンを想定し、 $e = 1.60 \times 10^{19} \text{ C}$, $m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ とする [5, p. 360]。最後に、微小パラメータ ϵ を $\epsilon \sim 10^{-2}$ とする。

以上の評価のもとで式 (3.3) の規格化を計算すると、 $\hat{F} \sim 1$ は $F \sim 1 \text{ kW}$ 程度に相当する。評価を 10^n のように大雑把におこなったため、その前の係数によって値は変動するが、おおよそキロワットからメガワット程度の加熱になっている。これは実際の核融合装置における加熱量のオーダーに近いものといえる。

この評価から、本研究での熱流束の値は妥当な範囲だといえる。では $\hat{F} = 1.0$ と $\hat{F} = 3.0, 5.0$ の差はどのようなものになっているのか。これを考察するには、系の内部のエネルギーと加熱とを比べればよい。揺動のエネルギーを式 (2.23) にしたがって計算すれば、熱流束を制御する前の状態 (図 3.20) では $\hat{E} \sim 2.0 \times 10^3$ 程度になっている。 $t = 1000$ から $t = 1500$ まで熱流束を制御したので、 $\hat{F} = 1.0, 3.0, 5.0$ ではそれぞれ $\delta Q = 5.0 \times 10^2, 1.5 \times 10^3, 2.5 \times 10^3$ だけ加熱されている。すなわち背景勾配が増加した $F = 3.0, 5.0$ のときには、もともと乱流が持っていたエネルギーの総量に匹敵するだけの熱が入力されていることがわかる。

第 4 章

結論

2次元乱流における構造形成は、エネルギーが波数空間を低波数領域へ輸送され（エネルギーの逆カスケード）、エントロフィーが高波数領域へ輸送される（エントロフィーのカスケード）という双カスケードによって説明される。これは、渦が互いに結びついて大きなスケールの渦となり、その渦同士の間隙に強い乱れを生じることを意味する。しかしこの考え方は、既に十分な量のエネルギーや渦を持っていることが前提で、そのエネルギーや渦がどう振る舞うかを述べたものである。プラズマや惑星大気など、力学的にはエネルギーの入力を受けない系において、カスケードの元になるエネルギーや渦を生み出すのは傾圧効果である。傾圧効果は熱と深い関わりがあり、核融合プラズマでは高温部から低温部へ流れる熱、大気では太陽から入射する熱が傾圧効果を通じて乱流にエネルギーを入力する。このように、乱流における構造形成と傾圧効果の間には深い関係がある。しかしこれまで、特にプラズマ物理の分野においてはこのことはあまり取り組まれてこなかった。本研究では上記の関係に注目し、傾圧効果による渦生成とエネルギーの逆カスケードが組み合わせられたモデルとして、プラズマのドリフト波を記述する傾圧 Hasegawa–Mima 方程式の数値解析をおこなった。

傾圧 Hasegawa–Mima 方程式は、傾圧効果に起因する線形不安定性を持つ。まず、小さな揺動がこの線形不安定性によって成長し、非線形飽和を経て zonal flow のようにポロイダル方向へ伸びた構造を形成することがわかった。特に、静電ポテンシャル ($E \times B$ ドリフトの流れ関数) と渦度 (静電ポテンシャルの Laplacian) のスケールの違い、乱流のエネルギースペクトル、そして平均波数の振る舞いを見ることで、傾圧効果によってエネルギーが入力され、エネルギーの逆カスケードとエントロフィーのカスケードによって大規模な構造が形成されることを確認した。続いて、方程式にパラメータとして含まれている背景密度・背景温度の勾

配が構造形成に及ぼす影響を調べた。その結果、zonal flow 以外に、大規模だがポロイダル方向へ伸びていないような構造が形成される例や、非線形飽和するものの十分な量のエネルギーがなく、逆カスケードによる大規模構造の形成が起こらないような例も確認された。特に、これまでのドリフト波方程式ではほとんどの場合に規格化されている、背景密度の勾配が zonal flow の形成に大きく影響することが明らかになった。

さらに本研究では、プラズマ乱流に対する境界からの熱的駆動に注目した。傾圧効果によって乱流にエネルギーが入力されるが、既に述べているようにそのエネルギー源になるのは熱である。系が孤立していると、いずれはエネルギー源を使い果たし熱的死に至る。実際にはプラズマ乱流、例えば核融合プラズマ乱流は開放系であり、高温領域から低温領域へ向かって熱が流れるので、これが系にエネルギーをもたらし、これまでおこなわれてきたドリフト波乱流に関する研究では、境界条件として Dirichlet 境界条件や周期境界条件を用いることが多い。もちろんこれらは利用するのが簡単であるから、方程式の特性を調べるのには便利である。しかしこれらの境界条件は孤立系を記述するものであり、熱の流入を記述することはできない。

運動方程式において「熱」という概念を定式化することは難しい。本研究では、熱が傾圧効果による不安定性のエネルギー源である、ということに着目して、傾圧 Hasegawa–Mima 方程式が非散逸かつ境界が閉じているときに Hamilton 形式を持つことを利用して、熱を定式化した。そしてその項の輸送が熱流束であるとした。この考え方にに基づき、境界条件として高温側では熱流束を固定するようなものを適用して数値計算をおこなった。低温側では熱浴に接しているとして、熱浴の中では揺動は拡散方程式に従って減衰するとした。このように境界条件を設定した結果、系に zonal flow が形成されているときに、流入する熱流束を増大させると密度や温度の勾配が増大することが明らかになった。このような結果は熱力学モデル [25] の性質と一致するものである。特に、乱流がもともと持っていたエネルギーに匹敵するだけの熱が流入されているとき、背景勾配が増大することがわかった。

本研究で考案した境界条件、すなわち非散逸かつ境界が閉じているときに Hamilton 形式を持つこととした熱流束の定式化と、揺動が減衰するという熱浴の設定は、傾圧 Hasegawa–Mima 方程式に限ったものではない。Hamilton 形式は多くのプラズマ・流体の方程式に対して存在する。他のドリフト波方程式、例えば Kim–Horton–Hamaguchi 方程式も、傾圧 Hasegawa–Mima 方程式と似た Hamiltonian と Poisson 作用素で記述できる [38]。そのため本研究で定式化した方法は幅広く応用されることが期待できる。

補足 A

ドリフト波方程式

ここでは、本文では詳細を述べなかった、ドリフト波方程式の数式に関する補足をする。まず A.1 節ではドリフト波方程式の導出について述べる。そして A.2 節では一般化 Hamilton 形式という概念に関して説明し、傾圧 Hasegawa–Mima 方程式の Hamilton 形式について述べる。

A.1 ドリフト波方程式の導出

本節ではドリフト波方程式の導出に関して説明する。ただし磁場は z 方向に一様かつ一定であるととし ($\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$)、イオンは磁場に対して垂直な方向に 2 次元的な運動をすると仮定する。

A.1.1 ドリフトオーダリング

はじめに、ドリフト波モデルにおいて用いられるオーダリング（規格化）について述べる。オーダリングの基準になるのは、磁場中でのイオンの回転運動に現れる物理量である。

電荷 e 、質量 m_i を持つイオンは磁場中を

$$\omega_{ci} = \frac{eB}{m_i} \tag{A.1}$$

の角速度で回転運動をする。この ω_{ci} をサイクロトロン周波数という。この回転運動では速度の大きさ v_\perp は変化せず、回転の半径は $\rho = v_\perp / \omega_{ci}$ で表される。とくに速さについて、電子

温度 T_e とイオンの質量 m_i から決まる熱速度（イオン音波の伝搬速度でもある）

$$c_s = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}} \quad (\text{A.2})$$

を用いれば

$$\rho_s = \frac{c_s}{\omega_{ci}} = \frac{\sqrt{T_e/m_i}}{eB} \quad (\text{A.3})$$

となる.

本研究で用いるドリフト波モデルでは, 式 (A.1), (A.2), (A.3) と電子温度 T_e から定まる次のようなオーダリングを用いる [39]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_{ci}} \frac{\partial}{\partial t} &= \mathcal{O}(\epsilon), & \rho_s \nabla_{\perp} &= \mathcal{O}(1), \\ \frac{v}{c_s} &= \mathcal{O}(\epsilon), & \frac{T_{i0}}{T_e} &= \mathcal{O}(1), & \frac{\tilde{T}_i}{T_e} &= \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

∇_{\perp} は磁場に垂直な x, y 方向への微分を表し, T_{i0} と \tilde{T}_i はそれぞれイオンの背景温度と温度揺動である ($T_i = T_{i0} + \tilde{T}_i$). ϵ は微小なパラメータであり, ρ_s とシステムスケール L から $\epsilon = \rho_s/L$ と定めることにする.

磁場に垂直な方向の速度には, $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトを考える. 静電ポテンシャルを ϕ と書くと, $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト速度 \mathbf{v}_E は

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{-\nabla\phi \times \mathbf{e}_z}{B} = \frac{1}{B} \begin{pmatrix} -\partial_y \phi \\ \partial_x \phi \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

と表される. ϕ のオーダリングは, ∇_{\perp} と v に関するオーダリングから

$$\frac{e\phi}{T_e} = \mathcal{O}(\epsilon) \quad (\text{A.6})$$

となる. 式 (A.5) からわかるように, \mathbf{v}_E は磁場が一定かつ一様であれば非圧縮である ($\nabla \cdot \mathbf{v}_E = 0$). しかし, 以降の計算では非圧縮性を残して計算をおこなう. これは, $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトの慣性による分極ドリフトが存在するためである. 分極ドリフトの大きさは $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトの大きさよりも非常に小さいので基本的には無視できるのだが*, 圧縮性に関しては分

* $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトの慣性力は $m d\mathbf{v}_E/dt$ で与えられるので, 分極ドリフトは $(m/eB^2) d\mathbf{v}_E/dt$ となる. これと \mathbf{v}_E との大きさを比べると, オーダリング (A.4) より微小である.

極ドリフトが残るのである。

次小節ではドリフト波方程式の導出をおこなうが、その前に $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトの性質について述べておく。式 (A.5) から、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトにおいて静電ポテンシャル ϕ は流れ関数の役割を果たしていることがわかる。そして渦度 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ は $\nabla \times \mathbf{v}_E = \mathbf{e}_z B^{-1} \Delta \phi$ となり、対流微分 $\mathbf{v} \cdot \nabla$ は

$$\mathbf{v}_E \cdot \nabla = \frac{1}{B} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{1}{B} [\phi, \circ] \quad (\text{A.7})$$

のように、Jacobian $[f, g] = \partial_x f \partial_y g - \partial_y f \partial_x g$ を用いて表される。

A.1.2 Hasegawa–Mima 方程式

前小節の説明に基づいて、最も単純なドリフト波方程式である Hasegawa–Mima 方程式 [16] を導出する。

出発点になるのは、イオンに関する流体方程式（運動方程式・連続の式）である：

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{e}{m_i} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{n_i m_i} \nabla p_i, \quad (\text{A.8})$$

$$\partial_t n_i + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}) = 0. \quad (\text{A.9})$$

まず運動方程式 (A.8) について、 $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}$ とベクトル公式 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla(v^2)/2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$ を用いれば、

$$\partial_t \left(\mathbf{v} + \frac{e \mathbf{A}}{m_i} \right) - \mathbf{v} \times \left[\nabla \times \left(\mathbf{v} + \frac{e \mathbf{A}}{m_i} \right) \right] = -\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \frac{e \phi}{m} \right) - \frac{\nabla p}{n_i m_i} \quad (\text{A.10})$$

となる。両辺に $\nabla \times$ を作用させれば、渦度方程式

$$\partial_t (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_{ci}) - \nabla \times [\mathbf{v} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_{ci})] = \frac{1}{m_i n_i^2} \nabla n_i \times \nabla p_i \quad (\text{A.11})$$

が得られる。ただし $\boldsymbol{\omega}_{ci} = e \mathbf{B} / m$ とおいた。さらにベクトル公式 $\nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{v}(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}$ を用いると、

$$\frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_{ci}) = (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_{ci}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{1}{m_i n_i^2} \nabla n_i \times \nabla p_i \quad (\text{A.12})$$

となる。右辺第 1 項は渦管の引き伸ばしを表し [31, Sec. 2.4], 2 次元流体であればゼロにな

る。右辺第 2 項は流体の圧縮性による渦の変化で、第 3 項は傾圧効果である。

連続の式 (A.9) は次のように変形できる：

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{d}{dt} \ln n_i. \quad (\text{A.13})$$

これを用いて式 (A.12) から $\nabla \cdot \mathbf{v}$ を消去する。2 次元運動であれば渦度は z 方向のみのスカラー（擬スカラー）であるから、まとめると

$$\frac{d}{dt} \ln \left(\frac{\omega + \omega_{ci}}{n_i} \right) = \frac{\mathbf{e}_z \cdot (\nabla n_i \times \nabla p_i)}{m_i n_i^2 (\omega + \omega_{ci})} \quad (\text{A.14})$$

という形になる。

ここで、磁場に平行な方向の電子の運動を考える。運動方程式は

$$m_e (\partial_t + \mathbf{v}_e \cdot \nabla) v_{\parallel e} = e \nabla_{\parallel} \phi - \frac{1}{n_e} \nabla_{\parallel} p_e \quad (\text{A.15})$$

となる。電子は質量が非常に軽いので、左辺の慣性項が無視できる。これは電子が非常に軽いので激しく運動し、すぐに緩和して平衡状態になることを意味している。さらに電子温度 T_e は一定であるとする。すると式 (A.15) は $\nabla_{\parallel} \ln n_e = \nabla_{\parallel} (e\phi/T_e)$ と整理できるから、Boltzmann 分布が得られる：

$$n_e = n_0 \exp \left(\frac{e\phi}{T_e} \right). \quad (\text{A.16})$$

準中性 ($n_i \approx n_e$) を仮定すれば、静電ポテンシャル ϕ は密度揺動 $\tilde{n} = n_i - n_0$ と

$$\frac{\tilde{n}}{n_0} = \frac{e\phi}{T_e} \quad (\text{A.17})$$

のように結びつけられる。

イオン温度を無視するか、もしくは順圧流体を考えれば、式 (A.14) の右辺は考えなくてよい。左辺は、渦度に関して式 (A.4) から $\omega/\omega_{ci} = \mathcal{O}(\epsilon)$ というオーダーリングが得られるから、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega}{\omega_{ci}} - \ln n_0 - \frac{\tilde{n}}{n_0} \right) = 0 \quad (\text{A.18})$$

と展開される。ここで ω_{ci} は定数なので無視した。 n_0 は時間的には変化しないが、半径方向 (x 方向) に勾配があると考えて残している。 $\omega = B^{-1} \Delta \phi$ や式 (A.7)、そして式 (A.17) を用

いて式 (A.18) を整理すれば,

$$\partial_{\hat{t}}(\hat{\phi} - \hat{\Delta}\hat{\phi}) - [\hat{\phi}, \hat{\Delta}\hat{\phi}]_{\text{norm}} + \beta\partial_{\hat{y}}\hat{\phi} = 0 \quad (\text{A.19})$$

となる. これを Hasegawa–Mima 方程式という. β は密度勾配の大きさを表すもので,

$$\beta = L \left(-\frac{d \ln n_0}{dx} \right) \quad (\text{A.20})$$

と定義される. なお, 式 (A.4), (A.6) のオーダーリングに従い,

$$\begin{aligned} \hat{t} = \epsilon\omega_{ci}t = \frac{c_s}{L}t, \quad \hat{x} = \frac{x}{\rho_s}, \quad \hat{y} = \frac{y}{\rho_s}, \quad \epsilon\hat{\phi} = \frac{e\phi}{T_e}, \\ \hat{\Delta} = \rho_s^2\Delta, \quad [\circ, \circ]_{\text{norm}} = \rho_s^2[\circ, \circ] \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

と規格化している. t については, $\epsilon = \rho/L$ より $\hat{t} = (c_s/L)t$ となっていることがわかる.

A.1.3 傾圧 Hasegawa–Mima 方程式

Hasegawa–Mima 方程式に傾圧効果を含める [28]. 式 (A.14) の右辺において $p_i = p_{i0} + \tilde{p}$ と展開して計算し, 規格化すると

$$\partial_{\hat{t}}(\hat{\phi} - \hat{\Delta}\hat{\phi}) - [\hat{\phi}, \hat{\Delta}\hat{\phi}]_{\text{norm}} + \beta \left(1 + \frac{T_{i0}}{T_e}(1 + \eta_i) \right) \partial_{\hat{y}}\hat{\phi} + [\hat{\phi}, \hat{p}]_{\text{norm}} - \beta\partial_{\hat{y}}\hat{p} = 0 \quad (\text{A.22})$$

とまとめられる. ただし η_i は密度勾配と温度勾配の比であり,

$$\eta_i = \frac{\beta_T}{\beta}, \quad \beta_T = L \left(-\frac{d \ln T_{i0}}{dx} \right) \quad (\text{A.23})$$

と定義される. 圧力の摂動の規格化は次の式で与えられる:

$$\epsilon\hat{p} = \frac{\tilde{p}}{n_0T_e}. \quad (\text{A.24})$$

圧力の時間発展方程式として, 断熱の式

$$\partial_t p_i + \mathbf{v} \cdot \nabla p_i + \gamma p_i \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{A.25})$$

を考える. γ は比熱比であり, $5/3$ とする. この式でも運動方程式と同様に, 連続の式 (A.13)

を利用して $\nabla \cdot \mathbf{v}$ を消去する．規格化して得られる式は

$$\partial_{\hat{t}}(\hat{p} - \Gamma \hat{\phi}) + [\hat{\phi}, \hat{p}]_{\text{norm}} + \beta \frac{T_{i0}}{T_e} (1 + \eta_i - \gamma) \partial_{\hat{y}} \hat{\phi} = 0 \quad (\text{A.26})$$

である．ただし $\Gamma = (T_{i0}/T_e)\gamma$ とした．さらに

$$\alpha = \beta \frac{T_{i0}}{T_e} (1 + \eta_i - \gamma) \quad (\text{A.27})$$

と定義すれば，式 (A.22), (A.26) は

$$\begin{aligned} \partial_{\hat{t}}(\hat{\phi} - \hat{\Delta} \hat{\phi}) - [\hat{\phi}, \hat{\Delta} \hat{\phi}]_{\text{norm}} + [\hat{\phi}, \hat{p}]_{\text{norm}} + (\beta + \alpha) \partial_{\hat{y}} \hat{\phi} - \beta \partial_{\hat{y}}(\hat{p} - \Gamma \hat{\phi}) &= 0, \\ \partial_{\hat{t}}(\hat{p} - \Gamma \hat{\phi}) + [\hat{\phi}, \hat{p}]_{\text{norm}} + \alpha \partial_{\hat{y}} \hat{\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

と書くことができる．

A.2 一般化 Hamilton 形式

A.2.1 一般化 Hamilton 形式と流体方程式 [40]

一般化された Hamilton 形式とは，物理量 $F(\mathbf{u})$ の時間発展が，Hamiltonian H と Poisson 括弧 $\{\circ, \circ\}$ を用いて

$$\frac{d}{dt} F(\mathbf{u}) = \{F(\mathbf{u}), H(\mathbf{u})\} \quad (\text{A.29})$$

と書けるものをいう．ただし \mathbf{u} は状態変数であり，流体方程式では速度や密度などである．Poisson 括弧は，反対称であり ($\{F, G\} = -\{G, F\}$)，Jacobi 恒等式 ($\{F, \{G, K\}\} + \{G, \{K, F\}\} + \{K, \{F, G\}\} = 0$) を満たすものとする．この反対称性から，Hamiltonian 自身は保存量である： $dH/dt = \{H, H\} = 0$ ．状態変数を座標 q と運動量 p として，Poisson 括弧を $\{f, g\} = \partial_q f \partial_p g - \partial_p f \partial_q g$ と定めれば，式 (A.29) は古典力学における質点系の方程式に他ならない．

流体やプラズマなどの連続体においても同様の定式化が可能であるが，Poisson 括弧が状態変数を含むような複雑な形になる．例えば 2 次元非圧縮性流体の渦度方程式は流れ関数 ψ と渦度 $\omega = \Delta \psi$ を用いて

$$\partial_t \omega = [\omega, \psi] \quad (\text{A.30})$$

と表されるが、この方程式は状態変数を渦度 ω として Hamiltonian と Poisson 括弧を

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{2} \int v^2 d^2x = -\frac{1}{2} \int \omega \psi d^2x, \\ \{F, G\} &= \int \omega \left[\frac{\delta F}{\delta \omega}, \frac{\delta G}{\delta \omega} \right] d^2x \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

と定めれば式 (A.29) の形に表される*. $\delta F/\delta \omega$ は

$$\delta F = F(\omega + \epsilon w) - F(\omega) = \epsilon \int \frac{\delta F}{\delta \omega} w d^2x + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{A.32})$$

によって定義される汎関数微分であり、 $\delta H/\delta \omega = -\psi$ である.

Poisson 括弧は、しばしば Poisson 作用素と呼ばれる作用素 \mathcal{J} を用いて

$$\{F, G\} = \left\langle \frac{\delta F}{\delta u^i}, \mathcal{J}^{ij} \frac{\delta G}{\delta u^j} \right\rangle \quad (\text{A.33})$$

という形に書き換えられる. ただし $\langle \circ, \circ \rangle$ は内積を表す. $\delta F/\delta \mathbf{u}$ は内積を用いて

$$\delta F = F(u^i + \epsilon w) - F(u^i) = \epsilon \left\langle \frac{\delta F}{\delta u^i}, w^i \right\rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{A.34})$$

と定義される. 質点系の例であれば内積は関数の積またはベクトルの内積であり、 $\delta F/\delta u$ は偏

微分 $\partial_u F$ である. そして \mathcal{J} はシンプレクティック行列 $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ である†. 流体やプラズマであれば内積は関数の積をとってから空間積分したものであり、 $\delta F/\delta u$ は式 (A.32) と同様に定義される汎関数微分である. そして \mathcal{J} は、例えば式 (A.31) の Poisson 括弧の場合は

$$\{F, G\} = - \int \frac{\delta F}{\delta \omega} \left[\omega, \frac{\delta G}{\delta \omega} \right] d^2x = \left\langle \frac{\delta F}{\delta \omega}, - \left[\omega, \frac{\delta G}{\delta \omega} \right] \right\rangle \quad (\text{A.35})$$

と変形できるから $\mathcal{J} = -[\omega, \circ]$ である. \mathcal{J} を用いれば、状態変数の時間発展方程式は

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \{\mathbf{u}, H\} = \left\langle \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta u^i}, \mathcal{J}^{ij} \frac{\delta H}{\delta u^j} \right\rangle = \mathcal{J} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} \quad (\text{A.36})$$

と表される. ただしこの式の左辺の時間微分はあくまで状態変数としての時間微分であって、たとえ流体が対象でも物質微分ではないことに注意しなければならない. 流体やプラズマなどの場の量を対象にする場合は、時間に関する偏微分になる.

* 境界条件を、例えば周期境界や Dirichlet 境界条件など、表面積分がゼロになるようにとっている.

† 行列はベクトルをベクトルにうつす作用素である.

流体やプラズマの Hamilton 形式が質点系のそれと大きく異なるのは、Poisson 括弧や Poisson 作用素が核、すなわち作用させるとゼロになる非自明な量を持つということである。このような場合、Hamilton 形式は非正準であるという。例えば 2 次元非圧縮性流体の場合を考えると、渦度の任意関数 $f(\omega)$ は $[\omega, f'(\omega)] = 0$ を満たすから、任意の K に対して $\{K, f(\omega)\} = 0$ となる。その結果、 $f(\omega)$ は Hamiltonian によらず保存するのである。このような、Poisson 括弧や Poisson 作用素の核から生まれる保存量のことを Casimir 不変量という。

A.2.2 ドリフト波方程式の Hamilton 形式

Hasegawa–Mima 方程式は Hamilton 形式によって記述することができる [41]。 $\partial_y \phi = -[\phi, x]$ であるから、Hasegawa–Mima 方程式 (A.19) は次のような形に書き換えられる：

$$\partial_t(\phi - \Delta\phi - \beta x) + [\phi, \phi - \Delta\phi - \beta x] = 0. \quad (\text{A.37})$$

規格化の記号は省略している。状態変数を $q = \phi - \Delta\phi - \beta x$ として、Hamiltonian H と Poisson 作用素 \mathcal{J} を

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int (\phi^2 + |\nabla\phi|^2) d^2x, \\ \mathcal{J} &= [q, \circ] \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

と定めれば、 $\delta H / \delta q = \phi$ なので Hasegawa–Mima 方程式 (A.37) は式 (A.36) の形で表される。

傾圧 Hasegawa–Mima 方程式 (A.28) も、同様に Hamilton 形式によって記述することができる [28]。まず次のように書き換える：

$$\begin{aligned} \partial_t(\phi - \Delta\phi - \beta x) + [\phi, \phi - \Delta\phi - \beta x] + [\phi, s - \alpha x] - [\beta x, s - \alpha x] &= 0, \\ \partial_t(s - \alpha x) + [\phi, s - \alpha x] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

ただし本文と同様に $s = p - \Gamma\phi$ とした。よって状態変数を $\mathbf{u} = (q, \sigma)$, $q = \phi - \Delta\phi - \beta x$, $\sigma = s - \alpha x$ として、Hamiltonian H と Poisson 作用素 \mathcal{J} を

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int \left[\phi^2 + |\nabla\phi|^2 + \frac{s^2}{\Gamma} - 2 \left(\beta + \frac{\alpha}{\Gamma} \right) x s \right] d^2x, \\ \mathcal{J} &= \begin{pmatrix} [q, \circ] + [\sigma, \circ] & [\sigma, \circ] \\ [\sigma, \circ] & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

と定めれば、 $\delta H / \delta q = \phi$, $\delta H / \delta \sigma = \sigma / \Gamma - \beta x$ なので、傾圧 Hasegawa–Mima 方程式 (A.39)

は式 (A.36) の形で表される．このようにして，本文で用いた，傾圧 Hasegawa–Mima 方程式の Hamiltonian が構成されるのである．なお式 (A.40) から，傾圧 Hasegawa–Mima 方程式の Casimir 不変量は

$$\mathcal{C} = \int [qf(\sigma) + g(\sigma)] d^2x \quad (\text{A.41})$$

と表される．

最後に少し注意を述べておく．式 (A.40) には xs という形の項が含まれており，これが熱として本文で重要視されている．この x というのは， $\partial_y \phi = [x, \phi]$ のように ∂_y の項を Jacobian で表現するために用いたものである．これは背景密度や背景温度の勾配が x 方向を向いているというのが理由である．そのため，この x は適当な x_* を用いて $x - x_*$ と置き換えても $[x - x_*, \phi] = \partial_y \phi$ なので変化はない．式 (A.40) を見ると $x = 0$ で Hamiltonian の密度が揺動のエネルギー密度と一致するが， $x = 0$ に特別な意味があるわけではないことに注意されたい．なお x を $x - x_*$ と置き換えることは，Hamiltonian に s の定数倍の積分の項を加えることを意味しているが，その項は式 (A.41) から Casimir 不変量である．

補足 B

数値解析の手法

本文中では説明を省略した数値解析の手法について述べる.

x, y 両方向に有限差分法を用いる. 差分点を (i, j) で表し, x, y それぞれの格子間隔を $\Delta x, \Delta y$ とおけば, 空間微分は中心差分によって

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}, & \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j} &= \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y}, \\ (\Delta f)_{i,j} &= \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

と評価される. ただし対流を表す Jacobian

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \quad (\text{B.2})$$

には式 (B.1) の離散化をそのまま用いるのではなくて, Arakawa Jacobian [36] と呼ばれる手法を用いる. Arakawa Jacobian については B.1 節で述べる.

時間進行法には多段階法と呼ばれる手法を用いる. 多段階法の例としては, 陽的な Adams–Bashforth 法や陰的な Adams–Moulton 法, もしくは Adams–Bashforth–Moulton 法のような予測子・修正子法などが知られている. 本研究では, Karniadakis–Israeli–Orszag [37] によって提案された, より数値的に安定な多段法を利用する. B.2 節ではこの手法について述べ, それに続く B.3 節では実装する上での計算過程について述べる.

このような Arakawa Jacobian と Karniadakis–Israeli–Orszag の多段階法との組み合わせは, ドリフト・Alfvén 乱流 [42] や抵抗性ドリフト波乱流 [43] などの計算に用いられている. 有限差分法ではなくてスペクトル法が用いられることも多いが, Karniadakis–Israeli–Orszag

の多段階法を利用した上で Arakawa Jacobian とスペクトル法とを比較すると、ほとんど同一の性能を持つことが調べられている [44].

B.1 Arakawa Jacobian

Arakawa Jacobian は元々、2次元非圧縮性流体の方程式を解くために考案された手法である。その方程式は、Jacobian (B.2) を用いて

$$\partial_t \omega = [\omega, \psi] \quad (\text{B.3})$$

と表される。 ψ は流れ関数、 ω は渦度で、 $\omega = \Delta \psi$ という関係がある。

2次元非圧縮性流体方程式 (B.3) は、次のように定義されるエネルギー E とエンストロフィー W という特徴的な保存量を持っている：

$$E = \int \frac{v^2}{2} d^2x = \int \frac{|\nabla \psi|^2}{2} d^2x,$$

$$W = \int \frac{\omega^2}{2} d^2x = \int \frac{|\Delta \psi|^2}{2} d^2x.$$

数値計算においてもこれらの保存量は保存されるべきだが、(B.2) をそのまま中心差分した

$$J_{i,j}^{++} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_{i,j} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{i,j}$$

$$= \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} \frac{g_{i,j+1} - g_{i,j-1}}{2\Delta y} - \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \frac{g_{i+1,j} - g_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (\text{B.4})$$

を利用すると、これは f と g について反対称だがエネルギーもエンストロフィーも保存されない。さらに数値的な不安定性が発生しうることがわかっている。Arakawa [36] によって提案された方法では、 J^{++} に加えて

$$J_{i,j}^{+\times} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(f \frac{\partial g}{\partial y} \right) \right)_{i,j} - \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(f \frac{\partial g}{\partial x} \right) \right)_{i,j}$$

$$= \frac{1}{2\Delta x} \left(f_{i+1,j} \frac{g_{i+1,j+1} - g_{i+1,j-1}}{2\Delta y} - f_{i-1,j} \frac{g_{i-1,j+1} - g_{i-1,j-1}}{2\Delta y} \right)$$

$$- \frac{1}{2\Delta y} \left(f_{i,j+1} \frac{g_{i+1,j+1} - g_{i-1,j+1}}{2\Delta x} - f_{i,j-1} \frac{g_{i+1,j-1} - g_{i-1,j-1}}{2\Delta x} \right), \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned}
J_{i,j}^{\times+} &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} g \right) \right)_{i,j} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} g \right) \right)_{i,j} \\
&= \frac{1}{2\Delta y} \left(\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1}}{2\Delta x} g_{i,j+1} - \frac{f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta x} g_{i,j-1} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta y} g_{i+1,j} - \frac{f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta y} g_{i-1,j} \right) \quad (\text{B.6})
\end{aligned}$$

という 2 種類の差分式を利用する.

J^{++} , $J^{+\times}$, $J^{\times+}$ はどれも $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ の極限において $[f, g]$ に一致する. しかし Jacobian が満たすべき, 反対称性, エネルギー保存, エンストロフィー保存という 3 つの性質についてはそれぞれ異なる振る舞いを見せる. 既に述べたように J^{++} 単独では反対称だがエネルギーもエンストロフィーも保存しない. 対して $J^{+\times}$ 単独ではエネルギーは保存するがエンストロフィーは保存せず, $J^{\times+}$ 単独ではエンストロフィーは保存するがエネルギーは保存しない. そしてどちらも f と g について反対称ではない.

これらを組み合わせた量についても考えると, $(J^{++} + J^{+\times})/2$ を利用するとエンストロフィーが保存し, $(J^{++} + J^{\times+})/2$ を利用するとエネルギーが保存する. そして, $(J^{\times+} + J^{+\times})/2$ は f と g について反対称である. そこで,

$$J = \frac{J^{++} + J^{+\times} + J^{\times+}}{3} \quad (\text{B.7})$$

を利用することで, 差分化された式においても反対称性, エネルギー保存, エンストロフィー保存が満たされる. 加えて数値的な不安定性も引き起こさないので, 長時間の計算が可能になる.

B.2 多段階法

多段階法とは, $n+1$ ステップ目の値 u^{n+1} を評価するために, n ステップ目の値 u^n だけでなく, u^{n-1} などの過去の値を用いるものである. ここでは, Karniadakis–Israeli–Orszag [37] によって提案された多段階法について, 常微分方程式

$$\frac{du}{dt} = F + G \quad (\text{B.8})$$

に対して適用することで説明をおこなう. 右辺を 2 つの項に分けたのは, 非線形項のような陽的に解く部分 F と, 散逸項のような陰的に解く部分 G とを区別するためである. 以降では,

簡単のために時間微分 du/dt を \dot{u} で表す.

まず式 (B.8) の左辺について,

$$\dot{u}^n = \frac{1}{\Delta t} \left(\gamma_0 u^{n+1} - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k u^{n-k} \right) \quad (\text{B.9})$$

とおく. ただし m は $1 \leq m \leq n-1$ を満たす整数である. この差分式は m 段になっていることがわかる. この式の各項を,

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + \Delta t \dot{u}^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{u}^n + \dots, \\ u^{n-1} = u^n - \Delta t \dot{u}^n + \frac{(-\Delta t)^2}{2} \ddot{u}^n + \dots, \\ u^{n-2} = u^n - 2\Delta t \dot{u}^n + \frac{(-2\Delta t)^2}{2} \ddot{u}^n + \dots, \\ \vdots \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

のように展開する. すると式 (B.9) の右辺は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (\gamma_0 - \alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots) u^n \\ & + (\gamma_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots) \dot{u}^n + \frac{\Delta t}{2} (\gamma_0 - \alpha_1 - 4\alpha_2 - \dots) \ddot{u}^n + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

となる. γ_0, α_k を調整して, \dot{u}^n の係数を 1 にし, 残りをゼロにすれば, \dot{u} の差分式が得られる.

次に式 (B.8) の右辺について,

$$F^{n+1} + G^{n+1} = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k F^{n-k} + G^{n+1} \quad (\text{B.12})$$

とおく. G については陰的に解くので G^{n+1} そのままにしている. F については陽的に解くので, $n+1$ ステップ目の値を n ステップ目までの値から評価する. 式 (B.10) と同様に,

$$\begin{cases} F^n = F^{n+1} - \Delta t \dot{F}^{n+1} + \frac{(-\Delta t)^2}{2} \ddot{F}^{n+1} + \dots, \\ F^{n-1} = F^{n+1} - 2\Delta t \dot{F}^{n+1} + \frac{(-2\Delta t)^2}{2} \ddot{F}^{n+1} + \dots, \\ F^{n-2} = F^{n+1} - 3\Delta t \dot{F}^{n+1} + \frac{(-3\Delta t)^2}{2} \ddot{F}^{n+1} + \dots, \\ \vdots \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

と展開する．すると式 (B.12) の右辺のうち、 F に関する和は

$$(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \dots)F^{n+1} - \Delta t(\beta_0 + 2\beta_1 + 3\beta_2 + \dots)\dot{F}^{n+1} + \frac{(\Delta t)^2}{2}(\beta_0 + 4\beta_1 + 9\beta_2 + \dots)\ddot{F}^{n+1} \quad (\text{B.14})$$

となる． β_k を調整して、今度は F^{n+1} の係数を 1 にし、残りをゼロにすれば、 F^{n+1} の差分式が得られる．

$m = 1, 2, 3$ の場合について得られる公式は以下のようになる：

$$\begin{aligned} m = 1 : & \frac{1}{\Delta t} (u^{n+1} - u^n) = F^n + G^{n+1}; \\ m = 2 : & \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{3}{2}u^{n+1} - 2u^n + \frac{1}{2}u^{n-1} \right) = 2F^n - F^{n-1} + G^{n+1}; \\ m = 3 : & \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{11}{6}u^{n+1} - 3u^n + \frac{3}{2}u^{n-1} - \frac{1}{3}u^{n-2} \right) = 3F^n - 3F^{n-1} + F^{n-2} + G^{n+1}. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

1 段階公式 ($m = 1$) は通常の前進 Euler 法で得られるものと同一であることがわかる．本研究では 2 段階公式 ($m = 2$) を用いている．

最後に少し注意を述べておく． m 段公式を利用するには $m - 1$ ステップ分だけの値が必要になる．そのため数値計算の最初の $m - 1$ ステップにおいては多段公式が利用できないので、代わりに前進 Euler 法や Lunge-Kutta 公式などの 1 段法を用いる必要がある．

B.3 ADI 法

傾圧 Hasegawa-Mima 方程式 (2.10) に対して多段階法を適用する．式 (B.8) における u は式 (2.10) における $\phi - \Delta\phi$ もしくは $T - (\gamma - 1)\tau\phi$ である．散逸項は半陰的に解くため、 F と G に 1/2 ずつ分ける*．非線形項や 1 階微分項は陽的に解くので、すべて F になる．よって、傾圧 Hasegawa-Mima 方程式 (2.10) の差分式は、2 段階公式を適用すると

$$\frac{\frac{3}{2}u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + \frac{1}{2}u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} = 2F_{i,j}^n - F_{i,j}^{n-1} + \frac{\nu}{2(\Delta x)^2}(\delta_x^2 u_{i,j} + \delta_y^2 u_{i,j}) \quad (\text{B.16})$$

* 空間を 1 次元とし $m = 1$ の場合 (前進 Euler 法) を考えれば、これはよく知られた Crank-Nicolson 法 [45, Sec. 20.2] に他ならない．

という形になる．ただし $\Delta x = \Delta y$ としていて， δ_x^2 , δ_y^2 はそれぞれ x, y 方向への 2 階の中心差分を表している：

$$\begin{aligned}\delta_x^2 u_{i,j} &= u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}, \\ \delta_y^2 u_{i,j} &= u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}.\end{aligned}\tag{B.17}$$

式 (B.16) を整理すれば，

$$\left[1 - \frac{\nu\Delta t}{3(\Delta x)^2}(\delta_x^2 + \delta_y^2)\right] u_{i,j}^{n+1} = \frac{2}{3} \left[2u_{i,j}^n - \frac{1}{2}u_{i,j}^{n-1} + \Delta t(2F_{i,j}^n - F_{i,j}^{n-1})\right] \tag{B.18}$$

のようになる．さらに左辺を因数分解して

$$\begin{aligned}&\left[1 - \frac{\nu\Delta t}{3(\Delta x)^2}\delta_y^2\right] \left[1 - \frac{\nu\Delta t}{3(\Delta x)^2}\delta_x^2\right] u_{i,j}^{n+1} \\ &= \frac{2}{3} \left[2u_{i,j}^n - \frac{1}{2}u_{i,j}^{n-1} + \Delta t(2F_{i,j}^n - F_{i,j}^{n-1})\right] + \left[\frac{\nu\Delta t}{3(\Delta x)^2}\right]^2 \delta_x^2 \delta_y^2 u_{i,j}^{n+1}\end{aligned}\tag{B.19}$$

とし，右辺の最終項での u^{n+1} を u^n で置き換えた

$$\left\{ \begin{aligned} \left[1 - \frac{\nu\Delta t}{3(\Delta x)^2}\delta_y^2\right] u_{i,j}^* &= \frac{2}{3} \left[2u_{i,j}^n - \frac{1}{2}u_{i,j}^{n-1} + \Delta t(2F_{i,j}^n - F_{i,j}^{n-1})\right] \\ &\quad + \left[\frac{\nu\Delta t}{3(\Delta x)^2}\right]^2 \delta_x^2 \delta_y^2 u_{i,j}^n, \\ \left[1 - \frac{\nu\Delta t}{3(\Delta x)^2}\delta_x^2\right] u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^* \end{aligned} \right. \tag{B.20}$$

という式を数値計算で解く．もちろんこの置き換えによって誤差 $[\nu\Delta t/3(\Delta x)^2]\delta_x^2 \delta_y^2 (u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n)$ が生じるが，これは非常に小さいものである．何故ならば $u^{n+1} - u^n = \mathcal{O}(\Delta t)$ であり，さらに $\nu\Delta t/(\Delta x)^2$ を小さくとるためである． $\nu\Delta t/(\Delta x)^2$ という量は波動方程式における Courant 数のようなもので，陽解法の場合は 0.5 より小さい値にとる必要がある [45, Sec. 20.1, Sec. 20.2]．陰的もしくは半陰的に解く場合にはこの制限はないのだが，方程式には拡散項以外も含まれているので小さい値にとることが普通である．

式 (B.18) を解くことは x, y 方向を同時に陰的に解くことを意味している．対して式 (B.20) を解くことは， x, y の片方を陰的に解いて，もう片方を陽的に解くという作業を交互におこなうことを意味している．後者のような手法は ADI 法 (Alternating Direction Implicit method, 交互方向陰解法) と呼ばれる [45, Sec. 20.5.2]．

式 (B.18) を解く場合，左辺は $u_{i,j}^{n+1}$ が N^2 個並ぶベクトルとそれに作用する N^2 次正方行列

との積であるが、この行列は五重対角行列になる。そのため逆行列を両辺にかけて方程式を解くことが難しい。対して式 (B.20) を解くのは比較的容易である。何故ならば、現れる行列が、三重対角行列もしくは三重対角行列からわずかに異なる行列になるからである。三重対角行列の逆行列は簡単に高速に求められる [45, Sec. 2.4]。既に述べたように、式 (B.20) に変形することによる誤差は小さいので、式 (B.18) を解くよりも式 (B.20) を解くほうがよい。

次に、式 (B.20) を解く手順について説明する。簡単のため、 x, y 方向にはそれぞれ差分点が N 個あるとする。 y 方向には周期境界条件を課し、 x 方向には Dirichlet 境界条件を課す。そして $r = \nu \Delta t / 3(\Delta x)^2$ とおく。第 1 式の左辺は、各 $i = 1, \dots, N$ に対して

$$\begin{pmatrix} 1+2r & -r & 0 & \cdots & 0 & -r \\ -r & 1+2r & -r & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & -r & 1+2r & -r \\ -r & 0 & \cdots & 0 & -r & 1+2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i,1}^* \\ u_{i,2}^* \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{i,N-1}^* \\ u_{i,N}^* \end{pmatrix} \quad (\text{B.21})$$

となるので、後に述べるように Sherman–Morrison の公式を利用して逆行列が計算できる。第 2 式は、各 $j = 1, \dots, N$ に対して Dirichlet 境界条件から $u_{1,j}^{n+1}, u_{N,j}^{n+1}$ が与えられるので、

$$\begin{pmatrix} 1+2r & -r & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -r & 1+2r & -r & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -r & 1+2r & -r \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -r & 1+2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2,j}^{n+1} \\ u_{3,j}^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2,j}^{n+1} \\ u_{N-1,j}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{2,j}^* + ru_{1,j}^{n+1} \\ u_{3,j}^* \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2,j}^* \\ u_{N-1,j}^* + ru_{N,j}^{n+1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.22})$$

となり、三重対角行列の逆行列を計算すれば方程式を解くことができる。

式 (B.21) で現れた行列の逆行列を求めるには、Sherman–Morrison の公式 [45, Sec. 2.7.1] を利用すればよい。Sherman–Morrison の公式とは、行列 A とベクトル \mathbf{u}, \mathbf{v} に対して

$$(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top)^{-1} = A^{-1} - \frac{(A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\top A^{-1})}{1 + \mathbf{v}^\top A^{-1}\mathbf{u}} \quad (\text{B.23})$$

が成り立つというものである。ただし \mathbf{u}^\top は \mathbf{u} の転置を表す。式 (B.21) の行列は、 $\mathbf{u} =$

$(1, 0, \dots, 0, -r)^\top$ とすれば三重対角行列と $\mathbf{u}\mathbf{u}^\top$ との和にできる. そのため三重対角行列の逆行列を計算すれば方程式を解くことができる.

参考文献

- [1] A. Hasegawa, “Self-organization processes in continuous media,” *Adv. Phys.* **34**, 1–42 (1985).
- [2] R. Hide, “Origin of Jupiter’s Great red Spot,” *Nature* **190**, 895–896 (1961).
- [3] C. R. Chapman, “Jupiter’s zonal winds: Variation with latitude,” *J. Atmos. Sci.* **26**, 986–990 (1969).
- [4] A. P. Ingersoll *et al.*, “Dynamics of Jupiter’s Atmosphere,” in *Jupiter: The Planet, Satellites and Magnetosphere*, edited by F. Bagenal, T. E. Dowling, and W. B. McKinnon (Cambridge University Press, 2004), pp. 105–128.
- [5] 国立天文台 編, 理科年表 平成 22 年度版 (丸善, 2010).
- [6] A. Hasegawa and M. Wakatani, “Self-organization of electrostatic turbulence in a cylindrical plasma,” *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1581–1584 (1987).
- [7] Z. Lin *et al.*, “Turbulent transport reduction by zonal flows: massively parallel simulations,” *Science* **281**, 1835–7 (1998).
- [8] F. Wagner *et al.*, “Regime of Improved Confinement and High Beta in Neutral-Beam-Heated Divertor Discharges of the ASDEX Tokamak,” *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1408–1412 (1982).
- [9] ITER Physics Basis Editors, ITER Physics Expert Group Chairs and Co-Chairs, and ITER Joint Central Team and Physics Integration Unit, “Chapter 1: Overview and summary,” *Nucl. Fusion* **39**, 2137–2174 (1999).
- [10] S. Champeaux and P. H. Diamond, “Streamer and zonal flow generation from envelope modulations in drift wave turbulence,” *Phys. Lett. A* **288**, 214–219 (2001).
- [11] A. N. Kolmogorov, “The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **30**, 301–305 (1941); “Dis-

- sipation of energy in the locally isotropic turbulence,” Dokl. Akad. Nauk SSSR **32**, 16–18 (1941).
- [12] R. H. Kraichnan, “Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence,” Phys. Fluids **10**, 1417–1423 (1967).
- [13] C. E. Leith, “Diffusion Approximation for Two-Dimensional Turbulence,” Phys. Fluids **11**, 671–673 (1968).
- [14] G. K. Batchelor, “Computation of the Energy Spectrum in Homogeneous Two-Dimensional Turbulence,” Phys. Fluids **12**, II233–II239 (1969).
- [15] W. Horton, “Drift waves and transport,” Rev. Mod. Phys. **71**, 735–778 (1999).
- [16] A. Hasegawa and K. Mima, “Pseudo-three-dimensional turbulence in magnetized nonuniform plasma,” Phys. Fluids **21**, 87–92 (1978).
- [17] A. Hasegawa, C. G. MacLennan, and Y. Kodama, “Nonlinear behavior and turbulence spectra of drift waves and Rossby waves,” Phys. Fluids **22**, 2122–2129 (1979).
- [18] J. G. Charney, “On the scale of atmospheric motions,” Geophys. Publ. Kosjones. Nors. Videnshap. Akad. Oslo **17**, 3–17 (1948).
- [19] W. Horton and A. Hasegawa, “Quasi-two-dimensional dynamics of plasmas and fluids,” Chaos **4**, 227–251 (1994).
- [20] A. Hasegawa *et al.*, “Vortex Formation by Baroclinic Vector in Laser-Pellet Interaction,” Phys. Rev. Lett. **41**, 1656–1659 (1978); Phys. Rev. Lett. **42**, 412 (1979).
- [21] F. Del Sordo and A. Brandenburg, “Vorticity production through rotation, shear, and baroclinicity,” Astron. Astrophys. **528**, A145 (2011).
- [22] Lord Kelvin, “On Vortex Motion,” Trans. Roy. Soc. Edinburgh **25**, 217–260 (1869).
- [23] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Dover, 1981).
- [24] Z. Yoshida, “Lecture Note: Vorticity Creation and Entropy Production,” in *International Advanced Workshop on the Frontiers of Plasma Physics* (Trieste, 2010).
- [25] Z. Yoshida and S. M. Mahajan, ““Maximum” entropy production in self-organized plasma boundary layer: A thermodynamic discussion about turbulent heat transport,” Phys. Plasmas **15**, 032307 (2008).
- [26] Y. Kawazura and Z. Yoshida, “Entropy production rate in a flux-driven self-organizing

- system,” Phys. Rev. E **82**, 066403 (2010); “Comparison of entropy production rates in two different types of self-organized flows: Bénard convection and zonal flow,” Phys. Plasmas **19**, 012305 (2012).
- [27] F. L. Hinton, “Thermal confinement bifurcation and the L- to H-mode transition in tokamaks,” Phys. Fluids B **3**, 696–704 (1991); F. L. Hinton and G. M. Staebler, “Particle and energy confinement bifurcation in tokamaks,” Phys. Fluids B **5**, 1281–1288 (1993).
- [28] 川面 洋平, *Large Scale Structures in Plasma Created by Baroclinic Vorticity Generation and Thermal Excitation of Turbulence*, 博士論文, 東京大学 (2013).
- [29] S. Hamaguchi and W. Horton, “Fluctuation spectrum and transport from ion temperature gradient driven modes in sheared magnetic fields,” Phys. Fluids B **2**, 1833–1851 (1990).
- [30] C. B. Kim, W. Horton, and S. Hamaguchi, “New fluid model for the turbulent transport due to the ion temperature gradient,” Phys. Fluids B **5**, 1516–1522 (1993).
- [31] J. Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics*, 2nd ed. (Springer-Verlag, 1987).
- [32] P. B. Rhines, “Waves and turbulence on a beta-plane,” J. Fluid Mech. **69**, 417–443 (1975).
- [33] C. A. Jones, “Multiple jets and zonal flow on Jupiter,” Geophys. Res. Lett. **30**, 1731 (2003).
- [34] S. Danilov and V. M. Gryanik, “Barotropic beta-plane turbulence in a regime with strong zonal jets revisited,” J. Atmos. Sci. **61**, 2283–2295 (2004).
- [35] 洲鎌 英雄, 矢木 雅敏, “イオン温度勾配不安定性 (ITG モード),” プラズマ・核融合学会誌 **76**, 1007–1018 (2000).
- [36] A. Arakawa, “Computational Design for Long-Term Numerical Integration of the Equations of Fluid Motion: Two-Dimensional Incompressible Flow. Part I,” J. Comput. Phys. **1**, 119–143 (1966); J. Comput. Phys. **135**, 103–114 (1997), reprint.
- [37] G. E. Karniadakis, M. Israeli, and S. A. Orszag, “High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations,” J. Comput. Phys. **97**, 414–443 (1991).
- [38] F. L. Waelbroeck, P. J. Morrison, and W. Horton, “Hamiltonian formulation and

- coherent structures in electrostatic turbulence,” *Plasma Phys. Control. Fusion* **46**, 1331–1350 (2004).
- [39] R. D. Hazeltine and J. D. Meiss, *Plasma Confinement* (Dover, 2003).
- [40] P. J. Morrison, “Hamiltonian description of the ideal fluid,” *Rev. Mod. Phys.* **70**, 467–521 (1998).
- [41] A. Weinstein, “Hamiltonian structure for drift waves and geostrophic flow,” *Phys. Fluids* **26**, 388–390 (1983).
- [42] V. Naulin, “Electromagnetic transport components and sheared flows in drift-Alfvén turbulence,” *Phys. Plasmas* **10**, 4016–4028 (2003).
- [43] R. Numata, R. Ball, and R. L. Dewar, “Bifurcation in electrostatic resistive drift wave turbulence,” *Phys. Plasmas* **14**, 102312 (2007).
- [44] V. Naulin and A. H. Nielsen, “Accuracy of Spectral and Finite Difference Schemes in 2D Advection Problems,” *SIAM J. Sci. Comput.* **25**, 104–126 (2003).
- [45] W. H. Press *et al.*, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, 3rd ed. (Cambridge University Press, 2007).

謝辞

本研究に取り組むにあたって、プラズマ理工学研究室の皆様には大変お世話になりました。

吉田善章教授には、卒業研究のときから指導教員として丁寧なご指導を頂きまして、深く感謝しています。日々の研究に関する助言から進路に関する相談まで、多くのことでお世話になりました。先生の助言は、私には見えていなかった本質を突くものであって、研究を進める上で欠かせないものでした。研究そのものの以外にも、発表の仕方や研究費に関する書類の書き方など、研究者にとって重要なことを多く学ばせて頂きました。先生から教わったことをまだまだ完全に吸収できているとは思いませんが、これからもより一層研究に励んでいきます。

核融合科学研究所より着任された西浦正樹准教授には、まだ短い間ですが様々なお話を聞かせて頂きました。私の実験に関する知識が乏しいのもあり、まだ研究に関して深い話はできていませんが、研究所と大学の研究室との違いなど、これまであまり耳にしていなかったことを知ることができました。

以前在籍していらっしゃった先生方にも、大変お世話になりました。現在は鳥取大学に在任されている古川勝准教授には、数値計算を中心に様々なアドバイスを頂きました。客員准教授としていらっしゃった Francesco Volponi 先生は、1 年間という短い間でしたが海外の話を多くしてくださいました。森川淳二先生、齋藤晴彦先生には、研究に限らず様々なお話を聞かせて頂き、昼食や研究室の行事などで楽しい時間を過ごすことができました。

秘書の北山今日子さんには、事務手続きで大変お世話になりました。また日頃から気楽にお話をして頂いて、リラックスすることができました。

研究室の先輩方である、矢野善久さん、川面洋平さん、江本伸悟さん、若林智章さん、Hamdi Abdelhamid さんには、研究に関するお話をして頂いたり、気軽に接してくださいました。皆さんがそれぞれ異なるテーマに取り組んでいらっしゃるので、非常にためになることが多かったです。特に川面さんは、このテーマの先行研究に取り組んでいらっしゃったこともあり、日頃から様々なアドバイスをしてくださいました。ご自身の研究で忙しいときにも面倒を見て下

さり、本当に感謝しています。既に卒業された先輩方である、金子雄太さん、後藤義哉さん、笠岡紀和さん、坂本渉さんにもお世話になりました。研究室の雰囲気に早く慣れることができたのは、先輩方みなさんが親しく接して下さったおかげです。

同期の野上智晃君、近末吉人君、佐々木悠大君とは、研究や就活などの真面目なことから日常生活のくだらないことまで、気兼ねなく接することができて、充実した2年間を共に過ごすことができました。これから進路は別れますが、全員がそれぞれの舞台で活躍できることを願っています。

後輩の佐藤直木君、山崎美由梨さん、種橋航君には、先輩らしいアドバイスがあまりできなかったように思いますが、お互いに今後の研究生活が実りあるものになることを願っています。

最後に、これまでの人生を支えてくれ、また博士課程へ進学することを後押ししてくれた両親に心から感謝します。

2014 年 1 月 大野裕司

研究発表

A. 口頭発表

1. 大野 裕司, 川面 洋平, 吉田 善章, 「傾圧効果によって駆動されるドリフト波乱流モデルにおける温度勾配・密度勾配と構造形成」, 日本物理学会第 68 回年次大会, 29aEB-8, 広島大学 (2013 年 3 月).
2. 大野 裕司, 川面 洋平, 吉田 善章, 「境界から熱的に駆動されるドリフト波乱流のエントロピー生成と構造形成」, 日本物理学会 2013 年秋季大会, 25aKB-2, 徳島大学 (2013 年 9 月).
3. (発表予定)
大野 裕司, 川面 洋平, 吉田 善章, 「ドリフト波乱流の熱的駆動と自己組織化」, 日本物理学会第 69 回年次大会, 28aAX-3, 東海大学 (2014 年 3 月).

B. ポスター発表

1. 大野 裕司, 「熱的に駆動されるドリフト波乱流におけるエントロピー生成と構造形成」, プラズマ科学のフロンティア 2013 研究会, 核融合科学研究所 (2013 年 8 月).
2. 大野 裕司, 「熱的に駆動されるドリフト波乱流におけるエントロピー生成と構造形成」, 第 52 回プラズマ若手夏の学校, 神奈川県三浦市 (2013 年 9 月).