

機械構造物の定常応答曲線における近接共振点の処理方法について

A Treatment of Closely-Existing Resonance Points of Machine Structure on the Steady-State Response Curve

高橋 伸晃*

Nobuaki TAKAHASHI

1. はじめに

機械構造物の振動特性を調べるために定常応答試験を行なうと、隣り合う二つの共振点の固有振動数が近接して周波数応答曲線の形状がはっきりした二つのピークを示さないことに時として出合う。このような場合には波形を分析することから機械構造物の振動特性を調べるにしても振動波形自体にうなりが生ずるために、その分析には相当な労力をさかねばならないようである。^{1),2),3),4)} またパワースペクトルについては近接共振点の取扱い方法の基本を述べた報告もなされているが⁵⁾、パワースペクトルを用いることによる限界と固有振動数の見つかり方の問題が残されているようである。本報では既に報告した振動特性を求める方法^{6),7)}をこのような近接共振点の解析に適用するために拡張することを、また数値計算によりモデルの振動特性についても検討する。

2. 振動特性の理論的抽出法

多自由度系の応答曲線の近接ピークは既報⁷⁾に述べたように潜伏した裾野の影響を補正する方法を用いれば2自由度系の共振点が近接する場合の取扱いに帰着するので、2自由度系について考察すれば十分である。

また既報では実際の数値計算値と実験データには加速度を使用してきたが、本報では変位応答曲線についても全く同様な方法で振動特性が抽出できることを示すために図1のような近接ピークを示す変位応答曲線を考える。この応答曲線は表1に真値として示した振動特性を使用し、次式にもとづいて二つの1自由度系の和として作成したわけである。

$$x(t) = D_c \cos(p_i t - \theta'_c) = P'_c \cos p_i t - Q'_c \sin p_i t \quad (1)$$

ただし

$$D_c = \sqrt{P'^c_2 + Q'^c_2} \quad (2)$$

$$\theta'_c = \tan^{-1} \left(\frac{-Q'_c}{P'_c} \right) \quad (3)$$

$$P'_c = \sum_{k=1}^n \frac{d_k \omega_k^2 (\omega_k^2 - p_i^2)}{(\omega_k^2 - p_i^2)^2 + 4\zeta_k^2 \omega_k^2 p_i^2} \quad (4)$$

$$Q'_c = \sum_{k=1}^n \frac{-2d_k \zeta_k \omega_k^3 p_i}{(\omega_k^2 - p_i^2)^2 + 4\zeta_k^2 \omega_k^2 p_i^2} \quad (5)$$

(i = 1, 2, …, m)

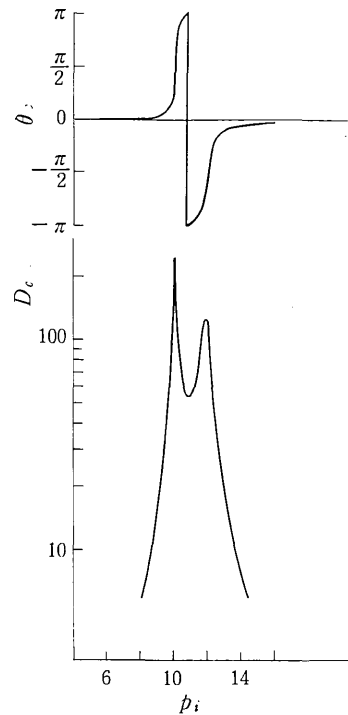


図1 近接共振点を含む変位応答曲線(1)

表1 近接共振点の振動特性(1)

振動特性	真 値	初 期 値	収 束 値
d_1	5.0	4.0	5.000
d_2	-5.0	-4.5	-5.000
ζ_1	0.01	0.007	0.0100
ζ_2	0.02	0.015	0.0200
$\omega_1 = 10.0$		$\omega_2 = 12.0$	

* 東京大学生産技術研究所 第2部

研究速報

ここに,

t : 時間

p_i : 加振円振動数

ω_k : k 次の固有円振動数

d_k : k 次の有効静たわみ

ζ_k : k 次の有効粘性減衰係数比

n : 考察する固有振動数の個数

m : 測定データの個数

振動特性を抽出する方法はおよそ次のようである。円振動数 p_i の時に応答変位の絶対値 D_i , 位相差 θ_i の m 個の計測値が得られた時に式(1)で示した理論上の変位とのベクトルの差の大きさの2乗をすべての測定値の m 個について加えて2乗誤差 E を作りそれを極小にする。

$$E = \sum_{i=1}^m (P'_c - D_i \cos \theta'_i)^2 + \sum_{i=1}^m (Q'_c - D_i \sin \theta'_i)^2 \quad (6)$$

$$F_j = \frac{\partial E}{\partial d_j} = 2 \sum_{i=1}^m (P'_c - D_i \cos \theta'_i) \frac{\omega_j^2 (\omega_j^2 - p_i^2)}{(\omega_j^2 - p_i^2)^2 + 4\zeta_j^2 \omega_j^2 p_i^2} = 0$$

$$- 4 \sum_{i=1}^m (Q'_c - D_i \sin \theta'_i) \frac{\zeta_j \omega_j^3 p_i}{(\omega_j^2 - p_i^2)^2 + 4\zeta_j^2 \omega_j^2 p_i^2} = 0 \quad (7)$$

$$G_j = \frac{\partial E}{\partial \zeta_j} = -16 \sum_{i=1}^m (P'_c - D_i \cos \theta'_i) \frac{d_j \zeta_j \omega_j^4 p_i^2 (\omega_j^2 - p_i^2)}{[(\omega_j^2 - p_i^2)^2 + 4\zeta_j^2 \omega_j^2 p_i^2]^2}$$

$$- 4 \sum_{i=1}^m (Q'_c - D_i \sin \theta'_i) \frac{d_j \omega_j^3 p_i [(\omega_j^2 - p_i^2)^2 - 4\zeta_j^2 \omega_j^2 p_i^2]}{[(\omega_j^2 - p_i^2)^2 + 4\zeta_j^2 \omega_j^2 p_i^2]^2} = 0 \quad (8)$$

($j = 1, 2, \dots, n$)

図1で0.1から30.0まで0.1ごとに300個取った p_i とその時の D_c, θ_c の各曲線上の点の組合せをとり、それぞれ D_i, θ_i の組としてテストデータとする。 d_k, ζ_k に表1の初期値を代入し式(7), (8)を計算するとゼロにはならないことが普通である。そこで d_k に Δd_k の微小変化を与えた時の F_j, G_j の増加分 $\Delta F_{jk}, \Delta G_{jk}$ を数値計算で求める。同様に ζ_k に $\Delta \zeta_k$ の微小変化を与えた時の増分 $\Delta F_{j, n+k}, \Delta G_{j, n+k}$ も計算する。 F_j, G_j がゼロになるための $\Delta d_k, \Delta \zeta_k$ の移動倍率 u_k, v_k は次の連立一次方程式を解いて得られる。

$$\begin{bmatrix} \Delta F_{11}, \Delta F_{12}, \dots \\ \Delta G_{11}, \Delta G_{12}, \dots \\ \dots \\ \Delta G_{n1}, \Delta G_{n2}, \dots, \Delta G_{n,2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1 \\ -G_1 \\ \vdots \\ -G_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

$\Delta d_k, \Delta \zeta_k$ と ΔF_{jk} などの間には線型性が厳密にはないため d_k に $d_k + u_k \Delta d_k, \zeta_k$ に $\zeta_k + v_k \Delta \zeta_k$ を代入しても式(7), (8)の左辺は完全にはゼロにならないので、新しい d_k, ζ_k を初期値としてこの計算を繰返すと F_j, G_j はゼロに近づき、 d_k, ζ_k は一定値に収束する。10回の繰返し計算を行ない振動特性を抽出したものが表1の収束値である。両共振点は無次元の円振動数で2, 振動数比

で20%離れているが格別の支障もなく収束値が得られる。

図2は ω_2 が低振動数域に移動したため振動数比の差が10%になった近接ピークの場合の応答曲線である、この場合も表2に示した収束値が抽出できる。

図3は振動数比の差が5%の近接ピークである。この場合には応答曲線の形状はもはや目視的には二つの共振点があることも、その固有振動数を見つけ出すことも不可能になる。仮に d_2 の符号だけが変われば図4のような状況になるので共振点が二つあることは明瞭になる、つまり近接共振点が二つの振動数として目視的に分割できるかどうかは振動数の接近の度合いだけでなく、両者の有効静たわみにも関係する。

仮にある実験的な手法か、理論的な解析で二つの共振点のあることだけが判明している場合には次の方法で二つの共振点に分割できる。それは前述の最小2乗誤差に

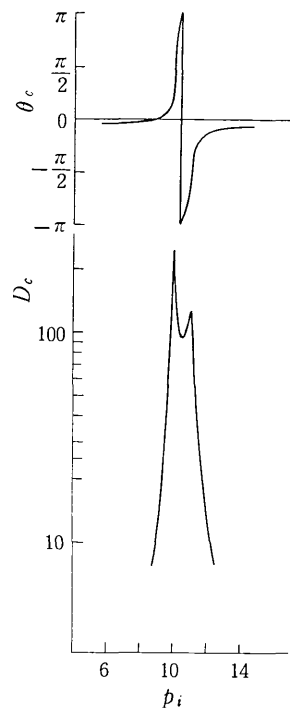


図2 近接共振点を含む変位応答曲線(2)

表2 近接共振点の振動特性(2)

振動特性	真 値	初 期 値	収 束 値
d_1	5.0	4.0	5.000
d_2	-5.0	-4.5	-5.000
ζ_1	0.01	0.007	0.0100
ζ_2	0.02	0.015	0.0200
$\omega_1 = 10.0$		$\omega_2 = 11.0$	

研究速報
 なるような振動特性を求める場合に、固有振動数についても E を極小にするため式(7), (8)に次式をつけ加えることである。

$$H_j = \frac{\partial E}{\partial \omega_j} = 4 \sum_{i=1}^m (P'_c - D_i \cos \theta'_i) \frac{d_j \omega_j p_i^2 [-(\omega_j^2 - p_i^2)^2 + 4\zeta_j^2 \omega_j^2]}{((\omega_j^2 - p_i^2)^2 + 4\zeta_j^2 \omega_j^2 p_i^2)^2} + 4 \sum_{i=1}^m (Q'_c - D_i \sin \theta'_i) \frac{d_j \zeta_j \omega_j^2 p_i^2 [(\omega_j^2 + 3p_i^2)(\omega_j^2 - p_i^2) - 4\zeta_j^2 \omega_j^2 p_i^2]}{((\omega_j^2 - p_i^2)^2 + 4\zeta_j^2 \omega_j^2 p_i^2)^2} = 0 \quad (10)$$

$(j = 1, 2, \dots, n)$

H_j がゼロになるような ω_k を探するために微小変化 $\Delta \omega_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) を与えた時の増分 ΔH_j を計算し移動倍率 ω_k を計算する。式(9)は $3n$ 元の連立一次方程式に変わる。この方法で初期値から出発して振動特性を抽出する。表3のような振動数比で5%離れている真値の

場合に、2%ずらせた初期値から出発すると7回の繰返し計算で表3のような収束値が得られ真値と一致する。振動数を3%程度ずらせた初期値から出発しても同様にして真値と同じ収束値が得られるが繰返し回数が急に増加する。振動数と2乗誤差との関係は非線型性の大きいことが繰返し回数の増加を引起こす原因であるから、初期値からの大きなずれがある場合には計算は実際上困難になる。振動数が5%ずれると共振点の振動数としては応答曲線上でも適合しないことが図3のピークの位置を視的に確かめることでも判明するから、実際問題としては振動数の初期値は2~3%ずれた場合を考えれば十分であり、この場合は表3のようにもとの真値に収束する。

仮に図3の共振点を固有振動数が一つと見誤まって振動特性を抽出すると表4のようなになる。それを図示すれ

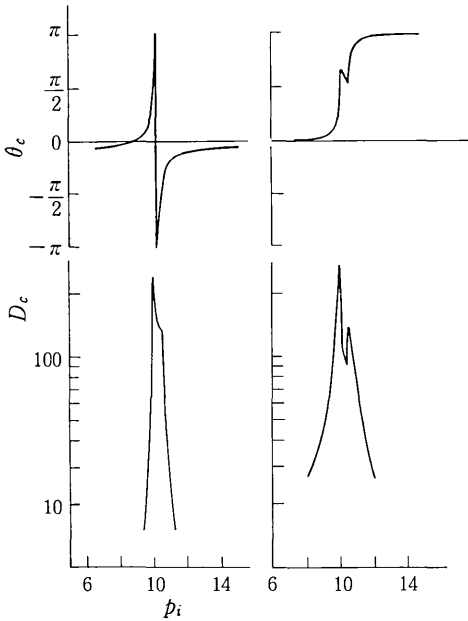


図3 近接共振点を含む変位応答曲線 (3)

図4 近接共振点を含む変位応答曲線 (4)

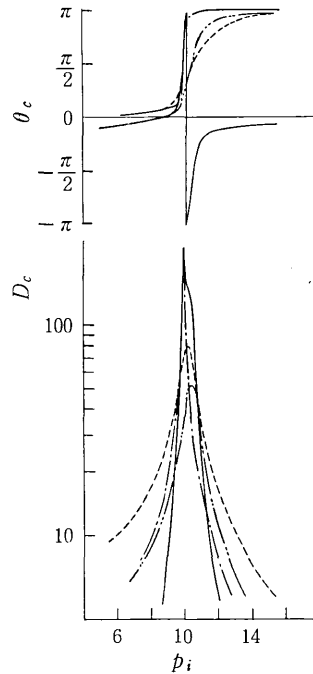


図5 単独の共振点として取扱った変位応答曲線

表3 近接共振点の振動特性(固有振動数を変化させる場合)

振動特性	真 値	初 期 値	収 束 値
d_1	5.0	4.0	5.000
d_2	-5.0	-4.5	-5.000
ζ_1	0.01	0.007	0.0100
ζ_2	0.02	0.015	0.0200
ω_1	10.0	10.2	10.0
ω_2	10.5	10.7	10.5

表4 単独の共振点として取扱った振動特性

振動特性	真 値	単独の共振点と見なした場合の収束値		
		-----	-----	-----
d	5.0	3.40	6.53	3.57
	-5.0			
ζ	0.01	0.0068	0.0414	0.035
	0.02			
ω	10.0	10.0	10.25	10.5
	10.5			

研究速報 ば図5のとおりである。一つの共振点として取扱うのは ω_1, ω_2 のいずれをとっても、また中間の振動数を取っても不適当なことが抽出した振動特性のそれぞれをもとに逆に作成した図5の曲線からも明白に示されている。

3. ま と め

固有振動数が判明している近接共振点の場合には既報の手法をそのまま使用することで、また固有振動数が不明な近接共振点の場合には本報の振動数を変化させる方法で振動特性の抽出が行なえることを真の振動特性が判

明しているテストデータにより実証した。

(1977年2月24日受理)

参 考 文 献

- 1) 亘理, 機械振動 (1966) 丸善, P.145
- 2) 萩原, 振動測定 (1945) 寶文館, P.71
- 3) 柴田・原, 生産研究, 17-8 (1965-8) P.14
- 4) 山室・柴田, 生産研究, 22-8 (1970-8) P.14
- 5) 三井・佐藤, 生産研究, 26-11 (1974-11) P.26
- 6) 高橋, 生産研究, 25-10 (1973-10) P.55
- 7) 高橋, 生産研究, 26-3 (1974-3) P.17

次 号 予 告 (7月号)

特 集 理 想 の 研 究 態 勢 を 求 め て

— 海外研究機関調査報告 —

巻 頭 言	海外調査団の成果に期待するもの	武 藤 義 一
	研究所の運営改善の課題	鈴 木 弘
	総 論	尾 上 守 夫
調 査 報 告 1	ヨーロッパの大学	
	1・1 イギリスのあたらしい大学 —サセックス大学—	石 田 洋 一
	1・2 アーヘン工科大学加工研究室を訪ねて	佐 藤 壽 芳
	1・3 インペリアル・カレッジ調査メモ	木 内 学
調 査 報 告 2	アメリカの大学	
	2・1 マサチューセッツ工科大学における最近の研究とその方向	{ 木 内 学 一 石 田 洋 一
	2・2 カリフォルニア大学バークレー校 —州立大学の一例として—	高 梨 晃 一
	2・3 カリフォルニア工科大学で感じたこと	田 村 重 四 郎
調 査 報 告 3	アメリカの研究行政	
	3・1 米科学振興基金 (NSF) の研究支援活動	佐 藤 壽 芳
	3・2 医学と情報 (NIH)	尾 上 守 夫
	3・3 米国地質調査所 (USGS)	田 村 重 四 郎
調 査 報 告 4	いろいろな研究所	
	4・1 スタンフォード研究所 (SRI) —研究の企業化—	高 梨 晃 一
	4・2 ミサイルから医用工学へ —ジョンボブキンス大学応用物理研究所 (APL) —	石 田 洋 一
	4・3 MIT・リンカーン研究所について	高 梨 晃 一
	4・4 国立物理研究所 (NPL)	田 村 重 四 郎
	欧米の工学における10年の変化	石 田 洋 一
	欧米3ヶ国見たまま, 聞いたまま	滝 沢 章 吾