

塑性変形のサブレイヤモデルについて

On Sublayer Model Simulation of Plastic Behavior

山田 嘉 昭*・黄 佑 民*
Yoshiaki YAMADA and You-min HUANG

1. ま え が き

サブレイヤモデル (sublayer model) は、フラクシオン (fraction) あるいはオーバレイ (overlay) モデルとも呼ばれ、実在の材料のひずみ硬化特性を、並列に結合した幾つかのモデル要素の力学的特性により、多曲線近似の形で表現することを目的として導入されたものである。このモデルは、Prager と Hodge の著書¹⁾により広く紹介されたが、その起源は Duwez^{2,3)}に遡ることができるようである。その後、数値解析とくに有限要素法の進歩により、サブレイヤモデルを計算プログラムに組み込み、圧力容器や配管の構造解析に適用しようとする試みが多く行われるようになった。^{4~7)}このモデルの適用にあたっては、いずれの場合も、構成要素のヤング率 E を共有の一定値としていることに、共通の点が認められる。ところが、全体の挙動に対する各構成要素の寄与を表す面積率あるいは体積率については、理論的な取扱いや、配分の決定にいろいろな差異がある。本稿は、筆者らの定式化を示すと同時に、いままでに提案されたいろいろな方法相互の関係を明らかにし、非弾性解析における本モデルの応用を容易にすることを目的とするものである。なお、モデル構成要素は直線硬化の特性を有していてもよいが、ここでは議論を簡単にするため非硬化性の完全弾塑性材料としている。

2. 一次元または単軸モデル

図1は、実在の材料の単軸応力-ひずみ曲線を、多直線からなる折線によって近似して得られた線図を表している。図2に示すサブレイヤモデルは、このような単調増加の負荷における応力-ひずみ曲線ばかりでなく、逆方向負荷における Bauschinger 効果、あるいは繰返し負荷におけるヒステリシス・ループをシミュレートする目的で導入された力学モデルである。図2では、簡単のためモデル要素の数は3つになっているが、一般的な議論では n 個とする。

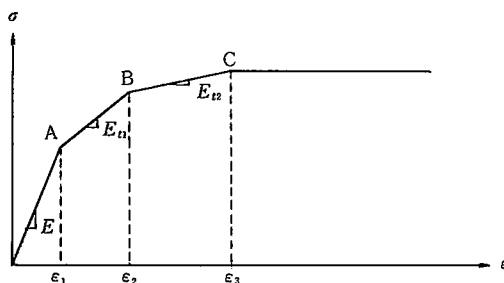


図1 多直線近似の応力-ひずみ曲線

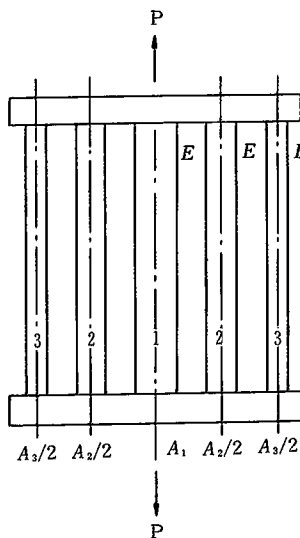


図2 サブレイヤモデル

本節の一次元モデルは、図1のように近似される単軸応力場の応力-ひずみ曲線のみ注目し、これを図3に示す特性を有する非硬化の完全弾塑性材料によりシミュレートしようとするものである。Hunsaker ほか⁴⁾が有限要素解析に用いている方法は、これと同じである。以下、議論を簡潔にするため、すべての構成要素は同一値のヤング率 E を有するものとする。

図3によれば、各モデル構成要素に降伏を生じるとき

* 東京大学生産技術研究所 第1部 複合材料技術センター

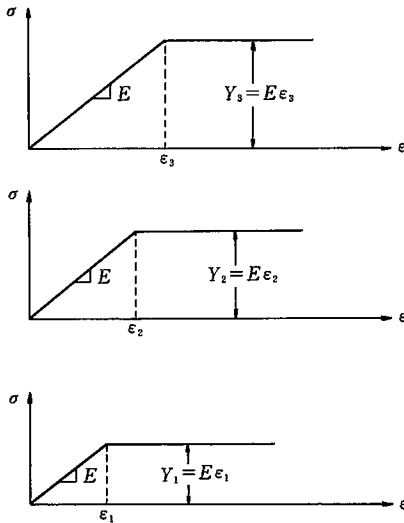


図3 一次元モデル構成要素の特性

のひずみ値は、要素番号の順序に $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3 < \dots$ となっている。したがって、要素1に最初の降伏を生じ、この状態でのひずみ ϵ において、サブレイヤモデルが受持つことのできる荷重 P は

$$P_1 = A_1 E \epsilon_1 + (A_2 + A_3 + \dots + A_n) E \epsilon$$

$$= A_1 E \epsilon_1 + (A - A_1) E \epsilon \quad (1)$$

ただし

$$A = \sum_{i=1}^n A_i \quad (2)$$

A_1, A_2, \dots, A_n は各要素の断面積、 A はそれらの総和を表し、サブレイヤモデルが実在の材料の単軸応力-ひずみ曲線を表すように、面積比 $A_1/A, \dots, A_n/A$ を定めることがここでの課題である。

式(1)に対応する負荷の状態は、図1の応力-ひずみ曲線上では、線分ABによって与えられる。したがって、式(1)と同じひずみ ϵ に対応する荷重 P_1 として

$$P_1 = A E \epsilon_1 + A E_{t1} (\epsilon - \epsilon_1)$$

$$= A (E - E_{t1}) \epsilon_1 + A E_{t1} \epsilon \quad (3)$$

式(1)と式(2)の荷重が等価でなければならないことから

$$\frac{A_1}{A} = \frac{E - E_{t1}}{E} \quad (4)$$

以下同様にして、要素2, 3, ... に降伏を生じた状態を考え、各要素の面積比を次のように決定すればよいことを容易に示すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_2}{A} &= \frac{E_{t1} - E_{t2}}{E}, \quad \frac{A_3}{A} = \frac{E_{t2} - E_{t3}}{E}, \quad \dots \\ \frac{A_n}{A} &= \frac{E_{t, n-1} - E_{t, n}}{E}, \quad \text{ただし, } E_{t, n} = 0 \end{aligned} \right\} (5)$$

したがって

$$\frac{A_1 + A_2}{A} = \frac{E - E_{t2}}{E}, \quad \frac{A_1 + A_2 + A_3}{A} = \frac{E - E_{t3}}{E}, \quad \dots \quad (6)$$

ここでの一次元モデルでは、図3からも明らかのように、各要素の降伏応力は

$$Y_1 = E \epsilon_1, \quad Y_2 = E \epsilon_2, \quad Y_3 = E \epsilon_3, \quad \dots \quad (7)$$

式(4)や式(6)の関係をを用いると、式(7)の Y_2, Y_3, \dots が次のように表されることは注目に値する。

$$\left. \begin{aligned} Y_2 &= Y_1 + E(\epsilon_2 - \epsilon_1) = Y_1 + \frac{E_{t1}(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{1 - A_1/A}, \\ Y_3 &= Y_2 + E(\epsilon_3 - \epsilon_2) = Y_2 + \frac{E_{t2}(\epsilon_3 - \epsilon_2)}{1 - (A_1 + A_2)/A}, \dots \end{aligned} \right\} (8)$$

式(8)は、次のような考察からも導くことのできるものである。いま、図1の線分ABの部分について考えると、AB間における荷重の増加は $A E_{t1}(\epsilon_2 - \epsilon_1)$ である。モデルにおいて、この荷重増加を受け持つのは、弾性状態を保っている面積 $(A - A_1)$ の部分である。こうして、式(8)の Y_2 に対する表示が得られ、以下同様に Y_3, \dots についての表示を得ることができる。

3. 三次元状態を考慮したモデル

この節で取り扱う方法では、単軸応力場における応力-ひずみ曲線ばかりでなく、3軸状態における挙動についてもシミュレーションが行われるように、サブレイヤモデルにおいて、各構成要素が占める比率を定める。三次元のシミュレーションであるから、この場合の比率は面積比というよりは体積比を表すものとするのが自然である。

材料を等方かつ非硬化性と仮定し、Misesの降伏条件を塑性ポテンシャルとする場合、軸応力 σ_x のみを受けける弾塑性材料の構成方程式は次のように表される。⁸⁾ σ_x のみの単軸応力場では、相当応力 $\bar{\sigma}$ と偏差応力が

$$\bar{\sigma} = \sigma_x, \quad \sigma'_x = \frac{2}{3} \sigma_x, \quad \sigma'_y = \sigma'_z = -\frac{1}{3} \sigma_x \quad (9)$$

のように与えられることに注意して

研究速報

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{pmatrix} 1-2\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-2\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-2\nu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\epsilon_z \end{Bmatrix} - \frac{\beta}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\epsilon_z \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ただし $\beta = \begin{cases} 0, & \text{弾性状態に対し} \\ 1, & \text{塑性状態に対し} \end{cases}$

ここで、 ν はポアソン比を表している。

要素1のみが降伏し、残りの要素が弾性の状態にある場合に対して式(10)を適用すると、サブレイヤモデルにおいて横方向の応力増分が零という条件から次の関係が導かれる。対称性から $d\epsilon_y = d\epsilon_z$ が成立することに注意して

$$\begin{aligned} d\sigma_y = d\sigma_z &= \frac{A_1 E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu d\epsilon_x + d\epsilon_y) \\ &+ \frac{A_1 E}{3(1+\nu)} (d\epsilon_x - d\epsilon_y) \\ &+ \frac{(A-A_1)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu d\epsilon_x + d\epsilon_y) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 A_1 は要素1の体積、 $(A-A_1)$ は要素1を除いて弾性状態にとどまり、まだ降伏していない要素体積の総和 $(A-A_1) = A_2 + A_3 + \dots + A_n$ を表すものと解する。式(11)から

$$\frac{A}{1-2\nu} (\nu d\epsilon_x + d\epsilon_y) + \frac{A_1}{3} (d\epsilon_x - d\epsilon_y) = 0 \quad (12)$$

上の式において、各要素に共通として取り扱ったひずみ増分 $d\epsilon_x$ と $d\epsilon_y$ は、実在の材料のひずみ増分でもあり、Misesの材料では相互に次の関係によって結ばれている。

$$\begin{aligned} d\epsilon_y &= -\nu d\epsilon_x^e - \frac{1}{2} d\epsilon_x^p = -\nu d\epsilon_x^e - \frac{1}{2} (d\epsilon_x - d\epsilon_x^e) \\ &= -\frac{1}{2} d\epsilon_x + \left(\frac{1}{2} - \nu\right) d\epsilon_x^e \end{aligned} \quad (13)$$

ただし、 $d\epsilon_x^e$ と $d\epsilon_x^p$ は軸方向ひずみ増分の弾性および塑性成分を表す。

応力増分を $d\sigma$ とするとき、 $d\epsilon_x^e = d\sigma/E$ である。一方において、要素1のみに降伏を生じている図1の線分ABに対応する状態では、 $d\sigma = E_{t1} d\epsilon_x$ の関係が成立する。したがって、式(13)は次のように表示されることになる。

$$d\epsilon_y = \left[-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \nu\right) \frac{E_{t1}}{E} \right] d\epsilon_x \quad (14)$$

以上で得た式(12)と式(14)から、モデル要素1の割合を定める次の関係式

$$\frac{A_1}{A} = \frac{E - E_{t1}}{E - (1-2\nu)E_{t1}/3}, \quad A - A_1 = \sum_{j=2}^n A_j \quad (15)$$

が導かれる。以下、同様にして

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_1 + A_2}{A} &= \frac{E - E_{t2}}{E - (1-2\nu)E_{t2}/3}, \dots \\ \frac{A_1 + \dots + A_i}{A} &= \frac{E - E_{ti}}{E - (1-2\nu)E_{ti}/3}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\text{ただし } A - (A_1 + \dots + A_i) = \sum_{j=i+1}^n A_j \quad (17)$$

式(16)は前節の一次元モデルにおける式(6)に代わる関係である。

ここでも、式(8)の $1 - A_1/A$ や $1 - (A_1 + A_2)/A$ などに式(16)から得られる関係を代入して、次の結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= E\epsilon_{x1} \\ Y_2 &= Y_1 + \frac{3E - (1-2\nu)E_{t1}}{2(1+\nu)} (\epsilon_{x2} - \epsilon_{x1}), \\ Y_3 &= Y_2 + \frac{3E - (1-2\nu)E_{t2}}{2(1+\nu)} (\epsilon_{x3} - \epsilon_{x2}), \dots \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ただし、3軸のひずみ状態を考えているので、 $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \dots$ を $\epsilon_{x1}, \epsilon_{x2}, \dots$ によって表し、軸ひずみであることを示している。式(18)の誘導は Harper⁷⁾ が用いたのと同じ論法によるものであるが、形式的にすぎるきらいがある。そこで、以下のように別法によって式(18)の成立することを確かめることにする。また、その過程において、上の式(18)の Y_1, Y_2, \dots が三次元の場合における相当応力の意味をもつことも明らかとなる。

議論を具体的にするため、図1の点B、すなわち要素2にちょうど降伏を生じた状態を考えると、そこでの軸方向ひずみは ϵ_{x2} 、横方向ひずみについては点Aにおいて $-\nu\epsilon_{x1}$ 、点AとBの間においては式(14)で与えられる増分を生じることを考慮すると

$$\epsilon_{y2} = -\nu\epsilon_{x1} + \left[-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \nu\right) \frac{E_{t1}}{E} \right] (\epsilon_{x2} - \epsilon_{x1}) \quad (19)$$

したがって

$$\varepsilon_{x2} - \varepsilon_{y2} = (1 + \nu)\varepsilon_{x1} + \frac{3 - (1 - 2\nu)E_{11}/E}{2}(\varepsilon_{x2} - \varepsilon_{x1}) \quad (20)$$

一方において、Mises の条件では塑性ひずみの非圧縮性を仮定しているため、軸方向の偏差応力 σ'_x と偏差ひずみ ε'_x の間に、 G をせん断弾性係数として

$$\sigma'_x = 2G\varepsilon'_x = \frac{G}{3}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \quad (21)$$

の関係が成立する。ただし、単軸応力場では $\varepsilon_y = \varepsilon_z$ 式(9)を用いると、式(21)から

$$\bar{\sigma} = \frac{3}{2}\sigma'_x = \frac{G}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) = \frac{E}{1 + \nu}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \quad (22)$$

式(20)を式(22)に代入すれば、図1の点B、すなわち添字2で表される状態において

$$\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_1 + \frac{3E - (1 - 2\nu)E_{11}}{2(1 + \nu)}(\varepsilon_{x2} - \varepsilon_{x1}), \quad \bar{\sigma}_1 = E\varepsilon_{x1} \quad (23)$$

Y_1, Y_2 を相当応力 $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ とみなせば、これは式(18)の第1行と2行に一致する関係である。

4. む す び

本稿では、一次元あるいは三次元における材料の力学的挙動をサブレイヤモデルによってシミュレートする場合について、各構成要素に配分する面積あるいは体積率の決定方法、および要素の降伏応力または相当応力値を定める方法を統一的に取り扱った。三次元状態を考慮した場合の結果からは、Besseling ら^{5,6)} が求めて使用している諸関係式を導くことができる。たとえば、図1の応力-ひずみ線図の線分AB上における全ひずみ増分 $d\varepsilon$ と塑性ひずみ増分 $d\varepsilon^p$ の関係は

$$d\varepsilon^p = d\varepsilon - d\varepsilon^e = d\varepsilon - \frac{d\sigma}{E} = \left(1 - \frac{E_{11}}{E}\right)d\varepsilon \quad (24)$$

式(15)を E_{11}/E について解いて得られる関係を用い

ると、式(24)は

$$d\varepsilon^p = \frac{2(1 + \nu)A_i/A}{3 - (1 - 2\nu)A_i/A} d\varepsilon \quad (25)$$

一般に、 i 番目の要素までに降伏を生じた段階では

$$d\varepsilon^p = \frac{2(1 + \nu)\sum_i A_i/A}{3 - (1 - 2\nu)\sum_i A_i/A} d\varepsilon \quad (26)$$

終わりに本稿は、日本機械学会 RC-SC55 非弾性解析の設計適用方法分科会における研究活動の中でまとめたものであることを述べておきたい。

(1980年6月25日受理)

文 献

- 1) W. Prager and P. G. Hodge, Jr., Theory of Perfectly Plastic Solids, John Wiley (1951)
- 2) P. Duwez, On the Plasticity of Crystals, Physical Review, 47, 494 (1935)
- 3) H. F. Bohnenblust and P. Duwez, Some Properties of a Mechanical Model of Plasticity, J. Appl. Mech., 222-225 (1948)
- 4) B. Hunsaker, Jr., D. K. Vaughan, J. A. Stricklin and W. E. Haisler, A Comparison of Current Work-Hardening Models used in the Analysis of Plastic Deformations, TEES-RPT-2926-73-3 (1973)
- 5) J. F. Besseling, A Theory of Elastic, Plastic and Creep Deformation of an Initially Isotropic Material Showing Anisotropic Strain-Hardening, Creep Recovery, and Secondary Creep, J. Appl. Mech., 25, 529-536 (1958)
- 6) P. Meijers, G. T. M. Janssen and J. Booij, Numerical Plasticity and Creep Analysis Based on Fraction Model and Experimental Verification for AISI 304, Paper No. L3/9, 3rd Int. Conf. Struc. Mech. in Reactor Tech, London (1975)
- 7) P. G. Harper, An Analysis of the Sublayer Model for Plasticity under Multiaxial Stress, Central Electricity Generating Board, Berkeley Nuclear Lab., RD/B/N 4270 (1978)
- 8) 山田嘉昭, マトリックス法材料力学, 培風館(1980), 3章の式(68)あるいは付録Iの式(A・58)の特別な場合.