研 究 速 報
UDC 621.777.2.012

押出し加工用一般化三次元動的可容速度場の改良に関する研究

New Generalized Formulas of Kinematically Admissible Velocity Field for 3-Dimensional Extrusion

木 内　　学*・星 野 倫 彦*・佐々木 久 夫**
Manabu KIUCHI, Michihiko HOSHINO and Hisao SASAKI

1. ま え が き

筆者らは，いわゆる上界法を応用し，非軸対称断面を有する棒材，線材，形材の押出し・引抜き加工を対象とする総合的な解析手法の開発を目指して，一連の研究を進めてきた．その結果，汎用性の高い一般化３次元動的可容速度場[1)~3)]の開発に成功し，これを用いて種々の場合につき検討を進め，従来理論的な解明が困難とされてきた問題に関して多くの成果が得られることを示した．

本報においては，この一般化３次元動的可容速度場(以下，単に速度場と記す）の更なる拡張について検討し，これまで回転方向速度成分の表示式の構成に際して導入した近似式をより広い範囲に適用できるように変更した上で，全体の速度場の構成を可能としたので，以下に，この速度場とその構成過程を示す．

2. 座標系および基本的仮定[4)]

解析モデルおよび速度場の構成には円柱座標系を用い，半径方向をｒ軸，回転方向を角度 φ，長手（押出し・引抜き）方向を y 軸で表す（図１参照）．素材側と製品側の剛塑性境界面を $y=y_i$，$y=y_o$ とし，被加工材の回転方向の解析対象範囲を $\varphi=\varphi_s$ から $\varphi=\varphi_f$ とする．各方向の速度成分を V_r，V_φ，V_y とし，被加工材の塑性領域への流入速度を V_o(=一様）とする．ダイス面の形状は，関数 $r_{so}(\varphi, y)$ で表されるものとし，プラグを使用する場合のプラグ面の形状は，同様に $r_{si}(\varphi, y)$ で表せるものとする．

定式化にあたって次の基本的仮定（近似）を用いる．

① 剛塑性境界面は，素材側および製品側境界とも長手方向（y 軸）に垂直な面で表される．

② 被加工材内の任意の点の回転方向速度成分 V_φ は，半径方向 r，長手方向 y・回転方向 φ に関して $V_\varphi=f(r)\cdot\omega(\varphi, y)$ のごとく変数分離可能な関数で近似できる．

③ 回転方向にみた解析対象範囲は上述のように関数 $\varphi=\varphi_s(y)$，$\varphi=\varphi_f(y)$ により規定されるものとするが，これらは，それぞれ y 軸を含む曲面（平面）である．また，境界面 $\varphi=\varphi_s(y)$ 上で，回転方向速度 V_φ が既知であると考える．（図２参照）

以上の他に，制約条件として，(1)体積一定の条件，(2)体積流れ一定の条件，(3)工具面上での速度の適合条件，(4)剛塑性境界面および内部せん断面での速度の連続条件がある．

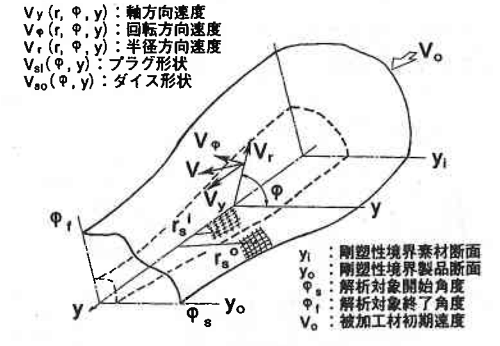


図１　解析モデル

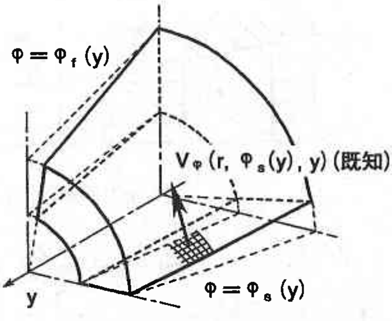


図２　回転方向解析対象範囲

3. 速 度 場 の 構 成

制約条件(4)より，素材側と製品側に想定した剛塑性境

*東京大学生産技術研究所　第２部
**吉田工業㈱

界面上では，V_yが連続でなければならない．この制約条件は，既報で示した横断面（y軸に垂直な断面）内に一様に分布する長手方向速度成分 $\overline{V}_y$ の表示式を導入すれば，自動的に満足される．しかし，この $\overline{V}_y$ のみではダイス内の被加工材の流れを十分表現しきれない場合もあるので，この平均速度 $\overline{V}_y$ に対して偏差速度 ΔV_y を重ね合わせる考え方もすでに提案してある[4]．以下本論では，この考え方を採用し，y 軸に垂直な横断面上に次式で表示される長手方向速度 V_y が分布しているものと考え，速度場の構成を進める（図3参照）．

$$V_y(r,\ \varphi,\ y)=\overline{V}_y(y)+\Delta V_y(r,\ \varphi,\ y) \qquad (1)$$

体積流れ一定の考え方から次式が導入される．

$$\overline{V}_y(y)=\frac{V_0}{\displaystyle\int_{\varphi_s(y)}^{\varphi_f(y)}\int_{r_{si}(\varphi,\ y)}^{r_{so}(\varphi,\ y)} rdrd\varphi}\times\int_{\varphi_s(y_i)}^{\varphi_f(y_i)}\int_{r_{si}(\varphi,\ y_i)}^{r_{so}(\varphi,\ y_i)} rdrd\varphi \qquad (2)$$

$$\int_{\varphi_s(y)}^{\varphi_f(y)}\int_{r_{si}(\varphi,\ y)}^{r_{so}(\varphi,\ y)} \Delta V_y(r,\ \varphi,\ y)rdrd\varphi=0 \qquad (3)$$

式(3)を満足する偏差速度 ΔV_y としては，一般に次式で表現される関数を採用することができる．

$$\Delta V_y(r,\ \varphi,\ y)=P(r,\ \varphi,\ y)-\frac{1}{\displaystyle\int_{\varphi_s(y)}^{\varphi_f(y)}\int_{r_{si}(\varphi,\ y)}^{r_{so}(\varphi,\ y)} rdrd\varphi}\times\int_{\varphi_s(y)}^{\varphi_f(y)}\int_{r_{si}(\varphi,\ y)}^{r_{so}(\varphi,\ y)} P(r,\ \varphi,\ y)rdrd\varphi \qquad (4)$$

ただし，$P(r,\varphi,y)$ は，任意の C^2 級の連続関数である．以上の考察から，一般的に V_y は次のように定式化することができる．

$$V_y(r,\ \varphi,\ y)=\frac{1}{\displaystyle\int_{\varphi_s(y)}^{\varphi_f(y)}\int_{r_{si}(\varphi,\ y)}^{r_{so}(\varphi,\ y)} rdrd\varphi}\times\left\{V_o\times\int_{\varphi_s(y_i)}^{\varphi_f(y_i)}\int_{r_{si}(\varphi,\ y_i)}^{r_{so}(\varphi,\ y_i)} rdrd\varphi-\int_{\varphi_s(y)}^{\varphi_f(y)}\int_{r_{si}(\varphi,\ y)}^{r_{so}(\varphi,\ y)} P(r,\ \varphi,\ y)rdrd\varphi\right\}+P(r,\ \varphi,\ y) \qquad (5)$$

次に，体積一定の条件(1)から，次式が成立する．

$$\frac{\partial}{\partial r}V_r(r,\ \varphi,\ y)+\frac{1}{r}V_r(r,\ \varphi,\ y)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}V_\varphi(r,\ \varphi,\ y)+\frac{\partial}{\partial y}V_y(r,\ \varphi,\ y)=0 \qquad (6)$$

さらに，制約条件(3)から，工具に接する被加工材の速度ベクトル V とその工具面の法線ベクトル n とは互いに直交する（図4参照）ので次式が成立する．

$$V_r(r_{si}(\varphi,\ y),\ \varphi,\ y)-\frac{V_\varphi(r_{si}(\varphi,\ y),\ \varphi,\ y)}{r_{si}(\varphi,\ y)}\frac{\partial}{\partial\varphi}r_{si}(\varphi,\ y)-V_y(r_{si}(\varphi,\ y),\ \varphi,\ y)\frac{\partial}{\partial y}r_{si}(\varphi,\ y)=0 \qquad (7)$$

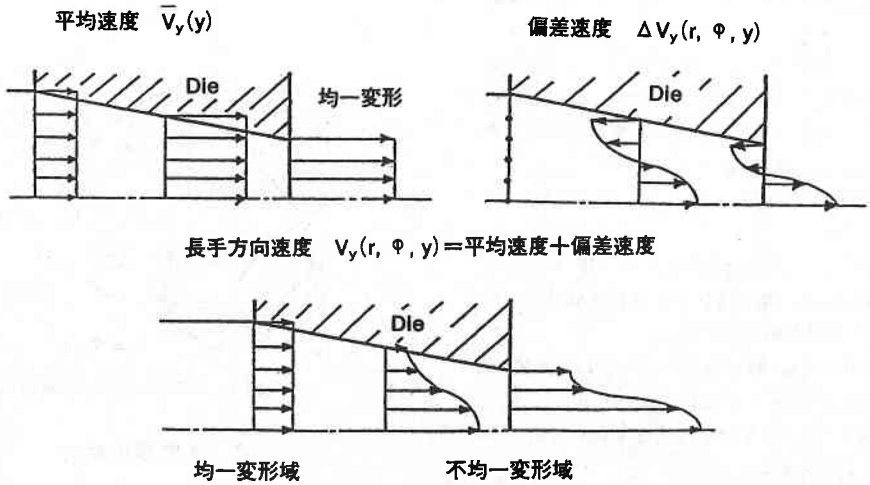


図3　長手方向速度

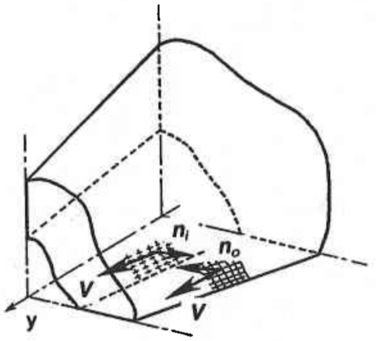


図4　工具面上速度

$$V_r(r_{so}(\varphi, y), \varphi, y) - \frac{V_\varphi(r_{so}(\varphi, y), \varphi, y)}{r_{so}(\varphi, y)} \frac{\partial}{\partial \varphi} r_{so}(\varphi, y) - V_y(r_{so}(\varphi, y), \varphi, y) \frac{\partial}{\partial y} r_{so}(\varphi, y) = 0 \tag{8}$$

式(6), 式(7)より，V_r の一般的表示式は次式となる．

$$V_r(r, \varphi, y) = \frac{-1}{r} \left[\int_{r_{si}(\varphi, y)}^{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} V_\varphi(r, \varphi, y) + r \frac{\partial}{\partial y} V_y(r, \varphi, y) \right\} dr - V_\varphi(r_{si}(\varphi, y), \varphi, y) \frac{\partial}{\partial \varphi} r_{si}(\varphi, y) - r_{si}(\varphi, y) V_y(r_{si}(\varphi, y), \varphi, y) \frac{\partial}{\partial y} r_{si}(\varphi, y) \right] \tag{9}$$

V_φ は仮定②から次式で表示されるものとする．

$$V_\varphi(r, \varphi, y) = f(r) \cdot \omega(\varphi, y) \tag{10}$$

仮定③より境界面 $\varphi = \varphi_s(y)$ 上で次の関係が成立する．

$$V_\varphi(\mathrm{r}, \varphi_s(y), y) \quad (\text{既知}) \quad = f(r) \cdot \omega(\varphi_s(y), y) \tag{11}$$

式(7), (8), (10), (11)より次式を得ることができる．

$$\omega(\varphi, y) = \frac{-1}{\int_{r_{si}(\varphi, y)}^{r_{so}(\varphi, y)} f(r) dr} \left[\int_{\varphi_s(y)}^{\varphi} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \int_{r_{si}(\varphi, y)}^{r_{so}(\varphi, y)} r V_y(r, \varphi, y) dr \right\} d\varphi - \omega(\varphi_s(y), y) \times \int_{r_{si}(\varphi_s(y), y)}^{r_{so}(\varphi_s(y), y)} f(r) dr \right] \tag{12}$$

以上より，V_φ は次式で定式化される．

$$V_\varphi(r, \varphi, y) = \frac{-f(r)}{\int_{r_{si}(\varphi, y)}^{r_{so}(\varphi, y)} f(r) dr} \left[\int_{\varphi_s(y)}^{\varphi} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \int_{r_{si}(\varphi, y)}^{r_{so}(\varphi, y)} r V_y(r, \varphi, y) dr \right\} d\varphi - \int_{r_{si}(\varphi_s(y), y)}^{r_{so}(\varphi_s(y), y)} V_\varphi(r, \varphi_s(y), y) dr \right] \tag{13}$$

式(5), 式(9), 式(13)が求める速度場の一般式である．

4．回転方向の境界と境界速度

式(13)と体積流れ一定の条件より，もう一つの境界面 $\varphi = \varphi_f(y)$ 上での速度成分 V_φ について次式を得る．

$$\int_{r_{si}(\varphi_s(y), y)}^{r_{so}(\varphi_s(y), y)} \left\{ V_\varphi(r, \varphi_s(y), y) - r V_y(r, \varphi_s(y), y) \frac{\partial}{\partial y} \varphi_s(y) \right\} dr = \int_{r_{si}(\varphi_f(y), y)}^{r_{so}(\varphi_f(y), y)} \left\{ V_\varphi(r, \varphi_f(y), y) - r V_y(r, \varphi_f(y), y) \frac{\partial}{\partial y} \varphi_f(y) \right\} dr \tag{14}$$

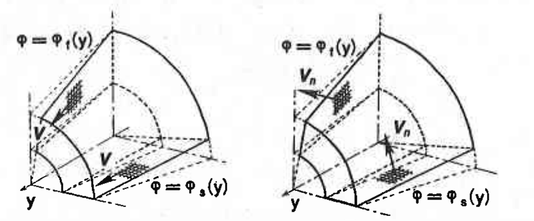
上式が $\varphi = \varphi_f(y)$ 上で常に成立するためには，次式が成立すればよい．

$$V_\varphi(r, \varphi_s(y), y) - r V_y(r, \varphi_s(y), y) \frac{\partial}{\partial y} \varphi_s(y) = 0,$$

$$V_\varphi(r, \varphi_f(y), y) - r V_y(r, \varphi_f(y), y) \frac{\partial}{\partial y} \varphi_f(y) = 0 \tag{15}$$

式(15)は，境界面 $\varphi = \varphi_s(y)$，$\varphi = \varphi_f(y)$ 上で，被加工材が境界面に沿って流れること（図5(a)参照）を意味しており，結局，上に得られた速度場の構成式は，$\varphi = \varphi_s(y)$，$\varphi = \varphi_f(y)$ の両境界を越えて被加工材の流入・流出がないとする閉じた領域について一般的に成立することがわかる．

ところで，$\varphi = \varphi_s(y)$，$\varphi = \varphi_f(y)$ で区切られた領域に周期性がある場合（図5(b)参照）には，



(a) 被加工材の流入・流出がない　(b) 被加工材の流入・流出がある

図5　周期性のある境界と境界速度

研　究　速　報

$$r_{si}(\varphi_s(y), y) = r_{si}(\varphi_f(y), y), \quad r_{so}(\varphi_s(y), y) =$$
$$r_{so}(\varphi_f(y), y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\varphi_s(y) = \frac{\partial}{\partial y}\varphi_f(y) \tag{20}$$

となるので，式(14)は，

$$\int_{r_{si}(\varphi_s(y),\, y)}^{r_{so}(\varphi_f(y),\, y)} \Big[V_\varphi(r, \varphi_s(y), y) - V_\varphi(r, \varphi_f(y), y)$$
$$- r\frac{\partial}{\partial y}\varphi_s(y) \times \Big\{ V_y(r, \varphi_s(y), y) - V_y(r, \varphi_f(y), y) \Big\} \Big] dr = 0 \tag{21}$$

となり，この関係が常に成立するためには，

$$V_\varphi(r, \varphi_s(y), y) = V_\varphi(r, \varphi_f(y), y),$$
$$V_y(r, \varphi_s(y), y) = V_y(r, \varphi_f(y), y) \tag{22}$$

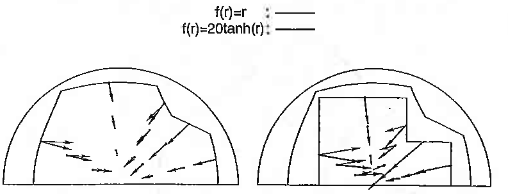
が満足される必要があるが，上式は周期性のある境界が境界速度について本来満足すべき関係に他ならない．

5．速度場の計算事例

拡張した速度場を用いて，回転方向速度成分 $V_\varphi = f(r)\cdot\omega(\varphi, y)$ の $f(r)$ の表示式を変えて，2，3の事例について具体的に速度場の計算を行い，従来，単純に $f(r) = r$ とのみしてきた速度場との比較を行った．$f(r)$ の関数形としては，$f(r) = 0.1r(40-r)$ と $f(r) = 20\tanh(r)$ とを用いた．前者は，コンテナ壁面で $f(r) = 0$ となる場合を想定した式であり，後者は，$r = 0$ 近傍以外で $f(r) =$ 一定となる場合を想定した式である．

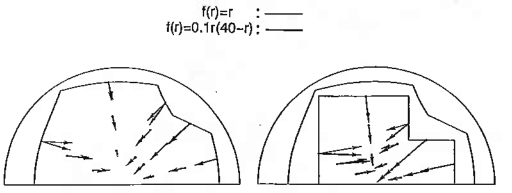
図6，7には，ダイス中央断面，ダイス出口断面上での速度分布の計算例を示す．図より $f(r)$ の相違により速度分布は，わずかずつ異なっており，$f(r)$ の関数形を種々変えることにより，ダイス内の流れの微妙な相違を表し得ることがわかる．

図8は，拡張した速度場が内部せん断面上において速度の連続条件を満足しているか否かを確認した計算事例である．いずれの場合も，内部せん断面上で分割された両領域の回転方向速度成分が一致していることがわかる．また図には示されていないが，工具面法線 $\boldsymbol{n}$ と速度 $\boldsymbol{V}$ の内積は常に0となり，被加工材が工具面上に沿って流れていることが確認できている．



(a) ダイス中央断面上　　(b) ダイス出口断面上

図6　速度分布



(a) ダイス中央断面上　　(b) ダイス出口断面上

図7　速度分布

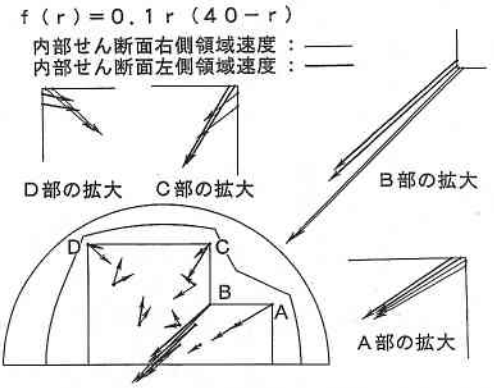


図8　内部せん断面上の速度（ダイス出口）

6．ま　と　め

一般化3次元動的可容速度場を拡張し，より広い範囲に適用できるように変更した．また得られた表示式を用いて2，3の事例について速度場の計算を試み，ダイス内の被加工材の速度分布をよりきめ細かく表現することが可能であることを確認した．　　(1992年12月10日受理)

参 考 文 献

1) 木内・岸・石川：塑性と加工，24-266 (1983)，290
2) 木内・石川：同　上，24-270 (1983)，722
3) 木内・石川：同　上，25-282 (1984)，604
4) 木内・星野・飯島：同　上，30-336 (1989)，43