研 究 速 報
UDC 532.528：532 529.6

軟体形状の数値的推定

Numerical shape finding of soft bodies

中西康彦*・中桐　滋*・吉川暢宏*
Yasuhiko NAKANISHI, Shigeru NAKAGIRI and Nobuhiro YOSHIKAWA

1．は じ め に

一つの分類によれば，物体は固体と流体に大別される．この中間に軟体と呼べる区分があると考える．軟体にはくらげのようにそもそも軟らかい物質でできているものと，ピアノ線のように材料自体は硬いが一つの寸法が代表寸法とケタ違いに小さいので全体として軟らかくなっているものとがある．軟体のイメージの一つは，地球上であれば自重で形が崩れるというものである．形が崩れるのはかならずしも物が壊れることを意味しない．したがって，崩れた形がどのように納まるかは興味のあるところである．また，垂下する微量貴重材の工業的回収の観点から，液滴の成長と滴下の研究が行われている[1]．

本稿では軟体の納まりの形を数値的に推定する手法を検討する．ピアノ線のような線状構造の納まりの形については，ひずみエネルギー最小の規準により推定できることを著者の一人は過去に示した[2]．ここでは，泡や滴のように空間的な連続構造を有限個のセグメントに分割し，その形状をセグメントの結線または結点の座標を未知数にとり，軟体内部の体積一定条件を等式制約条件とするラグランジェ乗数法により基づいて推定する定式を示し，数値計算例に定式の妥当性を検証する．

2．表面積最小規準による定式

ほかに付帯条件がないときに内部体積が一定で表面積が最小である形は球であることは知られている．縁辺の形$h(x,y)=0$がx，y平面での境界条件として指定されているときには，内部体積が一定で表面積が最小となる膜構造の曲面$z=f(x,y)$のオイラー方程式は式(1)である[3]．

$$(1+f_x^2)f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+(1+f_y^2)f_{yy}=0 \qquad (1)$$

ここで，添字は偏微分を意味する．縁辺の形を指定する境界条件の下でこの非線形偏微分方程式を解くのは困難であるので，数値的に最小表面積の形を求める定式を以下に述べる．

図1は軸対称の場合について滑らかな膜面のN個の帯状セグメントへの分割を示す．セグメントの子午線上の断面形は直線であるとする．黒丸は縁辺の形が一定半径の円形であることを示す境界条件指定点である．白丸はセグメント結線の位置を示し，n番目の結線位置は原点Oからの動径r_nとx軸からの方位角θ_nにより定められる．この位置が定められれば，軸対称の膜面の形が求められることとなる．n番目の帯状セグメントの表面積S_nは式(2)により計算される．膜面の内部体積は，このセグメントに対応する図中の破線で囲まれた回転対称体に基づいて式(3)により計算する．l_nはn番目のセグメント辺長とする．全体の表面積と内部体積はN個の和として求められる．

$$S_n=\pi(r_{n+1}\cos\theta_{n+1}+r_n\cos\theta_n)\,l_n \qquad (2)$$

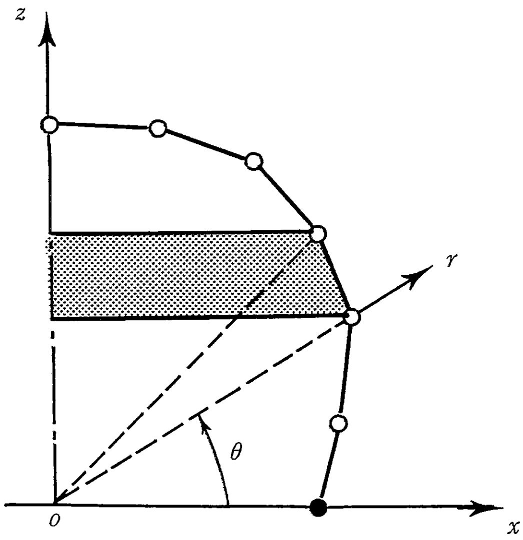

図1　軸対称のセグメントへの分割

*東京大学生産技術研究所　第1部

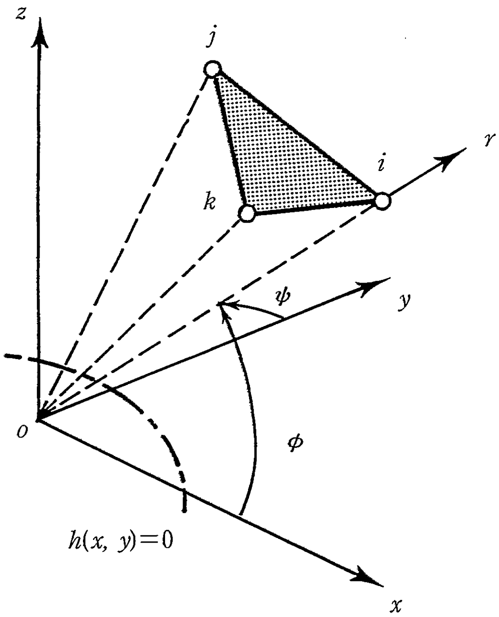

図2　非軸対称問題に用いる平面三角形セグメント

$$V_n=\frac{1}{3}\pi r_{n+1}r_n(r_{n+1}\cos\theta_{n+1}+r_n\cos\theta_n)\times\sin(\theta_{n+1}-\theta_n) \tag{3}$$

縁辺の形が円でないときの膜面の形は非軸対称になると予想される．この場合には，図2に示すように滑らかな膜面を平面三角形セグメントの集合として近似する．図にはn番目の三角形セグメントのみを示してある．このセグメントの表面積をS_nとし，図中の破線で囲まれた三角錐の体積をV_nとする．白丸はセグメント結点を意味し，その位置は原点からの動径rと二つの方位角により定められる．この三結点よりS_nとV_nは適宜の幾何公式により求められる．

膜面内部の全体積をCで表し，一定値であるとする．このとき，内部体積がCに等しく，表面積が最小となる曲面は体積一定を等式制約条件とする式(4)の汎関数の停留条件で定められると仮定する．

$$\Pi=\sum_{n=1}^{N}S_n+\mu\left(\sum_{n=1}^{N}V_n-C\right) \tag{4}$$

ここでμはラグランジェ乗数である．これは長さの逆数の次元を有するので数学的には曲率に対応している．本研究においては，方位角は一定に取り，動径r_nのみを未知数に取る．停留条件は式(4)の汎関数のr_nとμに関する微分値を零に等置して得られるが，表式は長大なr_nとμの非線形連立方程式である．これを解くにあたって$r_n=Z_n^2$の変数変換を用いる．ちなみに式(2)と式(3)のZ_nについての微分結果のみを式(5)と式(6)に示す．

$$\frac{\partial S_n}{\partial Z_n}=2\pi Z_n[l_n\cos\theta_n+(Z_{n+1}^2\cos\theta_{n+1}+Z_n^2\cos\theta_n)\{Z_n^2-Z_{n+1}^2\cos(\theta_{n+1}-\theta_n)\}/l_n] \tag{5}$$

$$\frac{\partial V_n}{\partial Z_n}=\frac{2}{3}\pi Z_n Z_{n+1}^2(Z_{n+1}^2\cos\theta_{n+1}+2Z_n^2\cos\theta_n)\sin(\theta_{n+1}-\theta_n) \tag{6}$$

このような微分結果をセグメントの結合に応じて重ね合わせて非線形連立方程式を得ている．これを解くにあたっては，以下の式により未知量を初期推定値（上付き棒記号で示す）と微小未知量（Δで示す）の和として表して微小未知量についての連立一次方程式に変換する．この方程式の係数行列は対称行列である[2]．

$$Z_n=\overline{Z_n}+\Delta Z_n\quad(n=1\sim N) \tag{7}$$

$$\mu=\overline{\mu}+\Delta\mu \tag{8}$$

この逐次線形化解法をZ_nの収束解が得られるまで繰り返す．

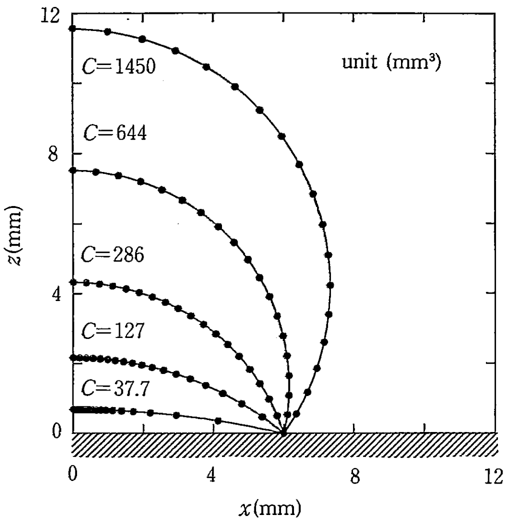

図3　種々の体積を有する泡の形

3．泡　の　形

図3は種々の体積を有する軸対称の泡の形を前節の定式により18個の帯状セグメントにより推定したものである．これは内圧の増加により膨らむ泡の変形を追跡したものではない．小さいCを設定して，初期形状は円錐形として逐次線形化解法で納まり形状を推定する．大きいCについては，小さいCで得られた形状を初期形状としている．一つの体積については数十回の逐次反復で収束解

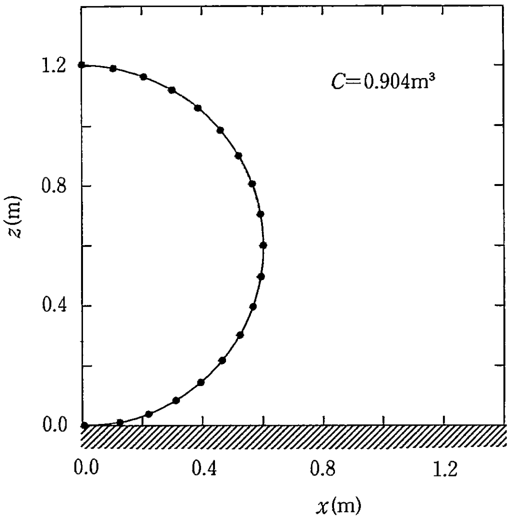

図4　縁辺の影響を無視しうる大体積の球形の泡

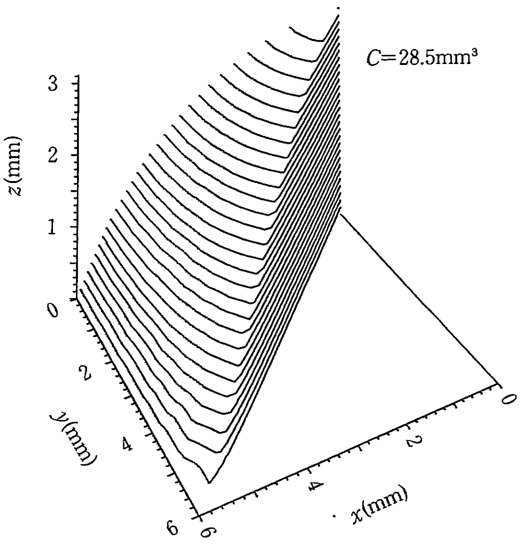

図5　縁辺が四角形の泡の形

が得られた．泡の自重を表面張力に対して無視でき，表面張力係数が均一のとき，表面エネルギー最小は表面積最小に対応するので，前節の定式が適用可能である．図4は内部体積が縁辺半径と比較してばく大な場合の形であり，予想どおりに球形が得られている．また，図5は縁辺が正四角形である小体積の泡の形を103個の三角形セグメントにより推定した結果の1/8部分を示す．四角形縁辺の場合も，内部体積をばく大にするとほとんど球形となる計算結果が得られている．

4．位置エネルギーと表面ポテンシァルの和最小規準による定式

地球上の軟体は重力の影響を受けている．この場合の軟体の表面形状の推定にあたっては，軟体の一定体積に対して位置エネルギーと表面ポテンシァルの和が最小となるように定められるとの仮説を用いる．軟体の質量密度ρと表面張力係数aは一定であるとする．軟体の体積と形とは無関係であるが，軟体の重心は形に依存する．そこで，懸垂線の例にならい[4]，軟体の形を重心位置が最低となるように定められると仮定する．同一体積すなわち同一重量に対して重心位置を最低にすることは，軟体の位置エネルギーを最小とすることにほかならない．一方，軟体と外気の間の表面張力が顕在するばあいを想定する．このとき，表面張力は軟体の表面積を縮小させる作用を及ぼす．この作用は一定体積の軟体の表面ポテンシァルを最小とするものである．

したがって，重力下の軟体の形の数値的推定にあたっては，式(9)の汎関数の停留条件を用いる．軟体表面の離散化は2節と同じセグメント分割により，未知量に動径r_nとラグランジェ乗数μを取るのも同じである．

$$\Pi=\rho g\sum_{n=1}^{N} h_n V_n + a\sum_{n=1}^{N} S_n + \mu\left(\sum_{n=1}^{N} V_n - C\right) \qquad (9)$$

ここでgは重力加速度，h_nはx, y面からのセグメントの重心高さを意味し，また右辺第一項は位置エネルギーを，第二項は表面ポテンシァルを，第三項は体積一定に関する等式制約条件を表している．この汎関数について2節と同じ逐次線形化解法を適用して重力と表面張力の下での軟体の形が定められる．本節のラグランジェ乗数の次元は圧力と同じである．

5．滴　の　形

本節では，縁辺が円形である軸対称の滴の形を取り上げる．20°Cの水滴を想定して，ρ=0.001g/mm³，a=7.28dyn/mmとする．図6には18個の帯状セグメントにより推定した底縁半径3mm，体積35.0m³で平板上にある水滴のスフェロイド形状を黒丸で示す．図中の白丸は，形状比較のため表面張力係数のみを作為的に上記の値の0.107倍にして計算した結果である．図7に天井から垂れる水滴形状の推定結果を示す．本計算では113mm³までの体積について垂下形状を追跡できた．この体積でくびれが生じ，これ以上の体積では収束解は得られない．実際の現象に当てはめれば，これは滴が滴下する限界と判断される．

以上の数値計算においては，体積Cを過大にする，底縁半径を大きく取る，質量密度ρを大きくする，表面張力係

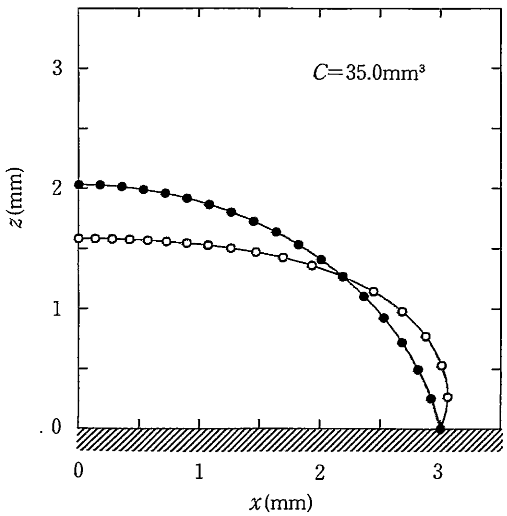

図6　平板上の水滴の形

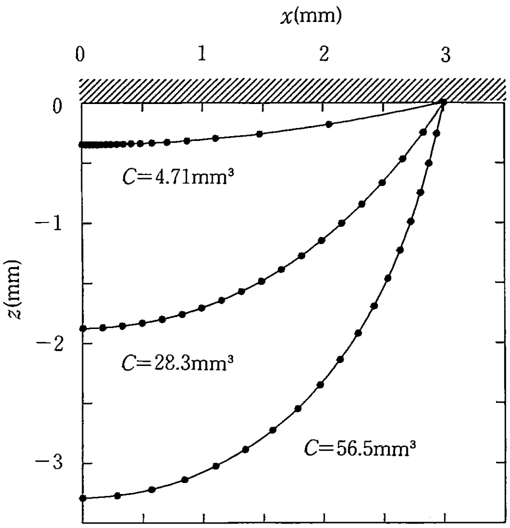

図7　天井から垂れる水滴の形

数aを小さくとると逐次線形化解法では収束解が得られなかった．本定式では力の釣り合いを陽には取り扱っていないが，垂下軟体の表面張力はその重力と釣り合うはずである．上記は，釣り合いが破られて滴はつぶれるか落下してしまい，解が数値的に得られない例である．

6．おわりに

本稿では，静的問題の範囲内で軟体の納まり形状を推定する簡単な定式を呈示し，泡と滴についての数値計算例を示した．形状の安定性および滴の平面内の位置決定と消長等の動的問題については，定式をさらに洗練する必要が残されている．

（1990年11月22日受理）

参考文献

1)　塩田和則，橋立良夫，野中重夫：表面張力を伴う液滴成長過程の流れ解析，日本機械学会講演論文集No. 900-69（1990），pp. 59-60.
2)　中桐滋：いわゆる納まりの問題について，生産研究，41巻，2号（1989），pp. 124-127.
3)　F.モーガン著，儀我美一監訳：石けん膜の数理解析，共立出版，1990.
4)　R.クラーン，D.ヒルベルト著，斎藤利弥監訳，数理物理学の方法，1，東京図書，1963.