

全ひずみ理論構成方程式の増分形式化と その有限要素解析への応用 (II)

— 解の負荷径路依存性の数値解析例 —

Incremental Formulation of Deformation Theory of Plasticity for a Unified Solution of Elastic-Plastic Problems (II)

— Numerical Examples and Comparisons to Incremental Theories —

山田 嘉昭*・黄 佑民*・西口 磯春*

Yoshiaki YAMADA, You-min HUANG and Isoharu NISHIGUCHI

本報では、同じ標題の (I)⁹⁾ で述べた定式化を検証することを目的として、例題を選び、解析を試みた結果を報告する。いままでに取り扱った例題は、引張りとねじりの組合せ負荷を受ける薄肉円管、および中央き裂を有する試験片の平面ひずみ条件下における引張りの二つである。なお、記述の便宜上、式および節の番号に対して、(I)からの通し番号を用いていることを断っておきたい。

4. 引張りとねじりの組合せ負荷を受ける薄肉円管

図1は、取り扱った円管のモデルを示し、図2は、解析に使用したモデルと要素分割を示している。問題は軸対称であるから、適当な角度 (ここでは夾角 2.8°) の扇形部分をとって、それを二つの要素に分割する方法を用いている。実際に用いた要素は、3節点三角柱要素で、各節点に断面内の \dot{u} , \dot{v} と軸方向 \dot{w} の三つの自由度、一要素あたり九つの自由度を有している。また、変位の拘束条件としては、二つの半径面上でいわゆる斜めの拘束を用いている。

軸方向の引張応力とせん断応力を σ および τ 、軸ひず

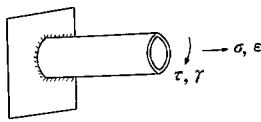
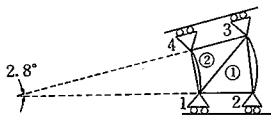


図1 薄肉円管モデル



内半径 20 mm $E=19000 \text{ kgf/mm}^2$
外半径 21 mm $\nu=0.3$
要素数 2 el. $H'=380 \text{ kgf/mm}^2$
節点数 4 nodes $\sigma_s=26.2 \text{ kgf/mm}^2$

図2 解析要素モデル

みと工学の定義によるせん断ひずみを ϵ および γ とすれば、ここでの組合せ荷重における全ひずみ理論構成方程式の増分形表示は次のように表される。

$$\dot{\sigma} = \frac{E}{1+2E\phi/3} \left[\dot{\epsilon} - \frac{(1-2H'\phi/3)\{(1+2G\phi)E \cdot \sigma^2 \dot{\epsilon} + 3(1+2E\phi/3)G\tau \dot{\gamma}\}}{S+2\{EG\sigma^2 + H'(G\sigma^2 + E\tau^2)\}\phi} \right] \quad (20)$$

$$\dot{\tau} = \frac{G}{1+2G\phi} \left[\dot{\gamma} - \frac{3(1-2H'\phi/3)\{(1+2G\phi)E \cdot \sigma\tau \dot{\epsilon} + 3(1+2E\phi/3)G\tau^2 \dot{\gamma}\}}{S+2\{EG\sigma^2 + H'(G\sigma^2 + E\tau^2)\}\phi} \right]$$

$$\dot{\phi} = \frac{(3/2 - H'\phi)}{S+2\{EG\sigma^2 + H'(G\sigma^2 + E\tau^2)\}\phi} \times \{[(1+2G\phi)E\sigma \dot{\epsilon} + 3(1+2E\phi/3)G\tau \dot{\gamma}]\} \quad (21)$$

ただし

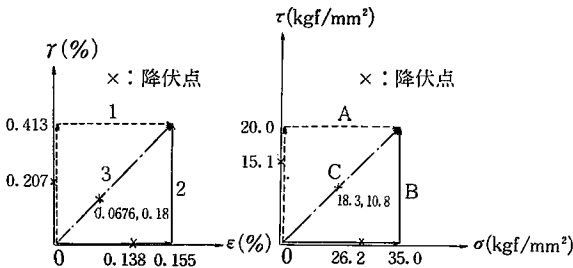
$$S = H'\sigma^2 + E\sigma^2 + 9G\tau^2$$

式 (20) は (I) で導いた式 (15) から、 σ および τ 以外の応力を零とした特別な場合として導かれるものではあるが、別途に陽表示を求めようとした方が簡単であることを述べておこう。

全ひずみ理論によれば、ひずみと応力の最終状態は負荷径路に依存することなく、一意的に定まる。これに対して、ひずみ増分理論は元来、負荷径路に依存した解を与えるところのものである。そこで、図1のモデルについて、ひずみあるいは応力の最終状態は同一とし、負荷径路が異なる場合について、二つの理論による解を求め、比較を行った。負荷径路を図3に示し、(a)はひずみ径

* 東京大学生産技術研究所 第1部

路を指定する場合、(b)は応力経路を指定する場合である。両者を区別するため、(a)では、 $(\epsilon=0.155\%, \tau=0.413\%)$ の状態に達する三つの径路をそれぞれ1, 2および3, (b)では、 $(\sigma=35.0 \text{ kgf/mm}^2, \tau=20.0 \text{ kgf/mm}^2)$ に到る三つの径路をA, BおよびCと呼ぶことにする。表1および表2は結果のまとめである。表によれば、ひずみあるいは応力負荷のいずれの場合も、ひずみ増分理論では最終の状態が径路に大きく依存している。これに対し、全ひずみ理論では負荷径路によらないほぼ一致した結果が得られ、理論定式化および計算プログラムの検証がなされたものと考えている。なお、比例負荷の場合には、二つの計算結果がよく一致し、理論的予測の数値的な裏付けとなっている。



(a) ひずみ径路指定の負荷 (b) 応力径路指定の負荷
図3 ひずみあるいは応力径路を指定した負荷

表1 ひずみ径路指定の引張りねじりの数値解析結果

	径路	τ (%)	ϵ (%)	τ (kgf/mm ²)	σ (kgf/mm ²)
全ひずみ理論	1	0.413	0.155	13.28	14.00
	2			13.84	14.52
	3			13.20	14.00
ひずみ増分理論	1	0.413	0.155	9.12	22.25
	2			15.74	8.93
	3			13.13	14.18

表2 応力径路指定の引張りねじりの数値解析結果

	径路	τ (kgf/mm ²)	σ (kgf/mm ²)	τ (%)	ϵ (%)
全ひずみ理論	A	20.0	35.0	7.63	4.34
	B			7.68	4.48
	C			7.85	4.44
ひずみ増分理論	A	20.0	35.0	9.50	2.04
	B			3.58	5.61
	C			7.79	4.43

5. 中央き裂を有する二次元モデルのJ積分解析

ここでは、本報の(1)で述べた定式化を二次元の弾塑性き裂問題に適用し、J積分の評価を行った例を示す。

Rice⁵⁾によって提案されたJ積分は次式で表される。

$$J = \int_{\Gamma} \left[W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dS \right] \quad (22)$$

ただし、Wはひずみエネルギー密度を表し、

$$W = W(\epsilon_{ij}) = \int_0^{\epsilon} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dt \quad (23)$$

のように定義される。T_i=σ_{ij}n_j および u_i は図4に示す積分経路Γ上の表面力ベクトルおよび変位ベクトルの成分、dSはΓに沿う線素である。

弾性体および全ひずみ理論に従う弾塑性体(除荷のない場合)については、積分経路によってJ積分の値が変化しないことが知られている⁷⁾。また、弾性体においてはJ積分から応力拡大係数を求めることができ、たとえばモードIの変形形式のとき、応力拡大係数K_IとJ積分の関係が平面ひずみ問題では、次のようになることが知られている。

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \quad (24)$$

解析したモデルおよび材料定数を図5に示し、要素分割図を図6に示した。問題の対称性により全体の1/4を解析している。要素は4-8の可変節点数要素で平面ひずみ状態を仮定し、要素剛性マトリックスおよびJ積分の計算には2×2のGauss積分を用いた。

表3は、この問題の弾性解のJ積分および応力拡大係

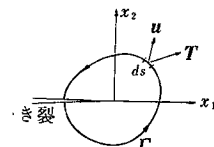


図4 J積分

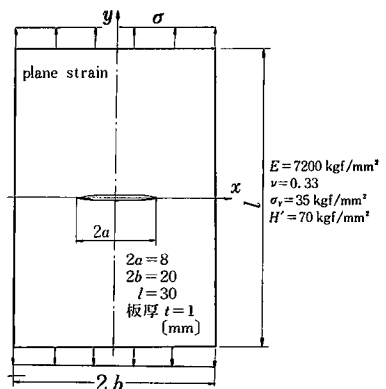


図5 中央き裂モデル

研究速報

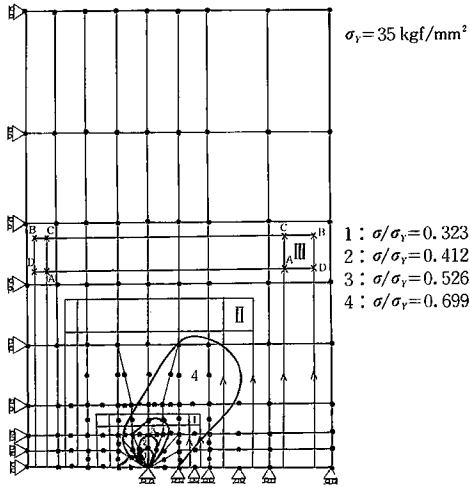


図6 中央き裂モデル有限要素分割図

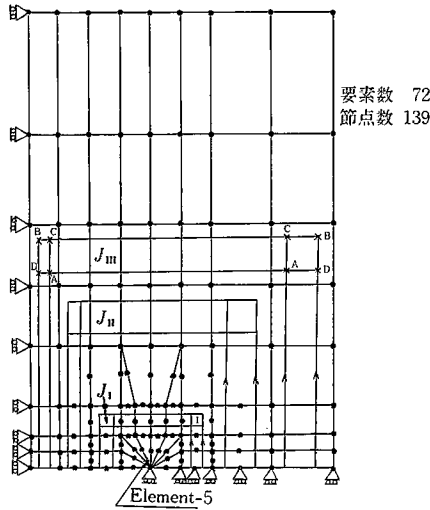


図7 塑性域の進展(全ひずみ理論による)

数を計算した結果を示している。J積分は図6に示したように、内側から順にI, IIおよびIIIの三つの組を選び、それぞれについて隅の Gauss 点 A, B, C および D によって定まる4通りの径路に対して求めている。K_Iは、Jの計算結果から、式(24)を用いて求めた値であるが、その平均の解析解⁹⁾から求められる K_I = 39.3 kgf・mm^{-3/2} に対する誤差は1%程度である。これは、本数値解析例において、先端近傍の節点変位より求めた K_I が10%以上の誤差を生じたのに比較して、精度がよい。J積分に関しては、平均値からの最大偏差は2.4%であり、また、I, IIおよびIIIの各組において、それぞれ四つの径路の平均をとる場合は、全平均値からの偏差は1%以下にとどまっている。

次に、本例題の弾塑性解析を行い、全ひずみ理論とひずみ増分理論を比較した結果を示す。

図7は全ひずみ理論によって求めた塑性域の進展を示す図であるが、ひずみ増分理論の場合もほとんど同じ結果が得られた。このとき、引張荷重σとともにJ積分の変化する様子を表4にまとめてあるが、二つの理論によ

表3 J積分値および応力拡大係数 K_I
(σ = 10 kgf/mm² における弾性解による)

J : kgf・mm					
	A	B	C	D	平均
積分路 I	0.1867	0.1852	0.1859	0.1854	0.1858
積分路 II	0.1858	0.1917	0.1918	0.1847	0.1885
積分路 III	0.1858	0.1894	0.1885	0.1860	0.1874

$J_{mean} = 0.1872$

K _I : kgf・mm ^{-3/2}					
	A	B	C	D	平均
積分路 I	38.84	38.68	38.76	38.70	38.75
積分路 II	38.75	39.36	39.37	38.63	39.03
積分路 III	38.75	39.12	39.03	38.77	38.91

$K_{I,mean} = 38.90$

表4 全ひずみ理論およびひずみ増分理論と J 値の積分径路独立性

単位: kgf/mm

	σ/σ _Y	0.286	0.323	0.412	0.526	0.699
全ひずみ理論	J _I	0.1858	0.2372	0.3907	0.6633	1.450
	J _{II}	0.1885	0.2406	0.3966	0.6760	1.491
	J _{III}	0.1874	0.2393	0.3945	0.6728	1.481
	J _{mean}	0.1872	0.2390	0.3939	0.6707	1.474
ひずみ増分理論	σ/σ _Y	0.286	0.323	0.412	0.523	0.683
	J _I	0.1858	0.2372	0.3909	0.6539	1.335
	J _{II}	0.1885	0.2406	0.3969	0.6663	1.376
	J _{III}	0.1874	0.2393	0.3947	0.6632	1.367
J _{mean}	0.1872	0.2390	0.3942	0.6611	1.359	

表5 全ひずみ理論およびひずみ増分理論
における ϕ の値の比較 (要素5)

単位: mm^2/kgf

		σ/σ_Y	0.323	0.412	0.526	0.699
全 ひ ず み 理 論	ϕ_x		8.208×10^{-6}	87.87×10^{-6}	233.6×10^{-6}	657.5×10^{-6}
	ϕ_y		8.265×10^{-6}	88.42×10^{-6}	235.2×10^{-6}	660.9×10^{-6}
	ϕ_{xy}		8.293×10^{-6}	88.71×10^{-6}	232.2×10^{-6}	654.3×10^{-6}
	$\bar{\phi}$		8.246×10^{-6}	88.38×10^{-6}	234.1×10^{-6}	657.9×10^{-6}
	ϕ_I		8.250×10^{-6}	88.44×10^{-6}	234.4×10^{-6}	658.8×10^{-6}
		σ/σ_Y	0.323	0.412	0.523	0.683
ひ ず み 増 分 理 論	ϕ_x		8.218×10^{-6}	86.69×10^{-6}	222.3×10^{-6}	582.7×10^{-6}
	ϕ_y		8.267×10^{-6}	88.15×10^{-6}	237.2×10^{-6}	635.0×10^{-6}
	ϕ_{xy}		8.314×10^{-6}	88.28×10^{-6}	204.6×10^{-6}	529.0×10^{-6}
	$\bar{\phi}$		8.243×10^{-6}	87.87×10^{-6}	225.7×10^{-6}	588.5×10^{-6}
	ϕ_I		8.243×10^{-6}	87.94×10^{-6}	226.0×10^{-6}	589.4×10^{-6}

る差異は小さく、全ひずみ理論におけると同様に、ひずみ増分理論解でも、 J の積分径路独立性が保たれていることがわかる。

全ひずみ理論においては、前報 (I) の式 (1) により

$$\epsilon_{ij}^p = \epsilon_{ij}^f = \phi \sigma_{ij} \quad (25)$$

が成立し、ここでの平面ひずみ問題においては、次のように計算されるパラメータ値

$$\phi_x \equiv \epsilon_x^p / \sigma_x', \quad \phi_y \equiv \epsilon_y^p / \sigma_y', \quad \phi_{xy} \equiv \gamma_{xy}^p / (2\tau_{xy}) \quad (26)$$

がすべて式 (2) によって定義される ϕ に一致するはずである。一方、ひずみ増分理論においては、このような関係は成立しない。そこで、き裂先端の要素5 (図6を参照) 内における Gauss 積分点について、式 (26) で定義される $\phi_x, \phi_y, \phi_{xy}$ 、前報 (I) 式 (2) で定義される $\bar{\phi}$ (とおく)、および式 (11) の $\dot{\phi}$ の積分として定義される ϕ_I (とおく) の評価を行った。表5にその結果を示すが、これによると、全ひずみ理論においてはほぼ一致し、理論的な予測に一致している。これに対し、ひずみ増分理論から得られる表5のパラメータ値には、応力の増加とともに次第に差が現われてくる。しかし、計算の範囲内では、相互の間にも、また全ひずみ理論における値との差も小さい。

6. む す び

以上、(I) と (II) にわたった本報告において、全ひずみ理論の構成方程式の増分形を求める定式化を示し、

その結果を薄肉円管および二次元の弾塑性き裂問題に適用して、理論の検証と同時に、全ひずみ理論とひずみ増分理論の解の比較を行った。取り扱った例題の範囲では、指定されたひずみや応力径路に大きな曲がりがない限り、全ひずみ理論とひずみ増分理論によって得られる解のき裂の問題における J 積分の径路独立性が、いずれの理論を用いる場合にも成立しているものと結論できよう。さらに詳細な解析、あるいは広く一般の弾塑性問題に適用した場合の二つの理論の比較など、今後の課題として研究してゆく予定であるが、本報告で行った全ひずみ理論の増分形式化により、いままでひずみ増分理論を基礎として開発されてきたのと同じプログラムで計算の実行が可能となったことは大きな利点といわなければならない。(1980年2月26日受理)

参 考 文 献

- 5) Rice, J. R., 'A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks,' J. Appl. Mech., vol. 35, 1968, pp. 379-386
- 6) 山田, 黄, 西口, '全ひずみ理論構成方程式の増分形式化とその有限要素解析への応用 (I),' 生産研究, 1980, 3月号
- 7) 速報の (I) の文献2) のほか, Rice, J. R., 'Plain strain deformation near a crack tip in power-law hardening material,' J. Mech. Phys. solids, vol. 16, 1968, pp. 1-12
- 8) Tada, H., Paris, P., and Irwin, G., The stress analysis of cracks handbook, Del. Research Corporation, Heller town, Pa. USA, 1973