

弾塑性体の大変形とそれに伴う不安定問題の研究

Study on the Formulation of Solution Procedures for Elastic-Plastic Large Deformation and Bifurcation

山田 嘉昭*・平川 智之*
Yoshiaki YAMADA and Tomoyuki HIRAKAWA

ま え が き

有限要素法は、各種の力学的現象や材料の特性をシミュレートする有効な手段として広く用いられるにいたっている。¹⁾しかし応用は、微小な変形の範囲に留まっているのが普通である。本研究では、不安定現象を含む大変形領域に解析を拡張し、具体的な応用例題として引張試験におけるくびれ(necking)の発生を取り扱った。くびれの発生は、Hillにより固有値問題としてとらえられ²⁾、ごく最近には、Miles³⁻⁵⁾により平板および円形断面棒についてくびれの発生点、そのときの固有モードが解析的に求められている。本研究の主要な目的は、同じ現象を有限要素法プログラムによりシミュレートし、その発生を実証すること、これにより単軸引張りでのくびれは最大荷重点で起こるという工学者によって一般に受け入れられている考えが正確でないことを確かめることである。また、単純せん断変形(simple shear)を例題として、大変形・大ひずみ問題の解析にいままで提案されているいくつかの定式化の中で代表的な四つを比較し、問題に応じ適切な定式化を用いる必要のあることを明らかにした。

1. 大変形・大ひずみ問題解析法の定式化

ここで用いる方法は、変形の各段階における状態を基準として、次の段階での変位・応力およびひずみの状態を増分形式により求めようとする updated 形の定式化に従うものである。したがって、要素の節点座標の変化を考慮するのみではなく、各段階で存在する零でない応力を初期応力とし、それが変形の増分と結合して生じる幾何学的非線形項を組み込んでいることが特徴である。この場合、材料としては、構成方程式において、応力の変化率とひずみ速度を直接結び付けることのできる亜弾性材料(hypo-elastic material)⁶⁾の属性を仮定しているが、応力変化率に何をを用いるか、またある変形段階での応力と応力変化率から次の段階の応力をどのように評価するかによって、各種の定式化が可能である。この研究では、次の四つの方法を検討した。

(a) Type I⁷⁾

この形式の定式化では、構成方程式に Euler の応力 σ_{ij} の変化率 $\dot{\sigma}_{ij}$ とひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ を用いる。 $\dot{\sigma}_{ij}$ は Euler の応力の intrinsic rate と呼ばれ、定義により、空間固定の座標系で観測される Euler の応力の変化率を表わしている。ある変形段階の Euler の応力を σ_{ij}^t とするとき、次の変形段階における応力 $\sigma_{ij}^{t+\Delta t}$ は、定義に従い

$$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} = \sigma_{ij}^t + \dot{\sigma}_{ij} \Delta t \quad (1)$$

として求めることとする。

(b) Type II⁸⁾

物体とともに変形と同時に回転する座標系から Kirchhoff の応力 t_{ij} を観測した場合の変化率 \dot{t}_{ij} (convected rate) を構成方程式に用いる。updated formulaion の場合、ある段階での応力 $\sigma_{ij}^t = t_{ij}^t + \dot{t}_{ij}$ から、次の段階での Kirchhoff の応力 $t_{ij}^{t+\Delta t}$ を

$$t_{ij}^{t+\Delta t} = \sigma_{ij}^t + \dot{t}_{ij} \Delta t \quad (2)$$

より求めることができる。これを次のような変換公式により変換して、 $\sigma_{ij}^{t+\Delta t}$ を評価する。

$$[\sigma^{t+\Delta t}] = (\rho^{t+\Delta t} / \rho^t) [J]^T [t^{t+\Delta t}] [J] \quad (3)$$

ただし、 $\rho^t, \rho^{t+\Delta t}$ は時刻 t および $t + \Delta t$ における物体要素の密度、また

$$[J] = \begin{bmatrix} \partial x^1 / \partial X^1 & \partial x^2 / \partial X^1 & \partial x^3 / \partial X^1 \\ \partial x^1 / \partial X^2 & \partial x^2 / \partial X^2 & \partial x^3 / \partial X^2 \\ \partial x^1 / \partial X^3 & \partial x^2 / \partial X^3 & \partial x^3 / \partial X^3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

X^1, X^2, X^3 は変形前の要素の座標(埋込み座標)、 x^1, x^2, x^3 は変形後の要素の座標を表わす。

(c) Type III^{1, 9)}

構成方程式の中の応力変化率として、Kirchhoff の応力 t_{ij} の Jaumann 変化率 \dot{t}_{ij}^* を用いる。この応力変化率は、物体とともに回転はするが変形はしない座標系から Kirchhoff の応力 t_{ij} を観察したときの変化率という物理的意味を持っている。ある変形段階の Euler の応力 σ_{ij}^t から、次の変形段階の $\sigma_{ij}^{t+\Delta t}$ を求めるには、最初に、得られた \dot{t}_{ij}^* から、次の式により $[\dot{t}]$ を評価する。

$$[\dot{t}] = [\dot{t}^*] - [\dot{\epsilon}][\sigma^t] - [\sigma^t][\dot{\epsilon}] \quad (5)$$

次に式(2)により Kirchhoff の応力 $t_{ij}^{t+\Delta t}$ を求め、それから式(3)により $\sigma_{ij}^{t+\Delta t}$ に変換する。

* 東京大学生産技術研究所 第1部

研究速報 (d) Type IV¹⁰⁾

この定式化では、Euler応力の Jaumann 変化率 $\dot{\sigma}_{ij}^*$ を構成方程式に用いる。 $\sigma_{ij}^{t+\Delta t}$ を求めるには、得られた $\dot{\sigma}_{ij}^*$ から、次の式

$$[\dot{\sigma}] = [\dot{\sigma}^*] + [\dot{\omega}]^T [\sigma] + [\sigma] [\dot{\omega}] \quad (6)$$

により $[\dot{\sigma}]$ を求め、その後、式(1)により $\sigma_{ij}^{t+\Delta t}$ を求める。

上記の4種類の大変形・大ひずみ定式化を用い、弾塑性体が単純せん断と単軸引張りを受ける場合について、変形のシミュレーション解析を行なった。使用した材料定数は

ヤング率 $E = 21000 \text{ kg/mm}^2$, ポアソン比 $\nu = 0.304$, 降伏応力 $\sigma_Y = 50 \text{ kg/mm}^2$, $d\bar{\sigma}/d\bar{\epsilon}_p = H' = 500 \text{ kg/mm}^2$ である。 H' は一定で、応力-ひずみ曲線の二直線近似を行っていることに相当する。

表1には、図1の単純せん断変形の場合について、せん断ひずみ $\gamma = 1.793$ での応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ および相当応力 $\bar{\sigma}$ と相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}_p$ の値を示している。表1にみられるように、客観性 (objectivity) を有するとされている応力変化率 $\dot{i}, \dot{t}, \dot{\sigma}$ を用いた定式化では、非零の垂直応力 σ_x, σ_y を生じている。したがって、要素が回転しても応力 (主応力方向) が回転しないこの種の問題では、応力変化率 $\dot{\sigma}$ を用いる定式化が適当と考えられるが、 $\dot{i}, \dot{t}, \dot{\sigma}$ の場合には、生じた σ_x, σ_y の値が、 τ_{xy} に比べて十分小さな値にとどまっている。図2は、相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}_p$ に対して得られた相当応力の数値解 $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}$ と、 $H' \bar{\epsilon}_p$ によって計算される理論相当応力の差 $\bar{\sigma} - H' \bar{\epsilon}_p = \Delta \bar{\sigma}$ を示したものである。 \dot{i} を用いた定式化 Type II ではとくに、 $\Delta \bar{\sigma}$ が γ とともに増大し、北川と富田¹¹⁾が構成方程式から直接に (有限要素法による数値解析でなく) 得ている傾向に一致する。

$\dot{i} = 0$ に対して一般には応力不変量が停留しないという性質¹¹⁾が、上のような $\Delta \bar{\sigma}$ の増大に関係するということも考えられる。しかし、瀬口ほかも指摘しているように¹²⁾、応力変化率とひずみ増分の間に一意的関係を仮定した構成方程式の場合には、いずれの応力変化率 (とくに $\dot{i} = 0$) に対しても、不変量は停留する。これを具体的に検討するため、 t_{ij} であらわした不変量

$$I = t^{ij} t_{ij} = G_{ik} G_{jl} t^{kl} t^{ij} \quad (7)$$

の物質微分 (material derivative) をとると

$$\begin{aligned} dI/dt &= d/dt (G_{ik} G_{jl}) t^{kl} t^{ij} + G_{ik} G_{jl} d(t^{kl} t^{ij})/dt \\ &= 2d/dt (G_{ik}) G_{jl} t^{kl} t^{ij} + 2G_{ik} G_{jl} t^{kl} dt^{ij}/dt \end{aligned}$$

ここで G_{ij} は変形後の埋込み座標の計量テンソルを表わす。updated 形の定式化では $dG_{ij}/dt = \dot{\epsilon}_{ij}$ であるから、上の式は

$$dI/dt = 2 \dot{\epsilon}_{ik} G_{jl} t^{kl} t^{ij} + 2G_{jk} G_{il} t^{kl} \dot{t}^{ij} \quad (8)$$

したがって応力変化率 $\dot{t}_{ij} = 0$ に対し、 \dot{t}_{ij} とひずみ速度と結びつける構成方程式が一意的であれば $\dot{\epsilon}_{ij} = 0$ 、ゆえに $dI/dt = 0$ となって不変量が停留する。

図1の単純せん断変形の場合のみでなく、図3に示す単軸引張りの結果でも、誤差 $\Delta \bar{\sigma}$ がひずみとともに増大している。したがって、誤差 $\Delta \bar{\sigma}$ の原因を他に求めなければならないが、Type II の定式化では、構成方程式において、他の場合の $\dot{i}, \dot{t}, \dot{\sigma}$ あるいは $\dot{\sigma}$ を単に \dot{i} におきかえているにすぎない。このことは、相当応力-相当塑性ひずみ関係に、Euler の応力を用いていることと適合しない。したがって、誤差 $\Delta \bar{\sigma}$ を生じたものであろう。これは、北川と富田が単純せん断、山田とWifi⁹⁾が単軸引

表1 単純せん断ひずみ $\gamma = 1.793$ における応力

	σ_x (kg/mm^2)	σ_y (kg/mm^2)	τ_{xy} (kg/mm^2)	$\bar{\sigma}$ (kg/mm^2)	$\bar{\epsilon}_p$
Type I	0.0	0.0	321.0	556.0	1.012
Type II	36.03	78.60	340.1	589.9	1.012
Type III	12.69	-12.50	320.6	555.8	1.012
Type IV	12.54	-12.54	320.7	555.9	1.012

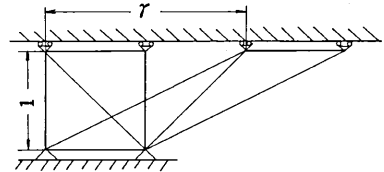


図1 単純せん断変形

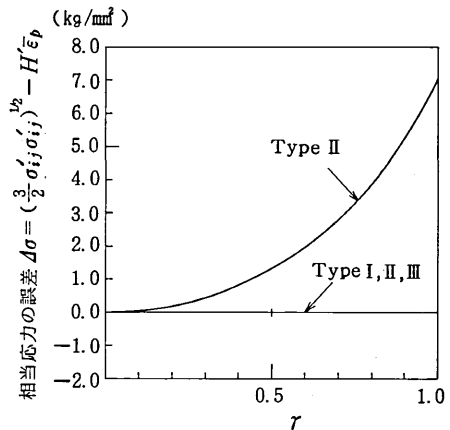


図2 相当応力の誤差

張について、それぞれ構成方程式から直接得ている結論と同じである。

以上から、Type II の \dot{t}_{ij} を用いる場合を除き、主応力 (方向) の回転の有無に応じて、適当な応力変化率を選択した構成方程式を用いればよいという結論が導かれる。

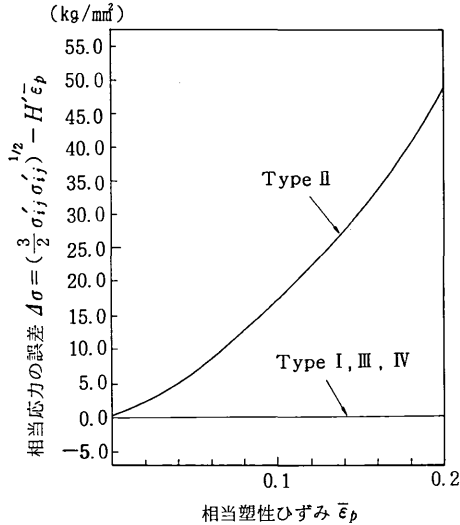


図3 相当応力の誤差

2. 引張り試験における塑性不安定現象

引張り応力場でのくびれの問題を有限要素法によって研究しようとする試みがいくつか^{13,14)}行なわれているが、初期不整をもつ長方形板や円柱を取り扱っており、また初期不整のない場合でも、荷重増分の中で攪乱を加えるという方法が用いられている。そのような方法では、不整のない完全な系の固有値問題として不安定点を正確に検出することはできない。そこで本研究では、計算機プログラムにより正確な不安定点とくびれのモードをシミュレートして数値解析するため、初期不整のない長方形板に両端せん断応力なしの条件で引張りを加える問題を取り扱うこととした。この場合、最大荷重点と分岐点は、剛性マトリックスの行列式が零となる点としてとらえることができる。最大荷重点は Hill¹⁵⁾の研究では固有状態(死荷重の下で増分的変形が可能な状態)とよばれ、それ以前では解の一意性が保証される点である。³⁾したがって、ここで取り扱っている問題の分岐点は最大

荷重点を越えたところにある。分岐点ではくびれのモードとして固有モードが現れ、この点に達するまでの一様変形にこのモードを重畳することにより、変形を分岐させることができる。

本研究で限界荷重点の検出と固有モードの計算に用いた方法は、岩田ら¹⁶⁾によって弾性不安定現象の解析に試みられたもので、一般の有限要素法で連立一次代数方程式を解くために使用されているサブルーチンを少し変えるだけで適用が可能である。つまり、連立一次代数方程式を解く方法として剛性マトリックス $[K]$ の LDU 分解を用いていれば、 $[K]$ の行列式を

$$\det |K| = \det |LDU| = \det |D| = \prod_{i=1}^n D_{ii} \quad (9)$$

により評価することができる。そして、この $\det |K|$ が零となった点(限界荷重点)で、逆反復法により固有モードを求める。反復過程において得られる固有ベクトルの k および $(k+1)$ 番目の近似解を $\{\phi\}_k$ と $\{\phi\}_{k+1}$ 、 l_{k+1} を正規化係数として、逆反復法のアルゴリズムは

$$[K] l_{k+1} \{\phi\}_{k+1} = [L][D][U] l_{k+1} \{\phi\}_{k+1} = \{\phi\}_k \quad (10)$$

式(10)による計算を、 $\{\phi\}$ の十分な収束を得られるまで繰り返せばよい。実際の計算は、式(10)を次のような前進消去と後退代入の過程に分けて行なう

$$[L]^T \{Z\}_{k+1} = \{\phi\}_k$$

$$[D][U] l_{k+1} \{\phi\}_{k+1} = \{Z\}_{k+1} \quad (11)$$

上記の方法で得られた塑性不安定点、くびれのモードを Miles⁵⁾ の求めた解析解と比較することにより、本報告の方法の有用性を調べた。Miles は、解析解を得る操作を簡単にするため、非圧縮弾塑性体を取り扱っている。したがって、比較のための計算では、ポアソン比を $\nu = 0.499$ とした。また、シミュレーションは、Kirchhoff の応力の Jaumann rate を用いた定式化 Type III によっている。材料定数は

ヤング率 $E = 21000 \text{ kg/mm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.499$ 、降伏応力 $\sigma_y = 50 \text{ kg/mm}^2$

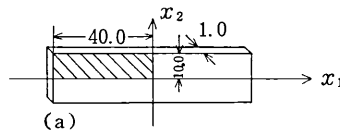
さらに相当応力 σ と相当塑性ひずみ ϵ_p との関係を

$$\bar{\sigma} = 68.37 (0.02 + \bar{\epsilon}_p)^{0.08}$$

と仮定した。図4に、数値解析に用いた要素分割を示す。図5には不安定点、図6には固有モードによる試験片の x 軸と y 軸方向のくびれの形状を Miles の得た解と比較している。くびれの x 軸、 y 軸方向のモードは、Miles の得た解とほとんど厳密に一致している。しかし、分岐点の位置については相違点があり、公称応力値で 2.18%、計算に用いた材料のひず

要素数 576

節点数 333



(a) の斜線部の要素分割

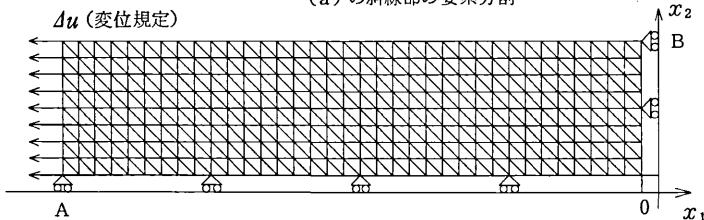


図4 要素分割と境界条件

研究速報

み硬化率が小さいので分岐点での塑性ひずみでは32.2%の差となっている。これは Miles の解析解では、固有モードを三次元的に考えているが、本報告の有限要素解は平面問題として解析していることによって起こった差と考えられる。そこで、同じ軸対称問題として取り扱いが可能な丸棒試験片の引張におけるくびれの問題を解き、Miles⁴⁾の解と比較する予定である。

ここで解析した引張試験の例題では、境界条件を変位で規定している。こうして、分岐点 が最大荷重点の後に現れ、一樣でない固有モードが得られることがわかったが、境界条件を変位の代わりに荷重で指定する場合も同じである。ただし、後者の場合は、最大荷重点を検出して、それ以後境界条件を変位で与えるか、あるいは自動的に荷重を減じていくような操作を加えなければならない。なお、 $\det |K|$ が最初に零となる最大荷重点で、その状態において持続する変形のモードを計算し、それが一樣変形であることを確かめた。

あ と が き

本研究の一部は、昭和51年度文部省科学研究費、一般研究(B)「機械および土木材料特性の計算機シミュレ

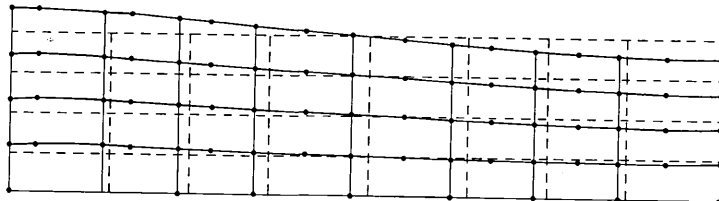


図6 固有モードの比較(y方向モードは4倍に拡大して表示)

ジョンと試験法」により行なったものである。なお、本研究の定式化は、順次、複合材料特性解析プログラム COMPOSITE-III に組み込んでゆく予定である。

(1977年2月19日受理)

参 考 文 献

- 1) Yamada, Y., and Sakurai, T., Proceedings of Third International Conference On Pressure Vessel Technology, ASME Publication, Paper I-34 April 19-22, 1977 Tokyo
- 2) Hill, R., J. Mech. Phys. Solids, Vol. 5, 1957, pp 229-241
- 3) Miles, J. P., Ibid, Vol. 19, 1971, pp 89-102
- 4) Miles, J. P., and Hutchinson, J. W., Ibid, vol. 22, 1974, pp 61-71
- 5) Miles, J. P., Ibid, Vol. 23, 1975, pp 197-213
- 6) Prager, W., Introduction to Mechanics of Continua, 1960, Ginn & Company
- 7) Yamada, Y., Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, Univ of Alabama Press, 1972, pp 325-355

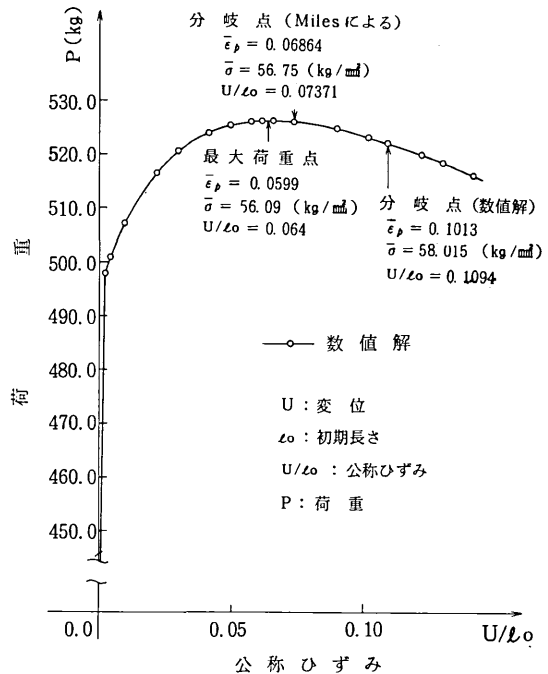
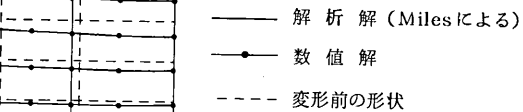


図5 荷重-公称ひずみ曲線



- 8) Yaghamai, S., and Popov, E. P., Int. J. Solids Structures, Vol. 17, 1971, pp 1375-1393
- 9) Yamada, Y., and Wifi, A. S., to be published in International Journal for Geomechanics
- 10) Yamada, Y., Takatsuka, K. and Iwata, K., Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, Univ. of Tokyo, 1973, pp 125-138
- 11) Kitagawa, H., and Tomita, Y., Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 21, Univ. of Tokyo, 1973, pp 243-255
- 12) 瀬口靖幸, 富田佳宏, 北川 浩, 材料, vol. 24, No. 259, 1975, pp 340-343
- 13) 田辺 茂, 生研セミナーテキスト, コース6: 非線形問題解析ワーク・ショップ, 生産技術奨励会, 1975, pp 55-67
- 14) Chen, W. H., Int. J. Solids. Structures, Vol. 7, 1971, pp 685-717
- 15) Hill, R., J. Mech. Phys. Solids, Vol. 15, 1967, pp 371-386
- 16) 岩田耕司, 山田嘉昭: 日本機械論文集, Vol 42, 1976, pp 444-452