

有限要素法のリンク機構への応用

Analysis of Link Mechanism by the Finite Element Method

山田 嘉昭*・辰 巳 善宏*

Yoshiaki YAMADA and Yoshihiro TATSUMI

1. ま え が き

有限要素法が誕生して、すでに二十数年の歳月を経たが、計算機の急速な発達と相まって、そのプログラムの汎用性などから、日進月歩の発達と普及を遂げている。

航空機の強度計算を出発点とし、構造物の変形と応力の状態の解析はもとより、流体問題、熱伝導問題、電磁場問題、振動問題など、構造力学以外の分野でも広範に使用に供されているのが現状である。

本稿では、有限要素法が機構学の分野においても良好な出発点となることを、リンク機構の基本構成要素である1自由度を有するピストンクランク機構と、テークラック機構の2つを例にとり、解析して示す。本報告の基本的な定式化は、Werff¹⁾の研究に従ったものである。

2. 要素の記述

機構における1つの要素(要素番号を*i*とする)の運動のようすは基準位置(reference position)における座標ベクトル \mathbf{x}_i^0 、近傍位置(adjacent position)における座標ベクトル \mathbf{x}_i 、両者の差を表す変位ベクトル \mathbf{u}_i ($=\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_i^0$)によって表現できる。 \mathbf{u}_i は4個の並進状態を表す成分と、2個の回転状態を表す成分を有し、図1のように示される。

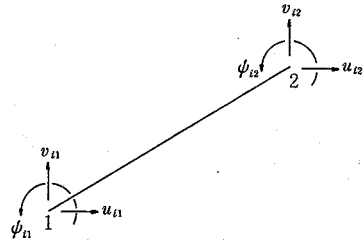


図1 リンク要素 *i*

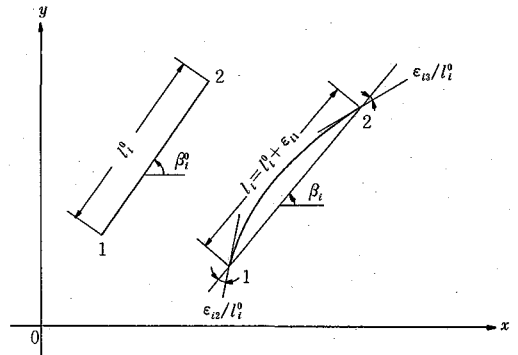


図2 リンクの変形

$$\mathbf{x}_i^{0T} = [x_{i1}^0 \ y_{i1}^0 \ \beta_i^0 \ x_{i2}^0 \ y_{i2}^0 \ \beta_i^0] \quad (1)$$

$$\mathbf{x}_i^T = [x_{i1} \ y_{i1} \ \beta_i \ x_{i2} \ y_{i2} \ \beta_i] \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_i^T = [u_{i1} \ v_{i1} \ \psi_{i1} \ u_{i2} \ v_{i2} \ \psi_{i2}] \quad (3)$$

次に、変形パラメータのベクトルを $\boldsymbol{\epsilon}_i$

$$\boldsymbol{\epsilon}_i^T = [\epsilon_{i1} \ \epsilon_{i2} \ \epsilon_{i3}] \quad (4)$$

とする。 $\boldsymbol{\epsilon}_i$ の3成分の定義は

$$\epsilon_{i1} = l_i - l_i^0 \quad (\text{リンクの伸び}) \quad (5)$$

$$\epsilon_{i2} = \{(\beta_i^0 + \psi_{i1}) - \beta_i\} l_i^0 = (\beta_{i1} - \beta_i) l_i^0 \quad (6)$$

(節点1における相対的な回転) $\times l_i^0$

$$\epsilon_{i3} = \{(\beta_i - (\beta_i^0 + \psi_{i2}))\} l_i^0 = (\beta_i - \beta_{i2}) l_i^0 \quad (7)$$

(節点2における相対的な回転) $\times l_i^0$

ただし

$$l_i^0 = \sqrt{(x_{i2}^0 - x_{i1}^0)^2 + (y_{i2}^0 - y_{i1}^0)^2} \quad (8)$$

$$l_i = \sqrt{\{(x_{i2}^0 + u_{i2}\} - (x_{i1}^0 + u_{i1}))^2 + \{(y_{i2}^0 + v_{i2}\} - (y_{i1}^0 + v_{i1}))^2} \quad (9)$$

$$\cos \beta_i^0 = (x_{i2}^0 - x_{i1}^0) / l_i^0 \quad (10)$$

$$\sin \beta_i^0 = (y_{i2}^0 - y_{i1}^0) / l_i^0 \quad (11)$$

$$\cos \beta_i = \{(x_{i2}^0 + u_{i2}\} - (x_{i1}^0 + u_{i1})) / l_i \quad (12)$$

$$\sin \beta_i = \{(y_{i2}^0 + v_{i2}\} - (y_{i1}^0 + v_{i1})) / l_i \quad (13)$$

図2は変形モードを示している。

$\boldsymbol{\epsilon}_i$ は6個の成分からなる \mathbf{u}_i の関数となっているが、これをMaclaurin展開して、1次の項までとると、

$$\boldsymbol{\epsilon}_i = [D_i^0] \mathbf{u}_i \quad (14)$$

ただし、マトリックス $[D_i^0]$ は

* 東京大学生産技術研究所 第1部

$$[D_i^0] = \begin{bmatrix} -\cos \beta_i^0 & -\sin \beta_i^0 & 0 & \cos \beta_i^0 & \sin \beta_i^0 & 0 \\ -\sin \beta_i^0 & \cos \beta_i^0 & l_i^0 & \sin \beta_i^0 & -\cos \beta_i^0 & 0 \\ \sin \beta_i^0 & -\cos \beta_i^0 & 0 & -\sin \beta_i^0 & \cos \beta_i^0 & -l_i^0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

各リンクは剛体として定義されているので、 $\epsilon_i = \mathbf{0}$ の条件が満足されなければならない。そこで、上のような1次 Maclaurin 展開までの近似で

$$[D_i^0] \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \quad (16)$$

の関係が成立するものとする。式(16)は6個の未知数を持つ3個の線形方程式となっている。

リンク機構全体では、要素について成立する式(16)を重ね合わせて

$$[D^0] \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (17)$$

が成立することになる。

3. 伝達関数

ここでは、1自由度のみが独立であるようなリンク機構を考えることとし、独立変数を α (通常はクランクの回転角をとる) として、 $\mathbf{x}' = d\mathbf{x}/d\alpha$ を「第1次伝達関数」、 $\mathbf{x}'' = d^2\mathbf{x}/d\alpha^2$ を「第2次伝達関数」と定義する。

次に \mathbf{u}_i を未知部分 (添字1で表す) と既知部分 (添字2で表す) に分け、それぞれに結合した行列 $[L_i^1]$ 、 $[L_i^2]$ を導入する。すなわち、1つの要素については

$$\mathbf{u}_i = [L_i^1] \mathbf{u}_i^1 + [L_i^2] \mathbf{u}_i^2 \quad (18)$$

リンク機構全体については、

$$\mathbf{u} = [L^1] \mathbf{u}^1 + [L^2] \mathbf{u}^2 \quad (19)$$

式(19)を式(17)に代入すると

$$[D^0]([L^2] \mathbf{u}^1 + [L^2] \mathbf{u}^2) = \mathbf{0} \quad (20)$$

さらに変形して

$$\mathbf{u}^1 = -([D^0][L^1])^{-1}[D^0][L^2] \mathbf{u}^2 \quad (21)$$

が得られる。 $\mathbf{u}^1/d\alpha = d\mathbf{x}^1/d\alpha = d\mathbf{x}^1/d\alpha = \mathbf{x}'^1$ 、 $\mathbf{u}^2/d\alpha = d\mathbf{x}^2/d\alpha = d\mathbf{x}^2/d\alpha = \mathbf{x}'^2$ の置き換えを行うと

$$\mathbf{x}'^1 = -([D^0][L^1])^{-1}[D^0][L^2] \mathbf{x}'^2 \quad (22)$$

となり、第1次伝達関数が求められる。第2次伝達関数は $\mathbf{x}_2'' = \mathbf{0}$ を考慮して式(22)を α で微分した式

$$\mathbf{x}''^1 = -([D^0][L^1])^{-1}((d/d\alpha)[D^0]) \text{ref. } \mathbf{x}'^2 \quad (23)$$

より求められる。

節点の速度、加速度は次式より算出できる。

$$\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/dt = (d\mathbf{x}/d\alpha)(d\alpha/dt) = \mathbf{x}' \dot{\alpha} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= d\mathbf{x}^2/dt^2 = (d/dt)(\mathbf{x}' \dot{\alpha}) \\ &= (d\mathbf{x}'/dt) \dot{\alpha} + \mathbf{x}' \ddot{\alpha} = \mathbf{x}'' \dot{\alpha}^2 + \mathbf{x}' \ddot{\alpha} \end{aligned} \quad (25)$$

こうして伝達関数が求められれば、近傍位置は基準位置から次式により近似計算することができる。

$$\mathbf{x}_{adj.} = \mathbf{x}_{ref.} + \Delta\alpha \mathbf{x}' + (\Delta\alpha)^2 \mathbf{x}''/2 \quad (26)$$

式(26)より算出される $\mathbf{x}_{adj.}$ は近似値のため式(5)~式(7)に代入すると、 ϵ の中の未知の成分に零からの残差を生ずるので、残差の値 ζ から次式によって修正

量 \mathbf{u}^* を計算する。

$$\mathbf{u}^* = -([D^0][L^1])^{-1} \zeta \quad (27)$$

こうして残差がある程度以下になるまで、次式の置き換えを用いて反復計算する。

$$\mathbf{x}' \leftarrow \mathbf{x}' + \mathbf{u}^*/\Delta\alpha \quad (28)$$

以上の過程をフローチャートにより図3に示す。

4. 例題

最初に、図4に示すピストンクランク機構について

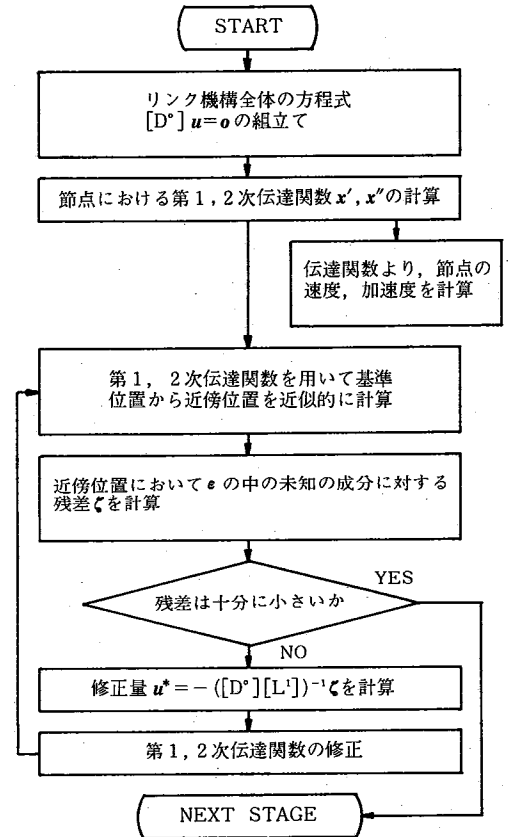


図3 計算のフローチャート

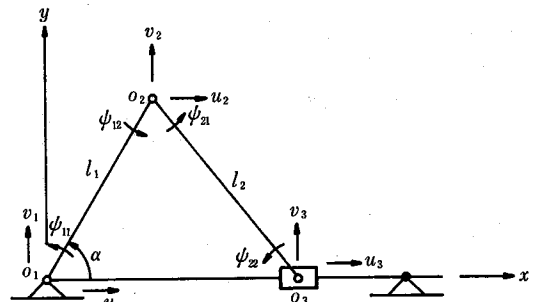


図4 ピストンクランク機構

研究速報

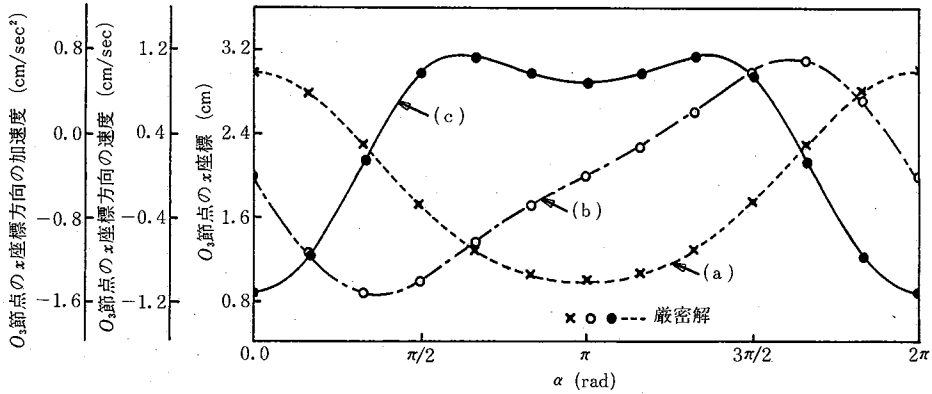


図5 O_3 節点の (a). x 座標, (b) x 座標方向の速度および (c) 加速度

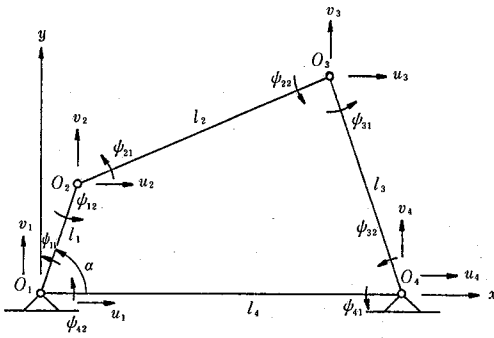


図6 てこクラック機構

解析を行った. 計算はクラック回転角1周分に対し, 分割数を60として行い, 残差は 1.0×10^{-13} cm 以下になるまで, 計算を繰り返した. またリンクの長さは $l_1=1$ cm, $l_2=2$ cm とし, 解の収束までの反復回数は各ステップにおいて6回~7回であった. 本例題におけるリンク機構全体の方程式は, 次ページの式 (29) のように与えられる.

図5は $\dot{\alpha}=1$ rad/sec, $\ddot{\alpha}=0$ rad/sec²として得られた計算の結果を示している. 次のように与えられる厳密解¹⁾との一致は良好である.

$$(x \text{ 座標}) = l_1 \cos \alpha + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \alpha} \quad (30)$$

$$(x \text{ 座標方向の速度}) = -l_1 \sin \alpha - l_1^2 \sin \alpha \cos \alpha / \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \alpha} \quad (31)$$

$$(x \text{ 座標方向の加速度}) = -l_1 \cos \alpha - l_1^2 (l_1^2 \sin^4 \alpha + l_2^2 \cos 2\alpha) / (l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \alpha) / \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \alpha} \quad (32)$$

次に, 図6に示すてこクラック機構について解析を行った. この場合も, 1周の分割数は60で, 残差は 1.0×10^{-13} cm 以下になるまで計算している. またリンクの長さは $l_1=30$ cm, $l_2=60$ cm, $l_3=80$ cm, $l_4=100$

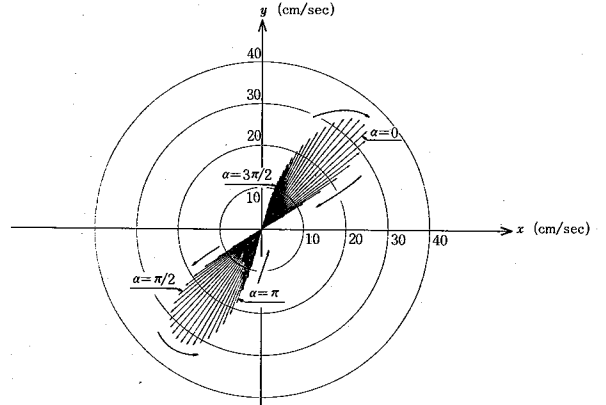


図7 O_3 節点の速度のベクトル図

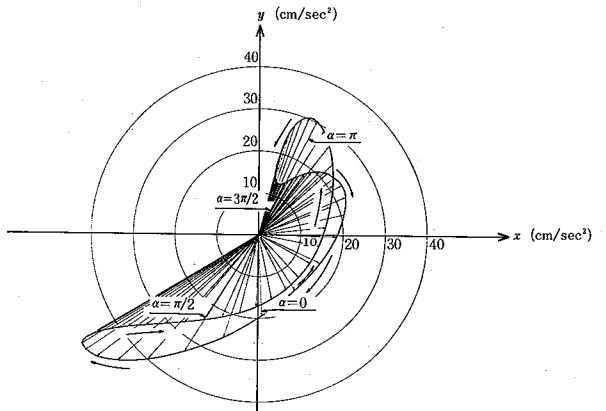


図8 O_3 節点の加速度のベクトル図

cm とした. 反復回数は, 各ステップにおいて6回~7回であった. 本例題におけるリンク機構全体の方程式は次ページの式 (33) のようである.

$$\begin{bmatrix}
 -\cos \beta_1^0 & -\sin \beta_1^0 & \cos \beta_1^0 & \sin \beta_1^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\sin \beta_1^0 & \cos \beta_1^0 & \sin \beta_1^0 & -\cos \beta_1^0 & 0 & 0 & l_1^0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sin \beta_1^0 & -\cos \beta_1^0 & -\sin \beta_1^0 & \cos \beta_1^0 & 0 & 0 & 0 & -l_1^0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & -\cos \beta_2^0 & -\sin \beta_2^0 & \cos \beta_2^0 & \sin \beta_2^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\sin \beta_2^0 & \cos \beta_2^0 & \sin \beta_2^0 & -\cos \beta_2^0 & 0 & 0 & l_2^0 & 0 \\
 0 & 0 & \sin \beta_2^0 & -\cos \beta_2^0 & -\sin \beta_2^0 & \cos \beta_2^0 & 0 & 0 & 0 & -l_2^0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \beta_3^0 & -\sin \beta_3^0 & \cos \beta_3^0 & \sin \beta_3^0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \beta_3^0 & \cos \beta_3^0 & \sin \beta_3^0 & -\cos \beta_3^0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \beta_3^0 & -\cos \beta_3^0 & -\sin \beta_3^0 & \cos \beta_3^0 & 0 & 0 \\
 \hline
 \cos \beta_4^0 & \sin \beta_4^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \beta_4^0 & -\sin \beta_4^0 & 0 & 0 \\
 \sin \beta_4^0 & -\cos \beta_4^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \beta_4^0 & \cos \beta_4^0 & 0 & 0 \\
 -\sin \beta_4^0 & \cos \beta_4^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \beta_4^0 & -\cos \beta_4^0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1(0) \\
 v_1(0) \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 u_3 \\
 v_3 \\
 \psi_{11}(\Delta\alpha) \\
 \psi_{12} \\
 \psi_{21} \\
 \psi_{22}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \tag{29}$$

$$\begin{bmatrix}
 -\cos \beta_1^0 & -\sin \beta_1^0 & \cos \beta_1^0 & \sin \beta_1^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\sin \beta_1^0 & \cos \beta_1^0 & \sin \beta_1^0 & -\cos \beta_1^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sin \beta_1^0 & -\cos \beta_1^0 & -\sin \beta_1^0 & \cos \beta_1^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & -\cos \beta_2^0 & -\sin \beta_2^0 & \cos \beta_2^0 & \sin \beta_2^0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\sin \beta_2^0 & \cos \beta_2^0 & \sin \beta_2^0 & -\cos \beta_2^0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \sin \beta_2^0 & -\cos \beta_2^0 & -\sin \beta_2^0 & \cos \beta_2^0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \beta_3^0 & -\sin \beta_3^0 & \cos \beta_3^0 & \sin \beta_3^0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \beta_3^0 & \cos \beta_3^0 & \sin \beta_3^0 & -\cos \beta_3^0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \beta_3^0 & -\cos \beta_3^0 & -\sin \beta_3^0 & \cos \beta_3^0 \\
 \hline
 \cos \beta_4^0 & \sin \beta_4^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \beta_4^0 & -\sin \beta_4^0 \\
 \sin \beta_4^0 & -\cos \beta_4^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \beta_4^0 & \cos \beta_4^0 \\
 -\sin \beta_4^0 & \cos \beta_4^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \beta_4^0 & -\cos \beta_4^0
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 l_1^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -l_1^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & l_2^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -l_2^0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & l_3^0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_3^0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_4^0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_4^0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1(0) \\
 v_1(0) \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 u_3 \\
 v_3 \\
 u_4 \\
 v_4 \\
 \psi_{11}(\Delta\alpha) \\
 \psi_{12} \\
 \psi_{21} \\
 \psi_{22} \\
 \psi_{31} \\
 \psi_{32} \\
 \psi_{41} \\
 \psi_{42}(0)
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \tag{33}$$

また、 $\dot{\alpha}=1 \text{ rad/sec}$, $\ddot{\alpha}=0 \text{ rad/sec}^2$ として得られた結果を図7, 図8に示している。

なお、この例題では $l_1 \sim l_4$ に対して次のように Grashof の定理²⁾に従う関係が成立していなければならない。

$$\begin{cases}
 l_1 + l_2 \leq l_3 + l_4 \\
 l_1 + l_3 \leq l_2 + l_4 \\
 l_1 + l_4 \leq l_2 + l_3
 \end{cases}
 \tag{34}$$

(1981年10月22日受理)

参考文献

- 1) K. Van der Werff, 'Dynamic analysis of planar mechanisms with rigid links,' Computer methods in applied mechanics and engineering 11 (1977) 1-18 North-Holland Publishing Company
- 2) 太田 博, "機構学" 共立出版 1980