

特異有限要素とその構造解析への応用

Singular Finite Elements and their Application to the Analysis of Stress at the Crack Tip

山田 嘉昭*・江澤 良孝*・西口 磯 春*・岡部 政之**

Yoshiaki YAMADA, Yoshitaka EZAWA, Isoharu NISHIGUCHI and Masayuki OKABE

構造物の強度の正確な評価は、省資源を目的とした研究において、構造解析者のなすべき、またなすことのできる大きな仕事の一つである。この目的達成の手段として、有限要素法は最も有力であるが、本研究では、特異写像を用いる方法を開発して、特異応力場やひずみ場の解析を容易にするとともに、解の精度の向上に成功を収めた。従来数多く提案されている方法に比較して、新しい方法は、普通の有限要素法計算プログラムに容易に組み込むことができ、またいろいろな形の特異性に適応できることを特徴としている。したがって、いわゆる破壊力学における応力拡大係数などの評価も日常の仕事のレベルに持ちたすことができたと考えられる。本報告では、手法の基礎となる理論および適用の実際について詳しく解説した。

1. はじめに

有限要素法を用いて破壊力学問題の解析を行う場合、き裂先端における応力の特異性をどのように取り扱うかが重要な課題となる。そのためにさまざまな方法が開発されてきたが、標準的な有限要素プログラムルチーンからの外れをできるだけ少なくするという意味からは、特異要素を用いる方法が最も実用的であり、検討に値するものと考えられる。

特異要素は Blackburn¹⁾, Henshell と Shaw²⁾, Barsoum^{3,4)}, Akin⁵⁾, および Tracey と Cook⁶⁾などによって、いろいろな形で提案されてきた。しかしながら、それぞれ別の形で表現されていても、共通点が多くあり、またその中のいくつかは全く同一のものである。この報告では、いままでに提案された各種特異要素の間の関係を明らかにし、さらに特異性を通常の有限要素法の計算ルチーンに組み込むために特異変換を用いた新しい方法の提案を行う。筆者らの方法は要約すると、アイソパラメトリック要素において、正規化座標系による変位場の表現には通常の形状関数を用い、一方において正規化座標系から全体座標系への幾何学的な写像式には、応力およびひずみ分布の特異性の表現に適した修正を加えようとするものである。この方法では、標準的な有限要素法プログラムにわずかな変更を加えるだけで簡単に特異性を取り扱うことができ、また可変節点数要素や高次要素に対しても適用が容易である。

本報告では、特異要素によって表されるひずみ場、お

よびそれに関連したひずみエネルギーについても考察を加え；ひずみエネルギーの有限性について Barsoum^{3,4)} や Hibbit⁷⁾ が行った議論に一般的な証明を与えている。

最後に、新しく提案した特異要素法を用いて、円周上にクラックを有する円柱の問題を解き、手法の容易さにも拘らず、応力拡大係数に対しきわめて精度の高い評価が得られることを示す。このことから、三次元き裂問題の解析の実行もまた、比較的簡単なものと予測される。

2. 特異要素

2.1 4節点アイソパラメトリックおよび三角形一定ひずみ要素

アイソパラメトリック要素では、正規化座標系から全体座標系への幾何学的な写像、および変位場の表現に、同一の形状関数を用いる。したがって図1に示す四辺形要素の場合について考えると、節点*i*に関する形状関数を $N_i(\xi, \eta)$ として、幾何学的写像は

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i \quad (1)$$

あるいは、ベクトルのに

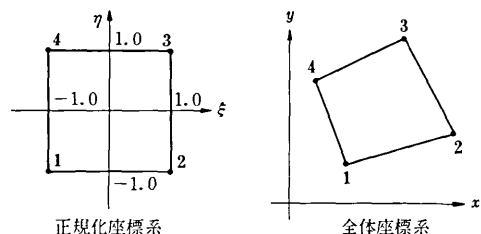


図1 四辺形アイソパラメトリック要素

* 東京大学生産技術研究所 第1部

** 三井金属株式会社

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \mathbf{x}_i \quad (2)$$

ただし $\mathbf{x}^T = [x, y]$, $\mathbf{x}_i^T = [x_i, y_i]$

これに対して、変位場もまた同一の形状関数を用いて

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \mathbf{u}_i \quad (3)$$

ただし、 u と v が x 方向および y 方向の変位を表すものとして、 $\mathbf{u}^T = [u, v]$, $\mathbf{u}_i^T = [u_i, v_i]$

ここで、図2のように節点1と4が同一の座標値を有するように、辺1-4をつぶして点としたものとする。これにより

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_4 \quad (4)$$

また、変位についても次の条件が課せられるものとする。

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_4 \quad (5)$$

式(4)と式(5)を、それぞれ式(2)および式(3)に代入すると

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 N_i^*(\xi, \eta) \mathbf{x}_i \quad (6)$$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 N_i^*(\xi, \eta) \mathbf{u}_i \quad (7)$$

ただし $N_1^* = N_1 + N_4$, $N_2^* = N_2$, $N_3^* = N_3$

ここで比較のため直辺を有する三角形要素を考えると、面積座標を L_1, L_2, L_3 として、座標 x, y は次のように表される。

$$x = \sum_{i=1}^3 L_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^3 L_i y_i \quad (8)$$

あるいは

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 L_i \mathbf{x}_i \quad (9)$$

ただし

$$1 = \sum_{i=1}^3 L_i$$

また、三角形一定ひずみ要素の場合の変位場は

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 L_i \mathbf{u}_i \quad (10)$$

式(6)と式(9)を比較すれば、

$$N_i^*(\xi, \eta) = L_i, \quad i=1, 2, 3 \quad (11)$$

となるためには、次の条件

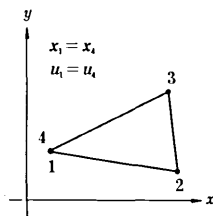


図2 四辺形要素の三角形要素への退化

$$\sum_{i=1}^3 N_i^*(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) = 1 \quad (12)$$

が満足されなければならないことが解る。こうして、式(12)を前提として式(11)が成立すれば、式(7)および式(10)で表される変位場も一致する。よって式(12)は、アイソパラメトリック四辺形要素の一つの辺をつぶして点に退化させるとき、それが三角形一定ひずみ要素に一致するために、元の四辺形要素の形状関数に課せられる必要条件式を表すことになる。

以上の議論は、元の四辺形が一次要素の場合に限らないが、ここで一次要素を仮定すると、その形状関数はよく知られているように⁸⁾

$$\begin{aligned} N_1 &= (1-\xi)(1-\eta)/4, & N_2 &= (1+\xi)(1-\eta)/4 \\ N_3 &= (1+\xi)(1+\eta)/4, & N_4 &= (1-\xi)(1+\eta)/4 \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)が、式(12)を満足することは明らかであり、また実際に式(4)および式(5)の条件のもとで、三角形一定ひずみ要素に一致する表現を与える。こうして、次の関係

$$\begin{aligned} N_1^* &= N_1 + N_4 = (1-\xi)/2 = L_1, \\ N_2^* &= N_2 = (1+\xi)(1-\eta)/4 = L_2, \\ N_3^* &= N_3 = (1+\xi)(1+\eta)/4 = L_3 \end{aligned} \quad (14)$$

が成立する。式(14)と式(6)により、正規化座標系 (ξ, η) から退化した三角形要素の全体系における座標 (x, y) への写像は次のように表される。

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(1-\xi)x_1 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)x_2 \\ &\quad + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)x_3 \end{aligned}$$

あるいは

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_1 = \left[\frac{1-\eta}{2}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \frac{1+\eta}{2}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \right] \frac{1+\xi}{2} \quad (15)$$

ここで、図3に示すように要素内の点をAとし、全体座標系での半径ベクトル \mathbf{r} と \mathbf{r}_0 の関係を次のように定義する。

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{r}_0, \quad \text{ただし } 0 \leq \rho \leq 1 \quad (16)$$

ここで、次の関係

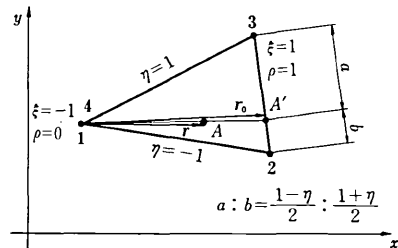


図3 三角形要素内のベクトル \mathbf{r}, \mathbf{r}_0

$$\begin{aligned} r &= x - x_1 \\ r_0 &= \frac{1-\eta}{2}(x_2 - x_1) + \frac{1+\eta}{2}(x_3 - x_1) \end{aligned} \quad (17)$$

が成立することに注意し、これを式(16)に代入して得られる表示を式(15)と比較すれば、正規化された距離 ρ と正規化座標 ξ の関係は

$$\rho = \frac{1+\xi}{2} \quad (18)$$

最後に変位場は、式(14)を式(7)に代入して

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(1-\xi)u_1 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)u_2 \\ &\quad + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)u_3 \end{aligned} \quad (19)$$

または

$$u - u_1 = \left[\frac{1-\eta}{2}(u_2 - u_1) + \frac{1+\eta}{2}(u_3 - u_1) \right] \frac{1+\xi}{2} \quad (20)$$

2.2 特異要素に関する従来の提案

a) 3節点特異要素

一般的にいうと、全体座標系 (x, y) で表した変位関数に $|r|^\lambda$ または ρ^λ (ρ は図3で節点1を特異点として測った無次元半径座標)の項が加われば、特異点近傍の変位場を表現する特異要素が得られる。しかし、変位場を表す形状関数は、正規化座標系 (ξ, η) で表されているのが通例である。三角形一定ひずみ要素についても、前節において示した退化した4節点アイソパラメトリック要素との対応からも明らかのように、式(19)や式(20)のようにパラメトリック表示された変位場を有する要素とみることができる。

このような事情から、特異要素を導くために従来多く用いられた方法では、正規化座標系上の変位関数に β^λ (ただし β は正規化座標系上での特異点からの距離)を導入し、一方において正規化座標系から全体座標系への写像には通常形状関数を用いる方法がとられている。この場合、 β^λ から、通常形状関数により、全体座標系で ρ^λ の特異項が現れることになると考えてよい。

例えば、図1に示した4節点要素に対しては、正規化座標系での変位場を、次式で表示する。

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i^s u_i \quad (21)$$

ただし、特異点近傍での特異性を導入する目的で、変位関数 N_i^s には、式(13)を修正した次の表示を用いる。

$$N_1^s = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1+\xi}{2} \right)^\lambda \right] (1-\eta)$$

$$N_2^s = \frac{1}{2} \left(\frac{1+\xi}{2} \right)^\lambda (1-\eta)$$

$$N_3^s = \frac{1}{2} \left(\frac{1+\xi}{2} \right)^\lambda (1+\eta)$$

$$N_4^s = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1+\xi}{2} \right)^\lambda \right] (1+\eta) \quad (22)$$

式(22)の変位関数は、特異項 $(1+\xi)^\lambda$ を有している。ここで

$$u_1 = u_4 \quad (23)$$

の条件を課するものとすれば、式(21)は

$$\begin{aligned} u &= \left[1 - \left(\frac{1+\xi}{2} \right)^\lambda \right] u_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1+\xi}{2} \right)^\lambda (1-\eta) u_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1+\xi}{2} \right)^\lambda (1+\eta) u_3 \end{aligned} \quad (24)$$

式(24)は Tracey と Cook の論文⁵⁾において式(3)として与えられているものに一致する。ただし Tracey と Cook は正規化座標系として $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \eta \leq 1$ の正方形を用いているので、ここでの $(1+\xi)/2$, $(1+\eta)/2$ をそれぞれ ξ, η に置き換えた対応を考えればよい。

また、式(14)の関係を用いて式(24)の ξ, η を面積座標で表すと

$$\begin{aligned} u &= \left[1 - (L_2 + L_3)^\lambda \right] u_1 + \frac{L_2}{(L_2 + L_3)^{1-\lambda}} u_2 \\ &\quad + \frac{L_3}{(L_2 + L_3)^{1-\lambda}} u_3 \end{aligned} \quad (25)$$

となる。特別な場合として、 $\lambda = 1/2$ とおけば

$$u = u_1 + [L_2(u_2 - u_1) + L_3(u_3 - u_1)] / \sqrt{L_2 + L_3} \quad (26)$$

が得られるが、これは Blackburn が提案している3節点特異要素の変位関数の表現に一致する(文献1の式(7)、ただしここでの面積座標 L_2, L_3 に対しそれぞれ ξ, η の記号が用いられている)。

一方において Akin⁵⁾の方法は、特異要素の変位場を表す形状関数の誘導を、通常形状関数を用いて行おうとするものである。Akinの方法を三角形要素に適用するとき、変位場は、節点1を特異点として

$$u = (1 - W^{1-p})u_1 + \frac{N_2}{W^p}u_2 + \frac{N_3}{W^p}u_3 \quad (27)$$

ただし

$$W = 1 - N_1$$

のように表される。ここで、 N_1, N_2 , および N_3 は通常形状関数であり、一定ひずみ要素の場合は面積座標に等しく、式(27)において

$$N_1 = L_1 = 1 - L_2 - L_3, \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3 \quad (28)$$

$$1 - p = \lambda \quad (29)$$

とすれば、式(27)は式(25)と同じものになる。

上に示したように、Tracey と Cook の三角形特異要素、および Akinの方法で導かれた三角形特異要素において、正規化座標系上での変位関数の表現は一致し、また Blackburn の3節点特異要素もこれに含まれる。これらの要素において、正規化座標系 $((\xi, \eta))$ あるいは

(L_2, L_3) から全体座標系への幾何学的写像式は通常の式 (9) あるいは式 (15) で与えられる。したがって、全体座標系においても、特異点近傍では同じ形の変位場の表現となる。すなわち、式 (18) を式 (24) に代入すれば

$$u = (1 - \rho^2)u_1 + \frac{1}{2}\rho^2(1 - \eta)u_2 + \frac{1}{2}\rho^2(1 + \eta)u_3 \quad (30)$$

以上の要素では、幾何学的写像式と変位場に対して異なった形状関数を用いており、アイソパラメトリックではない。例えば、式 (22) で与えられる N_i^s は式 (12) の条件を満足して、これをアイソパラメトリックに幾何学的な写像式にも用いると、式 (18) の代わりに

$$\rho = \left(\frac{1 + \xi}{2}\right)^2 \quad (31)$$

の写像を行うことになり、一定ひずみの三角形要素が導かれてしまい、特異性を表現することはできない。

b) 高次特異要素

要素の節点数を増せば、特異性に対応する変位関数の項数を増加することができる。例えば Blackburn¹⁾ は、図 4 に示す 6 節点特異要素において、正規化座標系での変位場を面積座標 L_2 と L_3 を用いた次のような形に表している。

$$u = a_1 + a_2L_2 + a_3L_3 + \frac{a_4L_2 + a_5L_3 + a_6L_2L_3}{\sqrt{L_2 + L_3}} \quad (32)$$

ただし

$$a_i^T = [a_i, b_i] \text{ は定数ベクトル}$$

また、Stern と Becker³⁾ は、上の式を修正して、要素内の変位場が次のような表示で与えられる 6 節点特異要素を提案している。

$$u = a_1 + a_2L_2 + a_3L_3 + \frac{a_4L_2 + a_5L_3}{\sqrt{L_2 + L_3}} + \frac{a_6L_2L_3}{\sqrt{(L_2 + L_3)^3}} \quad (33)$$

式 (32) や式 (33) の変位関数は全体座標系においての任意平面を表現することができる。したがって、一定ひずみ条件を満足していることになる。

2.3 特異写像による有限要素

前節で述べた方法は、正規化座標系における変位関数表現に β^2 の項を導入して、応力やひずみの特異分布

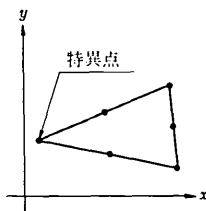


図 4 6 節点特異要素

を表そうとするものである。これに対して、正規化座標系における変位場の表現には通常のものを用い、全体座標系での変位場が特異項 ρ^2 を有するような写像を行う方法を考える。この目的に合った写像は次式によって与えられる。

$$x - x_1 = \left[\frac{1 - \eta}{2}(x_2 - x_1) + \frac{1 + \eta}{2}(x_3 - x_1) \right] \left(\frac{1 + \xi}{2} \right)^2 \quad (34)$$

この場合、全体座標系における無次元半径座標 ρ と、正規化パラメータ座標 ξ の関係は、式 (17) を式 (16) に代入して得られる関係を式 (34) と比較して次のように得られる。

$$\rho = \left(\frac{1 + \xi}{2}\right)^2 \quad (35)$$

したがって正規化座標系における $\beta (= (1 + \xi)/2)$ は、式 (35) より ρ^2 で与えられることが解る。こうして、正規化座標系での変位場が一般に

$$u = a_1 + a_2\beta + a_3\beta^2 + a_4\beta^3 + \dots \quad (36)$$

で表されるとき、全体座標系上での変位場は次のように与えられることになる。

$$u = a_1 + a_2\rho^2 + a_3\rho^4 + a_4\rho^6 + \dots \quad (37)$$

a) 3 節点特異要素

変位場を表す形状関数として通常の一次要素の式 (13) を用いると、式 (4) および式 (5) の条件のもとで、式 (34) の写像により 3 節点特異要素が得られる。

このときの変位場の表現は式 (19) で表されるが、式 (35) の関係を用いれば

$$u = (1 - \rho^2)u_1 + \frac{1}{2}\rho^2(1 - \eta)u_2 + \frac{1}{2}\rho^2(1 + \eta)u_3 \quad (38)$$

となる。式 (15) と式 (34) において、パラメータ η の定義は同じであるから、式 (38) と式 (30) の表す変位場は一致している。

したがって、3 節点特異要素の場合には、本節の方法で得られる特異要素は、前節で異なった方法で求められた要素に一致する。

図 5 は、変位場の表現と写像式の各種の組合せによって得られる 3 節点要素群の特性の比較を示している。

次に、以上のようにして求められた 3 節点特異要素におけるひずみ場、およびひずみエネルギーについて考える。まず、ひずみあるいは変位のこう配は次式のように表される。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (39)$$

式 (39) 中の $\partial u / \partial \xi, \partial u / \partial \eta$ は、本論文で提案する方法にあつては式 (19) を微分することによって得られるが、便宜上 u_1 と u_2 を別個に考えた表示を行えば、

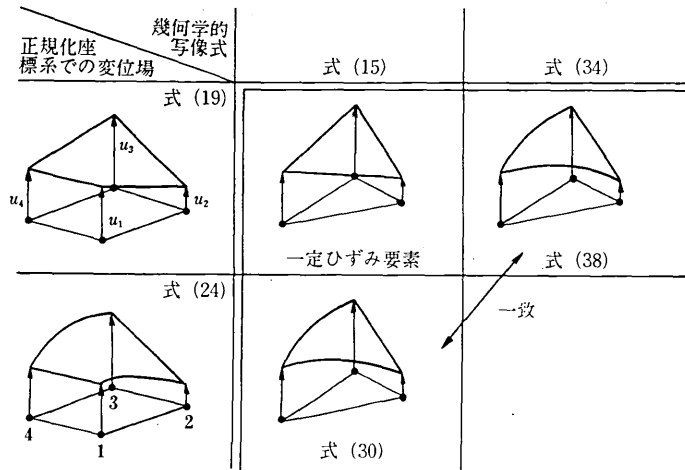


図5 式(4)と式(5)の条件のもとで、正規化座標系での変位場の表示と幾何学的写像式の組み合わせにより得られる3節点要素群の特性の比較

式(13)を考慮することにより次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} &= -\frac{1}{4}(1-\eta)\mathbf{u}_1 + \frac{1}{4}(1-\eta)\mathbf{u}_2 \\ &\quad + \frac{1}{4}(1+\eta)\mathbf{u}_3 - \frac{1}{4}(1+\eta)\mathbf{u}_4 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} &= -\frac{1}{4}(1-\xi)\mathbf{u}_1 - \frac{1}{4}(1+\xi)\mathbf{u}_2 \\ &\quad + \frac{1}{4}(1+\xi)\mathbf{u}_3 + \frac{1}{4}(1-\xi)\mathbf{u}_4 \end{aligned} \quad (40)$$

上の式を整理し、また、式(35)を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} &= \frac{1}{4} \left[(1-\eta)(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + (1+\eta)(\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4) \right] \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \left[(1-\rho^2)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1) + \rho^2(\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2) \right] \end{aligned} \quad (41)$$

一方において、式(34)および式(35)より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} &= \frac{1}{4\lambda} \left[(1-\eta)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + (1+\eta)(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \right] \rho^{1-\lambda} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2) \rho \end{aligned} \quad (42)$$

したがって、ヤコビアン $|J|$ の表示は

$$\begin{aligned} |J| &= \begin{vmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial x / \partial \eta \\ \partial y / \partial \xi & \partial y / \partial \eta \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{8\lambda} \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) + (x_3 - x_1) + \eta(x_3 - x_2) & x_3 - x_2 \\ (y_2 - y_1) + (y_3 - y_1) + \eta(y_3 - y_2) & y_3 - y_2 \end{vmatrix} \rho^{2-\lambda} \\ &= \frac{\Delta}{2\lambda} \rho^{2-\lambda} \end{aligned} \quad (43)$$

ここで Δ は三角形要素の面積を表し

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (44)$$

式(42)および式(43)を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\partial y / \partial \eta}{|J|} = \frac{\lambda}{\Delta} (y_3 - y_2) \rho^{\lambda-1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= -\frac{\partial x / \partial \eta}{|J|} = -\frac{\lambda}{\Delta} (x_3 - x_2) \rho^{\lambda-1} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{\partial y / \partial \xi}{|J|} = -\frac{1}{2\Delta} \left[(1-\eta)(y_2 - y_1) \right. \\ &\quad \left. + (1+\eta)(y_3 - y_1) \right] \rho^{-1} \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{\partial x / \partial \xi}{|J|} = \frac{1}{2\Delta} \left[(1-\eta)(x_2 - x_1) \right. \\ &\quad \left. + (1+\eta)(x_3 - x_1) \right] \rho^{-1} \end{aligned} \quad (45)$$

が得られる。上の式および式(41)を式(39)に代入すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} &= \frac{\lambda(y_3 - y_2)}{4\Delta} \left[(1-\eta)(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + (1+\eta)(\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4) \right] \\ &\quad \times \rho^{\lambda-1} - \frac{1}{4\Delta} \left[(1-\eta)(y_2 - y_1) + (1+\eta)(y_3 - y_1) \right] \\ &\quad \times \left[(\rho^{-\lambda} - 1)(\mathbf{u}_4 - \mathbf{u}_1) + (\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2) \right] \rho^{\lambda-1} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} &= -\frac{\lambda(x_3 - x_2)}{4\Delta} \left[(1-\eta)(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + (1+\eta)(\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4) \right] \\ &\quad \times \rho^{\lambda-1} + \frac{1}{4\Delta} \left[(1-\eta)(x_2 - x_1) + (1+\eta)(x_3 - x_1) \right] \\ &\quad \times \left[(\rho^{-\lambda} - 1)(\mathbf{u}_4 - \mathbf{u}_1) + (\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2) \right] \rho^{\lambda-1} \end{aligned} \quad (46)$$

式(46)に示した変位こう配は ρ^{-1} , $\rho^{\lambda-1}$ を含んでいるが、 $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_4$ の条件を課すると $\rho^{\lambda-1}$ の特異性のみが残ることになる。Barsoum⁴⁾は後に述べる6節点特異要素に対して同様の性質を見出し、弾性-完全塑性材料のクラック問題の解析に用いているが、ここでの3節点要素も同じように用いることができる。一般に等方弾性

体においてクラック先端近傍のひずみは $\rho^{-\frac{1}{2}}$ の特異性を持ち、完全塑性体での特異性は ρ^{-1} となる。したがって $\lambda=1/2$ とし、クラック先端の要素が弾性状態にあるときは拘束条件 $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_4$ を課し、要素の降伏後にはこれを解除すれば所望の特異性を容易に有限要素解析ルーチンに組み込むことができる。

次に、要素内のひずみ場が式 (46) で表されるときのひずみエネルギーについて考える。弾性変形問題では、ひずみエネルギー E は次式により評価することができる。

$$E \sim \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)^2 \text{ or } \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)^2 \right] |J| d\xi d\eta$$

$$= 2\lambda \int_{-1}^1 \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)^2 \text{ or } \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)^2 \right] |J| \rho^{\lambda-1} d\rho d\eta$$
(47)

式 (43) より、 $|J| \rho^{\lambda-1}$ の次数は ρ である。一方、式 (46) に示したひずみ場は、 $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_4$ の条件を課したとき、 $\rho^{\lambda-1}$ の特異項のみを持つことになるから式 (47) の被積分関数の次数は $\rho^{2\lambda-1}$ となる。したがって $\lambda \geq 1/2$ に対して、要素内のひずみエネルギーは有限となる。

次に、完全塑性体において、降伏した要素内の応力場は有限値となり、ひずみエネルギー評価式は次のようになる。

$$E \sim 2\lambda \int_{-1}^1 \int_0^1 \left(\left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right| \text{ or } \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right| \right) |J| \rho^{\lambda-1} d\rho d\eta$$
(48)

式 (46) より、 $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_4$ の条件を解除した場合のひずみ場は ρ^{-1} および $\rho^{\lambda-1}$ の特異項を持ち、 $|J| \sim \rho^{2-\lambda}$ であるから、式 (48) の被積分関数の次数は ρ^0 および ρ^λ となる。したがって正值の λ に対して式 (48) は有限となる。これにより、3 節点三角形特異要素は、要素のひずみエネルギーが有限であることから、応力やひずみに特異性を有する問題の解析に適したものであることが明らかになった。

b) 6 節点特異要素

ここでは、本報告の方法を二次以上のアイソパラメトリック要素に適用して、高次の特異要素を導くこととする。ただし、特異点に対向する辺上における変位場は、写像の後ももとのままであるから、通常の要素との境界上で C_0 連続条件を満足している。

例えば、図 6 に示すセレンディピティ族二次要素では、幾何学的写像および変位場が、よく知られているように次のように与えられる。

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \mathbf{x}_i$$
(49)

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \mathbf{u}_i$$
(50)

ただし

$$N_1 = -(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)/4$$

$$N_2 = -(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)/4$$

$$N_3 = -(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)/4$$

$$N_4 = -(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)/4$$

$$N_5 = (1-\xi^2)(1-\eta)/2 \quad N_6 = (1+\xi)(1-\eta^2)/2$$

$$N_7 = (1-\xi^2)(1+\eta)/2 \quad N_8 = (1-\xi)(1-\eta^2)/2$$
(51)

ここで、式 (49) に

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_8$$
(52)

の条件を課し、さらに式 (34) の特異変換を行えば、図 7 に示した特異要素を得ることができる。この要素は、要素の幾何学的形状を三頂点により規定し、変位を辺上の 3 節点を含む 6 節点で表現している点でサブパラメトリック要素に属している。式 (35) より、 $\xi=0$ の正規化座標を有する節点 5、7 は全体座標系上に特異点から $(1/2)^\lambda$ の割合の位置に写像されることが解る。ただし、節点 6 は、特異点に対向する辺の中点にとどまったままである。

次にこの要素のひずみ場について考え、式 (50) によって与えられる変位を ξ および η で微分すれば

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1-\eta)[(2\xi+\eta)\mathbf{u}_1 + (2\xi-\eta)\mathbf{u}_2]$$

$$+ \frac{1}{4}(1+\eta)[(2\xi+\eta)\mathbf{u}_3 + (2\xi-\eta)\mathbf{u}_4]$$

$$- \xi[(1-\eta)\mathbf{u}_5 + (1+\eta)\mathbf{u}_7] + \frac{1}{2}(1-\eta^2)(\mathbf{u}_6 - \mathbf{u}_8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1-\xi)[(2\eta+\xi)\mathbf{u}_1 + (2\eta-\xi)\mathbf{u}_4]$$

$$+ \frac{1}{4}(1+\xi)[(2\eta+\xi)\mathbf{u}_3 + (2\eta-\xi)\mathbf{u}_2]$$

$$- \eta[(1+\xi)\mathbf{u}_6 + (1-\xi)\mathbf{u}_8] + \frac{1}{2}(1-\xi^2)(\mathbf{u}_7 - \mathbf{u}_5)$$
(53)

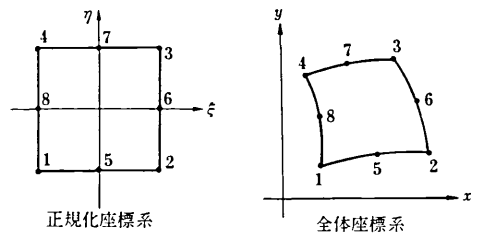


図 6 セレンディピティ族二次要素

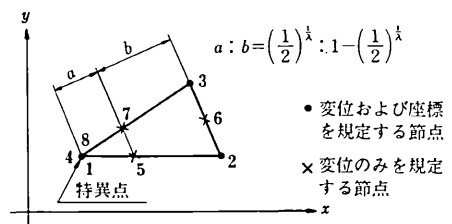


図 7 セレンディピティ族二次要素の特異要素化

これらを整理し、式 (35) の関係を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} = & \frac{1}{4}(1-\eta)[(-2+4\rho^2)(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)+\eta(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)] \\ & + \frac{1}{4}(1+\eta)[(-2+4\rho^2)(\mathbf{u}_3+\mathbf{u}_4)+\eta(\mathbf{u}_3-\mathbf{u}_4)] \\ & + (1-2\rho^2)[\mathbf{u}_5+\mathbf{u}_7+\eta(\mathbf{u}_7-\mathbf{u}_5)] \\ & + \frac{1}{2}(1-\eta^2)(\mathbf{u}_6-\mathbf{u}_8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} = & \frac{1}{2}(1-\rho^2)[(-1+2\rho^2)(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_4)+2\eta(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_4)] \\ & + \frac{1}{2}\rho^2[(-1+2\rho^2)(\mathbf{u}_3-\mathbf{u}_2)+2\eta(\mathbf{u}_3+\mathbf{u}_2)] \\ & - \eta[\mathbf{u}_6+\mathbf{u}_8+(-1+2\rho^2)(\mathbf{u}_6-\mathbf{u}_8)] \\ & + 2\rho^2(1-\rho^2)(\mathbf{u}_7-\mathbf{u}_5) \end{aligned} \quad (54)$$

となる。ここで拘束条件

$$\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_4=\mathbf{u}_8 \quad (55)$$

を課すと、式 (54) から

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} = & \frac{1}{2}(-3+4\rho^2)\mathbf{u}_1 + \frac{1}{4}(1-\eta)(-2+4\rho^2-\eta)\mathbf{u}_2 \\ & + \frac{1}{4}(1+\eta)(-2+4\rho^2+\eta)\mathbf{u}_3 \\ & + (1-2\rho^2)[\mathbf{u}_5+\mathbf{u}_7+\eta(\mathbf{u}_7-\mathbf{u}_5)] + \frac{1}{2}(1-\eta^2)\mathbf{u}_6 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} = & \frac{1}{2}\rho^2[(-1+2\rho^2)(\mathbf{u}_3-\mathbf{u}_2)+2\eta(\mathbf{u}_3+\mathbf{u}_2)] \\ & - 2\eta\rho^2\mathbf{u}_6 + 2\rho^2(1-\rho^2)(\mathbf{u}_7-\mathbf{u}_5) \end{aligned} \quad (56)$$

の表示が得られる。式 (54) あるいは式 (56) を、式 (45) とともに式 (39) に代入すれば、この要素のひずみ場が求められる。

実際に計算すると、式 (55) の拘束条件を課したときには $\partial \mathbf{u}/\partial x$, $\partial \mathbf{u}/\partial y$ の特異項は $\rho^{\lambda-1}$ および $\rho^{2\lambda-1}$ のみであるが、拘束がない場合にはさらに ρ^{-1} の項が加わる。このことから、3 節点特異要素の場合と同様に、この要素も弾性状態では式 (55) の拘束条件を課し、塑性状態ではそれを解除することにより、弾性-完全塑性材料に対する特異あるいはクラック要素として用いることができる。

ここでも、要素内のひずみエネルギーを、弾性状態では式 (47)、降伏状態では式 (48) によって評価するとき、前にも述べたように、これらの式に含まれる $|J|\rho^{\lambda-1}$ の次数は ρ である。よって、弾性範囲での式 (47) の被積分関数の最低次数の項は、式 (55) の拘束により $(\rho^{\lambda-1})^2 \times \rho = \rho^{2\lambda-1}$ となって $\lambda \geq 1/2$ に対して有限である。一方、完全塑性体では拘束の解放により式 (48) に含まれる被積分項の最低次数は $\rho^{-1} \times \rho = \rho^0$ となり、この場合も要素内のエネルギーが有限である。

2.4 いわゆる quarter-point 要素について

Barsoum³¹ は、図 6 に示したセレンディピティ族二次

要素において、一つの辺 (1-8-4) を一点に合併し、さらに合併節点から半径方向に延びる辺上で二つの中間節点を特異点の方向に 1/4 ずらして得られる図 8 のような三角形 quarter-point 要素の提案を行っている。これは、アインパラメトリックルチーンの中で節点をずらす方法により、 $\lambda=1/2$ の特異性を持たせるための写像と同等の効果を得たものと考えられる。式 (49) と式 (51) で表される二次要素の写像式において、辺 (1-4-8) の退化と四分点への節点の移動などに対応して

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_8, \quad \mathbf{x}_5 = \mathbf{x}_1 + \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{4} \\ \mathbf{x}_6 = \frac{\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3}{2}, \quad \mathbf{x}_7 = \mathbf{x}_4 + \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4}{4} \end{aligned} \quad (57)$$

とおけば

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_1 = \left[\frac{1-\eta}{2}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \frac{1+\eta}{2}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \right] \left(\frac{1+\xi}{2} \right)^2 \quad (58)$$

の関係が成立することを容易に証明することができる。これは、式 (34) において $\lambda=1/2$ において得られる関係に一致している。

同様に、四辺形要素について辺上の中間節点をずらすことにより特異性を表現したものに、Henshell と Shaw²¹ の要素がある。これは図 6 のセレンディピティ族二次要素において、例えば節点 1 を特異点とした場合、全体座標系上での辺上の節点 5, 8 を図 9 のように 1/4 だけ特異点の方向にずらして得られるものである。

この要素のひずみエネルギーについて考えてみる。簡単のため図 9 のように要素の辺の方向に一致するように座標軸をとれば

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_8 = 0, \quad \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_5 = 0 \\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_6, \quad \mathbf{y}_3 = \mathbf{y}_4 = \mathbf{y}_7 \\ \mathbf{x}_5 = \mathbf{x}_2/4, \quad \mathbf{y}_8 = \mathbf{y}_4/4 \\ \mathbf{x}_7 = \mathbf{x}_2/2, \quad \mathbf{y}_6 = \mathbf{y}_4/2 \end{aligned} \quad (59)$$

これらを式 (49) に代入すれば、写像の表示式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \left(N_2 + N_3 + \frac{1}{4}N_5 + N_6 + \frac{1}{2}N_7 \right) \mathbf{x}_2 \\ = & \frac{1}{8}(1+\xi)(3+\xi+\eta-\xi\eta)\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y} = & \left(N_3 + N_4 + \frac{1}{2}N_6 + N_7 + \frac{1}{4}N_8 \right) \mathbf{y}_4 \\ = & \frac{1}{8}(1+\eta)(3+\xi+\eta-\xi\eta)\mathbf{y}_4 \end{aligned} \quad (60)$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2+\xi-\xi\eta)\mathbf{x}_2, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} = \frac{1}{8}(1-\xi^2)\mathbf{x}_2 \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi} = \frac{1}{8}(1-\eta^2)\mathbf{y}_4, \quad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(2+\eta-\xi\eta)\mathbf{y}_4 \end{aligned} \quad (61)$$

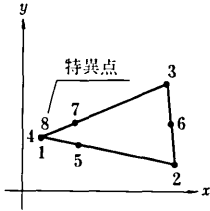


図8 三角形 quarter-point (四分節点) 要素

ヤコビアン $|J|$ は

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{1}{4}(2+\xi-\xi\eta)x_2 & \frac{1}{8}(1-\xi^2)x_2 \\ \frac{1}{8}(1-\eta^2)y_4 & \frac{1}{4}(2+\eta-\xi\eta)y_4 \end{vmatrix} \\ = \frac{1}{64}Ax_2y_4 \quad (62)$$

ただし

$$A = 4(2+\xi-\xi\eta)(2+\eta-\xi\eta) - (1-\xi^2)(1-\eta^2) \quad (63)$$

弾性体の要素内のひずみエネルギーは、式 (47) を再記して次の式によって評価することができる。

$$E \sim \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \text{ or } \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] |J| d\xi d\eta \quad (64)$$

ここで、例えば $\partial u / \partial x$ は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial y / \partial \eta}{|J|} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial y / \partial \xi}{|J|} \quad (65)$$

のように表される。式 (61) を式 (65) に代入し、それから式 (64) の被積分関数 $(\partial u / \partial x)^2 |J|$ の表示を求めると

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 |J| = \left[2(2+\eta-\xi\eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} - (1-\eta^2) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right]^2 \frac{y_4^2}{64|J|} \quad (66)$$

となる。あるいは式 (62) を用いると

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 |J| = \left[2(2+\eta-\xi\eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} - (1-\eta^2) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right]^2 \frac{y_4}{Ax_2} \quad (67)$$

となる。式 (53) に示されているように $\partial u / \partial \xi$ と $\partial u / \partial \eta$ は ξ, η に関する多項式であり、 A の表示は式 (63) により

$$A = 4(2+\xi-\xi\eta)(2+\eta-\xi\eta) - (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

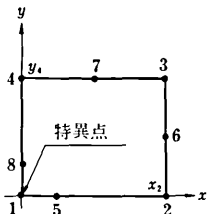


図9 四角形 quarter-point (四分節点) 要素

$$= [2(1+\xi) + 2(1+\eta) - (1+\xi)(1+\eta)] \\ \times [4(1+\xi) + 4(1+\eta) - 3(1+\xi)(1+\eta)]$$

したがって

$$-1 \leq \xi \leq 1, \quad -1 \leq \eta \leq 1$$

に対して

$$0 \leq A \leq 2[(1+\xi) + (1+\eta)] \times 4[(1+\xi) + (1+\eta)] \\ = 8[(1+\xi) + (1+\eta)]^2 \quad (68)$$

が成立する。特異点 ($\xi = \eta = -1$) を除いて逆数をとると

$$0 \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{[(1+\xi) + (1+\eta)]^2} \leq \frac{1}{A} \quad (69)$$

ところで

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow -1 \\ \eta \rightarrow -1}} \int_{-1+\epsilon_\eta}^1 \int_{-1+\epsilon_\xi}^1 \frac{d\xi d\eta}{[(1+\xi) + (1+\eta)]^2} \rightarrow \infty$$

であるから、 $1/A$ の積分値は無有限大となる。したがって、四角形の quarter-point 要素では、式 (67) の積分によって与えられる要素内のひずみエネルギーが無有限大になることがわかる。これは Hibbit⁷⁾ が得ている結論を、ここでの四角形 quarter-point 要素について具体的に確認する結果となっている。Barsoum⁴⁾ は実際の解析例で、この四角形 quarter-point 要素によって得られる解の精度が同様の三角形要素の場合に比較して劣るという結果を得ているが、Hibbit の主張するように、要素内のひずみエネルギーが無有限大になることが、原因としてあげられよう。

この四角形 quarter-point 要素では、辺 1-5-2, 辺 1-8-4 上で変位関数が、特異成分 \sqrt{r} を持つ。しかし要素内部においては複雑な形となっていることも参考として述べておこう。

3. 解析例題および結論

本報告の特異写像を用いるときは、応力あるいはひずみの特異性を考慮したルチーンを普通の有限要素法解析プログラムの中に簡単に組み込むことができる。こうして、最初の例題としては、環状のクラックを有する図 10 の円柱の引張りの問題を取り扱い、有限要素解析の結果から応力拡大係数の評価を行った。この例題は Hinton と Sih¹⁰⁾ により取り上げられているものである。

解析解によれば、図 10 の円柱クラック先端近傍の変位場は高次の項を省略して、次のように与えられる。

$$u_x = \frac{k_1 \sqrt{2r}}{8G} \left[(5-8\nu) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ u_z = \frac{k_1 \sqrt{2r}}{8G} \left[(7-8\nu) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (70)$$

ここで u_x は半径方向内向きの変位、 u_z は軸方向変位、 r および θ は、クラック先端を原点とする極座標を表す。また、 G はせん断弾性係数、 ν はポアソン比であり、 $G = 7000 \text{ kgf/cm}^2 (= 6.86 \times 10^2 \text{ MPa})$ 、 $\nu = 0.20$ とした。

式 (70) に含まれている係数 k_1 は、通常用いられている応力拡大係数 K_I と $k_1 = K_I / \sqrt{\pi}$ の関係にある。

有限要素法によって計算される変位から式 (70) によって k_1 を求め、次のように無次元化した量を計算する。

$$\frac{k_1}{\sigma_{net}\sqrt{D}}, \quad \sigma_{net} = \left(\frac{D}{D-2c}\right)^2 \sigma_0 \quad (71)$$

ただし、 σ_0 は円柱に作用する引張応力、 σ_{net} は最小断面における平均応力を表す。 D および c はそれぞれ、図 10 にみられるように、円柱の直径およびクラックの深さである。

解析に用いた有限要素分割の二つの例を図 11 および図 12 に示す。図 13 は、 $\theta = \pi$ における軸方向変位、すなわちいわゆるクラック開口変位から式 (71) の無次元応力拡大係数を計算した結果を示す。この結果から特異要素を組み込むことにより、精度が向上していることが解る。本報告の方法は、普通の形状関数を変更することなく、そのまま変位場の表示に用いているので可変節点数要素に対しても容易に適用が可能である。具体的には、要素剛性マトリックスの計算ルーチンにおいて、ヤコビアン $|J|$ の計算を式 (43) によって行い、これを特異写像を含まない普通のルーチンにおける $|J|$ におきかえるようにすればよい。また入力データとしては、要素の辺が退化して一点に重なった節点には同じ節点番号を与える操作だけで、所要の剛性マトリックスの組立てが行われる。さらに、同じ特異要素を完全塑性材料に適用する場合には、重なっている節点の一つ一つに別の節点番号を与えれば、変位の拘束条件が自動的に解除される。

以上に要約したように、本報告の特異写像を用いる方法はアイソパラメトリック要素を用いた従来のプログラムに容易に組み込むことができる。なおここで式 (34) の写像における λ は、等方性弾性体における $\lambda = 1/2$ に限らないことを注意しておきたい。たとえば n べき乗則に従う reversible material では、応力は $-n/(1+n)$ 、ひずみは $-1/(1+n)$ の特異性を持つことが知られており^{11), 12)}、これに対する変位場には ρ の $n/(1+n)$ 乗べきが含まれる。したがって

$$\lambda = n/(1+n) \quad (72)$$

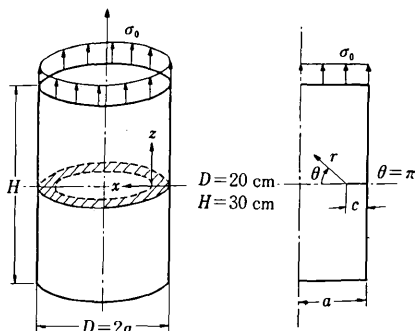
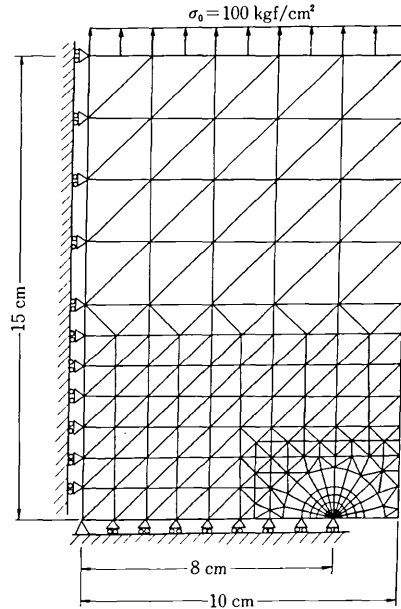


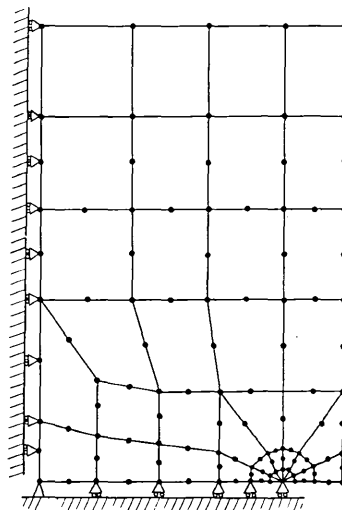
図10 環状のクラックを有する円柱の引張り

とすればよい。弾性異方性材料や複合体では、 λ の値それ自体を固有値問題として決定することも数値解析の課題であり、本報告の特異写像を用いる方法は、特異性のパラメータ λ の決定に対しても適用が簡単なものと考えられる。終わりに、本報告は著者らが発表した英文の論文¹³⁾を基礎とし、記述の再編成を行うとともに、必要な解説および新しい成果を若干付け加えたものであることを述べておきたい。また、本研究が、文部省科学研究費補助金試験研究 (1) によっても一部分実施されたこと



要素数=192 節点数=285

図11 三角形要素を主体とし、クラック先端近傍では四辺形要素と特異写像を組み込んだ有限要素分割



要素数=40 節点数=113

図12 可変節点数要素を用い特異写像を組み込んだ有限要素分割

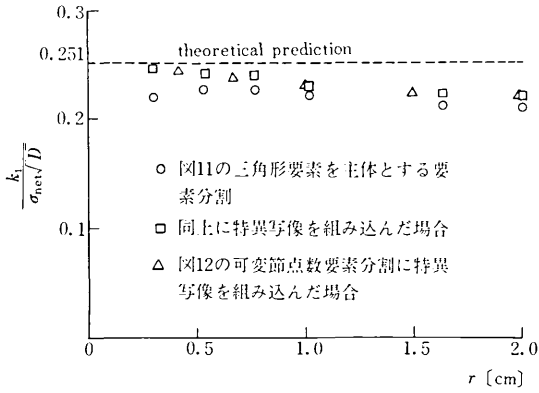


図13 クラック開口変位から計算した無次元応力拡大係数を記して感謝の意を表したい。(1979年1月20日受理)

参 考 文 献

- 1) W.S. Blackburn, 'Calculation of stress intensity factors at crack tips using special finite elements,' *The Mathematics of Finite Elements and Applications* (Ed. J.R. Whiteman), Academic Press, London and New York, 327-336 (1973)
- 2) R. D. Henshell and K. G. Shaw, 'Crack tip finite elements are unnecessary,' *Int. J. num. Meth. Engng*, 9, 495-507 (1975)
- 3) R. S. Barsoum, 'On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics,' *Int. J. num. Meth. Engng*, 10, 25-37 (1976)
- 4) R. S. Barsoum, 'Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements,' *Int. J. num. Meth. Engng*, 11, 85-98 (1977)

- 5) J. E. Akin, 'The generation of elements with singularities,' *Int. J. num. Meth. Engng*, 10, 1249-1259 (1976)
- 6) D. M. Tracey and T. S. Cook, 'Analysis of power type singularities using finite elements,' *Int. J. num. Meth. Engng*, 11, 1225-1233 (1977)
- 7) H. D. Hibbit, 'Some properties of singular isoparametric elements,' *Int. J. num. Meth. Engng*, 11, 180-184 (1977)
- 8) O. C. ツィエンキーヴィッツ, 基礎工学におけるマトリックス有限要素法, 邦訳 培風館 (1975)
- 9) M. Stern and E. B. Becker, 'A conforming crack tip element with quadratic variation in the singular fields,' *Int. J. num. Meth. Engng*, 12, 279-288 (1978)
- 10) P. D. Hinton and G. C. Sih, 'Applications of the finite element method to the calculations of stress intensity factors,' *Mechanics of Fracture 1* (Ed. G. C. Sih), Noordhoff International Pub., Leyden, 426-483 (1973)
- 11) J. W. Hutchinson, 'Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material,' *J. Mech. Phys. Solid*, 16, 13-31 (1968)
- 12) J. R. Rice and G. F. Rosengren, 'Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material,' *J. Mech. Phys. Solids*, 16, 1-12 (1968)
- 13) Y. Yamada, Y. Ezawa, I. Nishiguchi and M. Okabe, 'Reconsiderations on singularity or crack tip elements,' to appear in *Int. J. num. Meth. Engng*.

