

# 接合要素とその有限要素解析における応用

Joint Elements and their Application to the Finite Element Analysis

山田 嘉昭\*・江澤 良孝\*\*

Yoshiaki YAMADA and Yoshitaka EZAWA

連続体の力学では、変位や応力に不連続の存在する問題に出会うことがしばしばある。二物体間の接触部や境界面、あるいは接着層などはそのよい例である。有限要素解析において、このような問題をどのように取り扱うかは永年の課題であった。ここでは、不連続面に接合要素を挿入する方法を用い、パラメータ平面から物理平面への幾何学的な写像により、有限要素法の標準解析ルーチンに接合要素を簡単に組み込むことができることを示す。従来の四角形要素のほかに新しく三角形の接合要素についても研究した。とくに、相対する二物体表面上の節点座標値に差のある場合や、接触面上でのすべりの大きい問題では、三角形の要素がきわめて有用である。

## 1. ま え が き

一般の構造物の解析において、不連続面の取り扱いが重要となる場合がしばしば起こる。不連続面を有限要素法で解析する手法としては、これまでに大きく分けて2通りの手法が考えられている。そのひとつは、不連続面における節点間の変位の適合条件および力のつりあい条件を、剛性方程式の中に組み込む方法<sup>1-3)</sup>、もうひとつは、不連続面に“特殊な要素”を挿入する方法<sup>4-8)</sup>である。このふたつを比較すると、取り扱いの容易さ、汎用性といった点で、“特殊な要素”を使う方法が一般に勝っていると考えられる。このような“特殊な要素”の代表的なものが、接合要素と呼ばれるものである。接合要素を最初に提案したのは、Goodman ほか<sup>4)</sup>であるが、後に、Schäfer<sup>5)</sup> および Sharma ほか<sup>6)</sup>は、これをより高次の要素に拡張した。また、Zienkiewicz ほか<sup>7)</sup> および丸井<sup>8)</sup>などによって、アイソパラメトリック要素を用いた接合要素が提案されている。従来の要素は、筆者らの知る限りでは、どれも相接する部材の不連続面上の対向する節点が互いに一致する座標位置にあるとしている。この制限は、実用上かなり問題だといえるであろう。なぜならば、仮に相接する二物体間の節点が、変形前に不連続面上で同一の座標位置にあったとしても、特別な対称性を有する問題でない限り、変形とともにかなりずれることになるからである。したがって、このような制限のない接合要素が必要になる。

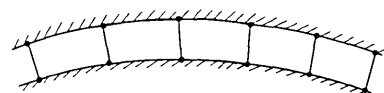
本研究は、上記のような制限を受けない接合要素の一般の定式化を示し、その有限要素解析への応用手法について研究したものである。なかでも、新しい試みとして用いた三角形接合要素は、シンプルでありながら応用範囲が広く、本論文の数値例題でもそのことが実証された。

## 2. 接合要素の定式化

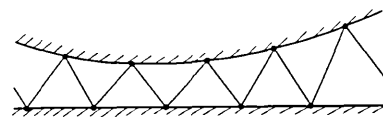
部材の不連続部分に挿入する接合要素としては、図1に示すように、2通りのものが考えられる。このうち、初めに四角形接合要素の定式化について考える。図2に示す写像を考え、 $\xi, \eta$ を四角形の親要素に対する正規化パラメータ座標、 $h$ を実要素の厚さ( $h \ll l$ )、 $l$ を要素の不連続面に沿う長さとする。変位の増分は、全体座標系  $x, y$  で考えるときは、 $x, y$  方向にそれぞれ  $\dot{u}_x, \dot{u}_y$ 、不連続面に平行および垂直方向にとった局所直交座標系  $x', y'$  で考えるときは、 $x', y'$  方向にそれぞれ  $\dot{u}_l, \dot{u}_n$  とする。以下、簡単のため  $\dot{u}_x, \dot{u}_y$  を  $\dot{u}_c$  で、 $\dot{u}_l, \dot{u}_n$  を  $\dot{u}_L$  で代表させて表すことができる。

さて、局所座標  $x', y'$  における変位増分  $\dot{u}_L$  について、次の関係が成立することを容易に示すことができる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_L / \partial \xi \\ \partial \dot{u}_L / \partial \eta \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \partial x' / \partial \xi & \partial y' / \partial \xi \\ \partial x' / \partial \eta & \partial y' / \partial \eta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_L / \partial x' \\ \partial \dot{u}_L / \partial y' \end{Bmatrix} \\ &\equiv [J'] \begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_L / \partial x' \\ \partial \dot{u}_L / \partial y' \end{Bmatrix} \quad (1) \end{aligned}$$



(a) 四角形接合要素

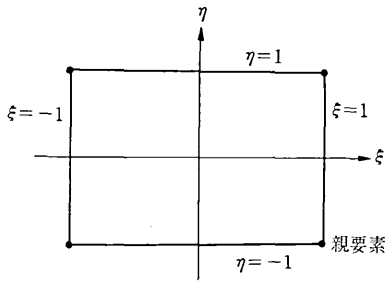


(b) 三角形接合要素

図1 接合要素

\* 東京大学生産技術研究所 第1部

\*\* 株式会社 日立製作所



↓ 写像

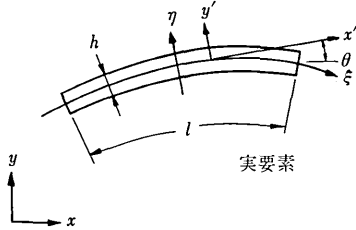


図2 四角形接合要素

ただし,  $[J']$  は Jacobi のマトリックスと呼ばれるものである. ここで, 要素の幾何学的形状の写像則が全体座標系で

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta) \quad (2)$$

のように表されているとき,  $y'$  方向と  $\xi$  方向が直交していることから,  $[J']$  マトリックスを次のように計算することができる.

$$[J'] = \begin{bmatrix} l_2/2 & 0 \\ l_3/2 & h/2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ただし,  $l_2, l_3$  は,  $h \rightarrow 0$  として考えると

$$\left. \begin{aligned} l_2 &= 2\sqrt{(\partial x/\partial \xi)^2 + (\partial y/\partial \xi)^2} \\ l_3 &= 2\sqrt{(\partial x/\partial \eta)^2 + (\partial y/\partial \eta)^2} \\ & \quad (\partial x'/\partial \eta \geq 0 \text{ のとき}) \\ &= -2\sqrt{(\partial x/\partial \eta)^2 + (\partial y/\partial \eta)^2} \\ & \quad (\partial x'/\partial \eta < 0 \text{ のとき}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

なお,  $\partial x'/\partial \xi =$ 一定となるような写像を行ったときは  $l_2 = l$  (5)

すなわち, 上のように計算される  $l_2$  は要素の長さ  $l$  に等しくなるが, 一般的には, 必ずしも式 (5) が成立するとは限らない.  $l_3$  については, 相接する部材間の不連続面上において対向する節点が互いに一致する座標位置にあるときは

$$l_3 = 0 \quad (6)$$

となる. なお, 変形前に上の式が成立するような要素であっても, 接合面上に相対すべりが生じると, 変形後は

$l_3 \neq 0$  となることに注意しなければならない.

式 (1) の逆変換は, 式 (3) を考慮すると次式のようにになる.

$$\begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_L / \partial x' \\ \partial \dot{u}_L / \partial y' \end{Bmatrix} = \frac{2}{hl_2} \begin{bmatrix} h & 0 \\ -l_3 & l_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_L / \partial \xi \\ \partial \dot{u}_L / \partial \eta \end{Bmatrix} \quad (7)$$

一方,  $x'$  軸と  $x$  軸のなす角を  $\theta$  とすると, 局所座標系と全体座標系での変位増分の間に, 次の関係が成立する.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_L \\ \partial \dot{u}_n \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_t / \partial \xi \\ \partial \dot{u}_n / \partial \xi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_x / \partial \xi \\ \partial \dot{u}_y / \partial \xi \end{Bmatrix} \\ &= [T] \begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_c \\ \partial \dot{u}_n \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_L \\ \partial \dot{u}_n \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_t / \partial \eta \\ \partial \dot{u}_n / \partial \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_x / \partial \eta \\ \partial \dot{u}_y / \partial \eta \end{Bmatrix} \\ &= [T] \begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_c \\ \partial \dot{u}_n \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

ただし,  $\cos \theta$  と  $\sin \theta$  は, 幾何学的形状が式 (2) の写像式で与えられていることから, 次式によって計算することができる.

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\partial x / \partial \xi}{\sqrt{(\partial x / \partial \xi)^2 + (\partial y / \partial \xi)^2}} \\ \sin \theta &= \frac{\partial y / \partial \xi}{\sqrt{(\partial x / \partial \xi)^2 + (\partial y / \partial \xi)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで, 変位関数  $N_i (i = 1, 2, \dots, m; m$  は節点数) を導入して, 全体座標系での変位速度  $\dot{u}_c$  が, 次のように節点速度  $\dot{u}_{ci}$  によって表されるものとする.

$$\dot{u}_c = \sum_i N_i(\xi, \eta) \dot{u}_{ci} \quad (11)$$

上の式から

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_c / \partial \xi \\ \partial \dot{u}_c / \partial \eta \end{Bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} \partial N_1 / \partial \xi & \partial N_2 / \partial \xi & \dots & \partial N_m / \partial \xi \\ \partial N_1 / \partial \eta & \partial N_2 / \partial \eta & \dots & \partial N_m / \partial \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{c1} \\ \dot{u}_{c2} \\ \vdots \\ \dot{u}_{cm} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

ここでは, 接合要素における  $y'$  方向での速度こう配についてのみに注目することになると, 式 (7)~式 (9), および式 (12) から

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_t / \partial y' \\ \partial \dot{u}_n / \partial y' \end{Bmatrix} \\ &= \frac{2}{hl_2} \begin{bmatrix} -l_3 \cos \theta & -l_3 \sin \theta & l_2 \cos \theta & l_2 \sin \theta \\ l_3 \sin \theta & -l_3 \cos \theta & -l_2 \sin \theta & l_2 \cos \theta \end{bmatrix} \times \\ & \begin{bmatrix} \partial N_1 / \partial \xi & 0 & \cdots & \partial N_m / \partial \xi & 0 \\ 0 & \partial N_1 / \partial \xi & \cdots & 0 & \partial N_m / \partial \xi \\ \partial N_1 / \partial \eta & 0 & \cdots & \partial N_m / \partial \eta & 0 \\ 0 & \partial N_1 / \partial \eta & \cdots & 0 & \partial N_m / \partial \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{x1} \\ \dot{u}_{y1} \\ \vdots \\ \dot{u}_{xm} \\ \dot{u}_{ym} \end{Bmatrix} \\ & \equiv [B'] \{ \dot{u}_G \} \quad (13) \end{aligned}$$

上式で  $y'$  方向に関するこう配だけを考えたことに対応して、要素の力学的特性を表す構成方程式は次のように表されるものとする。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{nt} \\ \dot{\sigma}_{nn} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} G_s & 0 \\ 0 & G_E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_t / \partial y' \\ \partial \dot{u}_n / \partial y' \end{Bmatrix} \\ &= [D] \begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_t / \partial y' \\ \partial \dot{u}_n / \partial y' \end{Bmatrix} \quad (14) \end{aligned}$$

式 (13) および式 (14) を用いて、四角形接合要素の要素剛性マトリックスが全体座標系で次のように求められる。

$$\begin{aligned} [K] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B']^T [D] [B'] |J'| t d\xi d\eta, \\ |J'| &= \frac{1}{4} hl_2 \quad (15) \end{aligned}$$

ここに、 $t$  は要素の板厚を表す。

三角形接合要素の場合は、パラメータ座標  $\xi, \eta$  の代わりに面積座標による表示を用いるのが便利である。このとき、三角形の親要素に対する面積座標を  $L_1, L_2, L_3$  として、写像は図3に示されるようになるが、 $L_1, L_2, L_3$  は独立でなく

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (16)$$

の関係で結ばれることに注意しなければならない。ここでは、 $L_2$  と  $L_3$  を独立と考え、 $L_2$  と  $L_3$  のみで表した関数  $f(L_2, L_3)$  の  $L_2$  に関する偏微分が、 $L_1, L_2, L_3$  の3つの変数で表したものと関数  $f(L_1, L_2, L_3)$  についての偏微分と次の関係があることを用いて計算を行う。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L_2} f(L_2, L_3) &= \left( \frac{\partial L_1}{\partial L_2} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial L_2} \frac{\partial}{\partial L_2} \right. \\ & \left. + \frac{\partial L_3}{\partial L_2} \frac{\partial}{\partial L_3} \right) f(L_1, L_2, L_3) \end{aligned}$$

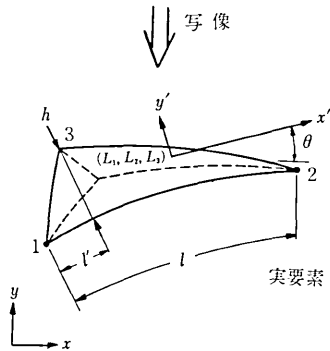
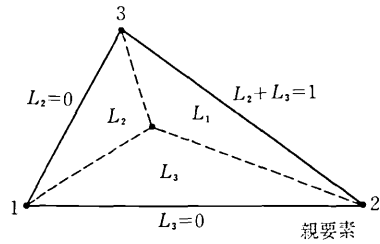


図3 三角形接合要素

$$= \left( \frac{\partial}{\partial L_2} - \frac{\partial}{\partial L_1} \right) f(L_1, L_2, L_3) \quad (17)$$

同様にして

$$\frac{\partial}{\partial L_3} f(L_2, L_3) = \left( \frac{\partial}{\partial L_3} - \frac{\partial}{\partial L_1} \right) f(L_1, L_2, L_3) \quad (18)$$

このように、三角形要素について  $L_2, L_3$  を独立と考慮て得られる偏微分と、パラメータ座標  $\xi, \eta$  に関する偏微分とは、次の対応関係にあることが容易にわかる。

$$\begin{Bmatrix} \partial / \partial \xi \\ \partial / \partial \eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \partial / \partial L_2 - \partial / \partial L_1 \\ \partial / \partial L_3 - \partial / \partial L_1 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

したがって、三角形接合要素の  $[B']$  マトリックスの誘導には、四角形接合要素の  $\xi, \eta$  に関する微分を、式(19)の関係を用いて  $L_2, L_3$  に関する微分でおきかえるようにすればよい。これにより、式(4)で定義される  $l_2, l_3$  の計算式は、三角形要素の幾何学的形状が面積座標で

$$x = x(L_1, L_2, L_3), \quad y = y(L_1, L_2, L_3) \quad (20)$$

のように与えられていて、 $h \rightarrow 0$  として考えると

$$\begin{aligned} l_2 &= \sqrt{(\partial x / \partial L_2 - \partial x / \partial L_1)^2 + (\partial y / \partial L_2 - \partial y / \partial L_1)^2} \\ l_3 &= \sqrt{(\partial x / \partial L_3 - \partial x / \partial L_1)^2 + (\partial y / \partial L_3 - \partial y / \partial L_1)^2} \\ & \quad (\partial x' / \partial L_3 - \partial x' / \partial L_1 \geq 0 \text{ のとき}) \\ &= -\sqrt{(\partial x / \partial L_3 - \partial x / \partial L_1)^2 + (\partial y / \partial L_3 - \partial y / \partial L_1)^2} \\ & \quad (\partial x' / \partial L_3 - \partial x' / \partial L_1 < 0 \text{ のとき}) \end{aligned} \quad (21)$$

$\partial x' / \partial L_2 - \partial x' / \partial L_1 =$ 一定となるような写像を行ったときは、式(21)で定義される  $l_2$  は、三角形要素底辺の長さ  $l$  に等しく

$$l_2 = l \tag{22}$$

となるが、一般的には、式(22)が成立するとは限らないことに注意を要する。 $l_3$ については、 $\partial x'/\partial L_3 - \partial x'/\partial L_1 = \text{一定}$ となるような写像のときは

$$l_3 = l' \tag{23}$$

となる。図3に示すように、 $l'$ は接合要素の頂点から下した垂線の足と一方の頂点との不連続面に沿う距離を表し、 $l'$ の符号は $\partial x'/\partial L_3 - \partial x'/\partial L_1$ の符号に一致させるものとする。ただし、一般には、必ずしも式(23)が成立するとは限らないことを注記しておきたい。

式(19)を用いると、四角形接合要素に対して $[B']$ マトリックスを表す式(13)から、対応する三角形接合要素における表示式が次のように与えられることが容易にわかる。

$$\begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_1 / \partial y' \\ \partial \dot{u}_n / \partial y' \end{Bmatrix} = \frac{1}{hl_2} \begin{bmatrix} -l_3 \cos \theta & -l_3 \sin \theta & l_2 \cos \theta & l_2 \sin \theta \\ l_3 \sin \theta & -l_3 \cos \theta & -l_2 \sin \theta & l_2 \cos \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial L_2} - \frac{\partial}{\partial L_1}\right)N_1 & 0 & \dots \\ 0 & \left(\frac{\partial}{\partial L_2} - \frac{\partial}{\partial L_1}\right)N_1 & \dots \\ \left(\frac{\partial}{\partial L_3} - \frac{\partial}{\partial L_1}\right)N_1 & 0 & \dots \\ 0 & \left(\frac{\partial}{\partial L_3} - \frac{\partial}{\partial L_1}\right)N_1 & \dots \\ \left(\frac{\partial}{\partial L_2} - \frac{\partial}{\partial L_1}\right)N_m & 0 & \dots \\ 0 & \left(\frac{\partial}{\partial L_2} - \frac{\partial}{\partial L_1}\right)N_m & \dots \\ \left(\frac{\partial}{\partial L_3} - \frac{\partial}{\partial L_1}\right)N_m & 0 & \dots \\ 0 & \left(\frac{\partial}{\partial L_3} - \frac{\partial}{\partial L_1}\right)N_m & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{x1} \\ \dot{u}_{y1} \\ \vdots \\ \dot{u}_{xm} \\ \dot{u}_{ym} \end{Bmatrix} \equiv [B'] \{ \dot{u}_c \} \tag{24}$$

こうして、三角形接合要素の要素剛性マトリックスが、全体座標系で次のように求められる。

$$[K] = \int_0^1 \int_0^{1-L_3} [B']^T [D] [B'] h l_2 t dL_2 dL_3 \tag{25}$$

上で導いた三角形要素を用いる定式化によれば、相接する物体間の不連続面上において対向する節点が互いに一致する座標位置にある必要はない。また、定式化の過程

で厚さ $h$ を直接にデータとして入力するようにして、対向する要素節点の座標値の差を陽に含んだ入力形式をとっていないので、接合要素形状において実際の厚さ $h$ を零とみなし、たとえば、四角形接合要素の対向する節点に対して同一の座標値を入力しても全く不都合を生じない。この点も大きな長所といえよう。さらに、要素の幾何学的形状の写像則を適当に定めることにより、曲線状、たとえば円弧状の接合要素といったものも簡単に作り出すことができる。

### 3. 有限要素解析への応用

本報告の基礎となる研究<sup>9)</sup>においては、前記の定式化によって得られた3節点の三角形接合要素を用い、その有用性を解析例によって検証した。以下にその解析例の中から代表的なものを示すことにする。

図4に示す問題は、平板中にあけられた円孔に円板がすきまなしにはまった構造要素に引張応力 $\sigma_0$ を加えたときの挙動を解析するものである。無限平板の場合の厳密弾性解は、Stippesほか<sup>10)</sup>によって与えられている。ここでは平面応力場を仮定し、有孔平板と円板を同一材料からなるものとして、弾性材料定数を次のように定めた。

$$\text{ヤング率 } E = 2.1 \times 10^4 \text{ kgf/mm}^2$$

$$\text{ポアソン比 } \nu = 0.3$$

また、はめあい面での摩擦力は零とし、この条件に適合した3節点の三角形接合要素を挿入した。ただし、接合要素の形状については、辺が直線状の場合と円弧状の場合の2通りを考え、比較を行うこととした。

はめあい面上における半径方向応力分布の計算結果を図5に示す。直辺の接合要素および円弧状の接合要素を使用した場合を比較すると、後者の方が滑らかな分布の良好な結果を与えている。したがって、接合要素を用いる場合には、はめあいや接触の不連続面の実際の形状にできるだけ近い幾何学的形状を与えるような写像による

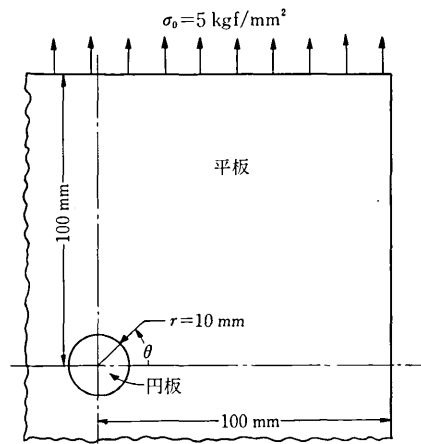


図4 円孔に円板がすきまなしにはまった平板の引張り

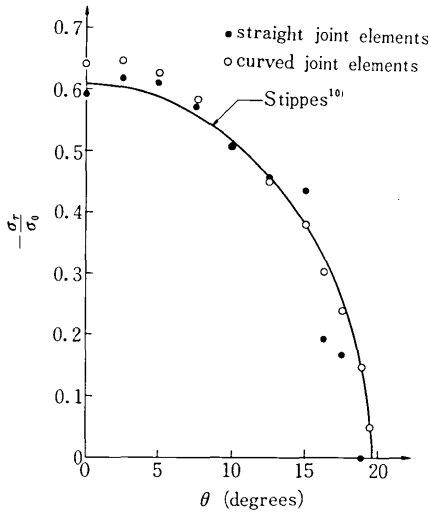


図5 不連続面半径方向応力

べきことが分かる。なお、図5の解において円弧形状の接合要素の解の場合、 $\theta = 0^\circ$ 近傍の半径方向応力  $\sigma_r$  の絶対値が Stippes はかの解に比較して大きめになっているが、これは解析解が有孔無限平板について求められているのに対し、数値解では有孔有限平板を取り扱っていることの差によるものと思われる。

次に示す例題は、図6のような平板と円柱の弾性接触の問題である。この場合は、上の例題とは逆に、荷重  $W$  とともに二物体間の接触が増大していく。弾性材料定数として、円柱のヤング率  $E_1$  は平板のヤング率  $E_2$  の3倍とし、次のような値を選んでいる。

$$E_1 = 2.1 \times 10^6, E_2 = 0.7 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

ただし、ポアソン比  $\nu_1, \nu_2$  は同一値

$$\nu_1 = \nu_2 = 0.3$$

を有するものとした。次に摩擦条件については、クーロン摩擦を仮定し、摩擦係数  $\mu$  が 0, 0.2 の場合、および接触面での摩擦力に限界を設けない場合 ( $\mu = \infty$  とする場合に相当する) の3通りとし、得られた解の比較を行った。なお、ここでは平面ひずみ場を仮定した。解析方法の詳細は次の通りである。

最初に、平板と円柱の間に、与えられた荷重  $W$  のもとで接触が予想される領域よりも広い範囲に3節点三角形接合要素(辺は直線)を挿入する。こうして、荷重をかける前の初期状態において接触状態にある要素(図6において、平板と円柱が接触する対称軸上の点Aに節点を有し、かつ点Aが一番近い要素であり、問題の対称性から形状の半分についてのみ計算するときは、その要素の数は1個となる)にあらかじめ正值の垂直剛性  $G_E$  を与えておく。また、せん断剛性  $G_S$  は、 $\mu = 0$  のときは零、そうでないときは適当な正值とする。一方において、初期状態において分離状態にある接合要素の剛性は、すべて零とする。

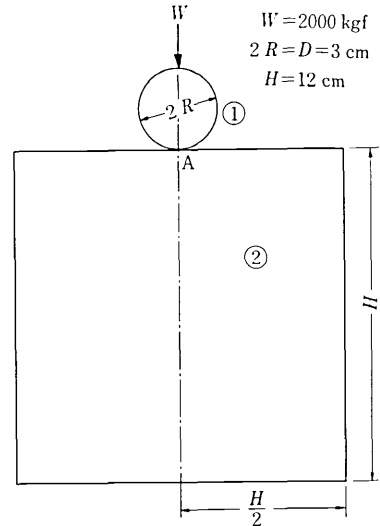


図6 平板と円柱の弾性接触

本例題の解析では、変形後における接合要素の接触の状態の判定に、接合要素の垂直ひずみ(接触面に垂直な方向のひずみ)を用い、それが正值であれば非接触、零または負ならば接触とみなす方法を用いている。このため、変形前において分離状態にある接合要素には、あらかじめその高さ  $\bar{h}$  に比例した正值の垂直ひずみ(仮想厚みを  $h$  とすると  $\bar{h}/h$ , なお  $h$  は定数である)を初期値として与え、界面がちょうど接触したときに垂直ひずみが零になるようにしておく。このような準備の後に、増分計算に入り、各増分段階では、すでに接触状態にある要素を除くほかの各接合要素について、接触状態に到るまでの荷重増分を計算し、得られた増分のうちの最小値を定めて、荷重を増大する。その結果、接触状態になった接合要素には正の剛性を与え、次の増分段階に進む。所定の荷重  $W$  に達するまで、このような計算を繰り返すことになる。

本例題のような接触問題においてクーロン摩擦を仮定する場合には、いずれにせよ接触面上でクーロン摩擦の条件が満足されるまでの反復計算が必要となるが、ここでは摩擦係数  $\mu$  を 0.2 と仮定した計算の場合は、所定の荷重  $W$  がすべて加わるまでは、 $\mu = \infty$  とみなして計算し、そのあと  $\mu = 0.2$  の条件を導入して、解を反復修正する方法を用いている。すなわち、 $\mu = \infty$  とした計算の結果から、垂直応力  $\sigma$  ( $\equiv \sigma_{nn}$ ) に対し  $\mu = 0.2$  とした計算される  $\mu\sigma$  と、摩擦せん断応力  $\tau$  ( $\equiv \sigma_{nt}$ ) を比較し

$$|\tau| \geq \mu |\sigma| \quad (26)$$

となった接合要素については、そのせん断剛性を零とし、次の式

$$|\Delta\tau| = |\tau| - \mu |\sigma| \quad (27)$$

によって計算される  $\Delta\tau$  に等価な節点荷重の解放を行う。ただし、このとき  $\Delta\tau$  の符号は  $\tau$  の符号に一致させるも

のとする。また、 $\Delta\tau$ の解放の中間段階で、別の要素の応力が新しく式(26)の状態となるような場合には、中間の時点から、該当する要素のせん断剛性も零とし、その $\Delta\tau$ も含めてクーロン条件が満足されるに到るまで摩擦せん断応力の解放を続ける。計算は、式(26)の状態にあると判定されたすべての接合要素で、式(27)の $\Delta\tau$ が零に収束した段階で終結する。

図7は計算結果を示し、接触面の垂直応力 $\sigma$ および摩擦せん断力 $\tau$ を、Hertzの解( $\mu=0$ )における対称面中央における垂直応力 $p_0$ に対する比の形で与えている。図7の結果によれば、摩擦のあるなしにかかわらず垂直応力 $\sigma$ の分布はほとんど同一で、Hertzの解とよく一致している。円柱のヤング率を平板のその3倍として得た本計算例では、クーロン摩擦を仮定した場合、 $\mu$ の値によって定まるある点の内側の接触面上では $|\tau| < \mu|\sigma|$ となり、その外側でのみ $|\tau| = \mu|\sigma|$ の摩擦状態に達していることがわかった。これに反し、平板と円柱のヤング率を同一とした場合の計算では、得られた摩擦せん断応力が非常に小さく、 $\mu=0.2$ に対しては、接触面においてクーロン摩擦条件 $|\tau| \geq \mu|\sigma|$ に達した要素はなかった。

4. む す び

本報告では、接合要素について四角形と三角形の要素を統一した定式化を示し、その有限要素解析への応用を述べた。この定式化によれば、接合要素の形状や力学的特性についての制約はほとんどなく、したがって接触面上でのすべりが大きい場合や力学的特性が非線形性を有する場合など、適用の範囲は非常に広いといえる。また、接触面上の対応する節点間における変位の適合性や力のつりあい条件を考慮して剛性方程式に修正を加える方法<sup>2-3)</sup>などと比較すると、そのような条件を自動的に満足しており、摩擦条件の取り扱いが全く簡便で容易に標準の有限要素解析プログラムに組み込む

ことのできる特徴がある。本報告の接合要素の誘導は基本的には写像の概念を用いたもので、これを特異要素などを含めた一般的な体系に発展させることができる。その試みについては、別に報告<sup>11)</sup>を用意しているので参考にさせていただければ幸いである。

(1979年3月22日受理)

参 考 文 献

- 1) Chan, S. K. and Tuba, I. S., "A Finite Element Method for Contact Problems of Solid Bodies - Part I. Theory and Validation," Int. J. Mech. Sci., Vol. 13, pp. 615 - 625, 1971.
- 2) 大手, "有限要素法による弾性接触応力の解析," 日本機械学会論文集, 38巻, 313号, pp. 2210 - 2216, 1972.
- 3) 蔦・山地, "接触問題の有限要素解析法に関する研究," 日本機械学会誌, 76巻, 651号, pp. 348 - 358, 1973.
- 4) Goodman, R. E, Taylor, R. L. and Brekke, T. L., "A Model for the Mechanics of Jointed Rock," Proc. ASCE, Vol. 94, No. SM 3, pp. 637 - 659, 1968.
- 5) Schäfer, H., "A Contribution to the Solution of Contact Problems with the Aid of Bond Elements," Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 6, pp. 335 - 354, 1975.
- 6) Sharma, H. D., Nayak, G. C. and Maheshwari, J. B., "Generalization of Sequential Nonlinear Analysis - A Study of Rockfill Dam with Joint Elements," Numerical Methods in Geomechanics, ASCE, pp. 662 - 685, 1976.
- 7) Zienkiewicz, O. C., Best, B., Dullage, C. and Stagg, K. G., "Analysis of Nonlinear Problems in Rock Mechanics with Particular Reference to Jointed Rock Systems," Proc. 2nd Congr. ISRM, Beograd, 8 - 14, 1970.
- 8) 丸井, "有限要素法による弾性接触問題の解析," 日本鋼構造協会第11回大会研究集会, マトリックス解析法研究発表論文集, pp. 253 - 258, 1977.
- 9) 江澤良孝, 接合要素とその有限要素解析への応用に関する研究, 東京大学大学院工学系研究科, 博士課程論文, 1979.
- 10) Stippes, M., Wilson, H. B., Jr. and Krull, F. N., "A Contact Stress Problem for a Smooth Disk in an Infinite Plate," Proceedings of the 4th U.S. National Congress of Applied Mechanics, Vol. 2, pp. 799 - 806, 1962.
- 11) Yamača, Y., Ezawa, Y., Nishiguchi, I. and Okabe, M., "Handy Incorporation of Bond and Singularity Elements in the Finite Element Solution Routine," Paper M9/8 in Transactions of the 5th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Berlin, 1979.

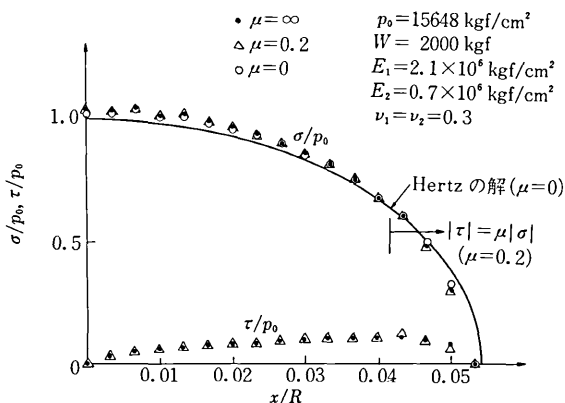


図7 接触面の応力分布