

東京大学大学院新領域創成科学研究科
基盤科学研究系
先端エネルギー工学専攻

平成 25 年度
修士論文

非正準 Hamilton 形式に基づく
理想流体の定常状態のアニーリングシミュレーション

2014 年 1 月 提出

指導教員 吉田善章教授

47-126085 近末 吉人

目次

第 1 章	はじめに	1
第 2 章	非正準 Hamilton 力学系とアニーリング法	4
2.1	非正準 Hamilton 力学系とその保存量	4
2.1.1	非正準 Hamilton 力学系とは	4
2.1.2	非正準 Hamilton 力学系の保存量	6
2.1.3	Casimir 不変量と定常状態	8
2.2	非正準 Hamilton 力学系の例	9
2.2.1	2次元非圧縮中性流体の非正準 Hamilton 形式	9
2.2.2	2次元低ベータ簡約化 MHD の非正準 Hamilton 形式	11
2.3	アニーリング法の先行研究の紹介	15
2.3.1	人工的な移流項によるアニーリング法	15
2.3.2	Hamilton 力学系に拡張されたアニーリング法	17
2.3.3	対称括弧と Dirac 括弧を用いたアニーリング法	18
第 3 章	Casimir 不変量の値を指定したアニーリング法	21
3.1	Casimir 不変量の値を指定したアニーリング法の理論	21
3.1.1	Casimir 不変量の値を指定する目的	21
3.1.2	指定した Casimir 不変量の値を持つ初期条件への調整方法	23
3.1.3	Casimir 不変量の値を指定したアニーリング法のコードの概要	24
3.2	Casimir 不変量の値を指定したアニーリング法のシミュレーション	27
3.2.1	定常状態に摂動を加えた初期条件におけるシミュレーション	27
3.2.2	波数が 2 の構造を持つ初期条件におけるシミュレーション	33
3.2.3	3.2 節の考察	33
第 4 章	2次元低ベータ簡約化 MHD のアニーリング法	37
4.1	2次元低ベータ簡約化 MHD のアニーリング法の理論	37

4.1.1	アニーリング法を 2 次元低ベータ簡約化 MHD へ応用する目的 . . .	37
4.1.2	2 次元低ベータ簡約化 MHD のアニーリング法の式	38
4.1.3	2 次元低ベータ簡約化 MHD のアニーリング法のコードの概要 . . .	40
4.2	2 次元低ベータ簡約化 MHD のアニーリング法のシミュレーション	43
4.2.1	線形関係に変化を加えた初期条件におけるシミュレーション	43
4.2.2	非線形関係に変化を加えた初期条件におけるシミュレーション . . .	44
4.2.3	4.2 節の考察	51
第 5 章	結論	55
付録 A	アニーリング法のコードのテスト	56
A.1	数値計算の理論	56
A.1.1	空間微分の計算方法	56
A.1.2	時間発展の計算方法	57
A.2	先行研究と同様なシミュレーションによるテスト	60
A.2.1	人工的な移流項によるアニーリング法のテスト	60
A.2.2	Green 関数を用いた対称括弧によるアニーリング法のテスト	64
付録 B	3 章の補足	67
B.1	最急降下法により指定できる Casimir 不変量の値の範囲	67
B.1.1	Casimir 不変量の値を指定するテストコードの概要	67
B.1.2	Casimir 不変量の値を指定するテストの結果	68
B.1.3	付録 B.1 の考察	70
B.2	アニーリング法と定常解の安定性	73
B.2.1	不安定な定常状態が初期条件のアニーリング法のコードの概要 . . .	73
B.2.2	不安定な定常状態が初期条件のアニーリング法のシミュレーション .	74
B.2.3	付録 B.2 の考察	76
付録 C	4 章の補足	77
C.1	差分スキームを用いた 2 次元低ベータ簡約化 MHD のアニーリング法 . . .	77
C.1.1	差分スキームを用いたアニーリング法のコードの概要	77
C.1.2	差分スキームを用いたアニーリング法のシミュレーション	78
C.1.3	付録 C.1 の考察	79
C.2	擬スペクトル法を用いた 2 次元低ベータ簡約化 MHD のアニーリング法 .	83
C.2.1	擬スペクトル法を用いたアニーリング法のコードの概要	83

C.2.2	擬スペクトル法を用いたアニーリング法のシミュレーション	84
C.2.3	付録 C.2 の考察	88
	謝辞	89
	参考文献	91
	学会発表	92

第 1 章

はじめに

理想流体の運動は、Euler 変数を用いて非正準 Poisson 括弧と Hamiltonian によって表せる [1, 2]. このような Hamiltonian と Poisson 括弧を持つ力学系は Hamilton 力学系と呼ばれる. Hamilton 力学系では、Poisson 括弧の反対称性から Hamiltonian の保存が導ける. Hamilton 力学系には Hamiltonian の他に少なくとも二種類の保存量が存在することが知られている. 一つは Hamiltonian の幾何学的な対称性から導ける保存量で、Noether の定理に関係する運動の保存量である. もう一つの保存量は非正準 Poisson 括弧の非正準性から導かれる保存量で、Casimir 不変量と呼ばれる. いずれの保存量も運動を理解する上で重要であるが、その中でも Casimir 不変量が理想流体の定常状態と深く関係した特に重要な保存量である. 理想流体の運動は、Casimir leaf と呼ばれる、Casimir 不変量が一定となる位相空間上の面に制限されている. この Casimir leaf 上の Hamiltonian が極値となる場所では、理想流体の運動は定常的になる. つまり、理想流体の定常状態は Casimir 不変量によって特徴づけられる. さらに運動が定常的となる Hamiltonian の極値の凸性を調べることにより、その定常状態の安定性を議論できる [3, 4]. この Liapunov の方法を Hamilton 力学系に応用した方法は、energy-Casimir stability method と呼ばれる. このように Casimir 不変量は、理想流体の定常状態とその非線形安定性を理解する上で重要な保存量となっている.

近年では理想流体の定常状態を理解するためだけでなく、定常状態を求めることにも Casimir 不変量が応用されている [5–8]. その Casimir 不変量を用いた理想流体の定常状態を求める方法がアニーリング法である. アニーリング法は Casimir 不変量を保存した上で Hamiltonian の極値を見つける方法で、初期条件と同じ Casimir leaf 上での理想流体の定常状態が得られる方法である. この方法を最初に提案した Vallis ら [5] の方法は、2次元非圧縮中性流体の渦度方程式の移流項に修正を加えた非物理的な運動の式を解く方法である. この修正された運動の式では渦度が移流により再配列されるだけなので、渦度の任意の関数の積分量である 2次元非圧縮中性流体の Casimir 不変量は保存される. そして、ある特定の移流項では 2次元中性流体の定常状態が求められることを理論的にも数値的にも Vallis

らは示した. Carnevale ら [6] は Vallis らと同じ方法を, 2次元非圧縮中性流体の様々な初期条件の場合に適応できることを数値的に示し, アニーリング法の信頼性を確認した. そして, Shepherd [7] は Vallis らの偽の移流項を用いた定常状態を求める手法を Hamilton 力学系に拡張できることを理論的に示し, アニーリング法の応用の可能性を広げた. Flierl ら [8] は Shepherd の理論を対称括弧を用いた式に拡張し, Green 関数を用いたスムージングにより, 従来のアニーリング法の数値的な困難さを軽減できることを理論的に示した. その上で, Flierl らは Dirac 括弧を用いて, Casimir 不変量以外の角運動量などの運動の保存量も保存させたアニーリング法ができることも理論的に示し, 2次元非圧縮中性流体と準地衡風平衡の場合において数値的にも示した.

このように発展してきたアニーリング法と他の理想流体の定常状態を求める方法を比較して, アニーリング法の特徴を考える. ここでは先行研究で扱われている 2次元非圧縮中性流体の定常状態を求める方法について考える. 2次元非圧縮中性流体の定常状態を求める方法には, 定常的 ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) な式を解く方法と非定常 ($\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$) な式を解く方法の二つに分けられる. アニーリング法は非定常な式を解く方法に含まれるが, 粘性項を含む渦度方程式を解く方法なども同じ非定常な方程式を解く方法である. 粘性項を含む渦度方程式を解く方法とアニーリング法との違いは Casimir 不変量の保存の有無である. 粘性項は Hamiltonian だけでなく, Casimir 不変量も散逸させるため, 初期条件の存在する Casimir leaf と得られた定常解の存在する Casimir leaf は一般的に異なる. よって, 粘性項を含む渦度方程式を解く方法では, Casimir 不変量という理想流体の定常状態を特徴づける保存量の観点から, 初期条件と定常解の関係性がなくなってしまう. ここで, 粘性項を含まない渦度方程式である Hamilton の運動方程式を解く方法では, Casimir 不変量だけでなく Hamiltonian も保存し, Hamiltonian の極値である定常状態が求められないことも注意する. つまり, アニーリング法では初期条件と定常解が同じ Casimir leaf 上に存在することが大きな特徴となっている. この特徴は定常的な方程式を解く方法である Poisson 方程式 ($\nabla_{\perp}^2 \phi = f(\phi)$) を解く方法と比較しても同じことが言える. 実際に Poisson 方程式を解く方法では, 得られる定常解の Casimir 不変量の値は Poisson 方程式を解いて定常解を求めた後でわかる. ここでは 2次元非圧縮中性流体の場合で, アニーリング法に Casimir 不変量の保存という特徴があることを詳しく述べたが, 2次元 MHD 平衡を求める Grad-Shafranov 方程式 [9] を解く方法や 3次元 MHD 平衡を求めるための HINT2 コード [10] などと比較しても同様のことがわかる.

以上のような研究背景を踏まえ, 我々は理想流体の定常状態を特徴づける Casimir 不変量を保存した上で定常状態を求められるアニーリング法の更なる可能性に期待している. それは, 指定した Casimir 不変量の値を持つようにアニーリング法の初期条件を調整する方

法と組み合わせることで、Casimir leaf ごとに理想流体の定常状態を系統立てて求める方法へ応用できる可能性である。このような Casimir 不変量に基づいて、理想流体の定常状態を系統立てて求める方法は、理想流体の定常状態を分類する上で実用的である。加えて、このような Casimir 不変量に基づいて系統立てて定常状態を求める方法は中性流体においても、MHD においても全く新しい方法である。よって我々の研究の目的は Casimir 不変量に基づいて理想流体の定常状態を系統立てて求める方法へとアニーリング法を発展させることである。そのために、この論文では先行研究と同じ 2 次元非圧縮中性流体において指定した Casimir 不変量の値を持つ初期条件に調整する方法をまず示した。そして、先行研究で扱われていない MHD にもアニーリング法が応用できることを示すために、2 次元低ベータ簡約化 MHD [11] の定常状態をアニーリング法により求めた。

この論文の構成は次の通りである。まず 2 章では非正準 Hamilton 力学系とアニーリング法と題して、先行研究のレビューと用いる研究手法について説明する。3 章ではアニーリング法を Casimir 不変量に基づいて系統立てて定常状態を求める方法に発展させるための試みとして、指定した Casimir 不変量の値を持つ初期条件に調整する方法の説明と実証を行う。4 章では先行研究で行われていない 2 次元低ベータ簡約化 MHD にアニーリング法を適用する。5 章では結論と今後の展望を述べる。

第 2 章

非正準 Hamilton 力学系とアニーリング法

2 章では非正準 Hamilton 力学系とアニーリング法の理論をレビューする．初めに 2.1 節で非正準 Hamilton 力学系のレビューを行い，Casimir 不変量と理想流体の定常状態の関係について説明する．次に 2.2 節では非正準 Hamilton 力学系の理解を深めるために，その具体例を示す．最後の 2.3 節では先行研究となる [5–8] の論文を紹介するとともに，アニーリング法の理論を述べる．

2.1 非正準 Hamilton 力学系とその保存量

1 章でも述べたように，アニーリング法の最大の特徴は Casimir 不変量の保存である．この重要性を理解するために，2.1 節では非正準 Hamilton 力学系のレビューを行う．2.1.1 項では非正準 Hamilton 力学系とは何かについて述べる．2.1.2 項では，Casimir 不変量を含む非正準 Hamilton 力学系の保存量をまとめる．最後に 2.1.3 項では Casimir 不変量と理想流体の定常状態の関係について述べる．

2.1.1 非正準 Hamilton 力学系とは

Hamilton 力学系とは，Hamiltonian H と Poisson 括弧 $\{\cdot, \cdot\}$ を用いて，運動が次のように表される系である [12]：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \{\mathbf{u}, H\}. \quad (2.1)$$

ただし， $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ は状態ベクトルで， N 次元空間の座標 $\mathbf{x} := {}^t(x_1, x_2, \dots, x_N)$ と時間 t の関数である．ここで， t は転置記号であり， ∂ は偏微分の記号である．

Hamiltonian とは系全体のエネルギーに相当する保存量である．有限次元の場合，Hamiltonian は関数であるが，無限次元では汎関数となる．ここでは，無限次元の場合を考え，Hamiltonian は汎関数として扱う．

Poisson 括弧は次の 4 つの性質を持つ [13]：

- (i) 反対称性 : $\{A, B\} = -\{B, A\}$
- (ii) 双線形性 : $\{aA + bB, C\} = a\{A, C\} + b\{B, C\}$
- (iii) Leibnitz の規則 : $\{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B$
- (iv) Jacobi の恒等式 : $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$

ただし, ここでは A, B, C を任意の汎関数, a, b を任意の定数とした. ここで, Poisson 括弧を反対称作用素 \mathcal{J} を用いて次のように定義する :

$$\{A, B\} := \int_D d\mathbf{x} \frac{\delta A}{\delta \mathbf{u}} \mathcal{J} \frac{\delta B}{\delta \mathbf{u}} =: \left\langle \frac{\delta A}{\delta \mathbf{u}}, \mathcal{J} \frac{\delta B}{\delta \mathbf{u}} \right\rangle. \quad (2.2)$$

ただし, D は N 次元空間の全領域であり, δ は変分を意味している. (2.2) では, 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ も定義した. この時, (2.2) 式の Poisson 括弧の定義から (ii) 双線形性と (iii) Leibnitz の規則を明らかに満たす. そして, 反対称作用素は,

$$\langle \mathbf{f}, \mathcal{J} \mathbf{g} \rangle = -\langle \mathbf{g}, \mathcal{J} \mathbf{f} \rangle \quad (2.3)$$

を満たすことから, (i) 反対称性と (iv) Jacobi の恒等式が満たされる. ただし, (2.3) 式の \mathbf{f}, \mathbf{g} は任意の関数である. つまり, 反対称作用素を用いて Poisson 括弧を (2.2) 式のように定義することで, Poisson 括弧は上の 4 つの性質を全て満たす.

(2.3) 式において, $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ が成り立つ時,

$$\langle \mathbf{f}, \mathcal{J} \mathbf{f} \rangle = 0 \quad (2.4)$$

となる. これは反対称作用素がベクトルを直交する方向に曲げる性質を持つことを意味している. この反対称作用素により (2.1) 式を書き直すと, 次のようになる :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathcal{J} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}}. \quad (2.5)$$

(2.5) 式は Hamilton の運動方程式として知られる. この Hamilton の運動方程式は, Hamiltonian の勾配に垂直な方向に, すなわち, エネルギーが保存するように運動することを意味している.

次に正準 Hamilton 力学系と非正準 Hamilton 力学系の違いについて述べる. この違いは, Poisson 括弧を定義する反対称作用素 \mathcal{J} の位相欠陥の有無による [2]. つまり,

$$\begin{aligned} \det \mathcal{J} \neq 0 &\Rightarrow \text{正準 Hamilton 力学系} \\ \det \mathcal{J} = 0 &\Rightarrow \text{非正準 Hamilton 力学系} \end{aligned}$$

である. ただし, $\det \mathcal{J}$ は \mathcal{J} の行列式を意味している.

単位行列を I で表す時，次の行列を symplectic 行列と呼ぶ：

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

運動がこの symplectic 行列を用いて表される時， $\det \mathcal{J} = 1$ より，正準 Hamilton 力学系である．有限個の粒子がそれぞれ独立に運動する時，正準座標 q と正準運動量 p で運動を表すと，symplectic 行列で運動が表される [13]．これは無限個の場合にも拡張できる [2]．そのため，流体を無限個の流体粒子の集まりと見なす Lagrange 描像において，正準変数 (q, p) で運動を表せば，流体は正準 Hamilton 力学系となる．

一方，流体を Lagrange 描像ではなく，運動を表す物理量を場の量と考える Euler 描像で見る．この時，Euler 変数が非正準変数のため，流体の運動は symplectic 行列ではなく，

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

のような階数の下がった反対称作用素により表される．そのため， $\det \mathcal{J} = 0$ となり，非正準 Hamilton 力学系となる．有限個の粒子の系において，運動が (2.7) 式のような反対称作用素により表されるのは，例えば拘束条件が存在する場合である [13]．このことから，Euler 変数で表した流体の運動には何らかの拘束条件が存在することが推測できる．その拘束条件というのが，

$$\mathcal{J} \frac{\delta C}{\delta \mathbf{u}} = 0 \quad (2.8)$$

という式で定義される，Casimir 不変量 C による束縛である．

Casimir 不変量は Lagrange 描像における，流体粒子の relabelling 対称性から導出される保存量である [14]．そして非正準 Hamilton 力学系では，流体の運動は位相空間で $C = \text{const.}$ の面で行われる．この $C = \text{const.}$ の面は Casimir leaf と呼ばれる．このように，Casimir 不変量は運動を行う Casimir leaf を定めるマクロな束縛である．

2.1.2 非正準 Hamilton 力学系の保存量

非正準 Hamilton 力学系には少なくとも三種類の保存量が存在する [7]．それは Hamiltonian H ，Hamiltonian の対称性による保存量 M ，Casimir 不変量 C である．以下に，それぞれの保存量の保存を示す．

最初に Hamiltonian H の保存を示す. ある任意の物理量を表す汎関数 F の変分は

$$\delta F = \left\langle \frac{\delta F}{\delta \mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \right\rangle + O(\delta \mathbf{u}^2) \quad (2.9)$$

と表せる. よって, ある物理量 F の時間微分は次のように表せる:

$$\frac{dF}{dt} = \left\langle \frac{\delta F}{\delta \mathbf{u}}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\delta F}{\delta \mathbf{u}}, \mathcal{J} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} \right\rangle = \{F, H\}. \quad (2.10)$$

これより, Hamiltonian の時間変化は非正準 Poisson 括弧の反対称性から,

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = 0 \quad (2.11)$$

と示せる. つまり, Hamiltonian が保存する.

次に Hamiltonian の対称性による保存量 M の保存を示す. Hamiltonian の保存は Hamiltonian に時間依存性がないことを意味しているが, M の保存は Hamiltonian の空間的な対称性に関係している. ここでは, Hamiltonian が x_i 方向に対称性がある ($\left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} \right\rangle = 0$) と仮定する. この時, M は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = -\mathcal{J} \frac{\delta M}{\delta \mathbf{u}} \quad (2.12)$$

を満たすとする. この M が保存量であることは次のように示せる:

$$\frac{dM}{dt} = \left\langle \frac{\delta M}{\delta \mathbf{u}}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\delta M}{\delta \mathbf{u}}, \mathcal{J} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} \right\rangle = 0. \quad (2.13)$$

これは古典力学では Noether の定理として知られ, Hamiltonian の幾何学的な対称性があれば, それに対応する運動量 M が保存する.

最後に Casimir 不変量 C の保存を示す. Casimir 不変量は (2.8) 式で定義される, 反対称作用素の位相欠陥による保存量である. その保存は, 任意の汎関数 F に対し,

$$\{C, F\} = \left\langle \frac{\delta C}{\delta \mathbf{u}}, \mathcal{J} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{u}} \right\rangle = -\left\langle \mathcal{J} \frac{\delta C}{\delta \mathbf{u}}, \frac{\delta F}{\delta \mathbf{u}} \right\rangle = 0 \quad (2.14)$$

を満たすことから, 次のように示せる:

$$\frac{dC}{dt} = \{C, H\} = 0. \quad (2.15)$$

つまり, Casimir 不変量 C は保存量である. Casimir 不変量 C は Hamiltonian の対称性による保存量 M と異なり, Hamiltonian に依らずに保存することが特徴である.

2.1.3 Casimir 不変量と定常状態

非正準 Hamilton 力学系では, (2.1) 式のように, Hamiltonian H という運動の保存量を用いて運動が表されている. Casimir 不変量も同じ運動の保存量であるから,

$$H_C := H + C \quad (2.16)$$

も運動の保存量である. ここで新たに定義された H_C を energy-Casimir 汎関数と呼ぶ. この energy-Casimir 汎関数を用いて運動を表してみると, (2.5) 式から次の式のようになる:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathcal{J} \frac{\delta H_C}{\delta \mathbf{u}} = \mathcal{J} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} + \mathcal{J} \frac{\delta C}{\delta \mathbf{u}} = \mathcal{J} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}}. \quad (2.17)$$

これは, energy-Casimir 汎関数による運動がもとの Hamiltonian による運動と全く同じことを意味している. つまり, Casimir 不変量の束縛により運動は変化しない.

(2.5) 式から, $\frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} = 0$ という Hamiltonian の極値で運動が定常的 ($\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$) となる. 同じく (2.17) 式から, $\frac{\delta H_C}{\delta \mathbf{u}} = 0$ という energy-Casimir 汎関数の極値でも運動が定常的となる. これは Casimir 不変量の存在によって

$$\frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} = -\frac{\delta C}{\delta \mathbf{u}} \quad (2.18)$$

を満たす状態が新たに定常状態となることを意味している. $\frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} = 0$ は自明な定常状態であるが, (2.18) 式の定常状態は明らかに自明でない. このように Casimir 不変量の束縛は理想流体の定常状態を多様化させる.

さらに Casimir 不変量は, (2.18) 式のように理想流体の定常状態を特徴づけるだけでなく, その定常状態の安定性解析にも用いることができる [3, 4]. この安定性解析の方法は energy-Casimir stability method と呼ばれ, 定常状態である energy-Casimir 汎関数の極値の凸性を調べる方法である. つまり, $\delta^2 H_C$ の符号が一定ならば安定である. このように Casimir 不変量は理想流体の定常状態を理解する上で重要な保存量である.

2.2 非正準 Hamilton 力学系の例

2.1 節では非正準 Hamilton 力学系の抽象的な説明を行った。2.2 節では非正準 Hamilton 力学系の理解を深めるために、具体例を示す。2.2.1 項では 2 次元非圧縮中性流体を、2.2.2 項では 2 次元低ベータ簡約化 MHD をそれぞれ扱う。

2.2.1 2 次元非圧縮中性流体の非正準 Hamilton 形式

x, y 平面の 2 次元の非圧縮中性流体の運動を考える。中性流体の渦度を U ，流れ関数を $\phi := \nabla_{\perp}^{-2}U$ と定義する。ただし、 ∇_{\perp} は 2 次元の勾配ベクトルで、 x, y 方向の単位ベクトルを \hat{x}, \hat{y} とすると、

$$\nabla_{\perp} := \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} \quad (2.19)$$

と定義できる。この時、2 次元非圧縮中性流体の渦度方程式は次のように表される：

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} =: [U, \phi]. \quad (2.20)$$

ここで、関数を引数とする Poisson 括弧 $[\cdot, \cdot]$ を定義したが、これは x, y 平面に垂直な z 方向の単位ベクトルを \hat{z} として、

$$[f, g] := (\nabla_{\perp} f \times \nabla_{\perp} g) \cdot \hat{z} \quad (2.21)$$

と定義される。ここで f, g は x, y, t の関数である。このように 2 次元非圧縮中性流体の渦度方程式は関数を引数とする Poisson 括弧によって表される。

続いて、(2.20) 式の渦度方程式を (2.5) 式のような Hamilton の運動方程式に書き換えることを考える。状態変数を $u = U$ とすれば、Hamiltonian H は流体の運動エネルギーであるから、次のように表せる：

$$H[U] := \frac{1}{2} \int_D dx |\nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^{-2}U)|^2. \quad (2.22)$$

この時、Hamiltonian の汎関数微分は

$$\frac{\delta H}{\delta U} = -\nabla_{\perp}^{-2}U = -\phi \quad (2.23)$$

となる。よって反対称作用素 \mathcal{J} を

$$\mathcal{J} := -[U, \cdot] \quad (2.24)$$

と定義すれば、渦度方程式を Hamilton の運動方程式の形に書き換えられる。ここで、(2.24) 式の \mathcal{J} は積分の境界項が消える場合に (2.3) 式のような反対称性が成り立つことを注意しておく。つまり積分の境界項が消える場合に、渦度方程式を Hamilton の運動方程式で表せる。

この時、2次元非圧縮中性流体の Casimir 不変量は

$$C := \int d\mathbf{x} F(U) \quad (2.25)$$

である。ただし、 $F(U)$ は渦度の任意の関数である。例えば $F(U) = \frac{1}{2}U^2$ の時、 C はエンストロフィーと呼ばれる量となる。(2.25) 式の C が Casimir 不変量であることは、次のように Poisson 括弧の反対称性から Casimir 不変量の定義 ((2.8) 式) を満たすことから示せる：

$$\mathcal{J} \frac{\delta C}{\delta U} = -[U, F'(U)] = -F''(U)[U, U] = 0. \quad (2.26)$$

ただし、 \mathcal{J} は微分を意味している。(2.26) 式から、2次元非圧縮中性流体では渦度の任意の関数の積分量が Casimir 不変量であることが示せた。これは2次元非圧縮中性流体の運動がある等渦度面で行われることを意味している。

(2.25) 式の Casimir 不変量によって表される定常状態は、(2.18) 式から

$$\phi = F'(U) \quad (2.27)$$

である。これは定常状態では流れ関数が渦度の関数となることを意味している。つまり、横軸に渦度を、縦軸に流れ関数をとった、 $U - \phi$ グラフを用いて、 $\phi = \phi(U)$ となっていることを確認して、定常状態がどうかを判定できる。

最後に energy-Casimir stability method から得られる安定な条件を求める。2次元非圧縮中性流体では、 $\delta^2(H + C)$ は次の式で表される：

$$\delta^2(H + C) = \int_D d\mathbf{x} \left\{ |\nabla_{\perp} \delta(\nabla_{\perp}^{-2} U)|^2 + F''(\delta U)^2 \right\}. \quad (2.28)$$

よって、 $\delta^2(H + C)$ が (i) 常に正または (ii) 常に負の時、2次元非圧縮中性流体の運動は安定である。

まず (i) $\delta^2(H + C) > 0$ の十分条件を求める。(2.28) 式より、その条件は明らかに、

$$F'' > 0 \quad (2.29)$$

である。これは $U - \phi$ グラフの傾きが正の時に安定となることを意味している。(2.29) 式

は (2.27) 式を用いると,

$$\frac{\nabla_{\perp}\phi \cdot \nabla_{\perp}U}{|\nabla_{\perp}U|^2} > 0 \quad (2.30)$$

と表せる. (2.30) 式は Arnol'd の第一安定性基準に対応する [3].

次に (ii) $\delta^2(H+C) < 0$ の十分条件を求める. まずは (2.28) 式より, ある負の量 $-b < 0$ に対して明らかに

$$F'' \leq -b < 0 \quad (2.31)$$

を満たさなければならない. この b が満たすべき条件を, 簡単のため周期境界条件を仮定して考えると, (2.28) 式から

$$\sum_{\mathbf{k}} k^{-2}(1 - bk^2)(\delta U)^2 < 0 \quad (2.32)$$

が得られる. これより, $-b < -\frac{1}{k^2} < -1$, 即ち $b > 1$ で, $\delta^2(H+C) < 0$ となる. よって, (2.31) 式から

$$F'' < -1, \quad (2.33)$$

で安定である. (2.33) 式は Arnol'd の第二安定性基準に対応する [15].

よって, (2.29),(2.33) 式から 2次元非圧縮中性流体の定常状態が安定となる十分条件は次のようになる:

$$F'' < -1, \quad 0 < F''. \quad (2.34)$$

2.2.2 2次元低ベータ簡約化 MHD の非正準 Hamilton 形式

2次元低ベータ簡約化 MHD 方程式とは渦度方程式とオーム則からなる方程式系である. ここで新たに磁束関数を ψ , 電流密度を $J := \nabla_{\perp}^2 \psi$ とすると, 次の式で書ける:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [U, \phi] + [\psi, J], \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = [\psi, \phi]. \quad (2.36)$$

状態ベクトルを $\mathbf{u} = {}^t(U, \psi)$ とする. 2次元低ベータ簡約化 MHD の Hamiltonian は流体の運動エネルギーと磁場のエネルギーの和であるから,

$$H[U, \psi] := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} (|\nabla_{\perp}(\nabla_{\perp}^{-2}U)|^2 + |\nabla_{\perp}\psi|^2) \quad (2.37)$$

と表せる．この Hamiltonian の汎関数微分は次のように計算できる：

$$\frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta U} \\ \frac{\delta H}{\delta \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla_{\perp}^{-2} U \\ -\nabla_{\perp}^2 \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\phi \\ -J \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

よって，反対称作用素 \mathcal{J} を

$$\mathcal{J} := \begin{pmatrix} -[U, \cdot] & -[\psi, \cdot] \\ -[\psi, \cdot] & 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

と定義すれば，2次元低ベータ簡約化 MHD 方程式を Hamilton の運動方程式の形に書き換えられる．2次元非圧縮中性流体の反対称作用素と同様に，2次元低ベータ簡約化 MHD の反対称作用素も境界項が消える場合に反対称性が成り立つ．よって，積分の境界項が消える場合に2次元低ベータ簡約化 MHD 方程式は Hamilton の運動方程式で表せる．

(2.39) 式の反対称作用素には位相欠陥があり，次の2種類の Casimir 不変量が存在する：

$$C_1 := \int_D d\mathbf{x} F(\psi), \quad (2.40)$$

$$C_2 := \int_D d\mathbf{x} U G(\psi). \quad (2.41)$$

ただし， $F(\psi), G(\psi)$ は磁束関数の任意の関数である．例えば $F(\psi) = \psi$ の時， C_1 は磁気ヘリシティと呼ばれる量であり， $G(\psi) = \psi$ の時， C_2 はクロスヘリシティと呼ばれる量である． C_1, C_2 が Casimir 不変量であることは，Poisson 括弧の反対称性から次のように示せる：

$$\begin{aligned} \mathcal{J} \frac{\delta C_1}{\delta \mathbf{u}} &= \begin{pmatrix} -[U, \cdot] & -[\psi, \cdot] \\ -[\psi, \cdot] & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F'(\psi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -F''(\psi) [\psi, \psi] \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J} \frac{\delta C_2}{\delta \mathbf{u}} &= \begin{pmatrix} -[U, \cdot] & -[\psi, \cdot] \\ -[\psi, \cdot] & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(\psi) \\ U G'(\psi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -G'(\psi) [U, \psi] - G'(\psi) [\psi, U] \\ -G'(\psi) [\psi, \psi] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

C_1, C_2 の2種類の Casimir 不変量の存在は，2次元低ベータ簡約化 MHD の運動がある磁気面上で行われることを意味している．

2次元低ベータ簡約化 MHD の energy-Casimir 汎関数を次のように定義する：

$$H_C := H + C_1 + C_2. \quad (2.44)$$

この energy-Casimir 汎関数の極値 $\delta H_C = 0$ を計算すると、

$$\phi = G(\psi), \quad (2.45)$$

$$J = F'(\psi) + UG'(\psi) \quad (2.46)$$

が得られる。(2.46) 式は (2.45) 式を用いて、

$$J - U\phi' = F'(\psi) \quad (2.47)$$

と表せる。(2.45) 式と (2.47) 式から、2次元低ベータ簡約化 MHD の定常状態では、 ϕ と $J - U\phi'$ がそれぞれ磁束関数 ψ の関数となることを意味している。つまり、横軸に ψ をとり、縦軸に ϕ をとった $\psi - \phi$ グラフと横軸に ψ 、縦軸に $(J - U\phi')$ をとった $\psi - (J - U\phi')$ グラフを用いて、それぞれが磁束関数の関数となっていることを確認して、定常状態かどうかを判定できる。

(2.46) 式は $U = \nabla_{\perp}^2 G(\psi) = G' \nabla_{\perp}^2 \psi + G'' |\nabla_{\perp} \psi|^2$ を利用して次のようにも書ける：

$$[1 - G'^2(\psi)] \nabla_{\perp}^2 \psi - G'(\psi)G''(\psi) |\nabla_{\perp} \psi|^2 = F'(\psi). \quad (2.48)$$

これは Flow Modified Reduced Grad-Shafranov equation と呼ばれる方程式である。

次に定常解が安定となるための十分条件を得るために、 $\delta^2 H_C$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \delta^2 H_C = \int_D d\mathbf{x} \{ & |\nabla_{\perp} \delta\phi - \nabla_{\perp}(G'\delta\psi)|^2 + |\nabla_{\perp} \delta\psi|^2(1 - G'^2) \\ & + (\delta\psi)^2(F'' + (\nabla_{\perp}^2 \phi)G'' - G''^2 |\nabla_{\perp} \psi|^2) \} \end{aligned} \quad (2.49)$$

が得られる。(2.49) 式の被積分関数の最初の項は常に正であるのに対し、最後の項は常に負になる。そのため、このままでは $\delta^2 H_C$ の符号が一定となるかどうかを判断することが難しい。今は安定となるための十分条件を得ることが目的であるから、ここでは $G'' = 0$ の特殊な場合を考えることで、(2.49) 式の最後の常に負となる項を消去する。この時、(2.49) 式は次のようになる：

$$\delta^2 H_C = \int_D d\mathbf{x} \{ |\nabla_{\perp} \delta\phi - \nabla_{\perp}(G'\delta\psi)|^2 + |\nabla_{\perp} \delta\psi|^2(1 - G'^2) + F''(\delta\psi)^2 \}. \quad (2.50)$$

2次元非圧縮中性流体の場合と同様の計算をすると,

$$1 - G'^2 > 0, \quad (2.51)$$

$$-(1 - G'^2) < F'' < 0, \quad 0 < F'' \quad (2.52)$$

を満たす時に, (2.50) 式での $\delta^2 H_C$ が常に正となり, 安定となることが示せる. つまり, ここで得た, 2次元低ベータ簡約化 MHD の定常状態が安定であるための十分条件は次のようにまとめられる:

$$G'' = 0, \quad 1 - G'^2 > 0, \quad (2.53)$$

$$-(1 - G'^2) < F'' < 0, \quad 0 < F''. \quad (2.54)$$

2.3 アニーリング法の先行研究の紹介

2.3 節では、これまでのアニーリング法の先行研究のレビューを行うとともに、アニーリング法の理論を述べる。2.3.1 項ではアニーリング法を最初に提案した Vallis ら [5] と Carnevale ら [6] が用いた、人工的な移流項によるアニーリング法の理論とシミュレーションを紹介する。2.3.2 項ではアニーリング法が Hamilton 力学系に拡張できることを示した Shepherd [7] の論文を紹介する。2.3.3 項で Flierl ら [8] が行った Green 関数を用いた対称括弧によるアニーリング法と Dirac 括弧を応用したアニーリング法の理論とシミュレーションについて述べる。

2.3.1 人工的な移流項によるアニーリング法

Vallis ら [5] や Carnevale ら [6] は、2次元非圧縮中性流体の渦度方程式 ((2.20) 式) の移流速度 ϕ に修正を加えた、人工的な移流 $\tilde{\phi}$ による運動を考えた：

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [U, \tilde{\phi}], \quad (2.55)$$

$$\tilde{\phi} = \phi - \alpha [U, \phi]. \quad (2.56)$$

ただし、 α は基本的には $+1$ または -1 に設定されるパラメータである。(2.55) 式では、渦度は人工的な移流 $\tilde{\phi}$ によって移流されるだけであるから、渦度の任意の関数の積分量である、2次元非圧縮中性流体の Casimir 不変量 ((2.25) 式) は保存される。その上で、人工的な移流 $\tilde{\phi}$ によって渦度が再配列され、Hamiltonian が変化する。人工的な移流を (2.56) 式で定めた時、Hamiltonian と Casimir 不変量の時間変化は次の式で表せる：

$$\frac{dH}{dt} = - \int_D d\mathbf{x} \phi [U, \tilde{\phi}] = \alpha \int_D d\mathbf{x} \phi [U, [U, \phi]] = -\alpha \int_D d\mathbf{x} | [U, \phi] |^2, \quad (2.57)$$

$$\frac{dC}{dt} = \int_D d\mathbf{x} F'(U) [U, \tilde{\phi}] = \alpha \int_D d\mathbf{x} F''(U) [U, U] [U, \phi] = 0. \quad (2.58)$$

ここで、積分の境界項が消えるという仮定を用いた。(2.57) 式から、Hamiltonian が $[U, \phi] \equiv 0$ という渦度方程式の定常解となるまで、 α の符号に応じて単調に変化することがわかる。一方、(2.58) 式からは、Casimir 不変量が保存することがわかる。よって、(2.55),(2.56) 式の人工的な移流の渦度方程式により、Casimir 不変量を保存した上で2次元非圧縮中性流体の定常状態が求められる。

(2.56) 式において $\alpha < 0$ の場合を考える。この時、(2.57) 式から Hamiltonian は単調に

増加する．2次元非圧縮中性流体の場合，周期境界条件の下で次の関係式が成り立つ：

$$H := \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} k^2 |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} k^4 |\phi_{\mathbf{k}}|^2 =: Q. \quad (2.59)$$

ここで，不等号には波数 k が1以上であることを用いた．(2.59)式の等号は，流れ関数 ϕ のフーリエ成分 $\phi_{\mathbf{k}}$ が ϕ_1 を除いて全て0の時に成り立つ．(2.59)式の Q は，

$$Q := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} U^2 \quad (2.60)$$

と定義され，エンストロフィーと呼ばれる．エンストロフィーは，(2.25)式において $F(U) = \frac{1}{2}U^2$ の場合より，Casimir 不変量である．つまり，Hamiltonian を増加させる時，その最大値はエンストロフィーにより制限されている．

(2.56)式において $\alpha > 0$ の場合を考える．この時，(2.57)式から Hamiltonian は単調に減少する．ここで周期境界条件において，ある波数 k のみが存在する場合を考えると，(2.59)式から次の関係式が得られる：

$$H = \frac{Q}{k^2}. \quad (2.61)$$

(2.61)式から，エンストロフィーを保ったまま Hamiltonian を最小化するには，波数 k を大きくすればよい．つまり，Casimir 不変量を一定に保ったまま Hamiltonian を減少させる時，渦度の正の領域と負の領域が混ざり合い，細かい構造ができる．このような細かい構造は Kelvin スポンジと呼ばれる．

Vallis ら [5] は，(2.55)式と (2.56)式の人工的な移流項を用いた渦度方程式を解くシミュレーションを行った．Vallis らのシミュレーションでは，初期条件を非軸対称な歪んだ渦のパッチとし， $\alpha < 0$ とし Hamiltonian を増加させて Hamiltonian の極大値を探した．この時，エンストロフィーの変化を 0.1% 以内に抑えた上で，Hamiltonian を 22% 増加させて軸対称な渦パッチの定常状態を得た．これにより，Vallis ら [5] は人工的な移流項により Casimir 不変量を保存した上で Hamiltonian を極大化できることを示した．

Carnevale ら [6] は，Vallis ら [5] のシミュレーションの信頼性を高めることを目的として，様々な初期条件を用いて人工的な移流項を用いた渦度方程式を解くシミュレーションを行った．例えば， $\alpha < 0$ の Hamiltonian を増加させるシミュレーションでは，ホワイトノイズのようなランダムな初期条件を与えても，正負の二つの軸対称の渦パッチの定常状態が得られることを確認した． $\alpha > 0$ の Hamiltonian を減少させるシミュレーションも行い，軸対称の初期条件から Kelvin スポンジが得られることを示した．Hamiltonian を増加させて軸対称な渦パッチの定常状態を得た時のシミュレーションについては，我々が開発したア

ニーリング法のコードの動作確認も兼ねて、付録 A.2.1 に再現したものを示す。Carnevale ら [6] は、無限の解像度がないことによる渦度の不連続さのために、4 次以上の Casimir 不変量の保存が良くないことも述べている。

2.3.2 Hamilton 力学系に拡張されたアニーリング法

Shepherd [7] は、Vallis ら [5] の人工的な移流項によるアニーリング法が非正準 Hamilton 力学系に拡張できることを理論的に示した。Shepherd [7] は次の非物理的な運動方程式で記述される系を考えた：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathcal{J} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} + \alpha \mathcal{J}^2 \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}}. \quad (2.62)$$

(2.62) 式は 2 次元非圧縮中性流体の場合、(2.55) 式と (2.56) 式の人工的な移流の渦度方程式と一致する。(2.62) 式においても Hamiltonian の単調変化と Casimir 不変量の保存は、反対称作用素の性質から次のように示せる：

$$\frac{dH}{dt} = \alpha \left\langle \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}}, \mathcal{J}^2 \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} \right\rangle = -\alpha \left\langle \mathcal{J} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}}, \mathcal{J} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} \right\rangle = -\alpha \int_D d\mathbf{x} \left| \mathcal{J} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} \right|^2, \quad (2.63)$$

$$\frac{dC}{dt} = \alpha \left\langle \frac{\delta C}{\delta \mathbf{u}}, \mathcal{J}^2 \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} \right\rangle = -\alpha \left\langle \mathcal{J} \frac{\delta C}{\delta \mathbf{u}}, \mathcal{J} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} \right\rangle = 0. \quad (2.64)$$

ただし、ここで (2.62) 式の右辺の第一項については、2.1.2 項で Hamiltonian と Casimir 不変量を保存することはすでに示しているため省略した。このことから

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \alpha \mathcal{J}^2 \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} \quad (2.65)$$

という式によっても、Casimir 不変量を保ったまま Hamiltonian を極値化できる。このように Shepherd [7] は 2 次元非圧縮中性流体の渦度方程式に応用されていたアニーリング法が、他の非正準 Hamilton 力学系にも応用できる可能性があることを理論的に示した。

2.1.2 項で説明したように、非正準 Hamilton 力学系では Hamiltonian と Casimir 不変量の他に、Hamiltonian の対称性による保存量 M が存在する。Shepherd [7] の拡張により、この Hamiltonian の x_i 方向の対称性による保存量 M を新たな束縛条件として、 x_i 方向に一定の速さで進行する定常状態をアニーリング法で求めることが可能になった。これを示すために、 x_i 方向に一定の速さ c で進行する定常解 $\mathbf{u}_{ex} = \mathbf{u}_{ex}(x_i - ct)$ を求めることを考える。定常状態では

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{ex}}{\partial t} + c \frac{\partial \mathbf{u}_{ex}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.66)$$

が成り立つので, (2.5) 式と (2.12) 式を用いれば,

$$\mathcal{J} \left(\frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}_{ex}} - c \frac{\delta M}{\delta \mathbf{u}_{ex}} \right) = 0 \quad (2.67)$$

となる. つまり, (2.65) 式の代わりに

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \alpha \mathcal{J}^2 \frac{\delta(H - cM)}{\delta \mathbf{u}} \quad (2.68)$$

という式で $H - cM$ の極値化を行えば, アニーリング法で x_i 方向に一定の速さ c で進行する定常状態が得られる. この時, M の保存は次のようにして示せる:

$$\frac{dM}{dt} = \alpha \left\langle \frac{\delta M}{\delta \mathbf{u}}, \mathcal{J} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} \right\rangle - c\alpha \left\langle \frac{\delta M}{\delta \mathbf{u}}, \mathcal{J} \frac{\delta M}{\delta \mathbf{u}} \right\rangle = \alpha \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} \right\rangle = 0. \quad (2.69)$$

このようにして, Shepherd [7] はアニーリング法に運動の保存量 M の束縛を新たに加えることに成功した.

2.3.3 対称括弧と Dirac 括弧を用いたアニーリング法

Flierl ら [8] は人工的な移流項によるアニーリング法の先行研究 [5,6] では, 軸対称な定常状態しか得られていないことに気付き, それは角運動量が保存しない場合のエネルギーの最大状態が軸対称な状態だからであると考えた. そこで, 角運動量の保存という新たな束縛をアニーリング法に取り入れるために, Flierl ら [8] は解析力学で拘束条件を課すために用いられる Dirac 括弧 $\{\cdot, \cdot\}_D$ [13] を用いた:

$$\{F, G\}_D := \{F, G\} - \{F, C_i\} C^{ij} \{C_j, G\}. \quad (2.70)$$

ただし, 行列 \mathcal{C} は, 行列 $(\{C_i, C_j\})$ の逆行列で定義される. 今, 簡単のため, C_A, C_B という二つの制限により Dirac 括弧を定義する場合を以下に示す. この時, 行列 \mathcal{C} は次のようになる:

$$\mathcal{C} := \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\{C_A, C_B\}} \\ \frac{1}{\{C_A, C_B\}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

この C_A, C_B は Dirac 括弧に対する Casimir 不変量となることが次のようにして示せる:

$$\{C_A, G\}_D = \{C_A, G\} - \{C_A, C_B\} \left(\frac{1}{\{C_A, C_B\}} \right) \{C_A, G\} = 0. \quad (2.72)$$

また、もとの非正準 Poisson 括弧の Casimir 不変量は、Dirac 括弧に対しても Casimir 不変量のままであることも示せる：

$$\{C, G\}_D = \{C, G\} - \{C, C_i\} C^{ij} \{C_j, G\} = 0. \quad (2.73)$$

もとの非正準 Poisson 括弧の Casimir 不変量 C と Dirac 括弧で新たに Casimir 不変量となった C_A, C_B を区別して、 C_A, C_B を Dirac の制限と呼ぶ。

Flierl ら [8] は、Shepherd [7] の理論をさらに一般化し、

$$((F, G)) = \int_D d\mathbf{x}' \int_D d\mathbf{x}'' \{F, u^i(\mathbf{x}')\} \mathcal{K}_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \{u^j(\mathbf{x}''), G\} \quad (2.74)$$

という、二つの非正準 Poisson 括弧と任意の対称カーネル \mathcal{K} によって定義される、対称括弧 $((\cdot, \cdot))$ を用いた。この対称括弧を用いた時間発展方程式：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \alpha((\mathbf{u}, H)) \quad (2.75)$$

を解いても、アニーリング法の先行研究と同様に、Casimir 不変量を保存したまま Hamiltonian を単調変化させることができる。そして、対称カーネル $\mathcal{K}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ にはデルタ関数 $\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')$ や Green 関数 $g(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = \nabla_{\perp}^{-2} \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')$ が用いられる。

Flierl ら [8] の論文では、この対称括弧を 2 次元非圧縮中性流体に応用している。2 次元非圧縮中性流体では、 $u = U$ より、

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha((U(\mathbf{x}), H)) = \alpha \int_D d\mathbf{x}' \int_D d\mathbf{x}'' \{U(\mathbf{x}), U(\mathbf{x}')\} \mathcal{K}_{UU}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \{U(\mathbf{x}''), H\} \quad (2.76)$$

である。2 次元非圧縮中性流体の反対称作用素 ((2.24) 式) と非正準 Poisson 括弧の定義 ((2.2) 式) から、任意の汎関数 F に対し、

$$\{F, U(\mathbf{x}')\} = \left[U(\mathbf{x}'), \frac{\delta F}{\delta U} \right] \quad (2.77)$$

が成り立つ。そのため、(2.76) 式は次のようになる：

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\alpha \int_D d\mathbf{x}' \int_D d\mathbf{x}'' [\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), U(\mathbf{x}')] \mathcal{K}_{UU}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') [U(\mathbf{x}''), \phi(\mathbf{x}'')]. \quad (2.78)$$

よって、人工的な移流 $\Phi(\mathbf{x})$ を、

$$\Phi(\mathbf{x}) := -\alpha \int_D d\mathbf{x}'' K_{UU}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') [U(\mathbf{x}''), \phi(\mathbf{x}'')] \quad (2.79)$$

と定義すれば、(2.78) 式は次のようになり、人工的な移流項によるアニーリング法と同様で

あることがわかる：

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [U, \Phi]. \quad (2.80)$$

ここで (2.79) 式において, $K_{UU}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'')$ とすると, (2.80) 式は,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\alpha [U, [U, \phi]] = \alpha \mathcal{J}^2 \frac{\delta H}{\delta U} \quad (2.81)$$

となり, (2.65) 式と一致する. つまり, (2.76) 式の対称括弧の一般的な定義において, 対称カーネルをデルタ関数とした場合が, Shepherd [7] の先行研究で用いられている, \mathcal{J}^2 のアニーリング法と一致する.

Flierl ら [8] は, 対称カーネルを Green 関数 ($\mathcal{K}_{UU} = -g$) として, 微分の階数を下げて計算を行った. ここで $-g$ としたのは, $\alpha > 0$ の時に Hamiltonian を減少させるためである. 渦度の初期条件には, 二つの渦が重なった二重渦を選び, (2.75) 式で時間発展させて, 先行研究と同様な軸対称な定常状態を得た. そして, Dirac 括弧を用いた対称括弧 $((\cdot, \cdot))_D$ を,

$$((F, G))_D = \int_D d\mathbf{x}' \int_D d\mathbf{x}'' \{F, u^i(\mathbf{x}')\}_D \mathcal{K}_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \{u^j(\mathbf{x}''), G\}_D \quad (2.82)$$

と定義して, Dirac の制限に角運動量などを選んだ. それから

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha((U, H))_D \quad (2.83)$$

という式で時間発展をさせて, Kirchhof の楕円渦のような, 軸対称でない安定な定常状態を得た. 論文では Casimir 不変量の保存が示されていないが, 対称括弧は非正準 Poisson 括弧をもとに作られているため, Casimir 不変量は当然保存しているものと考えられる. ここを確認するために, 付録 A.2.2 において, Green 関数を用いた対称括弧のアニーリング法の動作確認を兼ねて, 論文のシミュレーションを再現した結果を示す.

最後に Flierl ら [8] は対称カーネルに Green 関数を選ぶことでスムージングの効果があると言っていることについてコメントする. ここでは簡単のため, 周期境界条件が成り立つとする. この時, (2.79) 式で定義される人工的な移流項のフーリエ変換は,

$$\Phi(\mathbf{k}) = \int_D d\mathbf{x} \Phi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \frac{1}{|k|^2} \int_D d\mathbf{x} [U(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (2.84)$$

となる. つまり, Green 関数を用いることは, 高波数成分をカットしていることに他ならない. このような高波数成分をカットする数値計算の方法は, 例えば擬スペクトル法における 2/3 法 [16] と同じである. 2/3 法は最大波数を制限して, 数値誤差を未然に防いでいる. 当然, 最大波数が減るため, 解像度としては悪くなる. そのため, 対称カーネルに Green 関数を用いることは, 予め解像度を落として, 数値計算の困難さを軽減させることである.

第 3 章

Casimir 不変量の値を指定した アニーリング法

3 章では Casimir 不変量の値を先に指定した上でアニーリング法によるシミュレーションを行う。3.1 節では、指定した Casimir 不変量の値を持つように初期条件を調整する方法を説明する。3.2 節では開発したコードを用いてシミュレーションを行い、指定した Casimir 不変量の値を持つ 2 次元非圧縮中性流体の定常状態が得られることを示す。

3.1 Casimir 不変量の値を指定したアニーリング法の理論

3.1 節では指定した Casimir 不変量の値を持つように、初期条件を調整する方法を示す。3.1.1 項では Casimir 不変量の値を指定する目的についてコメントする。3.1.2 項では、指定した Casimir 不変量の値を持つように初期条件を調整する方法を紹介する。そして 3.1.3 項では、開発したコードについて説明する。

3.1.1 Casimir 不変量の値を指定する目的

2.1 節で詳しく述べたように、Casimir 不変量は理想流体の運動を行う Casimir leaf を定め、Casimir leaf の Hamiltonian の極値という形で定常状態を特徴づける重要な保存量である。そのため、Casimir 不変量の値を指定することは、Casimir leaf を定めることに他ならず、それは得られる定常状態を指定することである。また、このような Casimir 不変量を先に指定して定常状態を求める方法は、理想流体の定常状態を Casimir leaf ごとに系統立てて求められる点において優れている。このような観点から、Casimir 不変量を予め指定して定常状態を求める方法を開発したい。

これまでの 2 次元非圧縮中性流体の定常状態を求める方法で、Casimir 不変量の値がどのように決まっているかについてレビューを行う。ここでは、次の 3 つの方法を取り上げる：

(i) Poisson 方程式 :

$$\nabla_{\perp}^2 \phi = f(\phi) \quad (3.1)$$

を解く方法 ($f(\phi)$ は ϕ の任意の関数)

(ii) 粘性項を含む渦度方程式 :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [U, \phi] + \nu \nabla_{\perp}^2 U \quad (3.2)$$

を解く方法 (ν は動粘性係数)

(iii) 人工的な移流の渦度方程式 :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\alpha [U, [U, \phi]] \quad (3.3)$$

を解く方法

(i) の Poisson 方程式を解く方法は、2次元非圧縮中性流体の定常な方程式 :

$$0 = [U, \phi] \quad (3.4)$$

を解いて定常状態を求める代表的な方法である。この方法では (3.1) 式の $f(\phi)$ の関数形を決めて定常状態を求めることになる。しかし、 $f(\phi)$ の関数形と Casimir 不変量の値との関係は一般的にはわからない。そのため、(i) の Poisson 方程式を解く方法では定常状態を求めた後で、得られた定常状態の Casimir 不変量の値がわかる方法になっている。

(ii) の粘性項を含む渦度方程式を解く方法は、2次元非圧縮中性流体の非定常な方程式を解いて定常状態を求める代表的な方法である。この方法では、(3.2) 式の粘性項により Hamiltonian だけでなく、Casimir 不変量まで散逸される。そのため、(ii) の粘性項を解く方法でも定常状態が得られた後で、Casimir 不変量の値がわかる。

(iii) のアニーリング法により定常状態を求める方法では、2.3 節で詳しく述べたように、非物理的な式を解いている間は Casimir 不変量が保存する。つまり、初期条件の Casimir 不変量の値と得られた定常状態の Casimir 不変量の値は等しい。そのため、(iii) のアニーリング法では、初期条件を定めた段階で、得られる定常状態の Casimir 不変量の値がわかる。しかし、アニーリング法の先行研究 [5–8] では、Casimir 不変量の値を指定した上で初期条件を定める方法は議論されていない。よって、我々が考えているような Casimir 不変量の値に基づき、系統立てて定常状態を求められる方法にはなっていない。

このような研究背景を踏まえ、我々は新たに、指定した Casimir 不変量の値を持つように初期条件を調整する方法を開発した。そして、この方法とアニーリング法を組み合わせることにより、Casimir 不変量の値を先に指定してから、理想流体の定常状態を求める方法を考

案した．実際にシミュレーションによる検証を行い，指定した通りの Casimir 不変量の値を持つ定常状態を求められることを示した．

3.1.2 指定した Casimir 不変量の値を持つ初期条件への調整方法

有限個の Casimir 不変量の値が予め指定した値となるように，適当に設定した初期条件を調整する．その方法として最急降下法を用いた．以下に，最急降下法を用いて 2 つの Casimir 不変量を設定する方法を示す．

ここでは，渦度の m 乗の積分量 $\bar{U}^m := \int_D d\mathbf{x} U^m$ を C_m に，渦度の n 乗の積分量 \bar{U}^n を C_n に設定する方法を示す．最急降下法では，それらの量の値を設定するのに，次のように定義された W を用いる：

$$W = (\bar{U}^m - C_m)^2 + (\bar{U}^n - C_n)^2. \quad (3.5)$$

求めたい初期条件は $W = 0$ を満たすものであるから，適当に設定した条件を $W = 0$ まで緩和させれば良い．これが最急降下法の考えである． W の時間変化を式で表してみると，

$$\frac{dW}{d\tau} = 2 \int_D d\mathbf{x} (A_m U^{m-1} + A_n U^{n-1}) \frac{\partial U}{\partial \tau} \quad (3.6)$$

となる．ただし， τ は最急降下法の非物理的な時間で，アニーリング法の非物理的な時間 t と区別するために用いている． $A_\gamma := \gamma (\bar{U}^\gamma - C_\gamma)$ ($\gamma = m, n$) と定義した．

次に渦度を次の式で時間発展させることを考える：

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = -(A_m U^{m-1} + A_n U^{n-1}). \quad (3.7)$$

この時， W の時間変化は (3.6) 式から次のように求められる：

$$\frac{dW}{d\tau} = -2 \int_D d\mathbf{x} |A_m U^{m-1} + A_n U^{n-1}|^2 \leq 0. \quad (3.8)$$

(3.8) 式から， W は次の式を満たすまで単調に減少する：

$$A_m U^{m-1} + A_n U^{n-1} = 0. \quad (3.9)$$

(3.9) 式は， $U(\mathbf{x}) \neq \text{const.}$ ならば， $A_\gamma = 0$ である．それは $\gamma > 0$ より， $(\bar{U}^\gamma - C_\gamma) = 0$ を満たす．よって，(3.7) 式で渦度を時間発展させれば， $W = 0$ すなわち， $\bar{U}^m = C_m, \bar{U}^n = C_n$ を満たす初期条件が得られる．

ここでは，2 つの Casimir 不変量を設定する方法を具体的に示したが，この最急降下法による方法は 3 つ以上の Casimir 不変量を設定することも理論的には可能である．

3.1.3 Casimir 不変量の値を指定したアニーリング法のコードの概要

3.2 節で用いるコードの説明を行う。計算は、 $-\pi \leq x < \pi, -\pi \leq y < \pi$ という計算領域を 128^2 の解像度で行った。境界条件には周期境界条件を用いて、境界項が現れないようにしている。

渦度の初期条件としては 3.2.1 項では

$$U = \cos x + \sin(y + \cos y) \quad (3.10)$$

を用いた。これは渦度の定常状態として知られる、

$$U = \cos x + \sin y \quad (3.11)$$

に周期境界条件を満たすような摂動を加えたものである。もちろん定常状態である (3.11) 式を最急降下法で調節しても良い。しかし、定常状態を初期条件とすると最急降下法で調整した後も定常状態に比較的近い状態に落ち着く傾向がある。そのため、ここでは定常状態から比較的離れた初期条件でも、アニーリング法により、正しく定常状態が得られることを示すために、(3.10) 式を用いた。

3.2.2 項では、渦度の初期条件に

$$U = \cos 2x + \sin y \quad (3.12)$$

を用いた。これは x 方向の波数が 2 となるように設定した条件であり、(3.10) 式よりも細かい構造を持っている。

開発したコードは次のようなものである：

指定した Casimir 不変量の値を持つように初期条件を調節したアニーリング法のコード

最急降下法による初期条件の調整のステップ

(I) 計算の初期条件の設定

(I-1) 渦度 U の初期条件の設定

(I-2) 指定する Casimir 不変量 $\bar{U}^\gamma := \int_D d\mathbf{x} U^\gamma$ とその値 C_γ の設定 ($\gamma = m, n$)

(II) 時間発展の計算 : $d\tau = 10^{-4}$ の Euler 法

(II-1) 最急降下法の式 :

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = -(A_m U^{m-1} + A_n U^{n-1}), \quad (3.13)$$

$$A_\gamma = \gamma (\bar{U}^\gamma - C_\gamma) \quad (3.14)$$

による渦度 U の調整

(II-2) $W := (\bar{U}^m - C_m)^2 + (\bar{U}^n - C_n)^2$ の計算

(II-3) 調整の終了条件 :

$$|\bar{U}^\gamma - C_\gamma| \leq 10^{-7} \quad (3.15)$$

を満たすまで, (II-1),(II-2) を繰り返す

アニーリング法による定常状態を求めるステップ

(III) アニーリング法の時間発展の計算 : 4 次の Runge-Kutta 法のステップの二重化

(III-1) アニーリング法の式 :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [U, [U, \phi]] \quad (3.16)$$

による渦度 U の時間発展 (擬スペクトル法)

(III-2) フーリエ変換による流れ関数 $\phi := \nabla_\perp^{-2} U$ の計算

(III-3) 計算の終了条件 :

$$\left\langle \left| \frac{\partial U(\mathbf{k})}{\partial t} \right|^2 \right\rangle < 10^{-6} \quad \wedge \quad \langle |F|^2 \rangle < 10^{-6} \quad \left(F = \mathcal{J} \frac{\delta H}{\delta U} \right) \quad (3.17)$$

を満たすまで, (III-1),(III-2) を繰り返す ($\langle \cdot \rangle$ は平均をとることを意味している)

最急降下法の時間発展のスキームは Euler 法を用いており, その時間刻み幅は $d\tau = 10^{-4}$

で固定している。一方、アニーリング法の時間発展のスキームは4次のRunge-Kutta法のステップの二重化したものを用い、適応時間刻み幅制御を行っている。刻み幅制御の基準となる許容誤差 Δ は次のように設定した：

$$\Delta := \max\{|U(\mathbf{k})|\} \times 10^{-8}. \quad (3.18)$$

また、アニーリング法の空間微分の計算には、計算の正確さを重視して擬スペクトル法を用いた。

(3.16)式は、(2.65)式において $\alpha = -1$ としたものである。 $\alpha = -1$ として、Hamiltonianを増加させている理由は、2次元非圧縮中性流体では、(2.59)式のようにHamiltonianの最大値がエントロフィーによって制限されているからである。

計算の終了条件にはアニーリング法の式の時間変化が十分に小さいことと、もとの渦度方程式においても力の平衡状態になっていることを用いている。

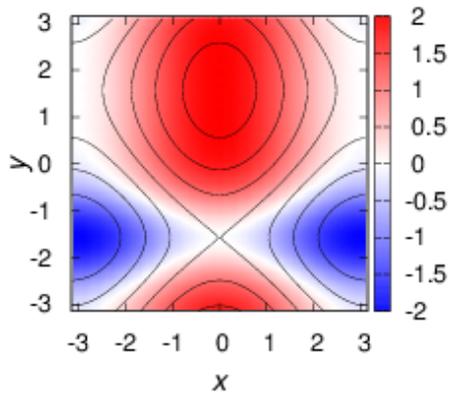


図 3.1 定常状態に摂動を加えた初期条件 ((3.10) 式) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線. この初期条件は最急降下法の初期条件であり, アニーリング法の初期条件ではない.

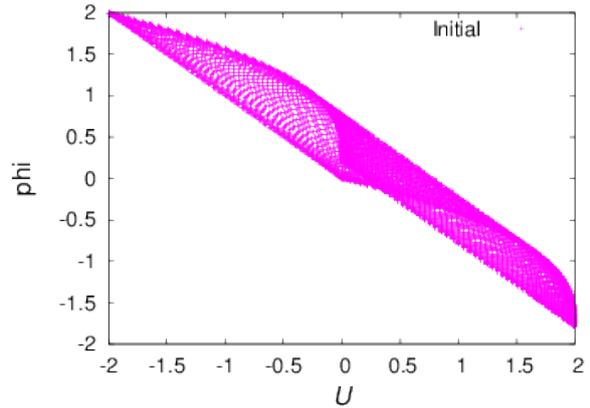


図 3.2 定常状態に摂動を加えた初期条件 ((3.10) 式) の $U - \phi$ グラフ. この初期条件は最急降下法の初期条件であり, アニーリング法の初期条件ではない. 定常状態では, $\phi = F'(U)$ ((2.27) 式) が成り立つが, 今は定常状態でないため, U の値に対し ϕ の値が一意に決まっていない.

3.2 Casimir 不変量の値を指定したアニーリング法のシミュレーション

3.2 節では, 3.1.3 項で説明したコードを用いて実際にシミュレーションを行い, 指定した Casimir 不変量の値を持つ定常状態が得られることを示す. 3.2.1 項では, 指定した Casimir 不変量の値を持つように調整を行う前の初期条件として, 定常状態に摂動を加えた初期条件で計算した場合の結果を示す. 3.2.2 項では, 波数が 2 の構造を持つ初期条件で計算した場合の結果を示す. 3.2.3 項では得られた結果に対する考察を述べる.

3.2.1 定常状態に摂動を加えた初期条件におけるシミュレーション

3.1.3 項で述べたように, 3.2.1 項では (3.10) 式で表される, 定常状態に摂動を加えた初期条件で計算した時の結果を示す. (3.10) 式で表される渦度のカラーマップと流れ関数の等高線を重ね合わせた図を図 3.1 に, その $U - \phi$ グラフを図 3.2 に示す.

様々な Casimir 不変量の値を指定して, 定常状態が求められることを示すために, 次の 4 つの場合でシミュレーションを行った:

- | | |
|---|-------------------------------|
| (i) $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^3 = 30$ | の結果を図 3.3~図 3.6 と表 3.1 に示す. |
| (ii) $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^3 = 0$ | の結果を図 3.7~図 3.10 と表 3.2 に示す. |
| (iii) $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^3 = -30$ | の結果を図 3.11~図 3.14 と表 3.3 に示す. |
| (iv) $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^3 = 30, \bar{U}^4 = 80$ | の結果を図 3.15~図 3.18 と表 3.4 に示す. |

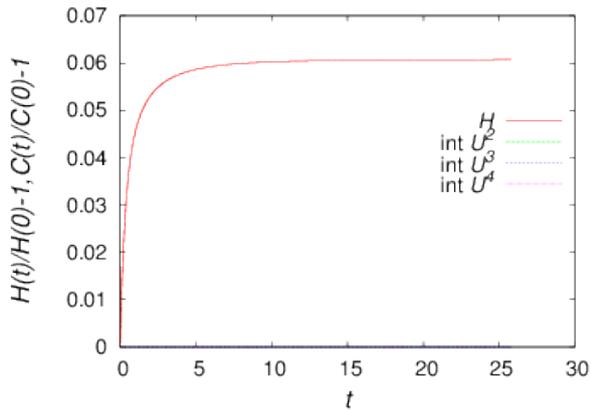


図 3.3 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x} U^2 = 20, \bar{U}^3 = 30$ となるように調整したものをアンニリング法の初期条件 ($t = 0.000000$) として、擬スペクトル法のアンニリング法により定常解を求めた時の Hamiltonian と Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化 (赤: $H := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} |\nabla_{\perp}(\nabla_{\perp}^{-2} U)|^2$, 緑: \bar{U}^2 , 青: \bar{U}^3 , 紫: \bar{U}^4)

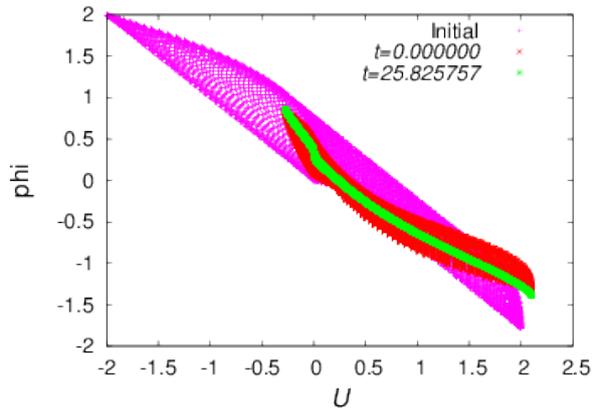


図 3.4 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x} U^2 = 20, \bar{U}^3 = 30$ となるように調整したものをアンニリング法の初期条件 ($t = 0.000000$) として、擬スペクトル法のアンニリング法により定常解を求めた時の各時刻での $U - \phi$ グラフ (紫: 調整前の初期条件 ((3.10) 式), 赤: アンニリング法の計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: アンニリング法の計算の終了時刻 $t = 25.825757$). 定常状態では, $\phi = F'(U)$ ((2.27) 式) が成り立つ.

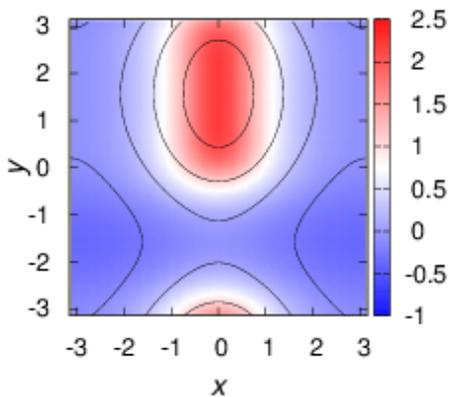


図 3.5 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x} U^2 = 20, \bar{U}^3 = 30$ となるように調整した, アンニリング法の初期条件 ($t = 0.000000$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

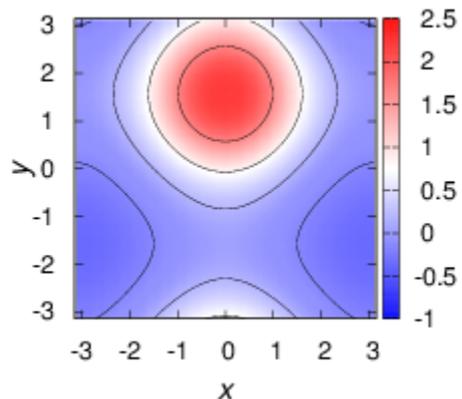


図 3.6 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x} U^2 = 20, \bar{U}^3 = 30$ となるように調整したものをアンニリング法の初期条件 ($t = 0.000000$) として、擬スペクトル法のアンニリング法により定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 25.825757$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

図 3.3, 図 3.7, 図 3.11, 図 3.15 は Hamiltonian と複数の Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化を示した図である. 図 3.4, 図 3.8, 図 3.12, 図 3.16 は各時刻の $U - \phi$ グラフをプロットしたものである. 残りの図は各時刻における渦度のカラーマップと流れ関数の等高線を重ね合わせた図である. 表 3.1~表 3.4 は各時刻での Hamiltonian と 3 つの Casimir 不変量の値と初期値に対する変化の割合を示したものである.

表 3.1 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x}U^2 = 20, \bar{U}^3 = 30$ となるように調整したものをアニーリング法の初期条件 ($t = 0.000000$) として、擬スペクトル法のアニーリング法により定常解を求めた時の各時刻の Hamiltonian と Casimir 不変量の値とその初期値に対する変化の割合 (アニーリング法の計算の開始時刻: $t = 0.000000$, アニーリング法の計算の終了時刻: $t = 25.825757$)

	$t = 0.000000$	$t = 25.825757$	(変化の割合)
H	6.220062	6.597871	(+6.07%)
\bar{U}^2	20.000000	20.000000	(+0.00%)
\bar{U}^3	29.999999	30.000012	(+0.00%)
\bar{U}^4	50.587168	50.587192	(+0.00%)

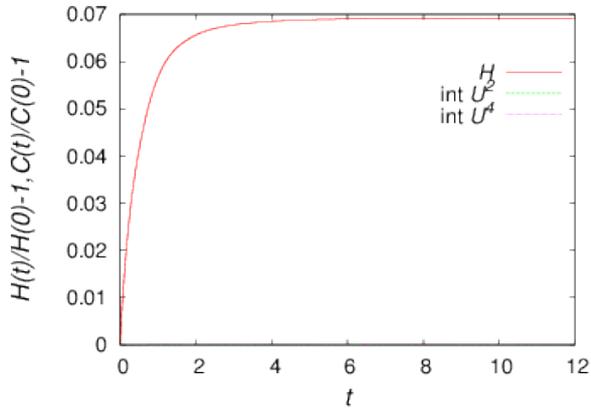


図 3.7 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x}U^2 = 20, \bar{U}^3 = 0$ となるように調整したものをアニーリング法の初期条件 ($t = 0.000000$) として、擬スペクトル法のアニーリング法により定常解を求めた時の Hamiltonian と Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化 (赤: $H := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} |\nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^{-2} U)|^2$, 緑: \bar{U}^2 , 紫: \bar{U}^4). \bar{U}^3 は初期値が小さく、初期値に対する割合をプロットするとグラフが見にくくなるため、ここでは省略した。

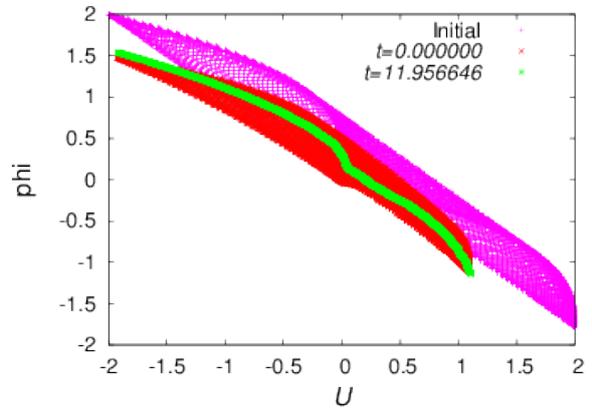


図 3.8 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x}U^2 = 20, \bar{U}^3 = 0$ となるように調整したものをアニーリング法の初期条件 ($t = 0.000000$) として、擬スペクトル法のアニーリング法により定常解を求めた時の各時刻での $U-\phi$ グラフ (紫: 調整前の初期条件 ((3.10) 式), 赤: アニーリング法の計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: アニーリング法の計算の終了時刻 $t = 11.956646$). 定常状態では, $\phi = F'(U)$ ((2.27) 式) が成り立つ。

表 3.2 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x}U^2 = 20, \bar{U}^3 = 0$ となるように調整したものをアニーリング法の初期条件 ($t = 0.000000$) として、擬スペクトル法のアニーリング法により定常解を求めた時の各時刻の Hamiltonian と Casimir 不変量の値とその初期値に対する変化の割合 (アニーリング法の計算の開始時刻: $t = 0.000000$, アニーリング法の計算の終了時刻: $t = 11.95646$). \bar{U}^3 は初期値が小さいため、変化の割合は省略した。

	$t = 0.000000$	$t = 11.95646$	(変化の割合)
H	8.170884	8.736500	(+6.92%)
\bar{U}^2	20.000000	20.000000	(+0.00%)
\bar{U}^3	0.000000	0.000062	(-)
\bar{U}^4	25.324145	25.328898	(+0.02%)

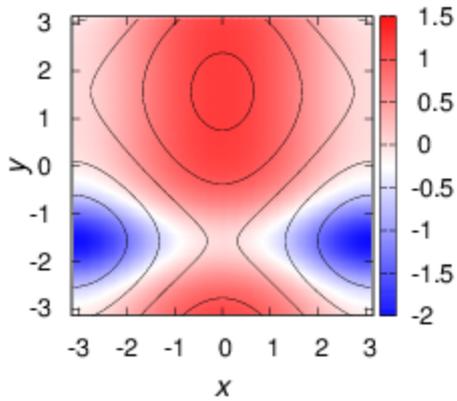


図 3.9 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x}U^2 = 20, \bar{U}^3 = 0$ となるように調整した, アニール法初期条件 ($t = 0.000000$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

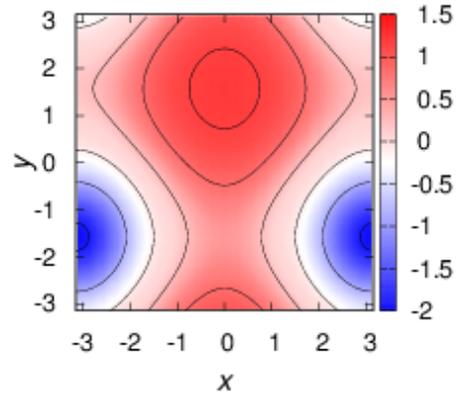


図 3.10 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x}U^2 = 20, \bar{U}^3 = 0$ となるように調整したものをアニール法の初期条件 ($t = 0.000000$) として, 擬スペクトル法のアニール法により定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 11.95646$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

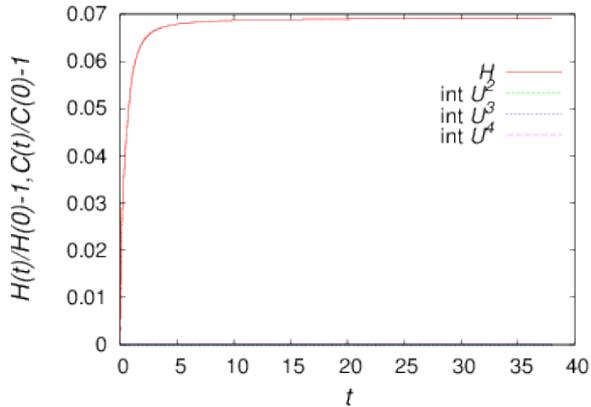


図 3.11 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x}U^2 = 20, \bar{U}^3 = -30$ となるように調整したものをアニール法の初期条件 ($t = 0.000000$) として, 擬スペクトル法のアニール法により定常解を求めた時の Hamiltonian と Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化 (赤: $H := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} |\nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^{-2} U)|^2$, 緑: \bar{U}^2 , 青: \bar{U}^3 , 紫: \bar{U}^4)

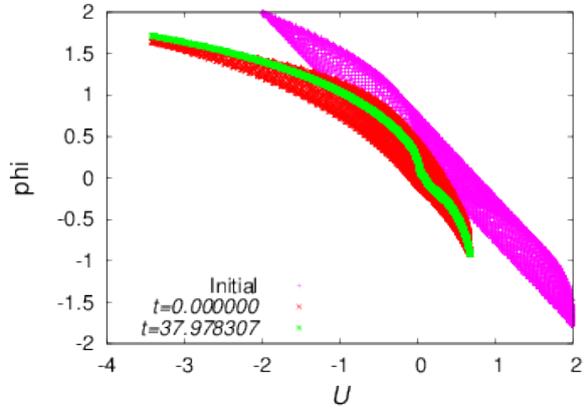


図 3.12 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x}U^2 = 20, \bar{U}^3 = -30$ となるように調整したものをアニール法の初期条件 ($t = 0.000000$) として, 擬スペクトル法のアニール法により定常解を求めた時の各時刻での $U - \phi$ グラフ (紫: 調整前の初期条件 ((3.10) 式), 赤: アニール法の計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: アニール法の計算の終了時刻 $t = 37.978307$). 定常状態では, $\phi = F'(U)$ ((2.27) 式) が成り立つ.

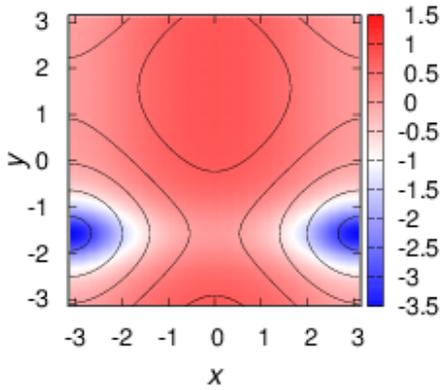


図 3.13 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x}U^2 = 20, \bar{U}^3 = -30$ となるように調整した, アニール法初期条件 ($t = 0.000000$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

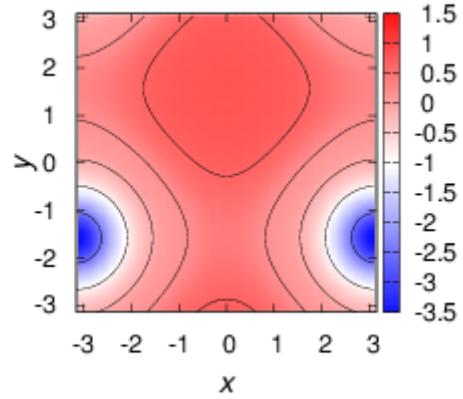


図 3.14 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x}U^2 = 20, \bar{U}^3 = -30$ となるように調整したものをアニール法の初期条件 ($t = 0.000000$) として, 擬スペクトル法のアニール法により定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 37.978307$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

表 3.3 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x}U^2 = 20, \bar{U}^3 = -30$ となるように調整したものをアニール法の初期条件 ($t = 0.000000$) として, 擬スペクトル法のアニール法により定常解を求めた時の各時刻の Hamiltonian と Casimir 不変量の値とその初期値に対する変化の割合 (アニール法の計算の開始時刻: $t = 0.000000$, アニール法の計算の終了時刻: $t = 37.978307$)

	$t = 0.000000$	$t = 37.978307$	(変化の割合)
H	7.586988	8.111735	(+6.92%)
\bar{U}^2	19.999999	19.999999	(+0.00%)
\bar{U}^3	-29.999994	-30.001088	(+0.00%)
\bar{U}^4	83.536659	83.543475	(+0.01%)

表 3.4 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x}U^2 = 20, \bar{U}^3 = 30, \bar{U}^4 = 80$ となるように調整したものをアニール法の初期条件 ($t = 0.000000$) として, 擬スペクトル法のアニール法により定常解を求めた時の各時刻の Hamiltonian と Casimir 不変量の値とその初期値に対する変化の割合 (アニール法の計算の開始時刻: $t = 0.000000$, アニール法の計算の終了時刻: $t = 28.710086$)

	$t = 0.000000$	$t = 28.710086$	(変化の割合)
H	6.752545	6.597871	(+7.53%)
\bar{U}^2	19.999983	19.999983	(+0.00%)
\bar{U}^3	30.000205	30.000225	(+0.00%)
\bar{U}^4	79.998657	79.999806	(+0.00%)

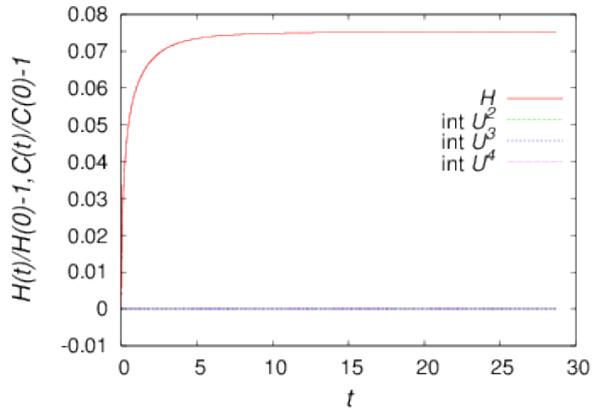


図 3.15 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x} U^2 = 20, \bar{U}^3 = 30, \bar{U}^4 = 80$ となるように調整したものをアンニリング法の初期条件 ($t = 0.000000$) として、擬スペクトル法のアンニリング法により定常解を求めた時の Hamiltonian と Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化 (赤: $H := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} |\nabla_{\perp}(\nabla_{\perp}^2 U)|^2$, 緑: \bar{U}^2 , 青: \bar{U}^3 , 紫: \bar{U}^4)

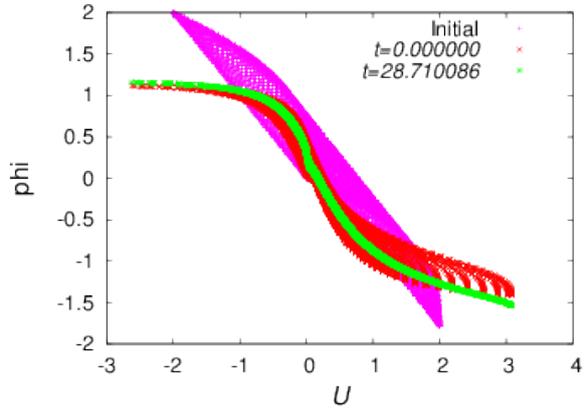


図 3.16 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x} U^2 = 20, \bar{U}^3 = 30, \bar{U}^4 = 80$ となるように調整したものをアンニリング法の初期条件 ($t = 0.000000$) として、擬スペクトル法のアンニリング法により定常解を求めた時の各時刻での $U - \phi$ グラフ (紫: 調整前の初期条件 ((3.10) 式), 赤: アンニリング法の計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: アンニリング法の計算の終了時刻 $t = 28.710086$). 定常状態では, $\phi = F'(U)$ ((2.27) 式) が成り立つ.

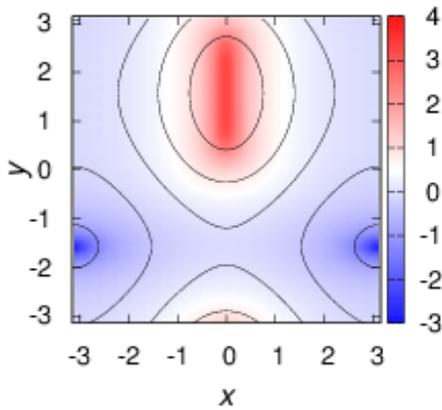


図 3.17 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x} U^2 = 20, \bar{U}^3 = 30, \bar{U}^4 = 80$ となるように調整した, アンニリング法の初期条件 ($t = 0.000000$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

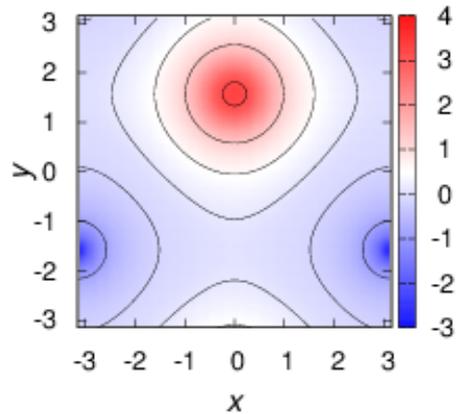


図 3.18 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x} U^2 = 20, \bar{U}^3 = 30, \bar{U}^4 = 80$ となるように調整したものをアンニリング法の初期条件 ($t = 0.000000$) として、擬スペクトル法のアンニリング法により定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 28.710086$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

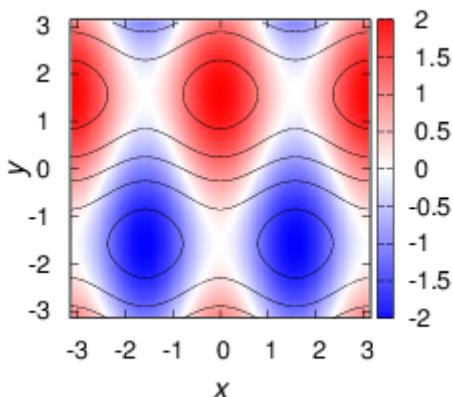


図 3.19 x 方向に波数 2 の渦度の初期条件 ((3.12) 式) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線. この初期条件は最急降下法の初期条件であり, アニール法初期条件ではない.

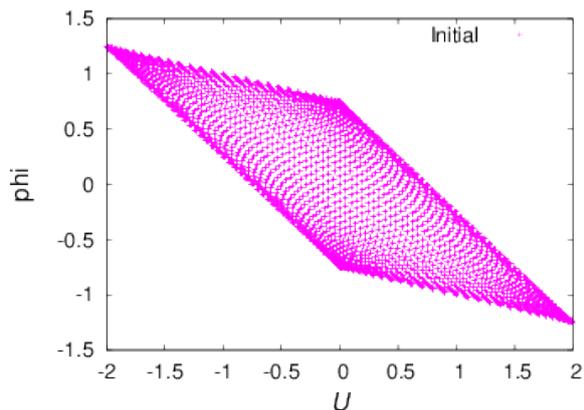


図 3.20 x 方向に波数 2 の渦度の初期条件 ((3.12) 式) の U - ϕ グラフ. この初期条件は最急降下法の初期条件であり, アニール法の初期条件ではない. 定常状態では, $\phi = F'(U)$ ((2.27) 式) が成り立つが, 今は定常状態でないので, U の値に対して ϕ の値が一意に決まっていない.

3.2.2 波数が 2 の構造を持つ初期条件におけるシミュレーション

3.1.3 項で述べたように, 3.2.2 項では (3.12) 式で表される, x 方向に波数 2 の渦度の初期条件で計算した結果を示す. (3.12) 式で表される渦度のカラーマップと流れ関数の等高線を重ね合わせた図を図 3.19 に, その U - ϕ グラフを図 3.20 に示す.

ここでは, $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^3 = 30$ と Casimir 不変量の値を指定した時の結果を図 3.21~図 3.25 と表 3.5 に示す.

図 3.21 は Hamiltonian と 3 つの Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化を示した図である. 図 3.22 は各時刻の U - ϕ グラフをプロットしたものである. 図 3.23~図 3.25 は各時刻における渦度のカラーマップと流れ関数の等高線を重ね合わせた図である. 表 3.5 は各時刻での Hamiltonian と 3 つの Casimir 不変量の値と初期値に対する変化の割合を示したものである.

3.2.3 3.2 節の考察

3.2.1 項と 3.2.2 項で得られた結果をもとに考察を行う.

まず, 最急降下法による指定した Casimir の値を持つ初期条件への調整について述べる. 表 3.1~表 3.5 の $t = 0.000000$ の列を見ればわかるように, わずかな数値誤差は含むものの指定した Casimir 不変量の値を持つ初期条件に調整できている. このわずかな誤差は擬スペクトル法において, 2/3 法で高波数成分をカットしていることが原因である. このように考えているのは, 差分スキームを用いた時にはこのような $t = 0.000000$ での誤差がないこ

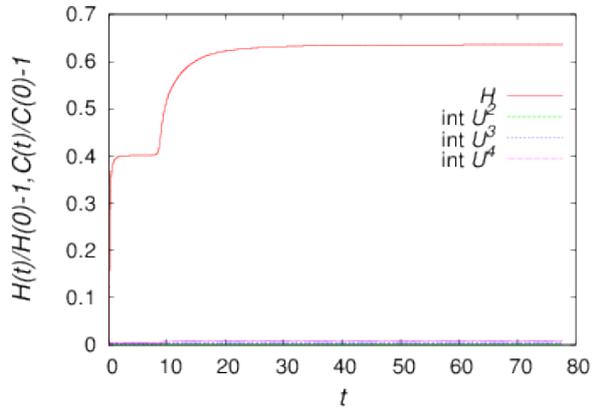


図 3.21 x 方向に波数 2 の渦度の初期条件 ((3.12) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x}U^2 = 20, \bar{U}^3 = 30$ となるように調整したものをアニーリング法の初期条件 ($t = 0.000000$) として、擬スペクトル法のアニーリング法により定常解を求めた時の Hamiltonian と Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化 (赤: $H := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} |\nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^{-2} U)|^2$, 緑: \bar{U}^2 , 青: \bar{U}^3 , 紫: \bar{U}^4)

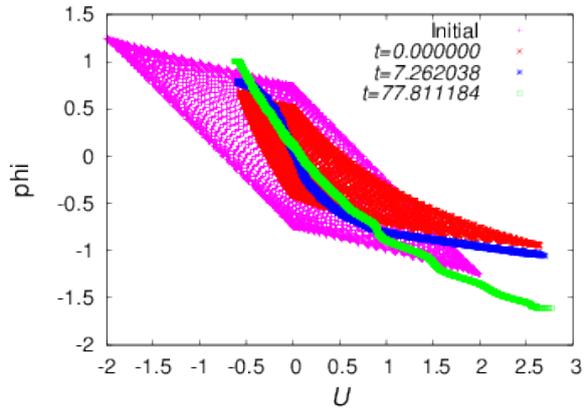


図 3.22 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((3.10) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x}U^2 = 20, \bar{U}^3 = 30$ となるように調整したものをアニーリング法の初期条件 ($t = 0.000000$) として、擬スペクトル法のアニーリング法により定常解を求めた時の各時刻での U - ϕ グラフ (紫: 調整前の初期条件 ((3.10) 式), 赤: アニーリング法の計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 青: アニーリング法の計算が一時的に定常状態に近づいた時刻 $t = 7.262038$, 緑: アニーリング法の計算の終了時刻 $t = 77.811184$). 定常状態では, $\phi = F'(U)$ ((2.27) 式) が成り立つ.

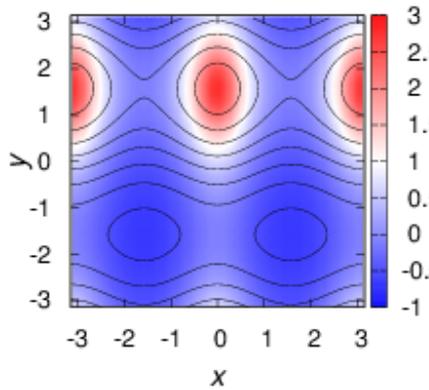


図 3.23 x 方向に波数 2 の渦度の初期条件 (3.12) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x}U^2 = 20, \bar{U}^3 = 30$ となるように調整した, アニーリング法の初期条件 ($t = 0.000000$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

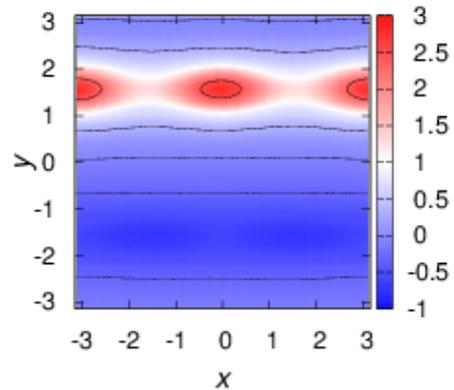


図 3.24 x 方向に波数 2 の渦度の初期条件 (3.12) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x}U^2 = 20, \bar{U}^3 = 30$ となるように調整したものをアニーリング法の初期条件 ($t = 0.000000$) として、擬スペクトル法のアニーリング法により定常解を求めた時に、一時的に定常状態に近づいた時 ($t = 7.262038$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

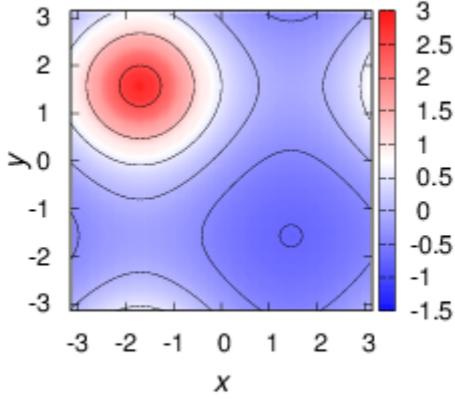


図 3.25 x 方向に波数 2 の渦度の初期条件 (3.12) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D dx U^2 = 20, \bar{U}^3 = 30$ となるように調整したものをアニーリング法の初期条件 ($t = 0.000000$) として, 擬スペクトル法のアニーリング法により定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 77.811184$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

表 3.5 x 方向に波数 2 の渦度の初期条件 (3.12) を最急降下法により $\bar{U}^2 := \int_D dx U^2 = 20, \bar{U}^3 = 30$ となるように調整したものをアニーリング法の初期条件 ($t = 0.000000$) として, 擬スペクトル法のアニーリング法により定常解を求めた時の各時刻の Hamiltonian と Casimir 不変量の値とその初期値に対する変化の割合 (アニーリング法の計算の開始時刻: $t = 0.000000$, アニーリング法の計算が一時的に定常状態に近づいた時刻: $t = 7.262038$, アニーリング法の計算の終了時刻: $t = 77.811184$)

	$t = 0.000000$	$t = 7.262038$	(変化の割合)	$t = 77.811184$	(変化の割合)
H	5.077913	7.117880	(+40.17%)	8.307475	(+63.60%)
\bar{U}^2	19.999988	19.999988	(+0.00%)	19.999988	(+0.00%)
\bar{U}^3	29.999921	30.081930	(+0.27%)	30.113684	(+0.38%)
\bar{U}^4	60.430468	60.741598	(+0.51%)	60.938748	(+0.84%)

と, また表 3.4 で, \bar{U}^2, \bar{U}^4 の値が減っているのは, 高波数成分のカットによる考えると説明がつくことによる. よって, 最急降下法によって, 2,3 個の Casimir 不変量の値を指定することに成功した. 指定できる Casimir 不変量の値の範囲については, 付録 B.1 で述べる.

次に, 指定した Casimir 不変量の値を持つように調整した初期条件に, アニーリング法を適用したことについて述べる. 3.2.1 項と 3.2.2 項の Hamiltonian と Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化のグラフや 3.2.1 項と 3.2.2 項の表からわかるように, Hamiltonian の変化に対して, Casimir 不変量を良く保存した上で, 定常状態を求めることができている. つまり, アニーリング法の初期条件と得られた定常状態は同じ Casimir 不変量の値を持っている. よって, 最急降下法による初期条件の調整とアニーリング法を組み合わせることで, 指定した Casimir 不変量の値を持つ 2 次元非圧縮中性流体の定常状態を求めることに成功した.

3.2.1 項で得られた結果から、Casimir 不変量の値の違いによる定常状態の変化についてコメントする。まず、 \bar{U}^3 の設定値 C_3 の違いによる変化としては、 C_3 が正に大きくなれば、渦度の正の値が大きくなった定常解が得られ、 C_3 が負に大きくなれば、渦度の負の領域の値が大きくなった定常解が得られることがわかる。また、 \bar{U}^4 の設定値 C_4 の違いによる変化としては、図 3.6 と図 3.18 を比べて、 C_4 が大きくなると、局所的に渦度の大きい構造を持った定常解が得られることがわかる。これらは、直感的な理解と矛盾しないものである。

最後に、3.2.2 項で得られた図 3.22 の結果で Hamiltonian が段階的に変化していることについて考察する。図 3.24 は Hamiltonian の段階的な変化が起こる前の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線のグラフである。この図 3.24 から Hamiltonian の段階的な変化が起こる前には初期条件と同様に x 方向に波数が 2 の定常状態へと近づいていたことがわかる。しかし、段階的な変化が起きた後に得られた定常解は x 方向に波数が 1 の定常状態である。このことから渦の合体が原因で、Hamiltonian が段階的に変化することがわかる。

渦の合体を引き起こす原因については、定常状態の不安定性が関係していると考えている。図 3.22 の青い点のプロットは、図 3.24 と同じ時刻の U - ϕ グラフである。 U - ϕ グラフの傾きは (2.27) 式から、 F'' に相当することがわかる。また、中性流体の定常状態が安定な十分条件は (2.34) 式で表されるので、図 3.24 の青いプロットの時刻では、 $U > 0$ の領域で、

$$-1 < F'' < 0 \quad (3.19)$$

となるため、安定とは限らない。仮に不安定だったとすれば、わずかな数値誤差により、 x 方向に波数 2 の状態が維持できなくなり、より安定な状態へ変化したと説明できる。

図 3.22 の緑のプロットにおいても、(3.19) 式が成り立つ領域が $U > 1$ の領域に存在することがわかる。(3.19) 式の範囲は安定か不安定か判断ができない領域であって、安定な可能性もある。緑のプロットの時刻では、時間が経過しても変化が起こらないことから安定な定常状態に行き着いている。

解の不安定性については付録 B.2 にも関連するシミュレーションの結果について述べる。

第 4 章

2 次元低ベータ簡約化 MHD の アニーリング法

4.1 節では 2 次元低ベータ簡約化 MHD のアニーリング法の式や作成したコードについて説明する。4.2 節では開発したコードを用いて、実際に 2 次元低ベータ簡約化 MHD の定常状態を求める。

4.1 2 次元低ベータ簡約化 MHD のアニーリング法の理論

4.1.1 項では、アニーリング法を 2 次元低ベータ簡約化 MHD に応用する目的を述べる。そして、4.1.2 項では 2 次元低ベータ簡約化 MHD のアニーリング法の式の導出を行う。最後の 4.1.3 項では実際に作成した 2 次元低ベータ簡約化 MHD のアニーリング法のコードの概要を述べる。

4.1.1 アニーリング法を 2 次元低ベータ簡約化 MHD へ応用する目的

Vallis ら [5] や Flierl ら [8] が指摘しているように、アニーリング法を磁気流体力学 (MHD) へ応用することは理論的には可能である。実際に、2.2.2 項で取り上げたように、2 次元低ベータ簡約化 MHD 方程式は、(2.39) 式の反対称作用素 \mathcal{J} によって、Hamilton の運動方程式の形で表せる。そのため、Shepherd [7] の論文に登場する (2.65) 式を用いれば、簡単に 2 次元低ベータ簡約化 MHD のアニーリング法の式を導出できる。しかし、先行研究 [5, 6, 8] では、2 次元非圧縮中性流体または準地衡風平衡の場合にしかアニーリング法は応用されていない。つまり、2 次元低ベータ簡約化 MHD を含む、プラズマへのアニーリング法の応用は、まだ行われていないため、新規性のある研究となる。

また、2 次元低ベータ簡約化 MHD にアニーリング法を応用することは、将来的にアニーリング法が 3 次元 MHD 平衡を求めることに応用される可能性を見据えたものである。3 次

元 MHD 平衡を求める問題は理論的に非常に難しい問題で、磁気面が存在するかどうかもわからない。そのため、磁気面の存在を仮定せずに、3次元 MHD 平衡を求められる HINT2 コード [10] などが開発されている。しかし、HINT2 コードでは、流れのないプラズマの仮定や、緩和の計算過程で固定量を変える、二段階の緩和などの様々な工夫の末に、一部の 3次元 MHD 平衡を求めている。一方、アニーリング法は、流れのあるプラズマも扱え、さらに緩和過程で Casimir 不変量が保存するため、Casimir 不変量の保存性から計算の正しさも確認できる方法となっている。このような背景からアニーリング法が、将来的に 3次元 MHD 平衡を求めることに応用されると考えている。

このような新規性と将来性から、2次元低ベータ簡約化 MHD へのアニーリング法の応用に取り組んでいる。

4.1.2 2次元低ベータ簡約化 MHD のアニーリング法の式

4.1.1 項でも述べたように、2次元低ベータ簡約化 MHD 方程式のアニーリング法の式は (2.65) 式を単純に計算して、次のように求められる：

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\alpha ([U, [U, \phi] + [\psi, J]] + [\psi, [\psi, \phi]]), \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\alpha [\psi, [U, \phi] + [\psi, J]]. \quad (4.2)$$

2次元非圧縮流性流体の場合、Hamiltonian の最大値がエンストロフィーにより制限されているため、 $\alpha = -1$ に設定し、Hamiltonian を極大化させて定常状態を求めている。2次元低ベータ簡約化 MHD の Hamiltonian は次の式で表される：

$$H := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} (|\nabla_{\perp} \phi|^2 + |\nabla_{\perp} \psi|^2). \quad (4.3)$$

Hamiltonian と同じ 2 次の積分量である、2 つの 2 次の Casimir 不変量を次のように定義する：

$$C_M := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} \psi^2, \quad (4.4)$$

$$C_{CH} := \int_D d\mathbf{x} U \psi. \quad (4.5)$$

周期境界条件の下で、Hamiltonian の最小値が C_M と $|C_{CH}|$ により制限されていることが

次のようにしてわかる：

$$H := \frac{1}{2} \sum_k k^2 (\phi_k^2 + \psi_k^2) \geq \frac{1}{2} \sum_k \psi_k^2 =: C_M, \quad (4.6)$$

$$H \mp C_{CH} := \frac{1}{2} \sum_k k^2 (\phi_k \mp \psi_k)^2 \geq 0. \quad (4.7)$$

(4.6) 式の等号は ψ_1 を除く，全ての ϕ_k, ψ_k が 0 である時に成り立つ．一方，(4.7) 式の等号は全ての波数 k について $\phi_k = \pm \psi_k$ の時に成り立つ．よって，2次元低ベータ簡約化 MHD の Hamiltonian の最小値は C_M と $|C_{CH}|$ によって制限されている．そのため，アニーリング法では $\alpha = +1$ として，Hamiltonian を極小化させて定常状態を求める．

(4.1) 式と (4.2) 式において， $\alpha = +1$ として計算を行えば，2次元低ベータ簡約化 MHD の定常状態を求められる．実際に，(4.1) 式と (4.2) 式を用いて計算した結果を付録 C に示す．差分スキームでは数値誤差の影響が大きく，擬スペクトル法では計算に時間がかかるなど，(2.65) 式の計算は非常に困難である．そこで，Flierl ら [8] の論文で用いられているような Green 関数を使った対称括弧の式を用いて，数値計算の困難さを軽減することを試みた．以下に，2次元低ベータ簡約化 MHD の Green 関数を使った対称括弧の式の導出を行う．

2次元低ベータ簡約化 MHD の状態ベクトルは， $\mathbf{u} = {}^t(U, \psi)$ より，対称括弧 ((2.74) 式) は次のように書ける：

$$\begin{aligned} ((F, G)) &= \int_D d\mathbf{x}' \int_D d\mathbf{x}'' (\{F, U(\mathbf{x}')\} \mathcal{K}_{UU}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \{U(\mathbf{x}''), G\} \\ &\quad + \{F, U(\mathbf{x}')\} \mathcal{K}_{U\psi}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \{\psi(\mathbf{x}''), G\} + \{F, \psi(\mathbf{x}')\} \mathcal{K}_{\psi U}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \{U(\mathbf{x}''), G\} \\ &\quad + \{F, \psi(\mathbf{x}')\} \mathcal{K}_{\psi\psi}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \{\psi(\mathbf{x}''), G\}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

2次元低ベータ簡約化 MHD の反対称作用素 ((2.39) 式) と非正準 Poisson 括弧の定義 ((2.2) 式) から，任意の汎関数 F に対し，次の式が成り立つ：

$$\{F, U(\mathbf{x}')\} = \left[U(\mathbf{x}'), \frac{\delta F}{\delta U} \right] + \left[\psi(\mathbf{x}'), \frac{\delta F}{\delta \psi} \right], \quad (4.9)$$

$$\{F, \psi(\mathbf{x}')\} = \left[\psi(\mathbf{x}'), \frac{\delta F}{\delta \psi} \right]. \quad (4.10)$$

対称括弧を用いた運動方程式は $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = ((\mathbf{u}, H))$ と表せる． $((U, H))$ と $((\psi, H))$ を (4.8) 式

～(4.10) 式を用いて計算すると、次の式が得られる：

$$((U(\mathbf{x}), H)) = [U(\mathbf{x}), \tilde{\phi}(\mathbf{x})] + [\psi(\mathbf{x}), \tilde{J}(\mathbf{x})], \quad (4.11)$$

$$((\psi(\mathbf{x}), H)) = [\psi(\mathbf{x}), \tilde{\phi}(\mathbf{x})], \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\mathbf{x}) := & - \int_D d\mathbf{x}'' (\mathcal{K}_{UU}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')([U(\mathbf{x}''), \phi(\mathbf{x}'')] + [\psi(\mathbf{x}''), J(\mathbf{x}'')]) \\ & + \mathcal{K}_{U\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') [\psi(\mathbf{x}''), \phi(\mathbf{x}'')], \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\mathbf{x}) := & - \int_D d\mathbf{x}'' (\mathcal{K}_{\psi U}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'')([U(\mathbf{x}''), \phi(\mathbf{x}'')] + [\psi(\mathbf{x}''), J(\mathbf{x}'')]) \\ & + \mathcal{K}_{\psi\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') [\psi(\mathbf{x}''), \phi(\mathbf{x}'')]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

対称カーネルは 0 またはデルタ関数、Green 関数などが用いられる。例えば、

$$\mathcal{K}_{UU}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = \mathcal{K}_{\psi\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}''), \quad \mathcal{K}_{\psi U}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = \mathcal{K}_{U\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = 0 \quad (4.15)$$

のように、対称カーネルを定めると、(4.11) 式は (4.1) 式に、(4.12) 式は (4.2) 式に一致することが確認できる。

4.1.3 項では、対称カーネルを

$$\mathcal{K}_{UU}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = \mathcal{K}_{\psi\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = -g(\mathbf{x}, \mathbf{x}''), \quad \mathcal{K}_{\psi U}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = \mathcal{K}_{U\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = 0 \quad (4.16)$$

と定めた式を用いた。ここで、 $-g$ としているのは、 $\alpha > 0$ で Hamiltonian を極小化させるためである。このように Green 関数を用いることで、

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{|k|^2} \int_D d\mathbf{x} ([U(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})] + [\psi(\mathbf{x}), J(\mathbf{x})]) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (4.17)$$

$$\tilde{J}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{|k|^2} \int_D d\mathbf{x} [\psi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (4.18)$$

となり、 $\frac{1}{|k|^2}$ がかかり、高波数成分がカットされるスムージングの効果が得られる。そのため、数値的な困難さを軽減できる。

4.1.3 2次元低ベータ簡約化 MHD のアニーリング法のコードの概要

4.2 節で用いるコードの説明を行う。計算は、 $-\pi \leq x < \pi, -\pi \leq y < \pi$ という計算領域を 128^2 の解像度で行った。境界条件には周期境界条件を用いて、境界項が現れないようにしている。

4.2.1 項では計算の初期条件を次のように設定した：

$$U = \begin{cases} 1 - \left(\frac{r}{r_+}\right)^2 & r < r_+ \\ 0 & r_+ \leq r \end{cases} \quad (r_+ = \sqrt{1 + 0.6 \cos(2\theta)}), \quad (4.19)$$

$$\psi(x, y) = \lambda \times \phi(y, x) = \lambda \times (\nabla_{\perp}^{-2} U(y, x)). \quad (4.20)$$

渦度の初期条件 ((4.19) 式) は Flierl ら [8] が用いている、二重渦の初期条件である。この二重渦の初期条件は x 方向に渦が二つ重なりながら並んだような形をしている。磁束関数の初期条件を (4.20) 式のように流れ関数と x - y 対称に設定することで、電流密度と渦度も x - y 対称となる。4.2.1 項では、(4.20) 式の λ の値を変化させて、流速 $v := |\nabla_{\perp} \phi|$ と Alfvén 速度 $v_A := |\nabla_{\perp} \psi|$ の大小関係を変化させた。

4.2.2 項では計算の初期条件を次のように設定した：

$$U(x, y) = \nabla_{\perp}^2 \phi(x, y) = \nabla_{\perp}^2 \psi^2(y, x), \quad (4.21)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \psi = J = \begin{cases} 1 - \left(\frac{r}{r_-}\right)^2 & r < r_- \\ 0 & r_- \leq r \end{cases} \quad (r_- = \sqrt{1 - 0.6 \cos(2\theta)}). \quad (4.22)$$

電流密度が、4.2.1 項と同じ y 方向に並んだ二重渦となるように、磁束関数の初期条件を定めている。渦度の初期条件については、流れ関数と磁束関数の非線形関係に x - y 対称という変化を加えたものになるように設定している。このように設定した理由は、4.2.1 項の数値計算により得られた結果が、いずれも流れ関数と磁束関数が線形関係のもので、その原因が (4.20) 式のように線形関係に変化を加えた初期条件に設定していたためであるかどうかを調べたいからである。そこで 4.2.2 項では、流れ関数と磁束関数の非線形関係に x - y 対称という変化を加えたものにした。このようにすることで、 ϕ と ψ が非線形関係となる定常解が得られることを期待している。

開発したコードは次のようなものである：

Green 関数を使った対称括弧によるアニーリング法のコード

(I) 計算の初期条件の設定

(I-1) 渦度 U と磁束関数 ψ の初期条件の設定

(I-2) フーリエ変換による流れ関数 $\phi := \nabla_{\perp}^{-2}U$ と電流密度 $J := \nabla_{\perp}^2\psi$ の計算

(II) 時間発展の計算 : 4 次の Runge-Kutta 法のステップの二重化

(II-1) アニーリング法の式 :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [U, \tilde{\phi}] + [\psi, \tilde{J}], \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = [\psi, \tilde{\phi}], \quad (4.24)$$

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{|\mathbf{k}|^2} \int_D d\mathbf{x} ([U, \phi] + [\psi, J]) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (4.25)$$

$$\tilde{J}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{|\mathbf{k}|^2} \int_D d\mathbf{x} [\psi, \phi] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (4.26)$$

による渦度 U と磁束関数 ψ の時間発展

(II-2) フーリエ変換による流れ関数 ϕ と電流密度 J の計算

(II-3) 計算の終了条件 :

$$\begin{aligned} \left\langle \left| \frac{\partial U(\mathbf{k})}{\partial t} \right|^2 \right\rangle < 10^{-7} \quad \wedge \quad \left\langle \left| \frac{\partial \psi(\mathbf{k})}{\partial t} \right|^2 \right\rangle < 10^{-7} \\ \wedge \quad \langle |F_U|^2 \rangle < 10^{-7} \quad \wedge \quad \langle |F_{\psi}|^2 \rangle < 10^{-7} \quad \left(\mathbf{F} = \mathcal{J} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

を満たすまで, (II-1),(II-2) を繰り返し ($\langle \cdot \rangle$ は平均をとることを意味している)

アニーリング法の時間発展のスキームでは, 適応時間刻み幅制御を行っている. 刻み幅制御の基準となる許容誤差 Δ は次のように設定した :

$$\Delta := \min \{ \max \{ |U(\mathbf{k})| \}, \max \{ |\psi(\mathbf{k})| \} \} \times 10^{-8}. \quad (4.28)$$

計算の終了条件は, アニーリング法の式の時間変化が十分に小さいことと, もとの2次元低ベータ簡約化 MHD 方程式においても力の平衡状態になっていることを用いている.

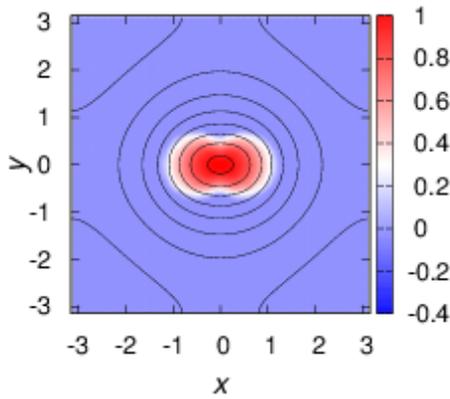


図 4.1 x 方向に並んだ二重渦 ((4.19) 式) を渦度の初期条件とした時の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

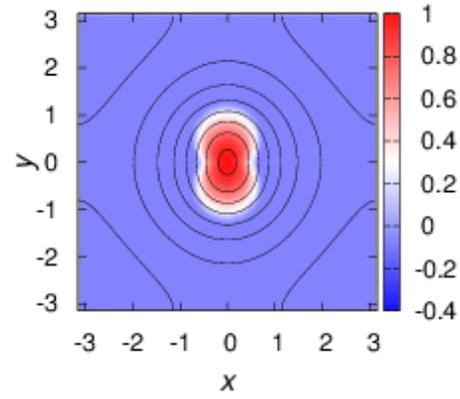


図 4.2 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) の $\lambda = 1$ の時の電流密度のカラーマップと磁束関数の等高線.

4.2 2次元低ベータ簡約化 MHD のアニーリング法のシミュレーション

4.2 節では、2次元低ベータ簡約化 MHD のアニーリング法のシミュレーションを行った結果を示す。4.2.1 項では流れ関数と磁束関数が線形関係となる状態に x - y 対称という変化を加えた初期条件で計算した結果を示す。4.2.2 項では流れ関数と磁束関数の非線形関係となる状態に x - y 対称という変化を加えた時の結果を示す。4.2.3 項では得られた結果について考察する。

4.2.1 線形関係に変化を加えた初期条件におけるシミュレーション

4.1.3 項で述べたように、4.2.1 項では (4.19) 式と (4.20) 式で表されるような初期条件を用いる。(4.19) 式の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線を重ね合わせた図を図 4.1 に、(4.20) 式において、 $\lambda = 1$ の時の電流密度のカラーマップと磁束関数の等高線を重ね合わせた図を図 4.2 に示す。

(4.20) 式の λ の値を変化させて、流速 $v := |\nabla_{\perp}\phi|$ と Alfvén 速度 $v_A := |\nabla_{\perp}\psi|$ の大小関係を変化させた次の 4 つの場合でシミュレーションを行った：

- (i) $\lambda = 4$ の sub-Alfvénic な場合 ($v < v_A$) の結果を図 4.3~図 4.7 と表 4.1 に示す。
- (ii) $\lambda = 1$ の Alfvén 共鳴に近い場合 ($v \approx v_A$) の結果を図 4.8~図 4.12 と表 4.2 に示す。
- (iii) $\lambda = 1/2$ の super-Alfvénic な場合 ($v > v_A$) の結果を図 4.13~図 4.17 と表 4.3 に示す。
- (iv) $\lambda = 1/10$ の ultra-super-Alfvénic な場合 ($v \gg v_A$) の結果を図 4.18~図 4.21 と表 4.4 に示す。

図 4.3, 図 4.8, 図 4.13, 図 4.18 は Hamiltonian と 3 つの Casimir 不変量の変化量の初期値

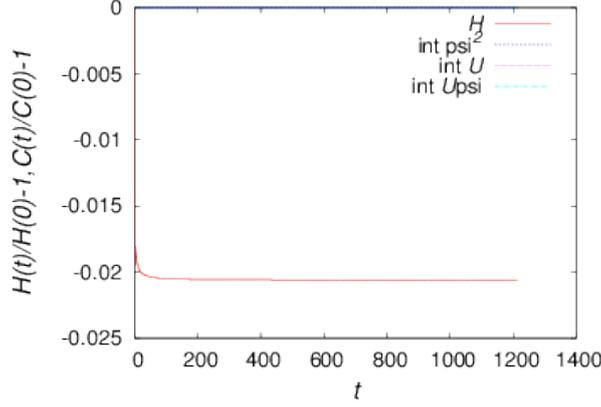


図 4.3 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 4$ とした sub-Alfvénic な初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時の Hamiltonian と Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化 (赤: $H := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} (|\nabla_{\perp} \phi|^2 + |\nabla_{\perp} \psi|^2)$, 青: $\bar{\psi}^2 := \int_D d\mathbf{x} \psi^2 =: 2C_M$, 紫: \bar{U} , 水色: $C_{CH} := \int_D d\mathbf{x} U\psi$). $\bar{\psi}$ は初期値が小さく, 初期値に対する割合をプロットするとグラフが見にくくなるため, ここでは省略した.

表 4.1 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 4$ とした sub-Alfvénic な初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時の各時刻の Hamiltonian と Casimir 不変量の値とその初期値に対する変化の割合 (計算の開始時刻: $t = 0.000000$, 計算の終了時刻: $t = 1213.946421$). $\bar{\psi}$ は初期値が小さいため, 変化の割合は省略した. $C_M := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} \psi^2 =: \frac{1}{2} \bar{\psi}^2$ と $|C_{CH}| := |\int_D d\mathbf{x} U\psi|$ の大小関係は, $C_M > |C_{CH}|$ である.

	$t = 0.000000$	$t = 1213.946421$	(変化の割合)
H	3.243499	3.176730	(-2.06%)
$\bar{\psi}$	-0.000000	0.000000	(-)
$\bar{\psi}^2 = 2C_M$	4.234652	4.234652	(+0.00%)
\bar{U}	1.570737	1.570737	(-0.00%)
C_{CH}	-1.442163	-1.442164	(+0.00%)

に対する割合の時間変化を示した図である. 図 4.4, 図 4.9, 図 4.14, 図 4.19 は各時刻の ψ - ϕ グラフをプロットしたものである. 図 4.5, 図 4.10, 図 4.15 は各時刻の ψ - $(J - U\phi)$ グラフをプロットしたものである. 残りの図は各時刻における渦度または電流密度のカラーマップと流れ関数または磁束関数の等高線を重ね合わせた図である. 表 4.1~表 4.4 は各時刻での Hamiltonian と 4 つの Casimir 不変量の値と初期値に対する変化の割合を示したものである.

4.2.2 非線形関係に変化を加えた初期条件におけるシミュレーション

4.1.3 項で述べたように, 4.2.2 項では (4.21) 式と (4.22) 式を初期条件とする. この初期条件の意図としては, 4.2.1 項で得られたどの定常状態も流れ関数と磁束関数が線形関係で

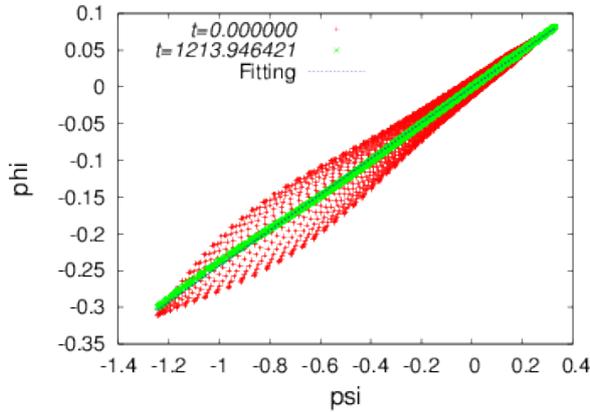


図 4.4 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 4$ とした sub-Alfvénic な初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時の各時刻での ψ - ϕ グラフ (赤: 計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: 計算の終了時刻 $t = 1213.946421$, 青: 緑のプロットのフィッティング結果 $\phi = 0.24 \times \psi$). 定常状態では, $\phi = G(\psi)$ ((2.45) 式) が成り立つ.

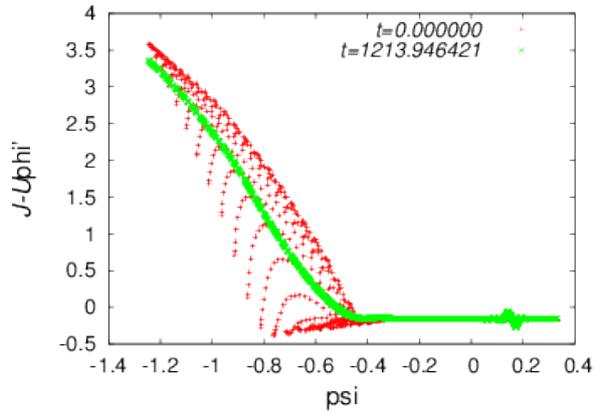


図 4.5 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 4$ とした sub-Alfvénic な初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時の各時刻での ψ - $(J - U\phi')$ グラフ (赤: 計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: 計算の終了時刻 $t = 1213.946421$). 図 4.4 のフィッティング結果から, $\phi' = 0.24$ として計算した. 定常状態では, $J - U\phi' = F'(\psi)$ ((2.47) 式) が成り立つ.

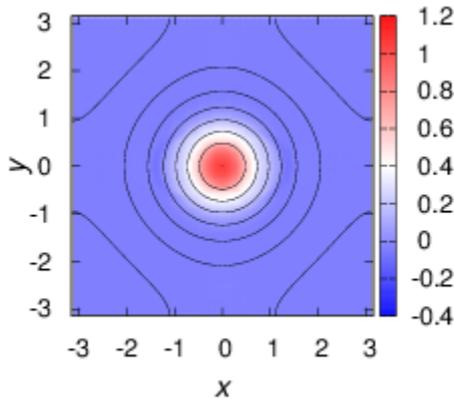


図 4.6 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 4$ とした sub-Alfvénic な初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 1213.946421$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

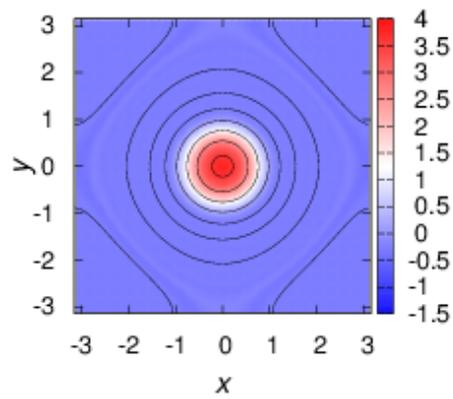


図 4.7 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 4$ とした sub-Alfvénic な初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 1213.946421$) の電流密度のカラーマップと磁束関数の等高線

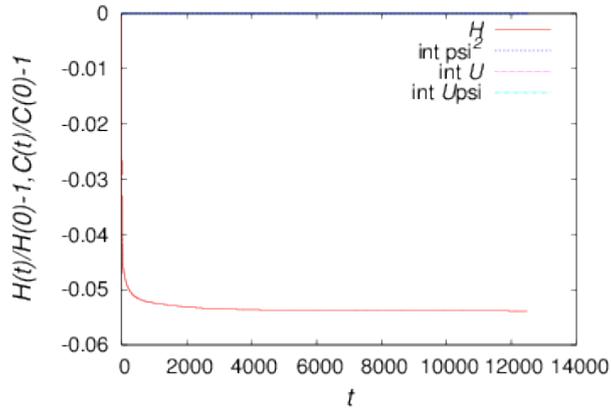


図 4.8 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1$ とした Alfvén 共鳴に近い場合の初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時の Hamiltonian と Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化 (赤: $H := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} (|\nabla_{\perp} \phi|^2 + |\nabla_{\perp} \psi|^2)$, 青: $\bar{\psi}^2 := \int_D d\mathbf{x} \psi^2 =: 2C_M$, 紫: \bar{U} , 水色: $C_{CH} := \int_D d\mathbf{x} U\psi$). $\bar{\psi}$ は初期値が小さく, 初期値に対する割合をプロットするとグラフが見にくくなるため, ここでは省略した.

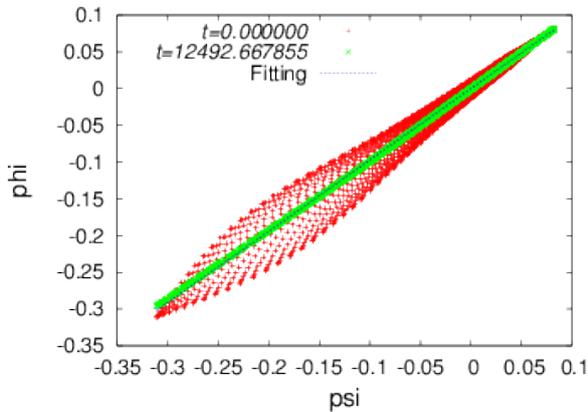


図 4.9 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1$ とした Alfvén 共鳴に近い場合の初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時の各時刻での ψ - ϕ グラフ (赤: 計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: 計算の終了時刻 $t = 12492.667855$, 青: 緑のプロットのフィッティング結果 $\phi = 0.97 \times \psi$). 定常状態では, $\phi = G(\psi)$ ((2.45) 式) が成り立つ.

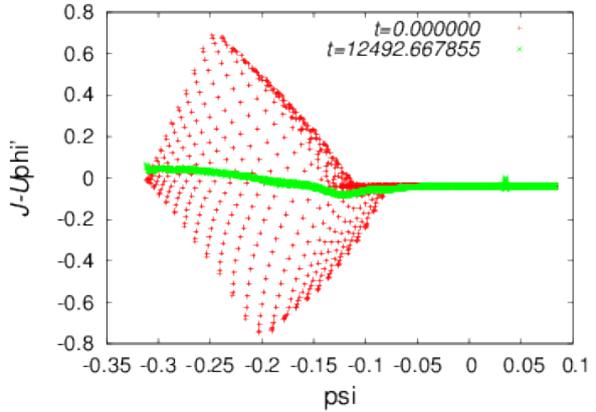


図 4.10 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1$ とした Alfvén 共鳴に近い場合の初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時の各時刻での ψ - $(J - U\phi')$ グラフ (赤: 計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: 計算の終了時刻 $t = 12492.667855$). 図 4.9 のフィッティング結果から, $\phi' = 0.97$ として計算した. 定常状態では, $J - U\phi' = F'(\psi)$ ((2.47) 式) が成り立つ.

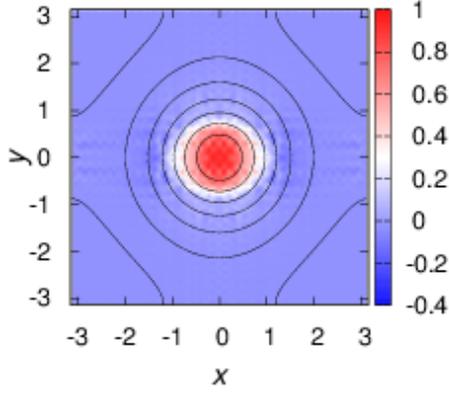


図 4.11 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1$ とした Alfvén 共鳴に近い場合の初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 12492.667855$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

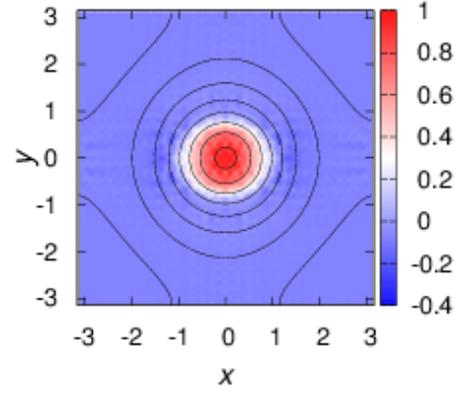


図 4.12 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1$ とした Alfvén 共鳴に近い場合の初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 12492.667855$) の電流密度のカラーマップと磁束関数の等高線

表 4.2 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1$ とした Alfvén 共鳴に近い場合の初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時の各時刻の Hamiltonian と Casimir 不変量の値とその初期値に対する変化の割合 (計算の開始時刻: $t = 0.000000$, 計算の終了時刻: $t = 12492.667855$). $\bar{\psi}$ は初期値が小さいため, 変化の割合は省略した. $C_M := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} \psi^2 =: \frac{1}{2} \bar{\psi}^2$ と $|C_{CH}| := |\int_D d\mathbf{x} U \psi|$ の大小関係は, $C_M < |C_{CH}|$ である.

	$t = 0.000000$	$t = 12492.667855$	(変化の割合)
H	0.381588	0.361030	(-5.39%)
$\bar{\psi}$	-0.000000	0.000000	(-)
$\bar{\psi}^2 = 2C_M$	0.264666	0.264666	(+0.00%)
\bar{U}	1.570737	1.570737	(+0.00%)
C_{CH}	-0.360541	-0.360541	(+0.00%)

表 4.3 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1/2$ とした super-Alfvénic な初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時の各時刻の Hamiltonian と Casimir 不変量の値とその初期値に対する変化の割合 (計算の開始時刻: $t = 0.000000$, 計算の終了時刻: $t = 68961.566186$). $\bar{\psi}$ は初期値が小さいため, 変化の割合は省略した. $C_M := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} \psi^2 =: \frac{1}{2} \bar{\psi}^2$ と $|C_{CH}| := |\int_D d\mathbf{x} U \psi|$ の大小関係は, $C_M < |C_{CH}|$ である.

	$t = 0.000000$	$t = 68961.566186$	(変化の割合)
H	0.238493	0.180318	(-24.39%)
$\bar{\psi}$	-0.000000	0.000000	(-)
$\bar{\psi}^2 =: 2C_M$	0.066166	0.066166	(+0.00%)
\bar{U}	1.570737	1.570737	(-0.00%)
C_{CH}	-0.180270	-0.180270	(+0.00%)

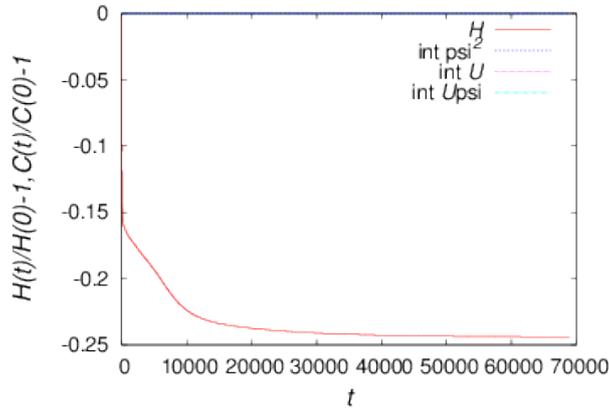


図 4.13 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1/2$ とした super-Alfvénic な初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時の Hamiltonian と Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化 (赤: $H := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} (|\nabla_{\perp} \phi|^2 + |\nabla_{\perp} \psi|^2)$, 青: $\bar{\psi}^2 := \int_D d\mathbf{x} \psi^2 =: 2C_M$, 紫: \bar{U} , 水色: $C_{CH} := \int_D d\mathbf{x} U\psi$). $\bar{\psi}$ は初期値が小さく, 初期値に対する割合をプロットするとグラフが見にくくなるため, ここでは省略した.

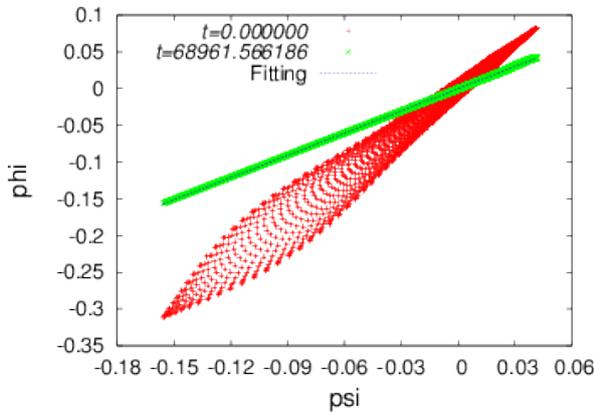


図 4.14 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1/2$ とした super-Alfvénic な初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時の各時刻での ψ - ϕ グラフ (赤: 計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: 計算の終了時刻 $t = 68961.566186$, 青: 緑のプロットのフィッティング結果 $\phi = 1.01 \times \psi$). 定常状態では, $\phi = G(\psi)$ ((2.45) 式) が成り立つ.

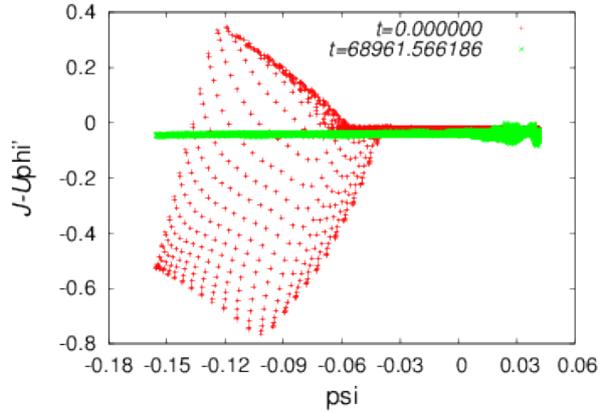


図 4.15 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1/2$ とした super-Alfvénic な初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時の各時刻での ψ - $(J - U\phi)$ グラフ (赤: 計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: 計算の終了時刻 $t = 68961.566186$). 図 4.14 のフィッティング結果から, $\phi' = 1.01$ として計算した. 定常状態では, $J - U\phi' = F'(\psi)$ ((2.47) 式) が成り立つ.

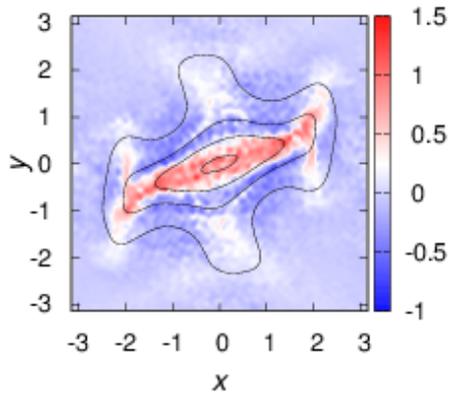


図 4.16 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1/2$ とした super-Alfvénic な初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 68961.566186$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

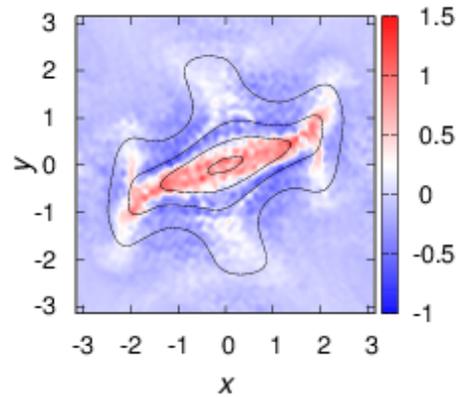


図 4.17 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1/2$ とした super-Alfvénic な初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 68961.566186$) の電流密度のカラーマップと磁束関数の等高線

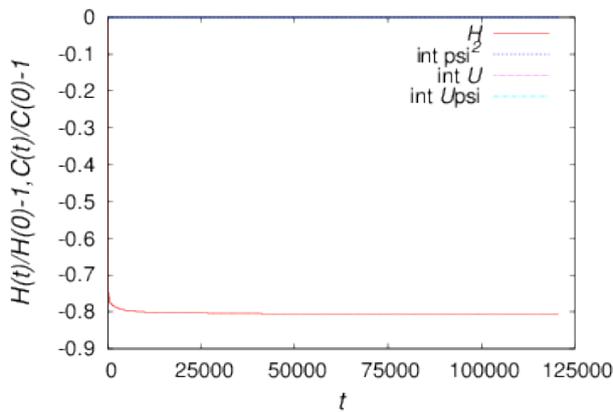


図 4.18 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1/10$ とした ultra-super-Alfvénic な初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時の Hamiltonian と Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化 (赤: $H := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} (|\nabla_{\perp} \phi|^2 + |\nabla_{\perp} \psi|^2)$, 青: $\bar{\psi}^2 := \int_D d\mathbf{x} \psi^2 =: 2C_M$, 紫: \bar{U} , 水色: $C_{CH} := \int_D d\mathbf{x} U\psi$). $\bar{\psi}$ は初期値が小さく, 初期値に対する割合をプロットするとグラフが見にくくなるため, ここでは省略した.

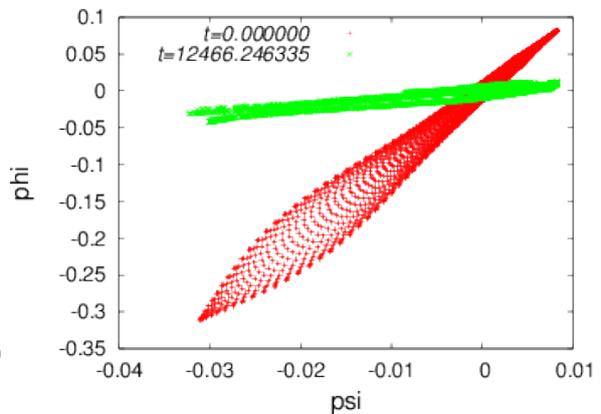


図 4.19 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1/10$ とした ultra-super-Alfvénic な初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時の各時刻での ψ - ϕ グラフ (赤: 計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: 計算の終了時刻 $t = 12466.246335$). ϕ が ψ の多価関数になっていてフィッティングしにくいいため, ここではフィッティングを省略した. 定常状態では, $\phi = G(\psi)$ ((2.45) 式) が成り立つ.

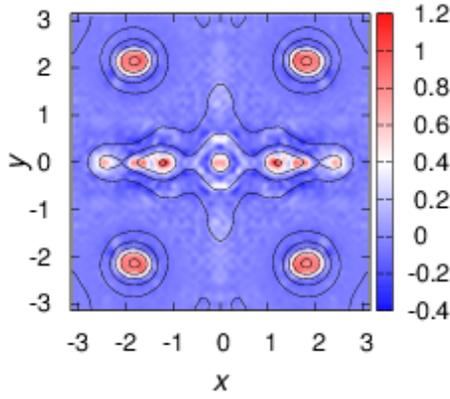


図 4.20 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1/10$ とした ultra-super-Alfvénic な初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 12466.246335$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

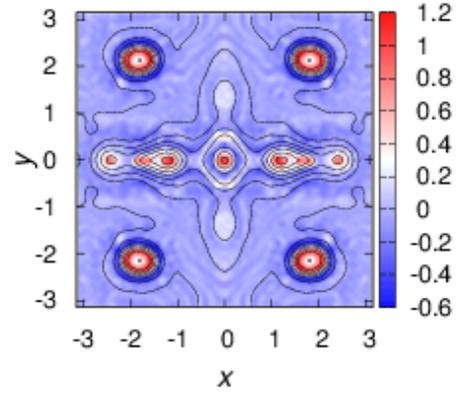


図 4.21 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1/10$ とした ultra-super-Alfvénic な初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 12466.246335$) の電流密度のカラーマップと磁束関数の等高線

表 4.4 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1/10$ とした ultra-super-Alfvénic な初期条件を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時の各時刻の Hamiltonian と Casimir 不変量の値とその初期値に対する変化の割合 (計算の開始時刻: $t = 0.000000$, 計算の終了時刻: $t = 120732.555306$). $\bar{\psi}$ は初期値が小さいため, 変化の割合は省略した. $C_M := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} \psi^2 =: \frac{1}{2} \bar{\psi}^2$ と $|C_{CH}| := |\int_D d\mathbf{x} U \psi|$ の大小関係は, $C_M < |C_{CH}|$ である.

	$t = 0.000000$	$t = 120732.555306$	(変化の割合)
H	0.192702	0.037122	(-80.74%)
$\bar{\psi}$	0.000000	-0.000000	(-)
$\bar{\psi}^2 =: 2C_M$	0.002647	0.002647	(+0.00%)
\bar{U}	1.570737	1.570737	(-0.00%)
C_{CH}	-0.036054	-0.036054	(+0.00%)

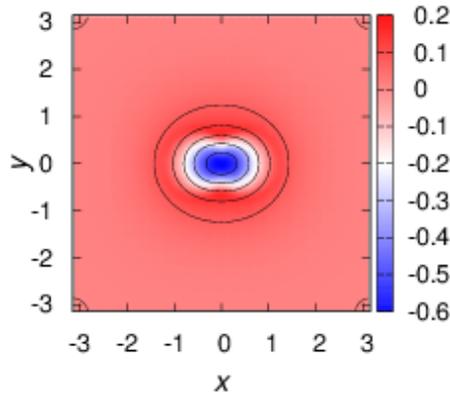


図 4.22 流れ関数と磁束関数が非線形関係の x - y 対称となるように, 渦度の初期条件 ((4.21) 式) を定めた時の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

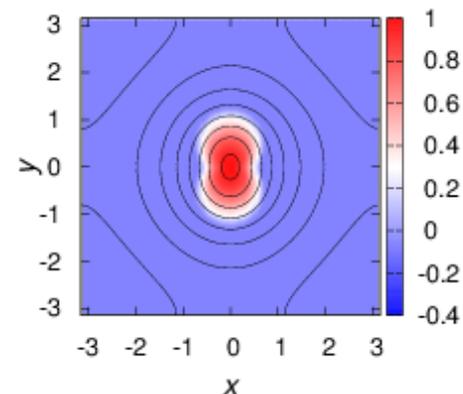


図 4.23 電流密度が y 方向に並んだ二重渦となるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.22) 式) の電流密度のカラーマップと磁束関数の等高線

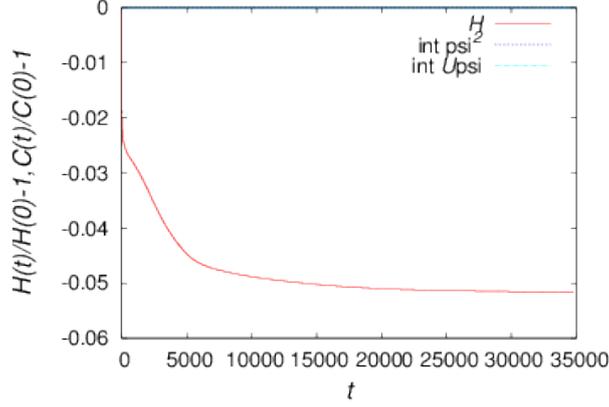


図 4.24 流れ関数と磁束関数が非線形関係の x - y 対称となるように定めた渦度の初期条件 ((4.21) 式) を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時の Hamiltonian と Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化 (赤: $H := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} (|\nabla_{\perp} \phi|^2 + |\nabla_{\perp} \psi|^2)$, 青: $\bar{\psi}^2 := \int_D d\mathbf{x} \psi^2 =: 2C_M$, 水色: $C_{CH} := \int_D d\mathbf{x} U\psi$). $\bar{\psi}, \bar{U}$ は初期値が小さく, 初期値に対する割合をプロットするとグラフが見にくくなるため, ここでは省略した.

あったが, その原因が初期条件として流れ関数と磁束関数の線形関係に x - y 対称という変化を加えたためであるかどうかを調べることである. つまり, 初期条件として流れ関数と磁束関数の非線形関係に x - y 対称という変化を加えたものを与えることで, 非線形な定常状態が得られるかどうかを調べる.

(4.21) 式と (4.22) 式の初期条件を用いて, 計算した結果を図 4.24 ~ 図 4.28 と表 4.5 に示す.

図 4.24 は Hamiltonian と 2 つの Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化を示した図である. 図 4.25 は各時刻の ψ - ϕ グラフを, 図 4.26 は ψ - $(J - U\phi')$ グラフをプロットしたものである. 図 4.27 は各時刻における渦度のカラーマップと流れ関数の等高線を重ね合わせた図であり, 図 4.28 は電流密度のカラーマップと磁束関数の等高線を重ね合わせた図である. 表 4.5 は各時刻での Hamiltonian と 4 つの Casimir 不変量の値と初期値に対する変化の割合を示したものである.

4.2.3 4.2 節の考察

4.2.1 項と 4.2.2 項で得られた結果をもとに考察を行う.

まず, 図 4.3 などの Hamiltonian と Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化のグラフや表 4.1 などの Hamiltonian と Casimir 不変量の値の表について述べる. これらの結果から, Hamiltonian の変化に比べて Casimir 不変量をよく保存した上で, Hamiltonian が極小化し定常状態が求められていることがわかる. よって, アニーリング法を 2 次元低ベータ簡約化 MHD に応用して, 定常状態を求めることができた.

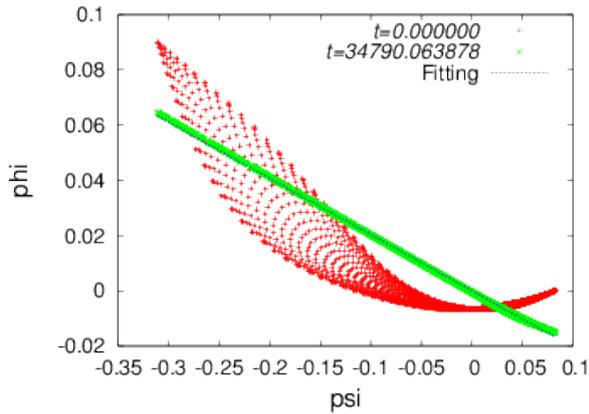


図 4.25 流れ関数と磁束関数が非線形関係の x - y 対称となるように定めた渦度の初期条件 ((4.21) 式) を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時の各時刻での ψ - ϕ グラフ (赤: 計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: 計算の終了時刻 $t = 34790.063878$, 青: 緑のプロットのフィッティング結果 $\phi = -0.20 \times \psi$). 定常状態では, $\phi = G(\psi)$ ((2.45) 式) が成り立つ.

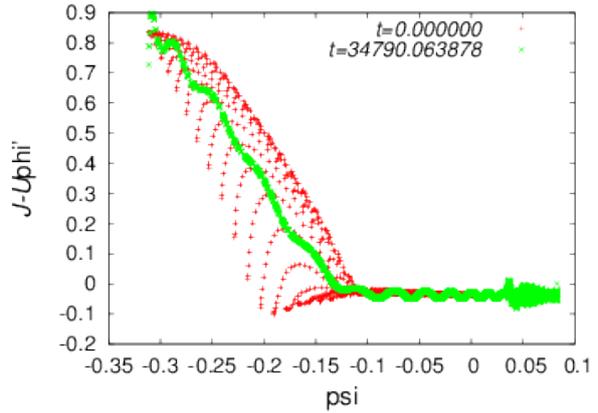


図 4.26 流れ関数と磁束関数が非線形関係の x - y 対称となるように定めた渦度の初期条件 ((4.21) 式) を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時の各時刻での ψ - $(J - U\phi')$ グラフ (赤: 計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: 計算の終了時刻 $t = 34790.063878$). 図 4.25 のフィッティング結果から, $\phi' = -0.20$ として計算した. 定常状態では, $J - U\phi' = F'(\psi)$ ((2.47) 式) が成り立つ.

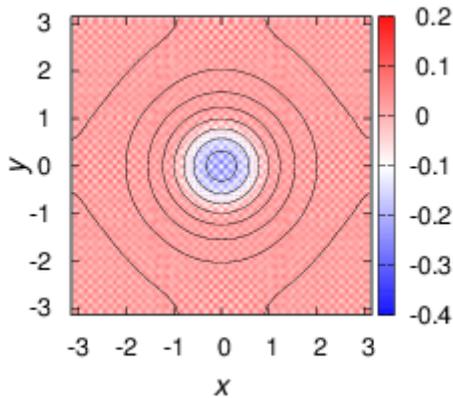


図 4.27 流れ関数と磁束関数が非線形関係の x - y 対称となるように定めた渦度の初期条件 ((4.21) 式) を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 34790.063878$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

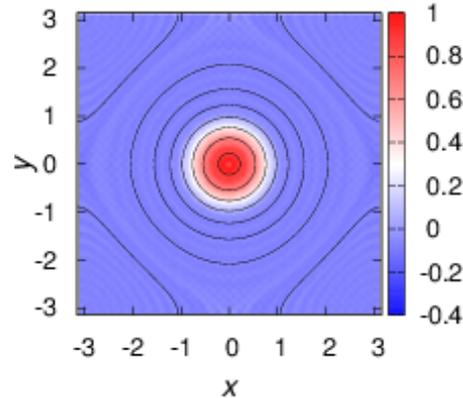


図 4.28 流れ関数と磁束関数が非線形関係の x - y 対称となるように定めた渦度の初期条件 ((4.21) 式) を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 34790.063878$) の電流密度のカラーマップと磁束関数の等高線

次に, 4.2.1 項の結果において, λ の値の違いによる結果の変化について述べる. ここでは, 図 4.6 などの渦度や電流密度のカラーマップと流れ関数や磁束関数の等高線を重ね合わせた図に注目をする. そうすると, λ が小さくなる, 即ち, Alfvén 速度 v_A に比べて, 流体の速度 v が大きくなるにつれて, 複雑な定常状態が得られている.

特に $\lambda = 1/10$ の計算結果で, 一つの大きな渦が細かい渦に分散されている. このような

表 4.5 流れ関数と磁束関数が非線形関係の x - y 対称となるように定めた渦度の初期条件 ((4.21) 式) を用いて, Green 関数を使った対称括弧を用いたアニーリング法により定常解を求めた時の各時刻の Hamiltonian と Casimir 不変量の値とその初期値に対する変化の割合 (計算の開始時刻: $t = 0.000000$, 計算の終了時刻: $t = 34790.063878$). $\bar{\psi}, \bar{U}$ は初期値が小さいため, 変化の割合は省略した. $C_M := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} \psi^2 =: \frac{1}{2} \bar{\psi}^2$ と $|C_{CH}| := |\int_D d\mathbf{x} U\psi|$ の大小関係は, $C_M > |C_{CH}|$ である.

	$t = 0.000000$	$t = 34790.063878$	(変化の割合)
H	0.206401	0.195752	(-5.16%)
$\bar{\psi}$	-0.000000	0.000000	(-)
$\bar{\psi}^2 =: 2C_M$	0.264666	0.264666	(+0.00%)
\bar{U}	0.000000	-0.000000	(-)
C_{CH}	0.077655	0.077655	(+0.00%)

領域全体に渦が拡散していく現象は, 中性流体のアニーリング法で Hamiltonian を減少させた時に見られる, Kelvin スポンジの現象に近い. よって, この拡散現象は, $\lambda = 1/10$ では磁場の影響が小さく, 中性流体に近づいたために起きたものである. ただし, Kelvin スポンジは Hamiltonian が 0 となり, 均一化が完全に進み, 構造と呼べるものがなくなるのに対し, $\lambda = 1/10$ の計算結果では $|C_{CH}|$ の束縛により, Hamiltonian は 0 にはならず, また小さな渦の構造も残っている. この定常状態は, 図 4.19 からわかるように, ϕ が ψ の多価関数になっており, Grad-Shafranov 方程式を解く方法では得られない定常状態である.

$\lambda = 4$ のみ滑らかな定常状態が得られている. また, $\lambda = 4$ 以外の定常状態は全て $H \approx |C_{CH}|$ となっていることが表の値から読み取れる. $H = |C_{CH}|$ となる条件は, 各波数 k で $\phi_k = \pm\psi_k$ が成り立つこと, すなわち, 流線と磁気面が一致することである. そのため, 流線と磁気面が一致さえしていれば, 滑らかでなくても良い. ここで, $H = C_M$ となる定常状態についても考える. このような定常状態になるのは, ψ_1 を除く, ϕ_k, ψ_k が全て 0 の場合である. つまり, 2次元低ベータ簡約化 MHD には, C_M のようにロバストな束縛と, $|C_{CH}|$ のようなロバストでない束縛が存在する.

$\lambda = 4$ の定常解には C_{CH} 以外にロバストな束縛がかかっているため, 滑らかな定常状態が得られていると考えることもできる. しかし, 4.2.2 項の結果で, 同じ $C_M > |C_{CH}|$ の状況にも関わらず, 4.2.2 項では細かい構造ができ, 滑らかでない定常状態が得られている. この細かい構造の原因について考察する. アニーリング法による緩和の過程で, ϕ は ψ の関数となったが, $J - U\phi$ は ψ の関数となっていない場合を考える. この時, $[\psi, \phi] = 0$ より, $\tilde{J} = 0$ が成り立つ. そのため, アニーリング法の式 ((4.23) 式, (4.24) 式) は次のよう

になる：

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [U, \tilde{\phi}], \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = [\psi, \tilde{\phi}]. \quad (4.30)$$

つまり、渦度と磁束関数が同じ移流速度で移流されることになる。そのため、渦度と磁束関数が独立に動くことができないため、渦度が滑らかな構造を持つまで移流されない。その結果、渦度に細かい構造が残っている。

最後に、4.2.2 項の結果について考察する。4.2.2 項では流れ関数と磁束関数が非線形関係にある定常状態を得るために、初期条件を工夫していた。しかしながら、得られた定常状態は線形関係であった。この原因は非線形関係の定常解の安定性にあると考えている。実際に、2次元低ベータ簡約化 MHD の $\delta^2 H_C$ の式 ((2.49) 式) に注目すると、 $G'' \neq 0$ の時、常に負となる項が存在し、解が不安定になる可能性がある。よって、非線形関係の定常状態が不安定だったために維持できずに、より安定な線形関係の定常状態が得られた。

第 5 章

結論

Casimir 不変量は理想流体の定常状態を特徴づける重要な保存量である。そのため、Casimir 不変量を保存した上で理想流体の定常状態を求められる、アニーリング法に注目した。アニーリング法の先行研究では、2次元非圧縮中性流体に応用され、様々な初期条件の下で、定常状態が求められることが示されていた。

我々は、アニーリング法では初期条件と得られる定常状態の Casimir 不変量の値が等しいことから、指定した Casimir 不変量の値を持つように初期条件を調整することで、指定した Casimir 不変量の値を持つ定常状態が得られると考えた。Casimir 不変量を指定することのメリットは、Casimir 不変量が定常状態を特徴づけるため、Casimir 不変量に基づき定常状態を系統立てて求められるようになることである。このような研究背景の下で、最急降下法を用いて、初期条件を指定した Casimir 不変量の値を持つように調整できることを実証した。そして、最急降下法による初期条件の調整とアニーリング法を組み合わせることで、指定した Casimir 不変量の値を持つ定常状態を得ることに成功した。2次元非圧縮中性流体では Casimir 不変量は無限個あるため、全ての Casimir 不変量の値を指定できていない。しかし、Casimir 不変量が有限個しかない系に対しては全ての Casimir 不変量の値を指定できる方法である。また、無限個の Casimir 不変量が存在する場合でも、Casimir 不変量の値の変化が定常状態にどのような影響を与えるかを確認できる方法となっている。

アニーリング法は非正準 Poisson 括弧を定義する反対称作用素の性質により、Casimir 不変量を保った上で Hamiltonian を極値化する。そのため、これまでに先行研究で行われていない磁気流体力学 (MHD) への応用が理論的には可能である。また、アニーリング法が将来的に 3次元 MHD に応用される可能性を考慮し、アニーリング法を 2次元低ベータ簡約化 MHD に応用した。そして、2次元低ベータ簡約化 MHD の Casimir 不変量を保存した上で、Hamiltonian を極小化し、その定常状態を得ることに成功した。

付録 A

アニーリング法のコードのテスト

付録 A では、アニーリング法のコードに関する説明とテストを行う。まず付録 A.1 でアニーリング法のコードに用いた数値計算法の理論を紹介する。付録 A.2 で、開発したコードのテストとして、先行研究と同様なシミュレーションを行った。

A.1 数値計算の理論

付録 A.1 では、アニーリング法のコードに用いた数値計算スキームや数値計算ライブラリを紹介する。A.1.1 項では空間微分に関する数値計算法を紹介する。一方、A.1.2 項では時間発展に関する数値計算法を説明する。

A.1.1 空間微分の計算方法

計算機を用いて数値計算を行う際には、計算機は無限を扱うことができないため、偏微分方程式を離散化して有限にする必要がある。離散化の方法としては、計算領域を格子に区切り格子点上のみの値を扱う差分法と関数展開によって離散化する方法がある。関数展開によって離散化する方法には、フーリエ級数展開を用いたスペクトル法がある [17]。

差分法は離散化がわかりやすく、 (i, j) の格子点における渦度を $U_{i,j}$ 流れ関数を $\phi_{i,j}$ とすると、 (i, j) の格子点での Poisson 括弧 $[U, \phi]_{i,j} =: \mathcal{J}_{i,j}$ は次のように求められる：

$$\mathcal{J}_{i,j} = \frac{1}{4d^2} [(U_{i+1,j} - U_{i-1,j})(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}) - (U_{i,j+1} - U_{i,j-1})(\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j})]. \quad (\text{A.1})$$

ただし、 x, y 方向の格子間隔をともに d とした。このようにして、(A.1) 式を使えば Poisson 括弧の計算ができる。しかし、差分法では格子点に区切っているため、微分に誤差が生じている。そのため、(A.1) を用いて流体の運動を長時間計算すると誤差により計算が失敗してしまう。

そこで Arakawa [18] が考案したのが、運動エネルギー $\frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} |\nabla_{\perp} \psi|^2$ とエンストロ

フィー $\frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} U^2$ が保存することが予め保証されたスキームである．具体的には，

$$[U, \phi] = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(U \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right\} + \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \psi \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \psi \right) \right\} \right] \quad (\text{A.2})$$

の右辺を 2 次精度で離散化したものである．差分スキームでは，この Arakawa スキームを用いて Poisson 括弧の計算を行う．

一方，スペクトル法ではフーリエ級数展開を用いるため，格子点に区切ることによる誤差が出ない．しかしながら，非線形項である Poisson 括弧

$$\frac{1}{2\pi} \int_D d\mathbf{x} [U, \phi] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (\text{A.3})$$

の計算には非常にコストがかかる．スペクトル法で，このような計算を行う際に用いられるのが，変換法と呼ばれる方法である．変換法とはフーリエ係数をフーリエ逆変換して，格子点上で非線形項を評価してから，それをフーリエ変換して非線形項のフーリエ係数を求めるというものである．今，波数の最大値を N で離散化して， $-N \leq k \leq N$ で計算を行う場合を考えると，(A.3) 式から現れる最大の波数は $3N$ である．そのため， $3N + 1$ 以上の分点をとれば，エイリアシング誤差が除かれて正確に計算できる [17]．この波数の最大値のカットは 2/3 法と呼ばれる．また，この変換法を用いた方法は擬スペクトル法と呼ばれる．ここで，アニーリング法では 3 次の非線形項を計算するため，非線形項に現れる最大波数が $4N$ となることを注意する．そのため，擬スペクトル法のアニーリング法の計算では 2/4 法のような形で波数の最大値のカットを行う．

スペクトル法のコードでは，変換法を用いることを説明したが，フーリエ変換とフーリエ逆変換を行う際にもコストがかかる．そこで，高速フーリエ変換 (FFT) を行う数値計算ライブラリである FFTW [19] を用いて計算を高速に行っている．

A.1.2 時間発展の計算方法

今，次の式で表される式を解くことを考える：

$$\frac{dy}{dt} = f(x). \quad (\text{A.4})$$

ただし， y は x の関数である．関数 $f(x)$ はわかっているものとする． $x_{n+1} = x_n + h$ に解を発展させる最も単純な公式が，次の Euler 法である：

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + O(h^2). \quad (\text{A.5})$$

(A.5) 式からわかるように, Euler 法は出発点だけの値を用いている. この非対称性を減らすように区間の中点を使って計算を行うスキームが, 次の 2 次の Runge-Kutta 法である:

$$k_1 = hf(x_n, y_n), \quad (\text{A.6})$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}), \quad (\text{A.7})$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2 + O(h^3). \quad (\text{A.8})$$

このように中点の仮のステップを用いることで誤差を減らしている. そして, さらに誤差項を減らしたものが, 次の 4 次の Runge-Kutta 法である:

$$k_1 = hf(x_n, y_n), \quad (\text{A.9})$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}), \quad (\text{A.10})$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}), \quad (\text{A.11})$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3), \quad (\text{A.12})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5). \quad (\text{A.13})$$

アニーリング法では初期に Hamiltonian が急激に変化し, 緩和が進むにつれて Hamiltonian の変化が緩やかになる. そのため, 我々が開発したコードでは 4 次の Runge-Kutta 法のステップを二重化することで適応刻み幅制御 [20] を行っている. まずステップの二重化について説明する. (A.4) 式において, x から $x + 2h$ となるまで計算し近似解を得ることを考える. 片方のステップでは h という刻み幅で計算し, y_1 という近似解が, もう片方のステップでは $2h$ という刻み幅で計算し, y_2 という近似解が得られたとする. この時, 真の値 $y(x + 2h)$ は次のように表される:

$$y(x + 2h) = y_1 + (2h)^5 \phi + O(h^6), \quad (\text{A.14})$$

$$y(x + 2h) = y_2 + 2h^5 \phi + O(h^6). \quad (\text{A.15})$$

ここで, ϕ は 5 次の誤差の係数とした. また, 次の量を評価誤差として定義する:

$$\Delta := y_2 - y_1 \quad (\text{A.16})$$

この評価誤差を用いれば, $y(x + 2h)$ は次の式で表せる:

$$y(x + 2h) = y_2 + \frac{\Delta}{15} + O(h^6). \quad (\text{A.17})$$

このように評価誤差を用いれば 5 次精度での計算が可能である. しかし, 評価誤差の使い

道はこれだけではない。それは、評価誤差を用いて目標の精度 Δ_0 となるように刻み幅を調整することである。実際に h_1 で計算を行った時に、 Δ_1 という評価誤差になった場合を考える。この時、評価誤差が Δ_0 となるためには、(A.14) 式～(A.16) 式から Δ のスケールが h^5 であるから、時間刻み幅を

$$h_0 = h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{0.20} \quad (\text{A.18})$$

として、計算しなおせば良い。実際の計算ではより正確に計算するために (A.18) 式よりも条件を厳しくした、次の式で刻み幅制御を行う：

$$h_0 = \begin{cases} 0.9 \times h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{0.20} & (\Delta_0 \geq \Delta_1) \\ 0.9 \times h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{0.25} & (\Delta_0 < \Delta_1) \end{cases} . \quad (\text{A.19})$$

最後にアニーリング法の計算の終了条件についてコメントする。アニーリング法では、 ϵ_1, ϵ_2 を微小な数、 $\langle \cdot \rangle$ を平均をとることを意味するとして、

$$\left\langle \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \right\rangle < \epsilon_1, \quad (\text{A.20})$$

$$\left\langle \left| \mathcal{J} \frac{\delta H}{\delta u} \right|^2 \right\rangle < \epsilon_2 \quad (\text{A.21})$$

が成り立つことを計算終了の条件にしている。これらの式の意味としては、アニーリング法の時間変化が十分に小さいことともとの Hamilton の運動方程式においても、平衡状態に達していることを調べている。微小な数 ϵ の値としては、HINT2 コード [10] と呼ばれる 3 次元 MHD 平衡を求めるコードに使われている緩和の判定条件の値を参考にしている。HINT2 コードでは ϵ_1 が 10^{-6} 、 ϵ_2 が 10^{-5} としている。我々のコードでは $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-6}$ または 10^{-7} として計算を行った。

A.2 先行研究と同様なシミュレーションによるテスト

付録 A.2 では、我々が開発したアニーリング法のコードの動作確認を兼ねて、先行研究と同様なシミュレーションを行う。付録 A.2.1 では、Carnevale ら [6] が行った人工的な移流項を用いたアニーリング法のシミュレーションを行った。付録 A.2.2 では、Flierl ら [8] が行った Green 関数を用いた対称括弧によるアニーリング法のシミュレーションを行った。

A.2.1 人工的な移流項によるアニーリング法のテスト

付録 A.2.1 では、Carnevale ら [6] が行ったシミュレーションの再現を行う。先行研究では、擬スペクトル法が用いられていたが、ここでは擬スペクトル法の結果に加えて、差分スキームで同様の計算をした結果も示す。

計算の条件としては、 $-\pi \leq x < \pi, -\pi \leq y < \pi$ の計算領域を 128^2 の解像度で計算を行った。境界条件には周期境界条件を用いて、境界項が現れないようにしている。

渦度の内点の初期条件は $-1 \leq U(\mathbf{x}) < 1$ を満たすように $\text{rand}()$ 関数を用いてランダムに与えた。渦度の境界上の点については、周期境界条件を満たすように設定した。

擬スペクトル法のコードでは、数値誤差を除くために最大波数をカットしている。そのカットの方法としては、2 次の非線形項では 2/3 法でカットが行われるが、アニーリング法の場合、3 次の非線形項が現れるため、2/4 法と言うべき割合で最大波数をカットしている。

時間の刻み幅制御を行うための許容誤差 Δ は、次のように設定した：

$$\Delta := \max \{|U(\mathbf{x})|\} \times 10^{-8} \quad (\max \{|U(\mathbf{k})|\} \times 10^{-8}). \quad (\text{A.22})$$

ただし、() 内は擬スペクトル法の場合である。

開発したコードは次のようなものである：

表 A.1 周期境界条件を満たすランダムな初期条件を用いて、擬スペクトル法のアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の各時刻の Hamiltonian と Casimir 不変量の値とその初期値に対する変化の割合 (計算の開始時刻: $t = 0.000000$, 計算の終了時刻: $t = 106.665475$). ランダムな初期条件のため、微分の計算が難しく Casimir 不変量が若干変化している. しかし, このような難しい状況においても, Hamiltonian の変化に比べれば, Casimir 不変量が非常に良く保存している.

	$t = 0.000000$	$t = 106.665475$	(変化の割合)
H	0.011981	1.568299	$(+1.30 \times 10^4\%)$
\bar{U}^2	3.195586	3.195586	$(+0.00\%)$
\bar{U}^3	0.009605	0.013118	$(+36.57\%)$
\bar{U}^4	0.740805	0.751083	$(+1.39\%)$

人工的な移流項によるアニーリング法のコード

(I) 計算の初期条件の設定

(I-1) 渦度 U の初期条件の設定

(I-2) フーリエ変換による流れ関数 $\phi := \nabla_{\perp}^{-2}U$ の計算

(II) 時間発展の計算: 4 次の Runge-Kutta 法のステップの二重化

(II-1) アニーリング法の式:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [U, [U, \phi]] \quad (\text{A.23})$$

による渦度 U の時間発展

(II-2) フーリエ変換による流れ関数 ϕ の計算

(II-3) 計算の終了条件:

$$\begin{aligned} \left\langle \left| \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial t} \right|^2 \right\rangle < 10^{-6} \quad & \left(\left\langle \left| \frac{\partial U(\mathbf{k})}{\partial t} \right|^2 \right\rangle < 10^{-6} \right) \\ \wedge \quad & \left\langle \left| \mathcal{J} \frac{\delta H}{\delta U} \right|^2 \right\rangle < 10^{-6} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

を満たすまで, (II-1),(II-2) を繰り返し ($\langle \cdot \rangle$ は平均をとることを意味している)

(A.24) 式は, 差分スキームでは $\left| \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial t} \right|^2$ の条件を, 擬スペクトル法では $\left| \frac{\partial U(\mathbf{k})}{\partial t} \right|^2$ の条件を用いる.

このコードを用いて計算した結果を示す. 先行研究と同様に擬スペクトル法を用いて, (A.23) 式の計算を行った時の結果を図 A.1~図 A.4 と表 A.1 に示す. また, 差分スキームと同様の計算を行った結果を図 A.5~図 A.8 と表 A.2 に示す.

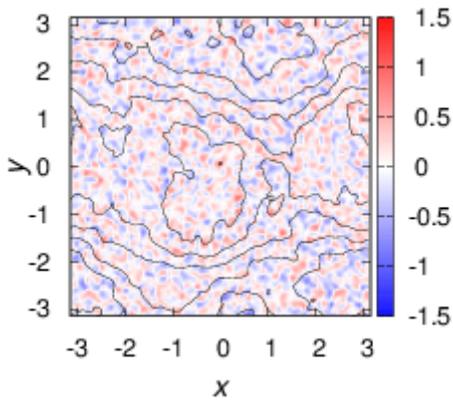


図 A.1 擬スペクトル法のコードに用いる，周期境界条件を満たすランダムな初期条件 ($t = 0.000000$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線．2/4 法で最大波数のカットを行ったもの．

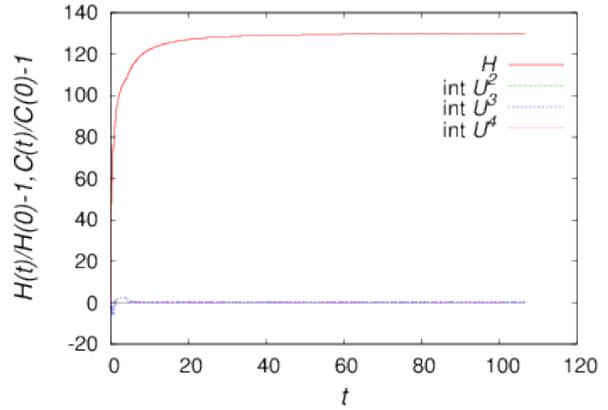


図 A.2 周期境界条件を満たすランダムな初期条件を用いて，擬スペクトル法のアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の Hamiltonian と Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化 (赤： $H := \frac{1}{2} \int_D dx |\nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^{-2} U)|^2$ ，緑： $\bar{U}^2 := \int_D dx U^2$ ，青： \bar{U}^3 ，紫： \bar{U}^4)

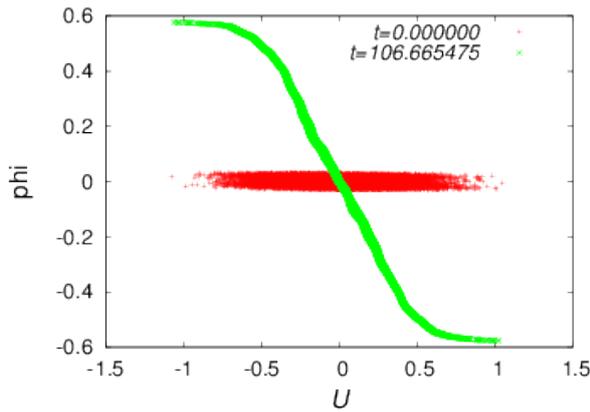


図 A.3 周期境界条件を満たすランダムな初期条件を用いて，擬スペクトル法のアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の各時刻での $U - \phi$ グラフ (赤：計算の開始時刻 $t = 0.000000$ ，緑：計算の終了時刻 $t = 106.665475$)．定常状態では， $\phi = F'(U)$ ((2.27) 式) が成り立つ．

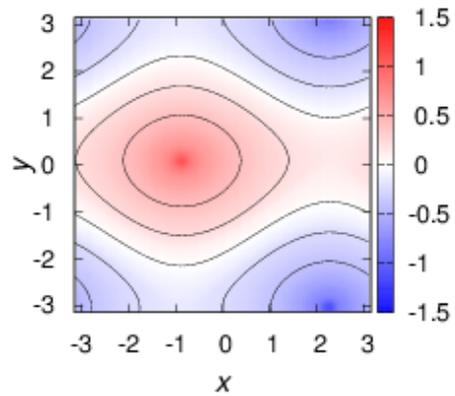


図 A.4 周期境界条件を満たすランダムな初期条件を用いて，擬スペクトル法のアニーリング法のコードにより定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 106.665475$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

図 A.1, 図 A.4, 図 A.5, 図 A.8 は，各時刻における渦度のカラーマップと流れ関数の等高線を重ね合わせた図である．図 A.2 と図 A.6 は Hamiltonian と 3 つの Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化を示している．図 A.3 と図 A.7 は各時刻の $U - \phi$ グラフをプロットしたものである．表 A.1 と表 A.2 は各時刻での Hamiltonian と 3 つの Casimir 不変量の値と初期値に対する変化の割合を示したものである．

図 A.2 や図 A.6, 表 A.1, 表 A.2 から，Hamiltonian に比べ，Casimir 不変量を良く保存した上で，Hamiltonian を極大化できている．定常状態が得られていることは，図 A.3 と

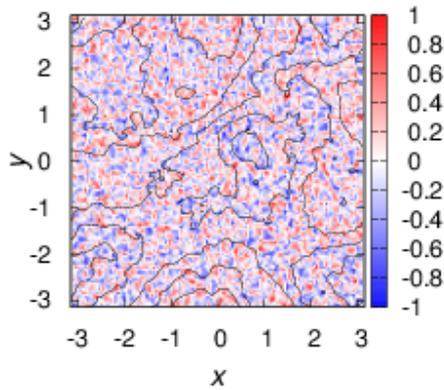


図 A.5 差分スキームのコードに用いる，周期境界条件を満たすランダムな初期条件 ($t = 0.000000$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線．2/4 法による最大波数のカットは行っていないもの．

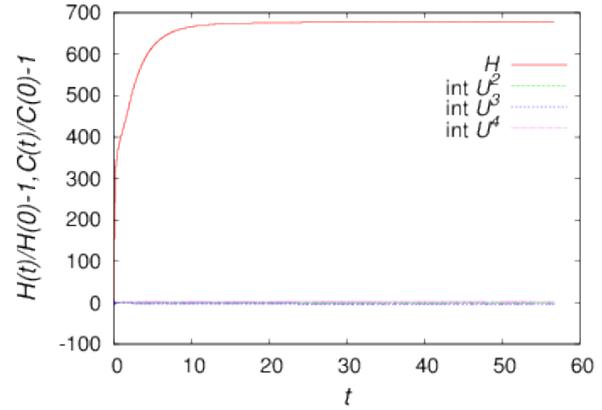


図 A.6 周期境界条件を満たすランダムな初期条件を用いて，差分スキームのアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の Hamiltonian と Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化 (赤： $H := \frac{1}{2} \int_D dx |\nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^2 U)|^2$ ，緑： $\bar{U}^2 := \int_D dx U^2$ ，青： \bar{U}^3 ，紫： \bar{U}^4)

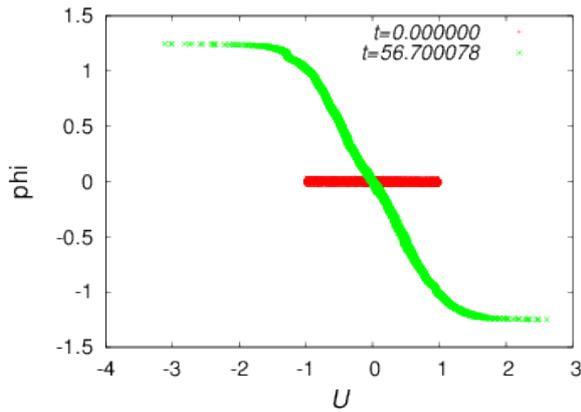


図 A.7 周期境界条件を満たすランダムな初期条件を用いて，差分スキームのアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の各時刻での $U - \phi$ グラフ (赤：計算の開始時刻 $t = 0.000000$ ，緑：計算の終了時刻 $t = 56.700078$)．定常状態では， $\phi = F'(U)$ ((2.27) 式) が成り立つ．

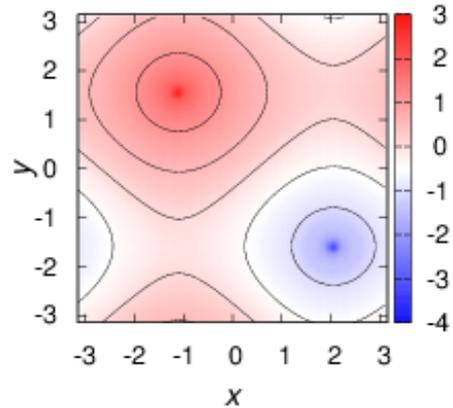


図 A.8 周期境界条件を満たすランダムな初期条件を用いて，差分スキームのアニーリング法のコードにより定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 56.700078$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

図 A.7 において， ϕ と U が一対一対応になっており， ϕ が U の関数と見なせることからわかる．得られた定常状態は図 A.4 と図 A.8 から，いずれも軸対称な定常状態が得られている．

以上のことから，擬スペクトル法のコードでも，差分スキームのコードでも先行研究と同様な結果が得られ，コードが正しく開発できていることが確認できる．

表 A.1 と表 A.2 では，値が異なっているが，これは乱数を用いていることや擬スペクトル法のコードでは最大波数をカットしていることにより，同じ初期条件で計算できていない

表 A.2 周期境界条件を満たすランダムな初期条件を用いて、差分スキームのアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の各時刻の Hamiltonian と Casimir 不変量の値とその初期値に対する変化の割合 (計算の開始時刻: $t = 0.000000$, 計算の終了時刻: $t = 56.700078$). ランダムな初期条件のため、微分の計算が難しく Casimir 不変量が若干変化している. しかし, このような難しい状況においても, Hamiltonian の変化に比べれば, Casimir 不変量が非常に良く保存している.

	$t = 0.000000$	$t = 56.700078$	(変化の割合)
H	0.010302	6.981965	$(+6.77 \times 10^4\%)$
\bar{U}^2	13.145752	14.306377	$(+8.88\%)$
\bar{U}^3	0.047689	-0.098040	(-305%)
\bar{U}^4	7.905713	17.230594	$(+118\%)$

ことによる.

また, 中性流体のアニーリング法では渦度は移流によって流されるだけなので, 渦度の最大値は原理的には変化しない. このことは, 図 A.3 から擬スペクトル法のコードでは, 確認できる. しかし, 差分スキームの結果では, 図 A.7 から, 渦度の最大値が大きく変化している. このことから, 差分スキームよりも擬スペクトル法の方が, 数値誤差の影響が小さく, より正確に計算ができています.

A.2.2 Green 関数を用いた対称括弧によるアニーリング法のテスト

付録 A.2.2 では, Flierl ら [8] が行ったシミュレーションを行う. 先行研究と同様に, Green 関数を用いた対称括弧によるアニーリング法の式を用いることで, 我々が開発した対称括弧のアニーリング法のコードの動作確認を行う.

計算の条件としては, $-\pi \leq x < \pi, -\pi \leq y < \pi$ の計算領域を 128^2 の解像度で計算を行った. 境界条件には周期境界条件を用いて, 境界項が現れないようにしている.

渦度の初期条件は先行研究で用いられていた次の初期条件を用いた:

$$U = \begin{cases} 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 & r < r_0 \\ 0 & r_0 \leq r \end{cases} \quad (r_0 = \sqrt{1 + 0.6 \cos(2\theta)}). \quad (\text{A.25})$$

Green 関数を用いた対称括弧の計算には擬スペクトル法を用いるため, 3 次の非線形項の数値誤差を除くために, 2/4 法と言うべき割合で最大波数をカットした. また, 時間の刻み幅制御を行うための許容誤差 Δ は, 次のように設定した:

$$\Delta := \max \{|U(\mathbf{k})|\} \times 10^{-8}. \quad (\text{A.26})$$

開発したコードは次のようなものである:

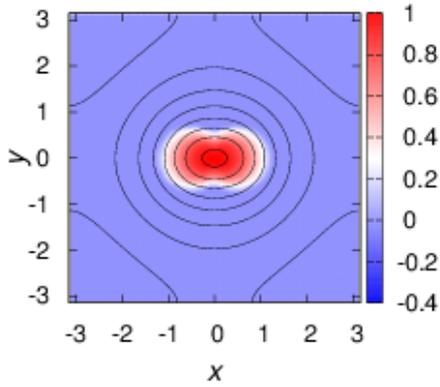


図 A.9 渦度の初期条件 ($t = 0.000000$) を二重渦 ((A.25) 式) に設定した時の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

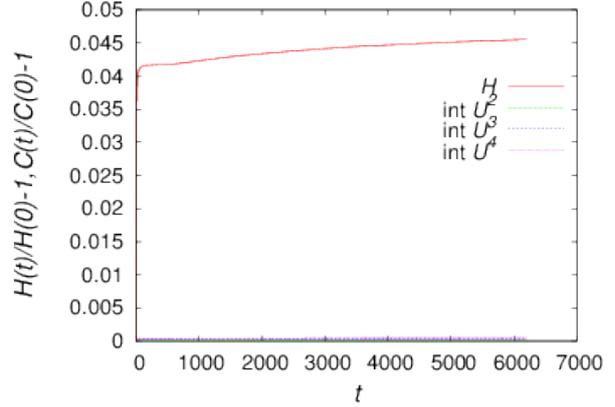


図 A.10 渦度の初期条件を二重渦 ((A.25) 式) として, Green 関数を使った対称括弧のアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の Hamiltonian と Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化 (赤: $H := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} |\nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^2 U)|^2$, 緑: $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x} U^2$, 青: \bar{U}^3 , 紫: \bar{U}^4)

Green 関数を使った対称括弧によるアニーリング法のコード

(I) 計算の初期条件の設定

(I-1) 渦度 U の初期条件の設定

(I-2) フーリエ変換による流れ関数 $\phi := \nabla_{\perp}^{-2} U$ の計算

(II) 時間発展の計算: 4 次の Runge-Kutta 法のステップの二重化

(II-1) アニーリング法の式:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [U, \Phi], \quad (\text{A.27})$$

$$\Phi(\mathbf{k}) = \frac{1}{|k|^2} \int_D d\mathbf{x} [U, \phi] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (\text{A.28})$$

による渦度 U の時間発展

(II-2) フーリエ変換による流れ関数 ϕ の計算

(II-3) 計算の終了条件:

$$\left\langle \left| \frac{\partial U(\mathbf{k})}{\partial t} \right|^2 \right\rangle < 10^{-6} \quad \wedge \quad \left\langle \left| \mathcal{J} \frac{\delta H}{\delta U} \right|^2 \right\rangle < 10^{-6} \quad (\text{A.29})$$

を満たすまで, (II-1),(II-2) を繰り返し ($\langle \cdot \rangle$ は平均をとることを意味している)

このコードを用いて計算した結果を図 A.9~図 A.12 と表 A.3 に示す。

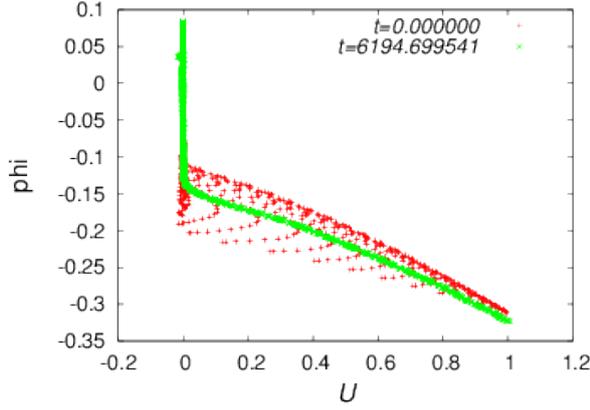


図 A.11 渦度の初期条件を二重渦 ((A.25) 式) として, Green 関数を使った対称括弧のアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の各時刻での U - ϕ グラフ (赤: 計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: 計算の終了時刻 $t = 6194.699541$) 定常状態では, $\phi = F'(U)$ ((2.27) 式) が成り立つ.

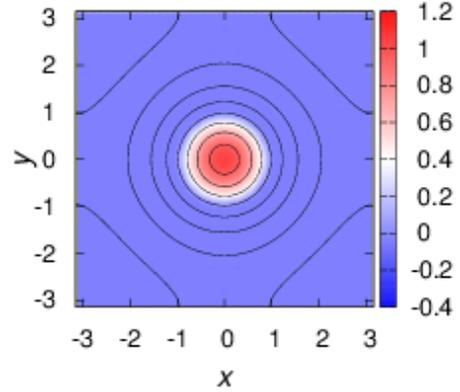


図 A.12 渦度の初期条件を二重渦 ((A.25) 式) として, Green 関数を使った対称括弧のアニーリング法のコードにより定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 6194.699541$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

表 A.3 渦度の初期条件を二重渦 ((A.25) 式) として, Green 関数を使った対称括弧のアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の各時刻の Hamiltonian と Casimir 不変量の値とその初期値に対する変化の割合 (計算の開始時刻: $t = 0.000000$, 計算の終了時刻: $t = 6194.699541$)

	$t = 0.000000$	$t = 6194.99541$	(変化の割合)
H	0.190794	0.199480	(+4.55%)
\bar{U}^2	1.047090	1.047090	(-0.00%)
\bar{U}^3	0.785418	0.785728	(+0.04%)
\bar{U}^4	0.628346	0.628653	(+0.05%)

図 A.9 と図 A.12 は各時刻における渦度のカラーマップと流れ関数の等高線を重ね合わせた図である. 図 A.10 は Hamiltonian と 3 つの Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化を示している. 図 A.11 は各時刻の U - ϕ グラフをプロットしたものである. 表 A.3 は各時刻での Hamiltonian と 3 つの Casimir 不変量の値と初期値に対する変化の割合を示したものである.

図 A.10 と表 A.3 から, Hamiltonian に比べ, Casimir 不変量を良く保存した上で Hamiltonian を極大化できている. 定常状態が得られていることは, 図 A.11 において, ϕ と U が一対一対応になっており, ϕ が U の関数と見なせることからわかる. また, 中性流体のアニーリング法では渦度は移流されるだけであるから, その最大値と最小値は変化しない. このことが図 A.11 から確認できるため, 数値誤差も少なく計算ができていると判断できる. 先行研究と異なり, Dirac 括弧によって角運動量の制限を行っていないため, 図 A.12 では軸対称な定常状態が得られている. これは先行研究において, 角運動量を制限しなかった時の結果と一致している.

付録 B

3 章の補足

付録 B では、3 章の補足を行う。付録 B.1 では、最急降下法を用いて指定できる Casimir 不変量の値の範囲について述べる。付録 B.2 では、不安定な定常状態があった時に、それがアニーリング法で計算できるかどうかを調べるために、初期条件を不安定な定常状態として計算した結果を示す。

B.1 最急降下法により指定できる Casimir 不変量の値の範囲

付録 B.1 では、最急降下法によって、指定できる Casimir 不変量の範囲についてコメントする。付録 B.1.1 では、指定できる範囲を調べるために用いたテストコードの概要を説明する。付録 B.1.2 ではテストコードを用いて計算した結果を示す。最後の付録 B.1.3 では、得られた結果に対する考察を行う。

B.1.1 Casimir 不変量の値を指定するテストコードの概要

適当に設定した初期条件を最急降下法で、指定した Casimir 不変量の値を持つように調整を行うコードを開発した。計算は、 $-\pi \leq x < \pi, -\pi \leq y < \pi$ という計算領域を 128^2 の解像度で行った。境界条件には周期境界条件を用いている。

渦度の初期条件には 3.2.1 項で用いた、定常状態に周期境界条件を満たすように摂動を加えたものを用いる：

$$U = \cos x + \sin(y + \cos y). \quad (\text{B.1})$$

開発したコードは次のようなものである：

最急降下法による初期条件の調整のテストコード

(I) 計算の初期条件の設定

(I-1) 渦度 U の初期条件の設定

(I-2) 指定する Casimir 不変量 $\bar{U}^\gamma := \int_D d\mathbf{x} U^\gamma$ とその値 C_γ の設定 ($\gamma = m, n$)

(II) 時間発展の計算 : $d\tau = 10^{-4}$ の Euler 法

(II-1) 最急降下法の式 :

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = -(A_m U^{m-1} + A_n U^{n-1}), \quad (\text{B.2})$$

$$A_\gamma = \gamma (\bar{U}^\gamma - C_\gamma) \quad (\text{B.3})$$

による渦度 U の調整

(II-2) $W := (\bar{U}^m - C_m)^2 + (\bar{U}^n - C_n)^2$ の計算

(II-3) 調整の終了条件 :

$$|\bar{U}^\gamma - C_\gamma| \leq 10^{-7} \quad (\text{B.4})$$

を満たすか調べ, 満たすならば終了.

(II-4) W が単調に減少しているかを調べ, W が増加したらエラーを出して, 計算を終了. W が単調に減少していれば計算を続ける.

(II-5) $\tau = 10$ となっても計算が終了していなければ, エラーを出して計算を終了. $\tau < 10$ ならば, (II-1) のステップに戻る.

テストコードでは, 計算が終了する条件が次の 3 通りである :

- (i) 正しく, Casimir 不変量の値を調整できて, (II-3) の終了条件により計算終了
- (ii) $\frac{dW}{d\tau} \leq 0$ が理論的に成り立つにも関わらず W が増加する失敗が起きて, (II-4) でエラーとなり計算終了
- (iii) 計算に時間がかかり過ぎて, (II-5) でエラーとなり計算終了

B.1.2 Casimir 不変量の値を指定するテストの結果

付録 B.1.1 で説明したテストコードを用いて, 指定できる Casimir 不変量の値を調べるテストを行う. テストは次の二つを行った :

(I) $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^3 = C_3$ となるように (B.1) 式を緩和させるテスト

(II) $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^4 = C_4$ となるように (B.1) 式を緩和させるテスト

表 B.1 $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^3 = C_3$ となるように (B.1) 式を最急降下法で緩和させて調整した時の C_3 の値と調整の成否とプログラムの終了条件のまとめ

C_3	調整の成否	テストコードの終了条件	調整後の渦度の 3 次元プロット
-200	失敗	$\tau = 0.1287$ で (II-4) でエラーとなり終了	-
-180	成功	$\tau = 1.0574$ で (II-3) を満たし終了	図 B.1
-100	成功	$\tau = 1.1048$ で (II-3) を満たし終了	-
-60	成功	$\tau = 0.9812$ で (II-3) を満たし終了	図 B.2
0	成功	$\tau = 0.2293$ で (II-3) を満たし終了	図 B.3
+60	成功	$\tau = 1.8187$ で (II-3) を満たし終了	図 B.4
+100	成功	$\tau = 1.6963$ で (II-3) を満たし終了	-
+180	成功	$\tau = 1.5408$ で (II-3) を満たし終了	図 B.5
+200	失敗	$\tau = 0.2760$ で (II-4) でエラーとなり終了	-

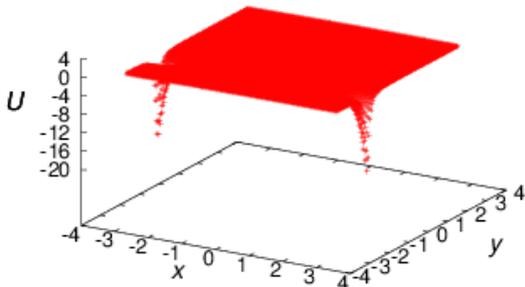


図 B.1 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((B.1) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^3 = -180$ となるように調整して得られた渦度の 3 次元プロット

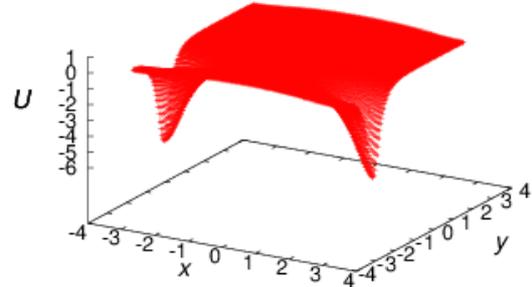


図 B.2 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((B.1) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^3 = -60$ となるように調整して得られた渦度の 3 次元プロット

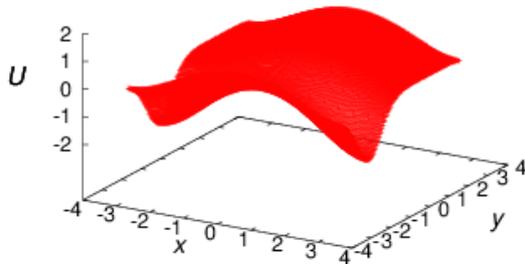


図 B.3 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((B.1) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^3 = 0$ となるように調整して得られた渦度の 3 次元プロット

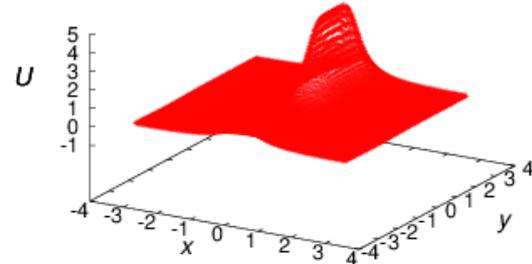


図 B.4 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((B.1) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^3 = 60$ となるように調整して得られた渦度の 3 次元プロット

テスト (I) において, C_3 の値を様々な値で計算した時の結果を表 B.1 にまとめる. また, 調整後の渦度の 3 次元プロットの図を図 B.1~図 B.5 に示す.

テスト (II) において, C_4 の値を様々な値で計算した時の結果を表 B.2 にまとめる. そして, 参考に $C_4 = 0$ に調整しようと試みて失敗した時の渦度の 3 次元プロットの図を図 B.6 に, $C_4 = 60, C_4 = 100$ の調整に成功した後の渦度の 3 次元プロットの図を図 B.7 と図 B.8

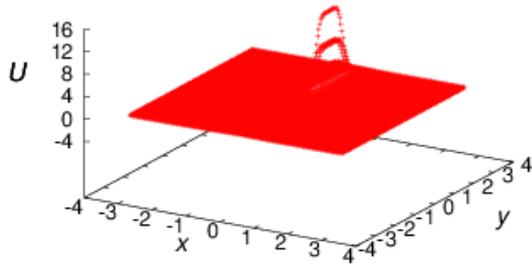


図 B.5 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((B.1) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^3 = 180$ となるように調整して得られた渦度の 3 次元プロット

表 B.2 $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^3 = C_4$ となるように (B.1) 式を最急降下法で緩和させて調整した時の C_4 の値と調整の成否とプログラムの終了条件のまとめ

C_4	調整の成否	テストコードの終了条件	調整後の渦度の 3 次元プロット
0	失敗	$\tau = 1.6835$ で (II-4) のエラーとなり終了	図 B.6
+8	失敗	$\tau = 6.7616$ で (II-4) のエラーとなり終了	-
+10	失敗	$\tau = 10$ で (II-5) のエラーとなり終了	-
+15	成功	$\tau = 3.5541$ で (II-3) を満たし終了	-
+60	成功	$\tau = 0.7190$ で (II-3) を満たし終了	図 B.7
+100	成功	$\tau = 0.6148$ で (II-3) を満たし終了	図 B.8
+120	成功	$\tau = 0.5922$ で (II-3) を満たし終了	-
+130	失敗	$\tau = 0.0957$ で (II-4) のエラーとなり終了	-

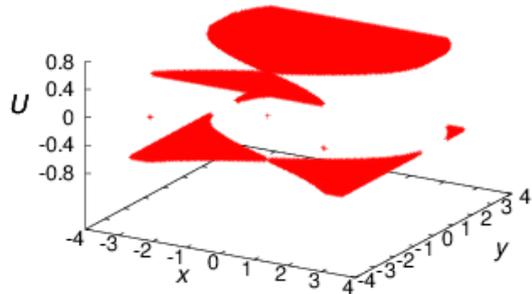


図 B.6 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((B.1) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^4 = 0$ となるように調整して失敗した時の渦度の 3 次元プロット. 調整に失敗しているため, $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^4 = 0$ にはなっていない.

にそれぞれ示す.

B.1.3 付録 B.1 の考察

付録 B.1.2 のテスト (I) の結果について述べる. $d\tau = 10^{-4}$ の Euler 法で, 最急降下法の式を解いて, (B.1) 式で表される渦度を $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^3 = C_3$ となるように調整した時に, C_3

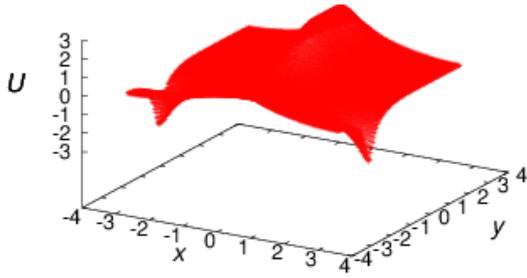


図 B.7 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((B.1) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^4 = 60$ となるように調整して得られた渦度の 3次元プロット

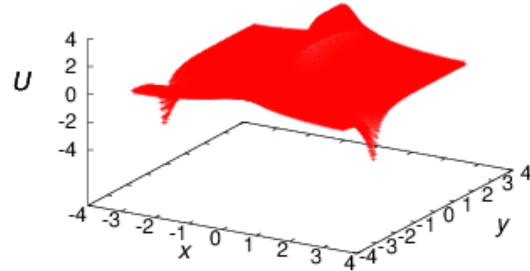


図 B.8 定常状態に摂動を加えた渦度の式 ((B.1) 式) を最急降下法により $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^4 = 100$ となるように調整して得られた渦度の 3次元プロット

が

$$-180 \leq C_3 \leq 180 \quad (\text{B.5})$$

の範囲では調整に成功した。しかし、 $C_3 = \pm 200$ として調整を行った時は計算に失敗してしまった。この失敗の原因は、 $|C_3|$ を大きくすると局所的に渦度の値が大きくなり、計算が困難になるからである。実際に $|C_3|$ を大きくすると局所的に渦度の値が大きくなることは、図 B.1～図 B.5 を見比べてみるとわかる。また、 $d\tau = 10^{-5}$ として計算をしてみると、 $C_3 = \pm 200$ の場合が計算できることも確認した。

次に付録 B.1.2 のテスト (II) の結果について述べる。 $d\tau = 10^{-4}$ の Euler 法で、最急降下法の式を解いて、(B.1) 式で表される渦度を $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^4 = C_4$ となるように調整した時に、 C_4 が

$$15 \leq C_4 \leq 120 \quad (\text{B.6})$$

の範囲では調整に成功した。しかし、 $C_4 \leq 10$ の場合や $C_4 \geq 130$ の場合には調整に失敗してしまった。 $C_4 \geq 130$ の場合の失敗の原因は、テスト (I) と同様で、 C_4 を大きくすると局所的に渦度の値が大きくなり、計算が困難になるからである。実際に、 $d\tau = 10^{-5}$ として計算をしてみると、 $C_4 = 130$ の場合が計算できることを確認した。それに対し、 $C_4 \leq 10$ の場合の失敗の原因は、数値的なものでないと考えている。つまり、 $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^4 \leq 10$ を満たす関数が存在しないために失敗している。例えば、 $\bar{U}^2 \neq 0$ の時、 $C_4 = 0$ を満たす関数はない。そのため、 $C_4 = 0$ に調整しようとするとき失敗する。そこで、図 B.6 の $C_4 = 0$ と設定しようとして失敗した時の渦度の 3次元プロットを見ると、離散的になっていることが確認できる。他の $C_4 = 8, 10$ の計算結果も同様な離散的な渦度の 3次元プロットになったことから、 $C_4 = 8, 10$ は $C_4 = 0$ の場合と同じ原因で失敗していると判断できる。つまり、 $\bar{U}^2 = 20, \bar{U}^4 \leq 10$ を満たす関数がないため、初期条件の調整に失敗している。

以上をまとめると、 $\bar{U}^2 \neq 0$ と定めると、 $\bar{U}^4 = 0$ という値がとれなくなるように、全て

の Casimir 不変量の値は独立に決められない. そのため, 指定する Casimir 不変量の数を増やせば, そのような条件を満たす関数を見つけることが難しくなる. しかし, 仮に指定した Casimir 不変量の値を持つような関数が存在するならば, 最急降下法により Casimir 不変量の値を正しく設定できる.

B.2 アニーリング法と定常解の安定性

付録 B.2 では、アニーリング法で得られた定常状態が不安定な定常状態だった時に、アニーリング法がどのような振る舞いをするかを調べるために、不安定な定常状態を初期値として、長時間計算を行った。付録 B.2.1 で不安定な定常状態を初期条件としたアニーリング法のコードについて説明し、付録 B.2.2 でその計算結果を示す。最後の付録 B.2.3 で得られた結果に対する考察を行う。

B.2.1 不安定な定常状態が初期条件のアニーリング法のコードの概要

渦度の初期条件として次のものを考える：

$$U = \cos 2x \times \sin y. \quad (\text{B.7})$$

この時、流れ関数は、

$$\phi = -\frac{1}{5} \cos 2x \times \sin y = -\frac{U}{5} (= F'(U)) \quad (\text{B.8})$$

である。これは $\phi = \phi(U)$ となっているため定常状態であり、また $F'' = -\frac{1}{5}$ が成り立つ。2次元非圧縮中性流体の定常状態が安定であるための十分条件は、(2.34) 式から、次の式である：

$$F'' < -1, \quad 0 < F''. \quad (\text{B.9})$$

よって、(B.7) 式の定常状態は不安定な可能性がある。

付録 B.2 では、このおそらく不安定な定常状態を初期条件として、アニーリング法の計算を行うことで、アニーリング法と定常解の安定性の関係について理解することが目的である。この目的のため、次のようなコードを開発した：

$t = 200$ まで計算を行う人工的な移流項によるアニーリング法のコード

(I) 計算の初期条件の設定

(I-1) 渦度 U の初期条件の設定

(I-2) フーリエ変換による流れ関数 $\phi := \nabla_{\perp}^{-2}U$ の計算

(II) 時間発展の計算 : 4 次の Runge-Kutta 法のステップの二重化

(II-1) アニーリング法の式 :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [U, [U, \phi]] \quad (\text{B.10})$$

による渦度 U の時間発展

(II-2) フーリエ変換による流れ関数 ϕ の計算

(II-3) 計算の終了条件 :

$$t > 200 \quad (\text{B.11})$$

を満たすまで, (II-1),(II-2) を繰り返し

ここで, 計算の終了条件を $t > 200$ としたのは, 初期条件が定常状態であるため, 計算の終了条件を定常状態かどうかの判定にしてしまうと, すぐに計算が終了して長時間計算が行えないからである. また, 時間刻み幅制御の許容誤差 Δ を

$$\Delta = \max \{|U(\mathbf{x})|\} \times 10^{-6} \quad (\text{B.12})$$

と大きくすることで, 数値誤差の影響を大きくして計算を行った. 計算領域は $-\pi \leq x < \pi, -\pi \leq y < \pi$ で, 128^2 の解像度で差分スキームを用いた. 境界条件には周期境界条件を用いて, 境界項が現れないようにしている.

B.2.2 不安定な定常状態が初期条件のアニーリング法のシミュレーション

付録 B.2.1 で説明したコードを用いて計算した結果を示す. 図 B.9 は, Hamiltonian と 2 つの Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化を示している. 図 B.10~図 B.14 は各時刻の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線を重ね合わせた図である. 表 B.3 は各時刻での Hamiltonian と 3 つの Casimir 不変量の値と初期値に対する変化の割合を示したものである.

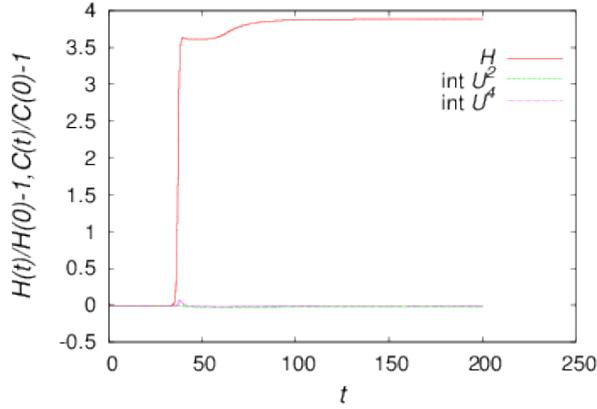


図 B.9 不安定な定常状態を初期条件として，差分スキームのアニーリング法のコードにより長時間計算を行った時の Hamiltonian と Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化 (赤: $H := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} |\nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^2 U)|^2$, 緑: $\bar{U}^2 := \int_D d\mathbf{x} U^2$, 紫: \bar{U}^4). \bar{U}^3 は小さく，変化量の初期値に対する割合をプロットするとグラフが見にくくなるため，ここでは省略した.

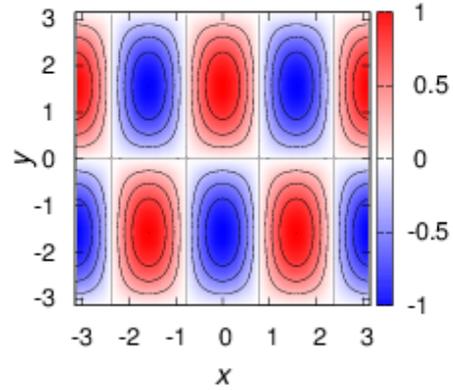


図 B.10 不安定な定常状態を初期条件として，差分スキームのアニーリング法のコードにより長時間計算を行った時の初期条件 ($t = 0.000000$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

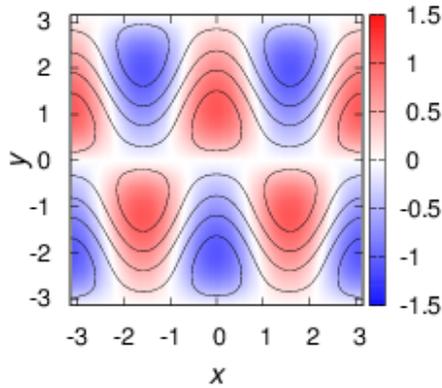


図 B.11 不安定な定常状態を初期条件として，差分スキームのアニーリング法のコードにより長時間計算を行った時の Hamiltonian の急激な変化が起こる前の時刻 ($t = 35.966294$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

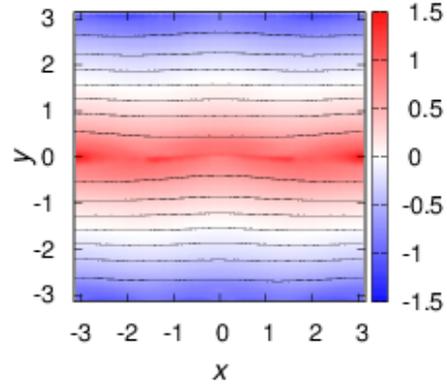


図 B.12 不安定な定常状態を初期条件として，差分スキームのアニーリング法のコードにより長時間計算を行った時の Hamiltonian の急激な変化が起きている時刻 ($t = 40.157562$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

表 B.3 不安定な定常状態を初期条件として，差分スキームのアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の各時刻の Hamiltonian と Casimir 不変量の値とその初期値に対する変化の割合 (計算の開始時刻: $t = 0.000000$, 計算の終了時刻: $t = 106.665475$). \bar{U}^3 は初期値が小さいため，変化の割合は省略した.

	$t = 0.000000$	$t = 200.472473$	(変化の割合)
H	0.984084	4.811594	(+389%)
\bar{U}^2	9.868123	9.652046	(-2.19%)
\bar{U}^3	-0.000000	0.285243	(-)
\bar{U}^4	5.549441	5.469707	(+1.44%)

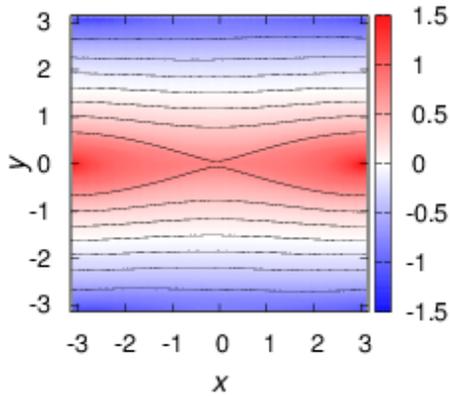


図 B.13 不安定な定常状態を初期条件として，差分スキームのアニーリング法のコードにより長時間計算を行った時の Hamiltonian の急激な変化が起きた後の時刻 ($t = 50.407742$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

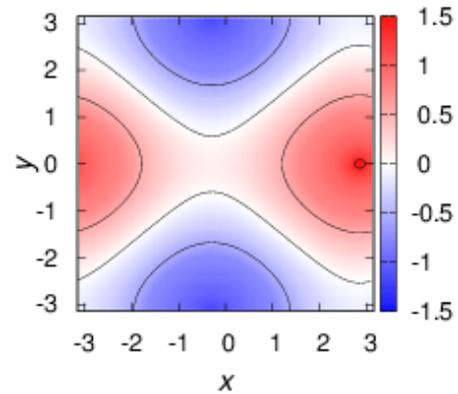


図 B.14 不安定な定常状態を初期条件として，差分スキームのアニーリング法のコードにより長時間計算を行った時に計算を終了した時刻 ($t = 200.472473$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

B.2.3 付録 B.2 の考察

図 B.12 から，Hamiltonian が急激に変化しているときには渦と渦が合体し，細かい構造からより大きな構造へと変化していることがわかる．このことから Hamiltonian の変化は渦の構造の大きさが関係している．また，図 B.9 からわかるように，Casimir 不変量の保存が悪い時は，渦の合体が起きている時であり，図 B.11 のように渦が移動し始める段階では Casimir 不変量は良く保存されている．つまり，図 B.11 のような渦の移動は Casimir 不変量の保存性には大きく関係していない．図 B.11 の渦の移動が起こる原因として考えられることとしては，定常状態の解の不安定性である．定常解が不安定であるため，わずかな誤差にもかかわらず，このような渦の移動が起きた．

このような考察から，アニーリング法では不安定な定常状態を得ることが難しい．それは，アニーリング法によって，Casimir 不変量を保った上で，このような不安定な定常状態に偶然近づいたとしても，わずかな数値誤差の影響で，より安定でより Hamiltonian の大きい構造へと遷移するからである．

付録 C

4 章の補足

4 章では, Green 関数を用いた対称括弧によるアニーリング法のコードで, 2次元低ベータ簡約化 MHD の定常状態を求めた. 付録 C では, 差分スキームや擬スペクトル法を用いたアニーリング法のコードにより, 2次元低ベータ簡約化 MHD の定常状態を求める. 付録 C.1 では差分スキームのアニーリング法のコードを用いた結果を示す. 付録 C.2 では, 擬スペクトル法を用いたアニーリング法のコードによる結果を示す.

C.1 差分スキームを用いた 2次元低ベータ簡約化 MHD のアニーリング法

付録 C.1 では Arakawa スキームを用いて差分スキームで 2次元低ベータ簡約化 MHD の定常状態をアニーリング法で求めた結果を示す. 付録 C.1.1 で作成したコードの概要を説明し, 付録 C.1.2 でそのシミュレーション結果を示す. 最後の付録 C.1.3 で得られた結果に対する考察を行う.

C.1.1 差分スキームを用いたアニーリング法のコードの概要

4.2.1 項で行われたシミュレーションとほぼ同様な計算条件で行う. つまり, 計算領域は $-\pi \leq x < \pi, -\pi \leq y < \pi$ であり, 解像度は 128^2 である. 境界条件には周期境界条件を用いて, 境界項が現れないようにしている. 初期条件も (4.19) 式と (4.20) 式を用いる. そして, 時間刻み幅制御を行うための許容誤差 Δ は次のようにしている:

$$\Delta := \min \{ \max \{ |U(\mathbf{x})| \}, \max \{ |\psi(\mathbf{x})| \} \} \times \epsilon_1. \quad (\text{C.1})$$

ただし, ϵ_1 は微小な数で, 付録 C.1.2 のシミュレーションでは, $\lambda = 4$ の時, $\epsilon_1 = 10^{-7}$, $\lambda = 1$ の時, $\epsilon_1 = 10^{-6}$ と設定した.

開発したコードは次のようなものである:

(I) 計算の初期条件の設定

(I-1) 渦度 U と磁束関数 ψ の初期条件の設定

(I-2) フーリエ変換による流れ関数 $\phi := \nabla_{\perp}^{-2}U$ の計算, 差分による電流密度 $J := \nabla_{\perp}^2\psi$ の計算

(II) 時間発展の計算 : 4 次の Runge-Kutta 法のステップの二重化

(II-1) アニーリング法の式 :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - [U, [U, \phi] + [\psi, J]] - [\psi, [\psi, \phi]], \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = - [\psi, [U, \phi] + [\psi, J]] \quad (\text{C.3})$$

による渦度 U と磁束関数 ψ の時間発展

(II-2) フーリエ変換による流れ関数 ϕ の計算, 差分による電流密度 J の計算

(II-3) 計算の終了条件 :

$$\begin{aligned} \left\langle \left| \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial t} \right|^2 \right\rangle < \epsilon_2 \quad \wedge \quad \left\langle \left| \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial t} \right|^2 \right\rangle < \epsilon_2 \\ \wedge \quad \langle |[U, \phi] + [\psi, J]|^2 \rangle < \epsilon_2 \quad \wedge \quad \langle |[\psi, \phi]|^2 \rangle < \epsilon_2 \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

を満たすまで, (II-1),(II-2) を繰り返し ($\langle \cdot \rangle$ は平均をとることを意味している)

ただし, ϵ_2 は微小な数で, 付録 C.1.2 のシミュレーションでは, $\lambda = 4$ の時, $\epsilon_2 = 10^{-7}$, $\lambda = 1$ の時, $\epsilon_2 = 10^{-6}$ と設定した.

C.1.2 差分スキームを用いたアニーリング法のシミュレーション

付録 C.1.1 で説明した差分スキームのアニーリング法のコードを用いて計算した結果を示す. (4.20) 式の $\lambda = 4$ とした時の結果を図 C.1~図 C.5 と表 C.1 に示す. (4.20) 式で $\lambda = 1$ とした時の結果を図 C.6~C.10 と表 C.2 に示す.

図 C.1 と図 C.6 は Hamiltonian と 3 つの Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化を示した図である. 図 C.2, 図 C.7 は各時刻の ψ - ϕ グラフをプロットしたものである. 図 C.3, 図 C.8 は各時刻の ψ - $(J - U\phi)$ グラフをプロットしたものである. 残りの図は各時刻における渦度または電流密度のカラーマップと流れ関数または磁束関数の等高線を重ね合わせた図である. 表 C.1, 表 C.2 は各時刻での Hamiltonian と 4 つの Casimir 不

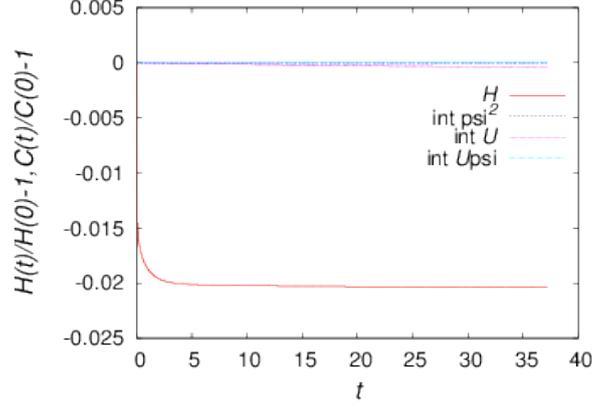


図 C.1 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 4$ とした sub-Alfvénic な初期条件を用いて、差分スキームのアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の Hamiltonian と Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化 (赤: $H := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} (|\nabla_{\perp} \phi|^2 + |\nabla_{\perp} \psi|^2)$, 青: $\bar{\psi}^2 := \int_D d\mathbf{x} \psi^2 =: 2C_M$, 紫: \bar{U} , 水色: $C_{CH} := \int_D d\mathbf{x} U\psi$). $\bar{\psi}$ は初期値が小さく、初期値に対する割合をプロットするとグラフが見にくくなるため、ここでは省略した.

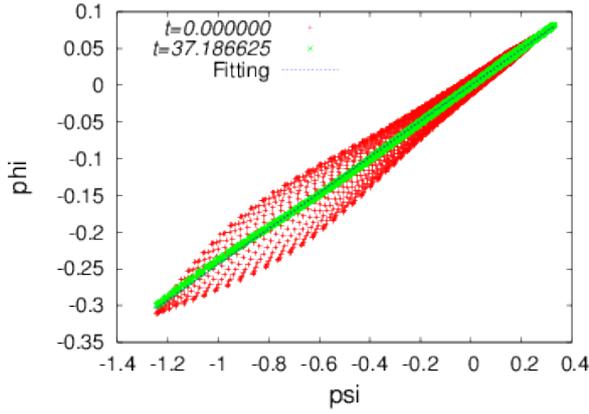


図 C.2 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 4$ とした sub-Alfvénic な初期条件を用いて、差分スキームのアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の各時刻での ψ - ϕ グラフ (赤: 計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: 計算の終了時刻 $t = 37.186625$, 青: 緑のプロットのフィッティング結果 $\phi = 0.24 \times \psi$). 定常状態では, $\phi = G(\psi)$ ((2.45) 式) が成り立つ.

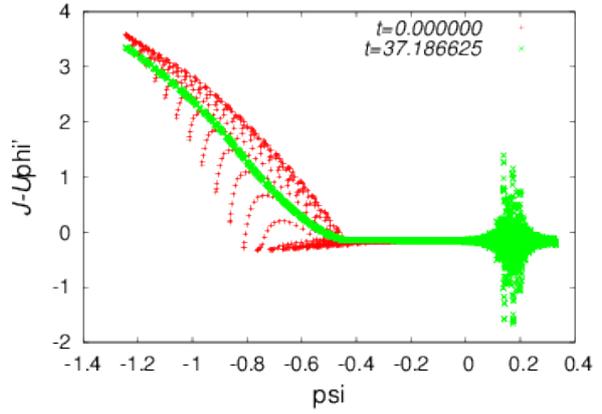


図 C.3 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 4$ とした sub-Alfvénic な初期条件を用いて、差分スキームのアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の各時刻での ψ - $(J - U\phi')$ グラフ (赤: 計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: 計算の終了時刻 $t = 37.186625$). 図 C.2 のフィッティング結果から, $\phi' = 0.24$ として計算した. 定常状態では, $J - U\phi' = F'(\psi)$ ((2.47) 式) が成り立つ.

変量の値と初期値に対する変化の割合を示したものである.

C.1.3 付録 C.1 の考察

付録 C.1.2 で得られた結果について考察する.

まず, 図 C.1 や図 C.6, 表 C.1, 表 C.2 から, Hamiltonian の変化に比べ Casimir 不変量

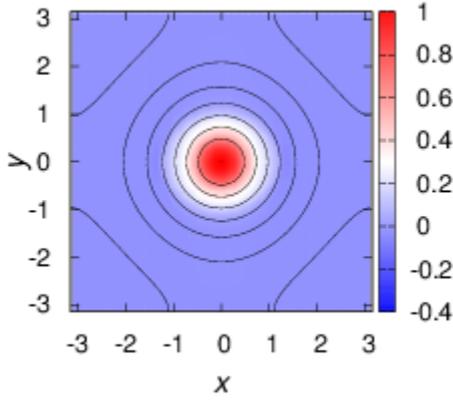


図 C.4 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 4$ とした sub-Alfvénic な初期条件を用いて、差分スキームのアニーリング法のコードにより定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 37.186625$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

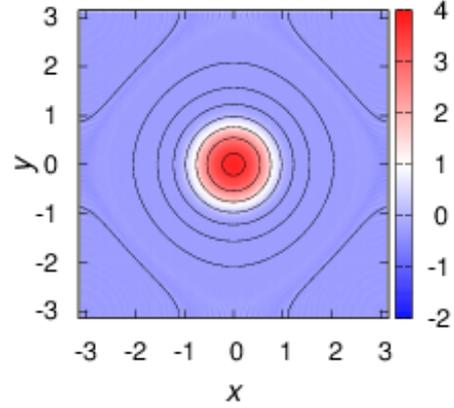


図 C.5 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 4$ とした sub-Alfvénic な初期条件を用いて、差分スキームのアニーリング法のコードにより定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 37.186625$) の電流密度のカラーマップと磁束関数の等高線

表 C.1 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 4$ とした sub-Alfvénic な初期条件を用いて、差分スキームのアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の各時刻の Hamiltonian と Casimir 不変量の値とその初期値に対する割合 (計算の開始時刻: $t = 0.000000$, 計算の終了時刻: $t = 37.186625$). $\bar{\psi}$ は初期値が小さいため、変化の割合は省略した. $C_M := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} \psi^2 =: \frac{1}{2} \bar{\psi}^2$ と $|C_{CH}| := |\int_D d\mathbf{x} U \psi|$ の大小関係は, $C_M > |C_{CH}|$ である.

	$t = 0.000000$	$t = 37.186625$	(変化の割合)
H	3.238182	3.172320	(-2.03%)
$\bar{\psi}$	-0.000000	-0.000041	(-)
$\bar{\psi}^2 := 2C_M$	4.234652	4.234633	(-0.00%)
\bar{U}	1.570737	1.570061	(-0.04%)
C_{CH}	-1.442163	-1.442324	(+0.01%)

表 C.2 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1$ とした Alfvén 共鳴に近い初期条件を用いて、差分スキームのアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の各時刻の Hamiltonian と Casimir 不変量の値とその初期値に対する割合 (計算の開始時刻: $t = 0.000000$, 計算の終了時刻: $t = 68.260778$). $\bar{\psi}$ は初期値が小さいため、変化の割合は省略した. $C_M := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} \psi^2 =: \frac{1}{2} \bar{\psi}^2$ と $|C_{CH}| := |\int_D d\mathbf{x} U \psi|$ の大小関係は, $C_M < |C_{CH}|$ である.

	$t = 0.000000$	$t = 68.260778$	(変化の割合)
H	0.380963	0.360770	(-5.30%)
$\bar{\psi}$	-0.000000	-0.000022	(-)
$\bar{\psi}^2 := C_M$	0.264666	0.26463	(-0.00%)
\bar{U}	1.570737	1.570637	(-0.01%)
C_{CH}	-0.360541	-0.360547	(+0.00%)

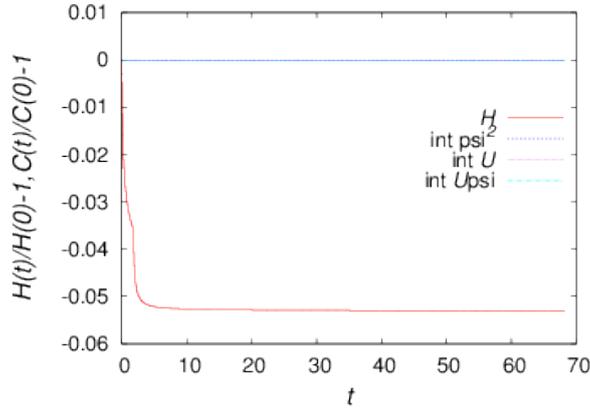


図 C.6 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1$ とした Alfvén 共鳴に近い初期条件を用いて、差分スキームのアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の Hamiltonian と Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化 (赤: $H := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} (|\nabla_{\perp} \phi|^2 + |\nabla_{\perp} \psi|^2)$, 青: $\bar{\psi}^2 := \int_D d\mathbf{x} \psi^2 := 2C_M$, 紫: \bar{U} , 水色: $C_{CH} := \int_D d\mathbf{x} U\psi$). $\bar{\psi}$ は初期値が小さく、初期値に対する割合をプロットするとグラフが見にくくなるため、ここでは省略した.

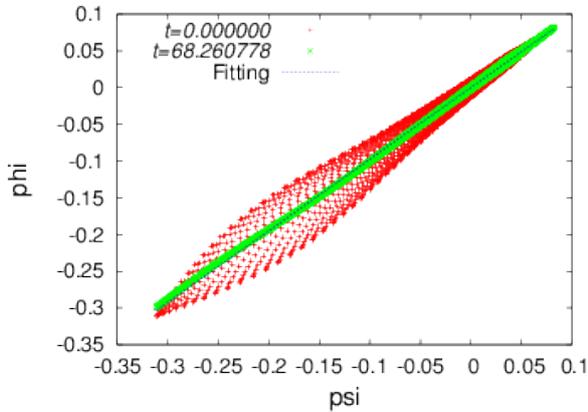


図 C.7 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1$ とした Alfvén 共鳴に近い初期条件を用いて、差分スキームのアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の各時刻での ψ - ϕ グラフ (赤: 計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: 計算の終了時刻 $t = 68.260778$, 青: 緑のプロットのフィッティング結果 $\phi = 0.97 \times \psi$). 定常状態では, $\phi = G(\psi)$ ((2.45) 式) が成り立つ.

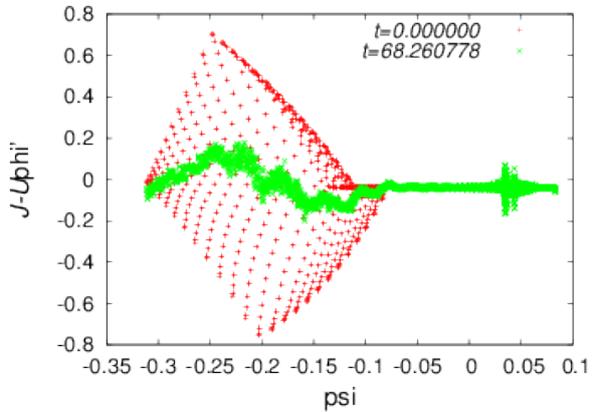


図 C.8 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1$ とした Alfvén 共鳴に近い初期条件を用いて、差分スキームのアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の各時刻での ψ - $(J - U\phi')$ グラフ (赤: 計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: 計算の終了時刻 $t = 68.260778$). 図 C.7 のフィッティング結果から, $\phi' = 0.97$ として計算した. 定常状態では, $J - U\phi' = F'(\psi)$ ((2.47) 式) が成り立つ.

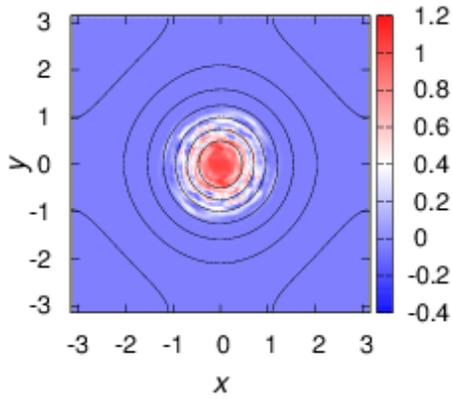


図 C.9 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1$ とした Alfvén 共鳴に近い初期条件を用いて、差分スキームのアニーリング法のコードにより定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 68.260778$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

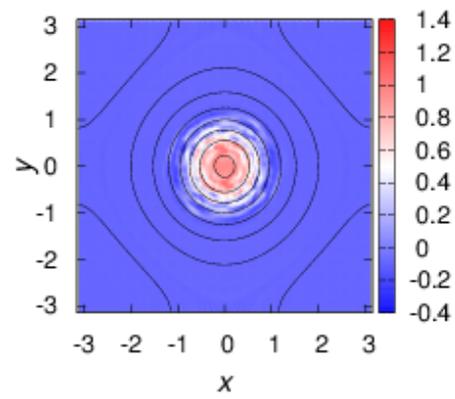


図 C.10 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1$ とした Alfvén 共鳴に近い初期条件を用いて、差分スキームのアニーリング法のコードにより定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 68.260778$) の電流密度のカラーマップと磁束関数の等高線

をよく保存したまま Hamiltonian を極小化させることができている。ただし、他の擬スペクトル法や Green 関数を用いた対称括弧の方法と比べると、Casimir 不変量の保存は良くない。また、図 C.3 からは、境界付近 ($\psi \approx 0.2$) で数値誤差が目立っていることがわかる。このように差分スキームでは数値誤差が目立つものの、図 C.4 や図 C.5 では軸対称な定常状態を得ることに成功している。

この他に差分スキームの特徴としては、 $\lambda = 1$ で計算した時に現れる細かい構造が局所的なことである。擬スペクトル法ではフーリエ成分を扱っているため、数値誤差は領域全体に広がる。しかし、差分スキームではそのようなことはないため、細かい構造が局所的に現れる。

C.2 擬スペクトル法を用いた 2 次元低ベータ簡約化 MHD の アニーリング法

付録 C.2 では擬スペクトル法で 2 次元低ベータ簡約化 MHD の定常状態をアニーリング法で求めた結果を示す。付録 C.2.1 で作成したコードの概要を説明し、付録 C.2.2 でそのシミュレーション結果を示す。最後の付録 C.2.3 で得られた結果に対する考察を行う。

C.2.1 擬スペクトル法を用いたアニーリング法のコードの概要

4.2.1 項で行われたシミュレーションとほぼ同様な計算条件で行う。つまり、計算領域は $-\pi \leq x < \pi, -\pi \leq y < \pi$ であり、解像度は 128^2 である。境界条件には周期境界条件を用いて、境界項が現れないようにしている。初期条件も (4.19) 式と (4.20) 式を用いる。そして、時間刻み幅制御を行うための許容誤差 Δ は次のようにしている：

$$\Delta := \min \{ \max \{|U(\mathbf{k})|\}, \max \{|\psi(\mathbf{k})|\} \} \times 10^{-8}. \quad (\text{C.5})$$

開発したコードは次のようなものである：

人工的な移流項によるアニーリング法のコード

(I) 計算の初期条件の設定

(I-1) 渦度 U と磁束関数 ψ の初期条件の設定

(I-2) フーリエ変換による流れ関数 $\phi := \nabla_{\perp}^{-2}U$ と電流密度 $J := \nabla_{\perp}^2\psi$ の計算

(II) 時間発展の計算 : 4 次の Runge-Kutta 法のステップの二重化

(II-1) アニーリング法の式 :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -[U, [U, \phi] + [\psi, J]] - [\psi, [\psi, \phi]], \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -[\psi, [U, \phi] + [\psi, J]] \quad (\text{C.7})$$

による渦度 U と磁束関数 ψ の時間発展

(II-2) フーリエ変換による流れ関数 ϕ と電流密度 J の計算

(II-3) 計算の終了条件 :

$$\begin{aligned} \left\langle \left| \frac{\partial U(\mathbf{k})}{\partial t} \right|^2 \right\rangle < 10^{-6} \quad \wedge \quad \left\langle \left| \frac{\partial \psi(\mathbf{k})}{\partial t} \right|^2 \right\rangle < 10^{-6} \\ \wedge \quad \langle |[U, \phi] + [\psi, J]|^2 \rangle < 10^{-6} \quad \wedge \quad \langle |[\psi, \phi]|^2 \rangle < 10^{-6} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

を満たすまで, (II-1),(II-2) を繰り返し ($\langle \cdot \rangle$ は平均をとることを意味している)

C.2.2 擬スペクトル法を用いたアニーリング法のシミュレーション

付録 C.2.1 で説明した擬スペクトル法を用いたアニーリング法のコードで計算した結果を示す. (4.20) 式の $\lambda = 4$ とした時の結果を図 C.11~図 C.15 と表 C.3 に示す. (4.20) 式で $\lambda = 1$ とした時の結果を図 C.16~C.20 と表 C.4 に示す.

図 C.11 と図 C.16 は Hamiltonian と 3 つの Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化を示した図である. 図 C.12, 図 C.17 は各時刻の ψ - ϕ グラフをプロットしたものである. 図 C.13, 図 C.18 は各時刻の ψ - $(J - U\phi')$ グラフをプロットしたものである. 残りの図は各時刻における渦度または電流密度のカラーマップと流れ関数または磁束関数の等高線を重ね合わせた図である. 表 C.3, 表 C.4 は各時刻での Hamiltonian と 4 つの Casimir 不変量の値と初期値に対する変化の割合を示したものである.

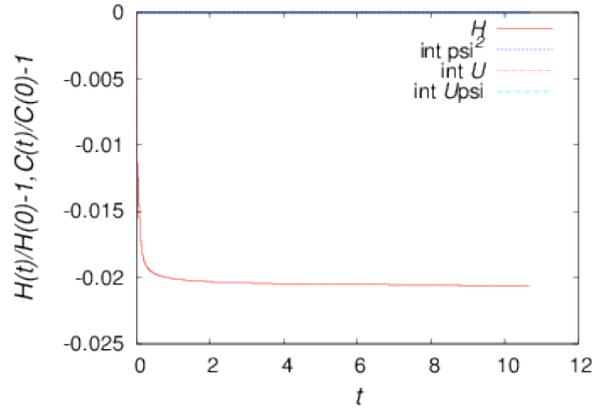


図 C.11 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 4$ とした sub-Alfvénic な初期条件を用いて、擬スペクトル法のアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の Hamiltonian と Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化 (赤: $H := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} (|\nabla_{\perp} \phi|^2 + |\nabla_{\perp} \psi|^2)$, 青: $\bar{\psi}^2 := \int_D d\mathbf{x} \psi^2 :=: 2C_M$, 紫: \bar{U} , 水色: $C_{CH} := \int_D d\mathbf{x} U\psi$). $\bar{\psi}$ は初期値が小さく、初期値に対する割合をプロットするとグラフが見にくくなるため、ここでは省略した.

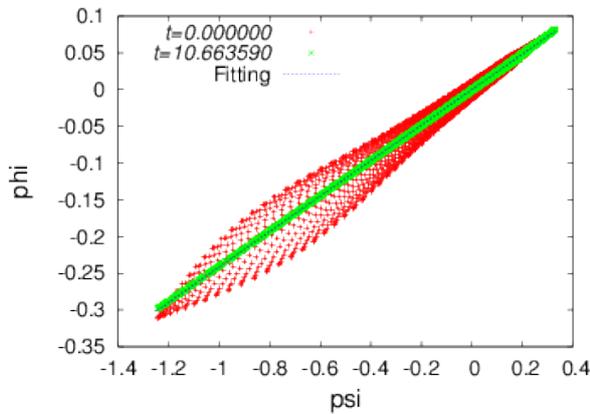


図 C.12 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 4$ とした sub-Alfvénic な初期条件を用いて、擬スペクトル法のアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の各時刻での ψ - ϕ グラフ (赤: 計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: 計算の終了時刻 $t = 10.663590$, 青: 緑のプロットのフィッティング結果 $\phi = 0.24 \times \psi$). 定常状態では, $\phi = G(\psi)$ ((2.45) 式) が成り立つ.

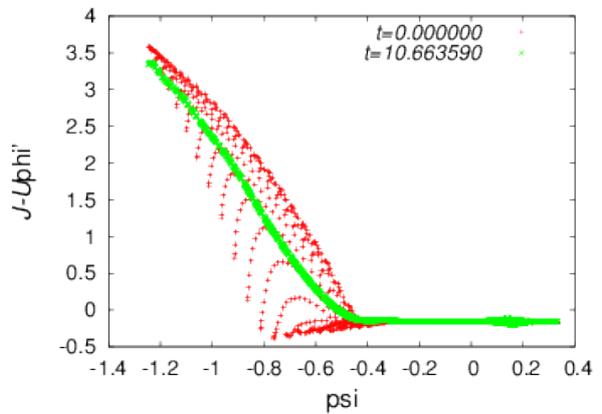


図 C.13 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 4$ とした sub-Alfvénic な初期条件を用いて、擬スペクトル法のアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の各時刻での ψ - $(J - U\phi')$ グラフ (赤: 計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: 計算の終了時刻 $t = 10.663590$). 図 C.12 のフィッティング結果から, $\phi' = 0.24$ として計算した. 定常状態では, $J - U\phi' = F'(\psi)$ ((2.47) 式) が成り立つ.

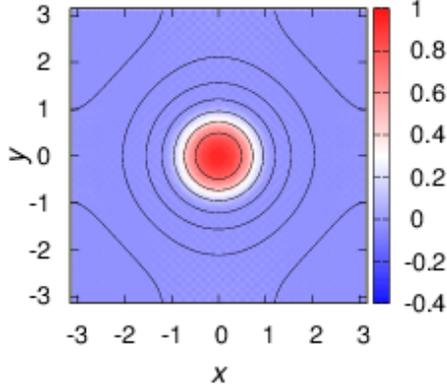


図 C.14 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 4$ とした sub-Alfvénic な初期条件を用いて、擬スペクトル法のアニーリング法のコードにより定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 10.663590$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

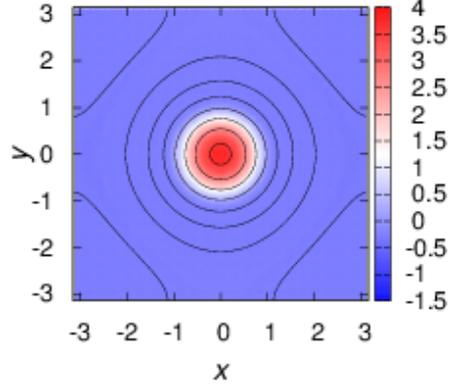


図 C.15 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 4$ とした sub-Alfvénic な初期条件を用いて、擬スペクトル法のアニーリング法のコードにより定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 10.663590$) の電流密度のカラーマップと磁束関数の等高線

表 C.3 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 4$ とした sub-Alfvénic な初期条件を用いて、擬スペクトル法のアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の各時刻の Hamiltonian と Casimir 不変量の値とその初期値に対する変化の割合 (計算の開始時刻: $t = 0.000000$, 計算の終了時刻: $t = 10.663590$). $\bar{\psi}$ は初期値が小さいため, 変化の割合は省略した. $C_M := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} \psi^2 =: \frac{1}{2} \bar{\psi}^2$ と $|C_{CH}| := |\int_D d\mathbf{x} U \psi|$ の大小関係は, $C_M > |C_{CH}|$ である.

	$t = 0.000000$	$t = 10.663590$	(変化の割合)
H	3.243499	3.176692	(-2.06%)
$\bar{\psi}$	-0.000000	0.000000	(-)
$\bar{\psi}^2 =: 2C_M$	4.234652	4.234652	(+0.00%)
\bar{U}	1.570737	1.570737	(-0.00%)
C_{CH}	-1.442163	-1.442164	(+0.00%)

表 C.4 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1$ とした Alfvén 共鳴に近い初期条件を用いて、擬スペクトル法のアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の各時刻の Hamiltonian と Casimir 不変量の値とその初期値に対する変化の割合 (計算の開始時刻: $t = 0.000000$, 計算の終了時刻: $t = 38.567451$). $\bar{\psi}$ は初期値が小さいため, 変化の割合は省略した. $C_M := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} \psi^2 =: \frac{1}{2} \bar{\psi}^2$ と $|C_{CH}| := |\int_D d\mathbf{x} U \psi|$ の大小関係は, $C_M < |C_{CH}|$ である.

	$t = 0.000000$	$t = 38.567451$	(変化の割合)
H	0.381588	0.360865	(-5.43%)
$\bar{\psi} =: 2C_M$	-0.000000	0.000000	(-)
$\bar{\psi}^2$	0.264666	0.264666	(+0.00%)
\bar{U}	1.570737	1.570737	(+0.00%)
C_{CH}	-0.360541	-0.360541	(+0.00%)

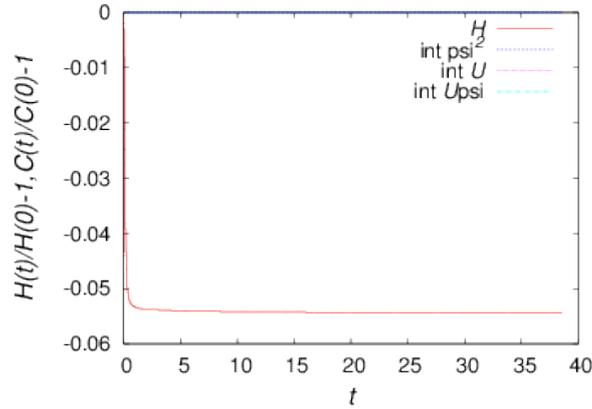


図 C.16 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1$ とした Alfvén 共鳴に近い初期条件を用いて、擬スペクトル法のアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の Hamiltonian と Casimir 不変量の変化量の初期値に対する割合の時間変化 (赤: $H := \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x} (|\nabla_{\perp} \phi|^2 + |\nabla_{\perp} \psi|^2)$, 青: $\bar{\psi}^2 := \int_D d\mathbf{x} \psi^2 := 2C_M$, 紫: \bar{U} , 水色: $C_{CH} := \int_D d\mathbf{x} U\psi$). $\bar{\psi}$ は初期値が小さく、初期値に対する割合をプロットするとグラフが見にくくなるため、ここでは省略した.

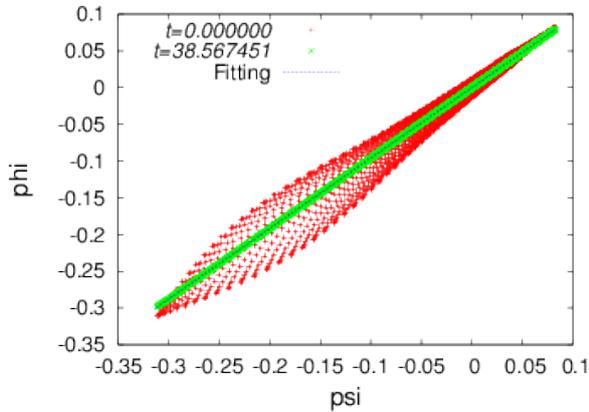


図 C.17 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1$ とした Alfvén 共鳴に近い初期条件を用いて、擬スペクトル法のアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の各時刻での ψ - ϕ グラフ (赤: 計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: 計算の終了時刻 $t = 38.567451$, 青: 緑のプロットのフィッティング結果 $\phi = 0.96 \times \psi$). 定常状態では, $\phi = G(\psi)$ ((2.45) 式) が成り立つ.

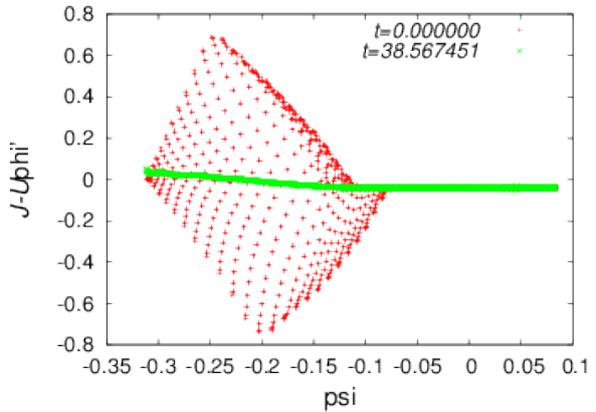


図 C.18 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1$ とした Alfvén 共鳴に近い初期条件を用いて、擬スペクトル法のアニーリング法のコードにより定常解を求めた時の各時刻での ψ - $(J - U\phi')$ グラフ (赤: 計算の開始時刻 $t = 0.000000$, 緑: 計算の終了時刻 $t = 38.567451$). 図 C.17 のフィッティング結果から, $\phi' = 0.96$ として計算した. 定常状態では, $J - U\phi' = F'(\psi)$ ((2.47) 式) が成り立つ.

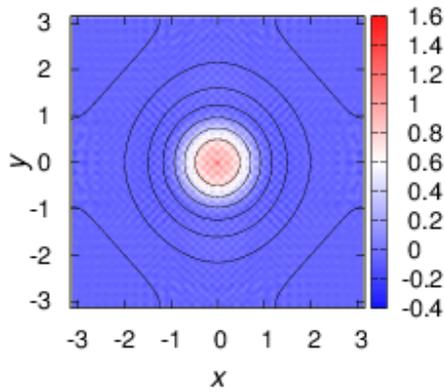


図 C.19 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1$ とした Alfvén 共鳴に近い初期条件を用いて、擬スペクトル法のアニーリング法のコードにより定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 38.567451$) の渦度のカラーマップと流れ関数の等高線

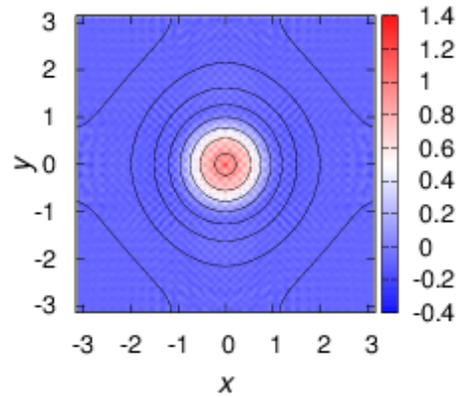


図 C.20 電流密度と渦度が x - y 対称になるように設定した磁束関数の初期条件 ((4.20) 式) において $\lambda = 1$ とした Alfvén 共鳴に近い初期条件を用いて、擬スペクトル法のアニーリング法のコードにより定常解を求めた時に得られた定常状態 ($t = 38.567451$) の電流密度のカラーマップと磁束関数の等高線

C.2.3 付録 C.2 の考察

付録 C.2.2 で得られた結果について考察する.

まず、図 C.11 や図 C.16, 表 C.3, 表 C.4 から、Hamiltonian の変化に比べ Casimir 不変量をよく保存したまま Hamiltonian を極小化させることができている. 差分スキームと比べても擬スペクトル法の方が Casimir 不変量の保存が良い. また、差分スキームにはあった、境界付近 ($\psi \approx 0.2$) での数値誤差がない. このように擬スペクトル法は数値誤差がほとんどない.

この他に擬スペクトル法の特徴としては、 $\lambda = 1$ で計算した時に現れる細かい構造が領域全体に広がっている. これは擬スペクトル法ではフーリエ成分を扱っているためである. また、Green 関数を用いた対称括弧よりも細かい構造が現れたのは、Green 関数を使うことで対称括弧の方は細かい構造をカットしているからである.

謝辞

この研究を行う上で、たいへん多くの方からご協力いただきました。お世話になった方のお名前とご協力いただいた内容とともに、ここに感謝の言葉を述べます。

鳥取大学の古川先生には、修士課程1年の前期まで指導教員として、ご指導いただき、修士課程2年からは指導委託として、引き続きご指導いただきました。アニーリング法などの興味深い多くの研究や論文をご紹介していただきました。また、研究において自分一人では原因のわからない問題が生じた際などに、多くの議論をさせていただきました。研究に熱心に取り組むことができたことと研究で生じた多くの困難を乗り越えることができたのは、古川先生のおかげです。心より感謝いたします。

吉田先生には、修士過程1年の後期から指導教員として、ご指導いただきました。まず、修士課程1年の前期までに行っていたアニーリング法の研究を引き続き研究させていただいたことに感謝いたします。そして、等周問題などの、自分では気づくことができていなかったアニーリング法の研究の問題点のご指摘や、研究の方向性についてもアドバイスをいただきました。アニーリング法の研究の幅を広げることができたのは、吉田先生のおかげです。心より感謝いたします。

テキサス大学の Morrison 先生には、アニーリング法の先行研究の著者として、多くのアドバイスをいただきました。修士過程1年で先行研究のアニーリング法のシミュレーションの再現ができずに困っていた時や、修士過程2年で2次元低ベータ簡約化 MHD の計算結果の理解に困っていた時に、有意義な議論をさせていただきました。アニーリング法の研究を進めることができたのは、Morrison 先生のおかげです。心より感謝いたします。

同研究室の森川先生、西浦先生、Volponi 先生には、プラズマ理工学研究室の先生として、ミーティングや検討会といった自分の研究発表の機会に、議論をさせていただきました。自分の研究に興味を持っていただけたことが研究を行う励みになりました。心より感謝いたします。

同研究室の秘書の北山今日子さん、客員共同研究員の斎藤晴彦さん、特任研究員の矢野義久さんには、研究室の事務手続きや物品の管理など生活全般をサポートしていただきました。親身なサポートのおかげで、快適に生活を送ることができました。心より感謝いたし

ます。

同研究室の学振特別研究員の川面洋平さんには、アニーリング法の理論を理解する上で重要となる非正準 Hamilton 力学系の理論から、Arakawa スキームのような数値計算法まで幅広くアドバイスをいただきました。また、同研究室のネットワーク担当として多くのことを教えていただきました。川面さんに数値計算の環境を整えていただいたり、基本となる理論を教えていただいたおかげで、アニーリング法の研究の成果を出すことができました。心より感謝いたします。

同研究室の先輩である、金子雄太さん、江本伸悟さん、若林智章さん、Hamdi さん、後藤義哉さん、笠岡紀和さん、坂本渉さんには、様々なことを教えていただきました。金子さんには、コード開発するにあたってスペクトル法を教えていただきました。江本さんには、Casimir 不変量について詳しく教えていただきました。Hamdi さんには修士で行っていたプラズマの理論の研究を教えていただきました。若林さん、後藤さん、笠岡さん、坂本さんには、同研究室の輪講でプラズマ物理に関する議論をさせていただきました。心より感謝いたします。

同研究室の同期である、佐々木悠大さん、大野裕司さん、野上智晃さんには、成長する上でとても良い刺激を与えていただきました。同研究室の輪講の他にも、普段から議論や相談をさせていただき、研究の理解を深めることができました。また、同じ研究室で研究に励んでいる姿に刺激されて、自分も研究に励むことができました。心より感謝いたします。

同研究室の後輩である、佐藤直木さん、山崎美由梨さん、種橋航さんには、同研究室のイベント等でお世話になりました。研究室での生活をより楽しいものにすることができたのは、皆様のおかげです。心より感謝いたします。

最後に、家族には私生活を支えていただきました。研究に専念することができたのは間違いなく家族の多大なサポートがあったおかげです。心より感謝いたします。

参考文献

- [1] P. J. Morrison, and J. M. Greene, Phys. Rev. Lett. **45**, 790 (1980).
- [2] P. J. Morrison, Rev. Mod. Phys. **70**, 467 (1998).
- [3] V. I. Arnol'd, Doklady Mat. Nauk. **162**, 773 (1965).
- [4] D. D. Holm, *et al.*, Phys. Rep. **123**, 1 (1985).
- [5] G. K. Vallis, *et al.*, J. Fluid Mech. **207** 133 (1989).
- [6] G. F. Carnevale, and G. K. Vallis, J. Fluid Mech. **213** 549 (1990).
- [7] T. G. Shepherd, J. Fluid Mech. **213** 573 (1990).
- [8] G. R. Flierl, and P. J. Morrison, Physica D **240** 212 (2011).
- [9] J. P. Freidberg, Ideal Magnetohydrodynamics (Prenum Press, New York and London, 1987)
- [10] Y. Suzuki, *et al.*, Nucl. Fusion **46** L19 (2006).
- [11] P. J. Morrison, and R. D. Hazeltine, Phys. Fluids **27** 886 (1984).
- [12] Z. Yoshida, J. Plasma Fusion Res. **86**, 209 (2010).
- [13] 山本義隆, 中村孔一「解析力学 I」朝倉書店 (1998), 山本義隆, 中村孔一「解析力学 II」朝倉書店 (1998).
- [14] N. Padhye, and P. J. Morrison, Phy. Lett. A **219** 287 (1996).
- [15] V. I. Arnol'd, English Transl: Am. Math. Soc. Transl. **19** 267 (1969).
- [16] 木田重雄, 柳瀬眞一郎「乱流力学」朝倉書店 (1999).
- [17] 石岡圭一「スペクトル法による数値計算入門」東京大学出版会 (2004).
- [18] A. Arakawa, J. Comput. Phys. **135** 103 (1997).
- [19] FFTW ホームページ, <http://www.fftw.org/>
- [20] W. H. Press, *et al.* 著, 丹慶勝市, 他 訳, 「Numerical Recipes in C [日本語版] C 言語による数値計算のレシピ」技術評論社 (1993)

学会発表

1. 日本流体力学会 年会 2013 口頭発表
「2次元中性流体の定常状態のアニーリングシミュレーション」
近末 吉人, 古川 勝
2. 日本物理学会 2013 年秋季大会 口頭発表
「2次元中性流体の定常状態のアニーリングシミュレーション」
近末 吉人, 古川 勝
3. 平成 25 年度 NIFS 共同研究 研究会 口頭発表
～MHD および流体力学における流れの安定性に関する理論・シミュレーション研究
「2次元低ベータ簡約化 MHD のカシミール不変量の束縛とアニーリングシミュレーション」
近末 吉人, 古川 勝
4. 日本物理学会 2014 年春季大会 口頭発表 (予定)
「2次元低 β 簡約化 MHD の定常状態のアニーリングシミュレーション」
近末 吉人, 古川 勝