

代数応力モデルによるバックステップ流れの数値解析 —第2報 Wall reflection termおよび非等方表現の評価—

Numerical Simulation of Backward-Facing Step Flow by Algebraic Stress Model
—The estimation of wall reflection term and anisotropic expression—

小林 敏雄*・富樫 盛典*
Toshio KOBAYASHI and Shigenori TOGASHI

1. はじめに

第1報では、レイノルズ応力の輸送方程式の代数化をLESデータベースを用いて評価し、その有効性について確認した。また、Pseudo-viscosity法を導入することで、実際の数値計算を安定に進めることができ、かつ数値粘性による影響をできる限り抑えられることについて述べた。

第2報では、実際の数値計算結果を示しその考察を行う。まず最初は、レイノルズ応力の垂直成分を壁近傍で減衰させる役割を持つWall reflection termが計算結果にどのような影響を及ぼすかについて考える。このWall reflection term (特に ϕ_{ij2w}) は代数式の反復計算の際、しばしば発散の原因になっているので、この点について考察をする。

次の章では非等方 $k-\epsilon$ モデル¹⁾と代数応力モデルを用いた場合のレイノルズ応力の非等方表現の違いについても考察する。

また最後の章では、 k と ϵ の分布について考えることにより、代数応力モデルを用いても再付着距離がそれほど大きく改善されなかった理由について考察する。

2. Wall reflection term

Wall reflection termは壁に垂直な方向の乱れ成分を減少させる役割を持つ項であり、Gibson-Lauder²⁾は、再分配項 ϕ_{ij} に対するWall reflection term ϕ_{ijw} を大気境界層の数値計算に適用してレイノルズ応力の予測精度を改善することに成功している。彼らによれば ϕ_{ijw} は(1)式のように表現され、本報では表1のような式および値を用いた

$$\phi_{ijw} = \phi_{ij1w} + \phi_{ij2w} \quad (2)$$

表1中の減衰関数 f_y はObiら³⁾と同じ形の(2)式を用いた

$$f_y = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\epsilon} \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} \right) \quad (2)$$

(2)式の y_1 と y_2 はそれぞれ上壁と下壁からの距離を示していて、この f_y は壁から離れたところでは0となり、壁近傍で1になるように決められた減衰関数を表している。代数応力モデルでは、Wall reflection termが反復計算の際、しばしば発散の原因になるため省略される場合が多い^{4),5)}。著者も当初、Wall reflection termを考慮すると解が発散してしまった。そこで、解が発散してしまう理由について考えることにする。バックステップ流れの場合、図1を見てわかるように再循環領域や再付着点近傍で減衰係数 f_y が1より大きくなり減衰が利きすぎてしまっていることがわかる。この再付着点近傍でのWall reflection termのオーバーエスティメイトについては応力モデルを使って数値解析したObiら³⁾も指摘している。このように減衰係数 f_y が1より大きくなり減衰が利きすぎてしまうと、レイノルズ応力の輸送方程式を代数化した式(第1報の(4)式)を反復計算する際に、非現実的

表1 Wall reflection term

	ϕ_{ij1w}	ϕ_{ij2w}
\overline{uu}	$C_1 \frac{\epsilon}{k} \overline{vv} f_y$	$-C_2'(P_{22} - \frac{2}{3}P) f_y$
\overline{vv}	$-2C_1 \frac{\epsilon}{k} \overline{vv} f_y$	$2C_2'(P_{22} - \frac{2}{3}P) f_y$
\overline{uv}	$-\frac{3}{2}C_1 \frac{\epsilon}{k} \overline{vv} f_y$	$\frac{3}{2}C_2' P_{12} f_y$

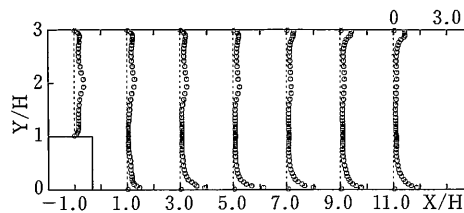


図1 減衰係数 f_y の分布

*東京大学生産技術研究所 第2部

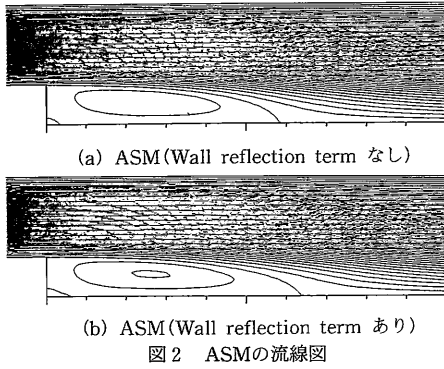


図 2 ASMの流線図

な解を導いてしまい、解を発散させてしまう原因になっているように思われる。このことをもう少し詳しく述べると次のようになる。代数式は変形すると(3)式のような2次の非線形連立方程式となる。

$$\begin{aligned} a_1 \overline{uu}^2 + b_1 \overline{uu} + c_1 &= 0 \\ a_2 \overline{vv}^2 + b_2 \overline{vv} + c_2 &= 0 \\ a_3 \overline{uv}^2 + b_3 \overline{uv} + c_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

(3)式の連立方程式が実数解を持つためには判別式 $D = b_k^2 - 4a_k c_k > 0$ ($k = 1, 2, 3$)でなくてはならない。ところが、Wall reflection termを考慮した場合、減衰関数 f_y の値が大きくなってくと $D < 0$ になることがあり、その場合に解が求められず発散してしまうことになると考えられる。実際にこの減衰関数 f_y が1より大きくなるような人工的な操作をした場合には、レイノルズ応力は代数式の反復計算で発散せずに求まる。このことは

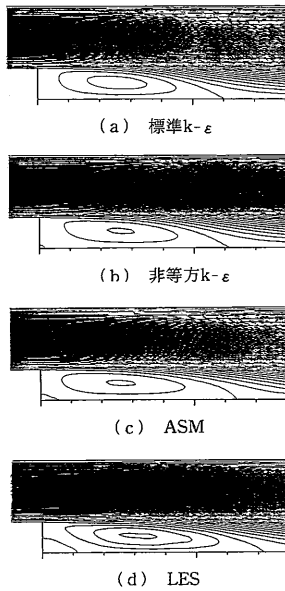


図 3 流線図

減衰関数 f_y の表式に改良が必要であることを示唆している。

本報の数値解析では、計算の発散をおさえつつ、Wall reflection termの効果を考察する目的で、おのおのの場所で減衰関数 f_y が1より大きくなり減衰が利き過ぎないように正規化して計算を進めた。

Wall reflection termを考慮した場合と考慮しない場合の数値解析結果を図2に示す。この図を見てわかるように、wall reflection termを考慮した場合の方が再付着距離が7に近づいていることがわかる。Wall reflection termを考慮した場合、垂直応力 \overline{uu} と \overline{vv} は(4)式と(5)式のような表式となる。

$$\begin{aligned} \overline{uu} &= \overline{uu} \text{ (Wall reflection termなし)} \\ &+ k \cdot \frac{C_1' \frac{\epsilon}{k} \overline{vv} f_y - C_2' (P_{22} - \frac{2}{3} P) f_y}{(C_1 - 1) \epsilon + P} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \overline{vv} &= \overline{vv} \text{ (Wall reflection termなし)} \\ &+ k \cdot \frac{-2C_1' \frac{\epsilon}{k} \overline{vv} f_y + 2C_2' (P_{22} - \frac{2}{3} P) f_y}{(C_1 - 1) \epsilon + P} \end{aligned} \quad (5)$$

(4)式と(5)式中の f_y は壁に近づくほど大きくなり、その効果により \overline{uu} は大きくなり、反対に \overline{vv} は小さくなって、壁近傍での非等方性が表現されるようになる。

以上のことから考えると、バックステップ流れにおいてWall reflection termを用いて壁近傍での非等方性が表現されると再付着距離が長くなることがわかる。

3. 非等方表現の評価

レイノルズ応力の非等方表現ができる時間平均モデル

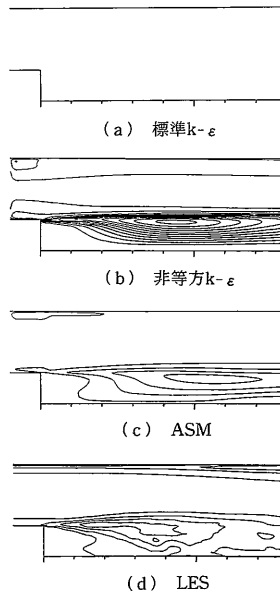


図 4 $\overline{uu} - \overline{vv}$ 図

研 究 速 報

としては、非等方 $k-\epsilon$ モデル、代数応力モデル、応力モデルなどがある。この章では非等方 $k-\epsilon$ モデル¹⁾、代数応力モデルのレイノルズ応力の非等方表現の違いについて考察してみる。非等方表現の違いを直感的に考察する手段として、まず最初にレイノルズ応力の垂直成分の差 $(\overline{uu}-\overline{vv})$ の等値線図を考えてみる。図 4 を見ると、(a) の $k-\epsilon$ モデルでは垂直応力の差の分布は観察されていない。また (b) の非等方 $k-\epsilon$ モデルと (c) の代数応力モデルを見るとその非等方表現には差が見られる。(b) の非等方 $k-\epsilon$ モデルでは垂直応力の差の分布が速度勾配の大きいせん断層に集中しているのに対して、(c) の代数応力モデルの場合には垂直応力の差が (b) に比べて広く分布していてステップ近傍や壁近傍まで達している (d) の LES の結果に近い分布を示していることがわかる。

次にもう少し定量的に非等方表現の違いを考察するために (6) 式で表されるような非等方テンソルを導入する。

$$b_{ij} = \frac{1}{2k} (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}) \quad (6)$$

ここでは上式の非等方テンソルのうち、成分 b_{11} と b_{22} について考えることとする。図 5 は b_{11} の分布を示したものであるが、これは垂直応力 \overline{uu} の k からのずれを表す量である。(b) の非等方 $k-\epsilon$ モデルではこの分布が凸凹していて偏りがあるのに対して (c) の代数応力モデルでは平均的な分布になっている。また図 6 は b_{22} の分布を示したものであるが、これは垂直応力 \overline{vv} の k からのずれを表す量である。(b) の非等方 $k-\epsilon$ モデルでの分布が (c) の代数応力モデルや (d) の LES と大きく異なる所はステップ側の壁 ($Y/H=0$) 近傍での分布である。(c) と (d) では壁近傍の b_{22} の値が負であり垂直応力 \overline{vv} が小さな値をとっていて実験結果⁹⁾ と同様な傾向を示しているのに対して、(b) では壁近傍の b_{22} の値が正であり垂直応力 \overline{vv} が大きな値をもち、 $\overline{uu} < \overline{vv}$ となっていることがわかる。この原因は本報の比較を用いた非等方 $k-\epsilon$ モデル¹⁾ は壁関数を用いて計算しているためであり、壁近傍での非等方表現がされてはならず、今後、低レイノルズ数型非等方モデルで解いた結果との比較が必要になってくる。

また、代数応力モデルでは、非等方テンソルの成分 b_{11} 、 b_{22} が凸凹の少ない平滑化された分布になっているが、この原因は、応力輸送方程式の代数化によるものと考えられる。Rodi⁷⁾ は $\overline{u_i u_j}$ の輸送が k の輸送に比例すると考えて代数式を導いている。したがって応力輸送方程式の代数化によって $\overline{u_i u_j} / k$ 分布の凸凹が削られ、非等方テンソル成分 b_{11} 、 b_{22} が平滑化されたのではないかと考えられる。

4. k および ϵ の分布の比較

代数応力モデルを用いることで、レイノルズ応力の非等方表現ができ、再付着点の位置も $k-\epsilon$ モデルの場合と

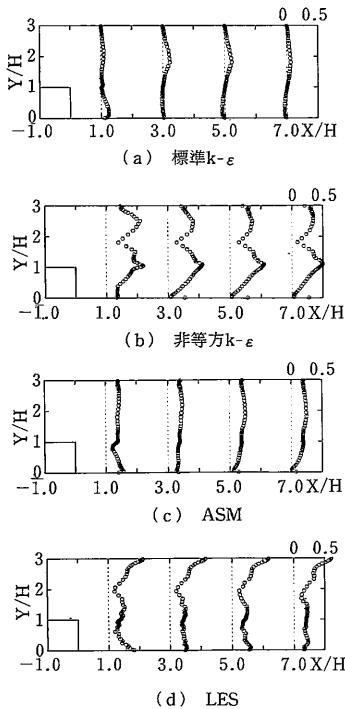


図 5 b_{11} 分布図

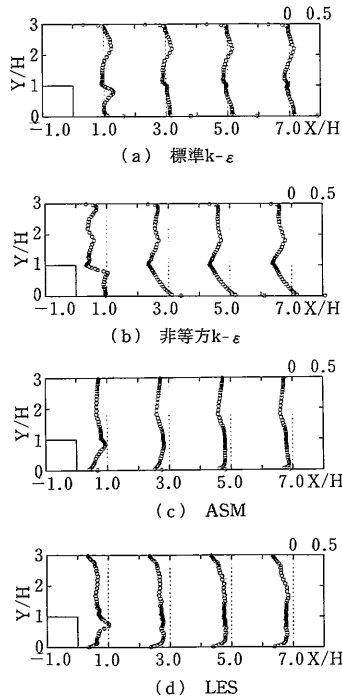


図 6 b_{22} 分布図

研究速報
 比べて長くなり、改善が見られるが、LESの計算結果に比べるとまだ再付着点の位置が短く予測されている。第1報で述べたように応力輸送方程式の代数化はかなり妥当な近似法であるが、代数化によって求められるレイノルズ応力は k と ε の値を用いており、 k と ε の精度よい予測が不可欠になる。図7の k 分布および図8の ε 分布を見てみると代数応力モデル(—印)ではLESデータ(○印)に比べて k および ε の値を大きく予測している場所があり、その場所は図9でせん断応力 $-\overline{uv}$ が大きく予測されている部分に対応していることがわかる。このことより、計算結果にさらなる改善をもたらすためには、 k および ε 分布の改善が必要となる。本研究で用いた k 方程式は(7)式である。

$$\frac{\partial(U_i k)}{\partial x_i} = C_s \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{k}{\varepsilon} u_i \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G - \varepsilon \quad (7)$$

(7)式の拡散項は3重速度相関項を勾配拡散で近似したものであり、今後この拡散項についての評価を進める。

また、 ε 方程式に関して吉沢⁹⁾と半場⁸⁾は統計理論(TSDIA)を用いたモデル化を行い、(8)式のような形の

式を提案している。この方程式が他の ε 方程式と異なる点は、拡散項 D_ε の表現の違いおよび回転の効果を表す項が付加されていることである。今後、バックステップ流れにおいて(8)式のような ε 方程式を用いた場合、どの程度改善をもたらすのかを調べるとともに、LESデータベースを用いた ε 方程式の評価を進める予定である。

$$\frac{\partial(U_i \varepsilon)}{\partial x_i} = D_\varepsilon + C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} G - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} - C_{\varepsilon_3} k \Omega^2$$

(ただし、 $\Omega = \partial U_i / \partial x_j - \partial U_j / \partial x_i$) (8)

5. お わ り に

代数応力モデルを用いてバックステップ流れの数値解析をした結果、次のような結論を得た。

- (1) Wall reflection termの考慮により、再付着点近傍でのレイノルズ応力の非等方性が表現されると再付着距離が長くなる。
- (2) 応力輸送方程式の代数化は妥当な近似値であると思われるが、代数化により $\overline{u_i u_j} / k$ 分布の凸凹が削られ、非等方テンソルの成分 b_{11} , b_{22} が平滑化される。
- (3) 代数応力モデルを使用しても再付着距離の予測がそれほど大きく改善されなかった原因は k 方程式および ε 方程式にあると思われる。今後LESデータベースを用いて k 方程式および ε 方程式の評価を行い、予測精度のさらなる改善を試みる。

(1991年11月21日受理)

参 考 文 献

- 1) 森西ほか2名, 生産研究, vol. 43 No. 1, 45 (1991)
- 2) Gibson and Launder, J. Fluid Mech., vol. 86, 491 (1978)
- 3) Obi, Peric and Scheuerer, Seventh symposium on turbulent shear flows, 17. 4. 1. (1989)
- 4) 村上, 加藤, 近藤, 第4回生研NSTシンポジウム講演論文集, 31.
- 5) Kang and Lee, 2nd Int. Symp. on Turbulent Phenomena, 397 (1987).
- 6) 伊藤, 笠木, 流れの可視化, vol. 9, No. 34, 87 (1989).
- 7) W. Rodi, ZAMM 56, T219-T221 (1976).
- 8) A. Yoshizawa, Phys. Fluids. 30-7, 628 (1987).
- 9) Hamba, F., J. Phys. Soc. Jpn., 56-11, 3771 (1987).

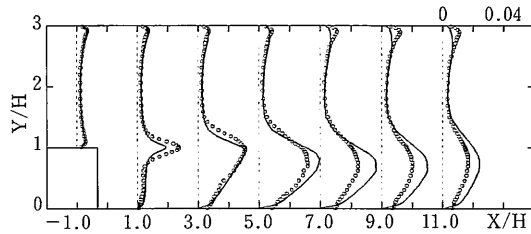


図7 kの分布図 (OLES, —ASM)

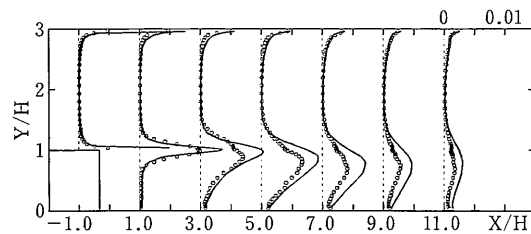


図8 εの分布図 (OLES, —ASM)

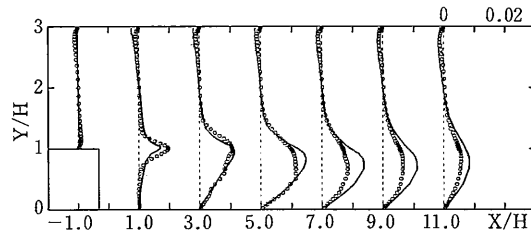


図9 せん断応力 $-\overline{uv}$ の分布図 (OLES, —ASM)