

アーチの解析における曲線要素について

On Curved Finite Elements for the Analysis of Circular Arches

山田 嘉昭*・江澤 良孝*

Yoshiaki YAMADA and Yoshitaka EZAWA

円形アーチの有限要素解析に用いられる変位関数の評価には、仮定した個々の変位関数によって得られる有限要素解を厳密解と比較する方法、剛体変形モードが含まれているか否かの検定、またエネルギー基準に従って誤差を推定する方法など、いろいろな提案がある。ここでは、仮定した変位関数から導かれる剛性マトリックス $[K]$ の逆マトリックス $[K]^{-1}$ と円形アーチのたわみ性マトリックスの厳密解 $[F]_{\text{exact}}$ を比較することによって評価を行なう簡単に直接的な方法を提案する。円形アーチの剛性マトリックスの厳密解 $[K]_{\text{exact}} = [F]_{\text{exact}}^{-1}$ の完全な表示についても述べる。

1. ま え が き

有限要素解析では、アーチの問題を、曲線構造を直線切片の集合でおきかえた直線近似によって解くことができる。この近似については、要素分割を細かくすることによって、変形モードが本来の厳密解に収束することが知られている^{1),2)}。したがって、実用上はこの直線近似で十分な場合もあるが、計算機の計算時間を節約するために、また、粗い分割でも精度のよい解が得られるように、曲線要素を考えることが望ましい。こうして、アーチのような取り扱いやすい問題を詳しく調べておけば、円筒殻など、類似のより一般的な構造を考える上に役立つ資料を得ることができる。

これまで、有限要素解析に適した曲線要素モデルの追求に大きな努力が払われてきた。Ashwell 外^{3),4)}は、次のような5種類の変位関数を調べている。すなわち、(i)独立な多項式を内挿関数として用いる中で最も簡単な一次-三次モデル、および Bogner 外⁵⁾によって最初に提案された三次-三次モデル、(ii)円筒殻に対して Cantin と Clough⁶⁾ が用いた剛体変位を陽に含む形状関数およびその多項式近似形、および(iii)簡単なひずみ関数の仮定から積分によって導かれる互いに連成する関数である。Dawe^{7),8)}は独立な多項式による内挿変位関数を五次にまで拡張した。このような研究と同時に、曲線要素に剛体運動を陽に加えることの必要性についての議論が行なわれた。剛体変位を加える簡単な方法は、円筒殻に対して、Cantin と Clough⁶⁾によって初めて提案され、後に、Fonder と Clough⁹⁾により一般化されたものである。剛体変位の問題の議論に、固有値解析を導入したのは、Haisler と Stricklin¹⁰⁾および Mebane と Stricklin¹¹⁾であり、彼らは多項式近似の中に、剛体変位を陽に含む必要はないという結論に到達している。

以上で述べた文献から、これまでの研究では、個々の問題の解、すなわち仮定した変位関数をアーチの深さ、曲率半径と肉厚の比などが種々に異なる場合に適用して得られる解から、主として変位関数の適性を評価していたことがわかる。また一方において、仮定した変位関数の中に剛体運動が陰に含まれているか否かの検定は、固有値および固有モードの解析を必要とし、間接的であるほか、余分に固有値解析のルーチンを必要とすることになる。そこで、本報告では、変位関数を評価する簡単に直接的な方法を考える。類似の問題については、高級な数学を用いた研究もいくつかなされている^{12),13)}。また、エネルギー誤差評価を用いた Fried による提案^{14),15)}もある。しかし、ここでの理論はより基本的で、問題の本質をとらえたものといえると思う。

2. 自然の変形モードと厳密な剛性マトリックス

円形アーチ要素の変位モード（微分方程式の厳密解として得られるので自然モードともよばれる）に対する表示は、Ashwell 外⁴⁾によって示されている。しかしここでは、自然モードに対するより簡潔な表現を得るため、また報文をそれ自体まとめたものとするため、横内の論文¹⁶⁾に従って、式の誘導を繰り返しておくことにする。図1を参照し、次のようなつり合い方程式が得られる。

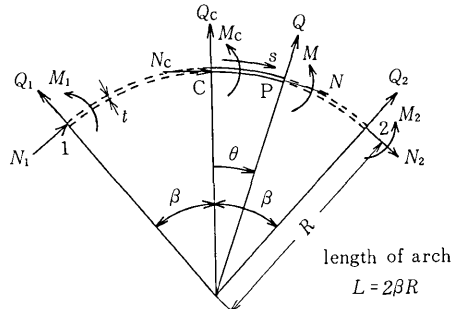


図1 アーチ要素

* 東京大学生産技術研究所 第1部

$$N + N_c \cos \theta - Q_c \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$Q + N_c \sin \theta + Q_c \cos \theta = 0 \quad (2)$$

$$M + M_c - N_c R(1 - \cos \theta) - Q_c R \sin \theta = 0 \quad (3)$$

ただし、 R は平均曲率半径、添字 C は要素の中心点を示している。このように、アーチ中心に対して式を表示しているのは、後に要素剛性マトリックスの誘導を容易にするためである。

対応する円周ひずみ ε と回転 $\delta\theta$ は

$$\varepsilon = du_t / ds + u_n / R \quad (4)$$

$$\delta\theta = du_n / ds - u_t / R \quad (5)$$

ただし、 $s = R\theta$ はアーチに添った長さ、 u_t と u_n とはそれぞれ接線方向変位および法線方向変位を表わす。

曲率変化 κ は式(5)から

$$\kappa = d\delta\theta / ds = (d^2u_n / d\theta^2 - du_t / d\theta) / R^2 \quad (6)$$

弾性挙動を仮定し、曲率半径 R がはりの肉厚 t に比べて十分大きいとすると、構成方程式は

$$\varepsilon = N / EA \quad (7)$$

$$\kappa = d\delta\theta / ds = M / EI \quad (8)$$

ただし、 E はヤング率、 A はアーチの横断面積、 I は断面二次モーメントである。

式(1), (4), (7)から

$$(du_t / d\theta + u_n) / R = (Q_c \sin \theta - N_c \cos \theta) / EA \quad (9)$$

式(3), (6), (8)から

$$\begin{aligned} & (d^2u_n / d\theta^2 - du_t / d\theta) / R^2 \\ &= [-M_c + N_c R(1 - \cos \theta) + Q_c R \sin \theta] / EI \quad (10) \end{aligned}$$

式(9), (10)から $du_t / d\theta$ を消去すると、次のような u_n の2階線形微分方程式を得る。

$$d^2u_n / d\theta^2 + u_n = a \cos \theta + b \sin \theta + c \quad (11)$$

ただし

$$a = -N_c R(1 / EA + R^2 / EI)$$

$$b = Q_c R(1 / EA + R^2 / EI)$$

$$c = (-M_c + N_c R) R^2 / EI \quad (12)$$

式(11)の解は

$$u_n = a_1 \theta \sin \theta + a_2 \theta \cos \theta + a_3 \sin \theta + a_4 \cos \theta + a_5 \quad (13)$$

ただし

$$a_1 = a / 2, \quad a_2 = -b / 2, \quad a_5 = c \quad (14)$$

残りの二つのパラメータ a_3 と a_4 は積分定数を表わす。接線方向変位 u_t は、式(13)を式(9)に代入することにより、次のように得られる。

$$\begin{aligned} u_t = & a_1(\theta \cos \theta - \frac{1-\xi}{1+\xi} \sin \theta) - a_2(\theta \sin \theta + \frac{1-\xi}{1+\xi} \cos \theta) \\ & + a_3 \cos \theta - a_4 \sin \theta - a_5 \theta + a_6 \quad (15) \end{aligned}$$

ここに、 a_6 は新しい積分定数を表わす。また

$$\xi = \frac{EI}{R^3} / \frac{EA}{R} = I / AR^2 \quad (16)$$

パラメータ ξ は曲げ剛性と軸剛性の比に対応するものである。式(13), (15)は、円形アーチの微分方程式の解であり

弾性変形に対する自然モードを表わしている。

式(13)および(15)の変位の解を用いて、図2に示す一端固定のはりの荷重端(2)におけるたわみを与えるたわみ性マトリックスを求めると

$$[F] = \frac{R^3}{EI} \begin{bmatrix} 2(\beta - \sin 2\beta) & & & \\ + (1+\xi)(\beta + \frac{\sin 4\beta}{4}) & \text{sym.} & & \\ -2[1 - (1+\xi)\cos^2 \beta] \sin^2 \beta & & & \\ & (1+\xi)(\beta - \frac{\sin 4\beta}{4}) & & \\ \sin 2\beta - 2\beta & & 2 \sin^2 \beta & 2\beta \end{bmatrix} \quad (17)$$

ただし

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ R\delta\theta \end{Bmatrix} = [F] \begin{Bmatrix} N_x \\ Q_y \\ M/R \end{Bmatrix} \quad (18)$$

式(17)のたわみ性マトリックスは、アーチのひずみエネルギーを求め、これにCastiglianoの定理を適用する材料力学でよく行なわれている方法によっても求められる。式(17)は $\xi \rightarrow 0$ とすれば、Martin¹⁾によって与えられているものと一致する。同じ式が、Livesley¹⁷⁾により異なる方法で求められていることを述べておこう。ここで、式(18)は、 x および y 座標を図2の節点2における接線方向および法線方向と一致するように選んだ場合の関係であることを注意しなければならない。

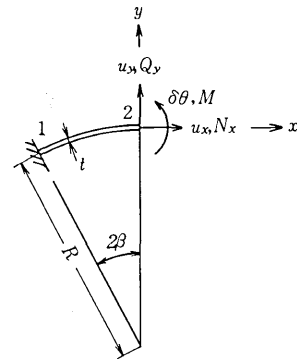


図2 曲がりはり

図1の曲線要素の剛性マトリックスは、式(17)のたわみ性マトリックスの逆マトリックスを計算する方法、あるいは式(13)および(15)の変位関数を用いて直接計算方法によって求めることができる。前者の方法は、式の取扱いが複雑であるので、ここでは後者の方法で剛性マトリックスを求め、得られた結果が式(17)に対する逆マトリックスになっているかどうかを確かめる方法によることにした。このような剛性マトリックスの厳密解は、筆者らの知る限りにおいて文献に見当たらないので、以下にその全体を示しておくことにしよう。

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1/R \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2/R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{t1} \\ u_{n1} \\ R\delta\theta_1 \\ u_{t2} \\ u_{n2} \\ R\delta\theta_2 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

ただし

$$[K_{11}] = D \times$$

$$\begin{bmatrix} \beta^2 - \beta (\cos^2 \beta) & & & & & \\ -\sin^2 \beta) \sin \beta \cos \beta & & & & & \\ -\frac{2}{1+\xi} \sin^4 \beta & & & & & \\ 2\beta \sin^2 \beta \cos^2 \beta & \beta^2 + \beta (\cos^2 \beta) & & & & \\ -\frac{2}{1+\xi} \sin^3 \beta \cos \beta & -\sin^2 \beta) \sin \beta \cos \beta & & & & \\ & -\frac{2}{1+\xi} \sin^2 \beta \cos^2 \beta & & & & \\ \beta^2 - 2\beta \cos^3 \beta \sin \beta & \beta (1 + 2 \cos^2 \beta) \sin^2 \beta & \beta^2 [1 + \frac{1}{2} (1 + \xi)] & & & \\ + (\cos^2 \beta - \frac{2}{1+\xi} \sin^2 \beta) \sin^2 \beta & -(\frac{2}{1+\xi} + 1) \sin^3 \beta \cos \beta & -\beta (1 + 2 \cos^2 \beta) \sin \beta \cos \beta & & & \\ & & + \{ [2 - \frac{1}{2} (1 + \xi)] \cos^2 \beta & & & \\ & & - \frac{2}{1+\xi} \sin^2 \beta \} \sin^2 \beta & & & \end{bmatrix} \quad \text{sym.} \quad (20)$$

$$[K_{12}] = [K_{21}]^T = D \times$$

$$\begin{bmatrix} \beta^2 (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) & -2\beta^2 \sin \beta \cos \beta & \beta^2 (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) \\ + \beta \sin \beta \cos \beta & + \frac{2}{1+\xi} \sin^3 \beta \cos \beta & + 2\beta \sin \beta \cos \beta \\ -\frac{2}{1+\xi} \sin^4 \beta & & -(\cos^2 \beta + \frac{2}{1+\xi} \sin^2 \beta) \sin^2 \beta \\ 2\beta^2 \sin \beta \cos \beta & \beta^2 (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) & 2\beta^2 \sin \beta \cos \beta \\ -\frac{2}{1+\xi} \sin^3 \beta \cos \beta & -\beta \sin \beta \cos \beta & -\beta \sin^2 \beta \\ & + \frac{2}{1+\xi} \sin^2 \beta \cos^2 \beta & -(\frac{2}{1+\xi} - 1) \sin^3 \beta \cos \beta \\ \beta^2 (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) & -2\beta^2 \sin \beta \cos \beta & \beta^2 [\sin^2 \beta - \cos^2 \beta - \frac{1}{2} (1 + \xi)] \\ + 2\beta \sin \beta \cos \beta & + \beta \sin^2 \beta & + 3\beta \sin \beta \cos \beta \\ -(\cos^2 \beta + \frac{2}{1+\xi} \sin^2 \beta) \sin^2 \beta & + (\frac{2}{1+\xi} - 1) \sin^3 \beta \cos \beta & -\{ [2 - \frac{1}{2} (1 + \xi)] \cos^2 \beta \\ & & + \frac{2}{1+\xi} \sin^2 \beta \} \sin^2 \beta \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[K_{22}] = D \times$$

$$\begin{bmatrix} \beta^2 - \beta (\cos^2 \beta) & & & & & \\ -\sin^2 \beta) \sin \beta \cos \beta & & & & & \\ -\frac{2}{1+\xi} \sin^4 \beta & & & & & \\ -2\beta \sin^2 \beta \cos^2 \beta & \beta^2 + \beta (\cos^2 \beta) & & & & \\ + \frac{2}{1+\xi} \sin^3 \beta \cos \beta & -\sin^2 \beta) \sin \beta \cos \beta & & & & \\ & -\frac{2}{1+\xi} \sin^2 \beta \cos^2 \beta & & & & \\ \beta^2 - 2\beta \cos^3 \beta \sin \beta & -\beta (1 + 2 \cos^2 \beta) \sin^2 \beta & \beta^2 [1 + \frac{1}{2} (1 + \xi)] & & & \\ + (\cos^2 \beta - \frac{2}{1+\xi} \sin^2 \beta) \sin^2 \beta & + (\frac{2}{1+\xi} + 1) \sin^3 \beta \cos \beta & -\beta (1 + 2 \cos^2 \beta) \sin \beta \cos \beta & & & \\ & & + \{ [2 - \frac{1}{2} (1 + \xi)] \cos^2 \beta & & & \\ & & - \frac{2}{1+\xi} \sin^2 \beta \} \sin^2 \beta & & & \end{bmatrix} \quad \text{sym.} \quad (22)$$

$$D = \frac{EI/R^3}{(1+\xi)\beta(\beta^2 - \sin^2\beta \cos^2\beta) - 2(\beta - \sin\beta \cos\beta)\sin^2\beta} \quad (23)$$

$$\xi = \frac{I}{AR^2}$$

式(23)で与えられる剛性マトリックス $[K_{22}]$ は、式(17)のたわみマトリックス $[F]$ の逆になっている。このことを確かめるのは容易である。

3. 変位関数

この報文で具体的に考える変位関数は以下に示す六つのものである。モデルⅠとⅡは多項式からなる近似内挿関数を表わし、高次の多項式についても一般的結論は変わらないので、ここでは三次-三次までの多項式を対象とすることにした。モデルⅢは菊地¹³⁾の提案した部分近似モデル、モデルⅣ、Ⅴはその一つの拡張と考えられるもので本研究で新しく導入したものである。最後のモデルⅥは曲線アーチを直線でおきかえた近似を表わす。

1. 一次-三次要素 (モデルⅠ)

$$u_t = a_1 + a_2 s \quad (24a)$$

$$u_n = a_3 + a_4 s + a_5 s^2 + a_6 s^3 \quad (24b)$$

2. 三次-三次要素 (モデルⅡ)

$$u_t = a_1 + a_2 s + a_3 s^2 + a_4 s^3 \quad (25a)$$

$$u_n = a_5 + a_6 s + a_7 s^2 + a_8 s^3 \quad (25b)$$

3. 菊地の部分近似モデル (モデルⅢ)

$$u_t = a_1 + a_2 s \quad (26a)$$

$$u_n = (u_{n1} + u_{n2})/2 \quad (26b)$$

このモデルでは、軸剛性に関して上の式 (26 a, b) の組を用い、曲げ剛性に関しては式 (24 a, b) の組を使用し、これが部分近似の名前の由来となっている。

4. 菊地モデルの変形 (モデルⅣ)

このモデルは、式 (26 b) の代りに

$$u_n = (u_{n1} + u_{n2})/2 + R\beta(\delta\theta_1 - \delta\theta_2)/6 \quad (27)$$

を使用する部分近似モデルである。

5. 菊地モデルの変形 (モデルⅤ)

このモデルは、式 (26 b) の代りに

$$u_n = (u_{n1} + u_{n2})/2 + R\beta(\delta\theta_1 - \delta\theta_2)/6 + \beta(u_{t1} - u_{t2})/6 \quad (28)$$

を使用する。式(28)は、式 (24 a) と (24 b) を用いて普通の方法で形状関数を求めて後、その節点変位にかかる係数を要素全体について積分し、平均をとることによって得られる。

6. 直線要素近似 (モデルⅥ)

各モデルの要素剛性マトリックスは、有限要素法の通常の手續きによって求められる。例えばモデルⅥでは、その剛性マトリックス $[K_{22}]$ (部分マトリックス) が、図3を参照して次のように求められる。

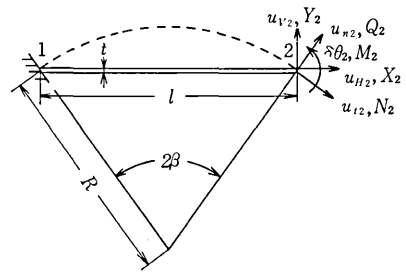


図3 直線要素

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ M_2/R \end{Bmatrix} = [K'_{22}] \begin{Bmatrix} u_{H2} \\ u_{v2} \\ R\delta\theta_2 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

ただし

$$[K'_{22}] = \begin{bmatrix} EA/l & & \text{sym.} \\ 0 & 12EI/l^3 & \\ 0 & -6EI/l^2R & 4EI/lR^2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

式(29)を座標変換して

$$\begin{Bmatrix} N_2 \\ Q_2 \\ M_2/R \end{Bmatrix} = [K_{22}] \begin{Bmatrix} u_{t2} \\ u_{n2} \\ R\delta\theta_2 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

ただし

$$[K_{22}] = [T]^T [K'_{22}] [T], [T] = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

項を詳しく計算した結果は

$$[K_{22}] = \frac{EI}{R^3} \times \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{2\xi} \frac{\cos^2\beta}{\sin\beta} & & \text{sym.} \\ -\frac{3}{2} \frac{\cos\beta}{\sin^2\beta} + \frac{1}{2\xi} \cos\beta & \frac{3}{2} \frac{\cos^2\beta}{\sin^3\beta} + \frac{1}{2\xi} \sin\beta & \\ \frac{3}{2} \frac{1}{\sin\beta} & -\frac{3}{2} \frac{\cos\beta}{\sin^2\beta} & \frac{2}{\sin\beta} \end{bmatrix} \quad (33)$$

4. 変位関数の評価

式(29)-(32)によって示されるような要素剛性マトリックスの厳密解が得られたので、変位関数の一つの評価法として、各モデルから導かれる剛性マトリックスと厳密解とを直接比較する方法が考えられる。しかしながら、パラメータ ξ の値によって、剛性マトリックスの各成分の値が大幅に変化するので、直接比較することは実際問題として不可能である。この他に考えられるものとしては固有値解析によって最低次から三つの固有値とそれに関連した剛体モードを調べる方法がある。この方法は、Cantin と Clough⁶⁾, Haisler と Stricklin¹⁰⁾, Mebane と Stricklin¹¹⁾ らによって用いられ、厳密な変位関数や

ほとんど厳密解に近い結果を与える変位関数の場合には、三つの零またはそれに近い固有値の得られることが知られている。しかしながら、剛体モードのチェックのためには、特別に固有値問題を解く必要がある。また、固有値の比較により、変位関数の適性の相対的な評価を得ることは、筆者らの経験によれば、必ずしも容易でない。

そこで、本研究では、たわみ性マトリックス $[F]$ の厳密解の成分が、式(17)からも分るように

$$F_{ij} = F_{ij}^{(1)} + \xi F_{ij}^{(2)} \tag{34}$$

の形になることに着目した。一方において、式(20)-(22)の剛性マトリックスの成分は、級数展開によって

$$K_{ij} = K_{ij}^{(1)} + K_{ij}^{(2)}/\xi \tag{35}$$

の形になる。要素における一般化変位の数が六つのモデル(本論文ではモデル I, III, ..., VI)においては、初めから同じ式(35)の形の剛性マトリックスの成分が得られる。また、モデル II などのように一般化変位の数が 6 より多いものにおいても、要素剛性マトリックスを 6×6 の大きさに縮約し、 ξ が 1 または β^4 より十分小さいという条件(モデル II では $1 \gg \xi$ の条件、三次以上の高次の多項式からなるモデルでは二つのうちどちらか一方の条件を課する)のもとで級数展開すると、近似的に式(35)の形の成分が得られる。

式(35)のような形の項を成分とする部分剛性マトリックス $[K_{22}]$ の逆マトリックス、すなわち 3×3 のたわみ性マトリックス $[F]$ の成分は次のような形を持つことを容易に示すことができる。

$$F_{ij} = \frac{B_{ij}^{(1)}/\xi^2 + B_{ij}^{(2)}/\xi + B_{ij}^{(3)}}{A_0/\xi^3 + A_1/\xi^2 + A_2/\xi + A_3} \tag{36}$$

ここで、係数 $A_0, \dots, A_3, B_{ij}^{(1)}, \dots, B_{ij}^{(3)}$ はアーチの半角 β の関数となっている。仮定した変位関数が妥当なものであれば、式(36)の F_{ij} は、少なくとも近似的に式(34)の形に帰一する必要がある。これが、本研究における変位関数の評価法の要点である。この条件は、 F_{ij} が次の二つのいずれかの形をとるとき、満足されることになる。

$$F_{ij} = \frac{B_{ij}^{(1)}/\xi^2 + B_{ij}^{(2)}/\xi}{A_1/\xi^2}, B_{ij}^{(3)} = A_0 = A_2 = A_3 = 0 \tag{37}$$

$$F_{ij} = \frac{B_{ij}^{(2)}/\xi + B_{ij}^{(3)}}{A_2/\xi}, B_{ij}^{(1)} = A_0 = A_1 = A_3 = 0 \tag{38}$$

ところで、円形アーチの自然な形の剛性マトリックスは、 $R \rightarrow \infty$ の極限として直線要素の剛性マトリックスを含むべきである。そこで、式(35)の剛性マトリックス $[K_{22}]$ から F_{ij} を計算してみると、 $B_{ij}^{(1)} = 0$ になっていることがわかる。さらに、 $B_{ij}^{(1)} = 0$ であれば、簡単な計算により一般的に式(36)において $A_0 = A_1 = 0$ であることがわかる。

したがって、仮定した変位関数から、自然な形のたわみ性マトリックスに対するよい近似が得られるための必

要条件は

$$B_{ij}^{(1)} = A_0 = A_1 = 0$$

および

(39)

$$A_3 = 0$$

となる。以上は、 3×3 の部分マトリックスについて得られた結果であるが、それを 6×6 の大きさの要素剛性マトリックス $[K]$ に拡張すると、次の条件が満足されなければならないことがわかる。

$$\begin{vmatrix} K_{ij}^{(2)} & K_{ik}^{(2)} \\ K_{lj}^{(2)} & K_{lk}^{(2)} \end{vmatrix} = 0; i, j, k, l = 1, \dots, 6 \tag{40}$$

および

$$\begin{vmatrix} K_{ij}^{(1)} & K_{ik}^{(1)} & K_{im}^{(1)} \\ K_{lj}^{(1)} & K_{lk}^{(1)} & K_{lm}^{(1)} \\ K_{nj}^{(1)} & K_{nk}^{(1)} & K_{nm}^{(1)} \end{vmatrix} = 0; i, j, k, l, m, n = 1, \dots, 6 \tag{41}$$

ただし、 $K_{ij}^{(1)}, K_{ij}^{(2)}, \dots$ 等は式(35)で表わされる K_{ij} の成分を表わす。

さて、 6×6 の大きさの要素剛性マトリックス $[K]$ の固有値を λ とすれば、 λ を定める特性方程式は

$$\begin{aligned} \det [[K] - \lambda [I]] &= \\ &= \begin{vmatrix} K_{11}^{(1)} + K_{11}^{(2)}/\xi - \lambda & \cdot & K_{16}^{(1)} + K_{16}^{(2)}/\xi \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{61}^{(1)} + K_{61}^{(2)}/\xi & \cdot & K_{66}^{(1)} + K_{66}^{(2)}/\xi - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^6 + C_5 \lambda^5 + C_4 \lambda^4 + C_3 \lambda^3 + C_2 \lambda^2 + C_1 \lambda + C_0 = 0 \end{aligned} \tag{42}$$

式(40)および(41)が満足されるときは、容易に次の関係

$$C_2 = C_1 = C_0 = 0 \tag{43}$$

が成立することがわかる。こうして、式(42)は三つの零の根を持っており、これが平面における三つの剛体運動に対応している。結局、式(40)、(41)の条件を満足する成分を有する剛性マトリックスに導くような変位関数は、自動的に剛体運動を含んでいることになる。

以上により、式(40)および式(41)の条件は、変位関数に剛体運動が陰に含まれるか否かの検討と同等であることがわかったが、本論文の方法は、同じ条件が破れたとき、どのようにして大きな誤差を生ずるかの理由も明らかにしている点で一般性がある。すなわち、式(40)および(41)の条件を満足しない変位関数は、式(36)において非零の $B_{ij}^{(1)}, A_0, A_1$ を含むことになり、 ξ または t/R が非常に小さいときは、これらの項の存在が大きな誤差につながるのである。ただし、式(40)が満足され、また通常のように ξ が小さいとき、 $A_3 = 0$ または式(41)の条件はほとんど誤差に影響しないことになる。

5. 数 値 計 算

ここでの数値例題では、図 4 に示す角度 90° と 30° の曲がりはりについて考える。はりの断面を一樣な長方形と仮定すると、剛性比 ξ は

$$\xi = I/AR^2 = \frac{1}{12} t^2/R^2$$

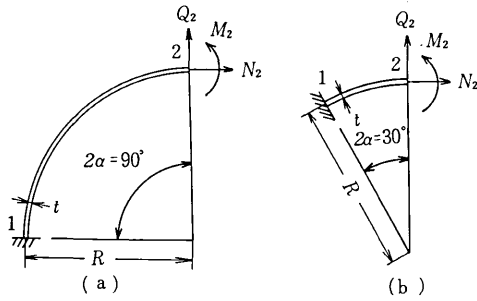


図4 曲がりはり

のように表わされる。なお、節点1は固定とし、節点2に荷荷が作用するものとして、数値の比較は、次のよう

に無次元化された剛性マトリックス $[\bar{K}]$ とたわみ性マトリックス $[\bar{F}]$ について行なう。

$$\begin{Bmatrix} N_2 \\ Q_2 \\ M_2/R \end{Bmatrix} = \frac{EI}{R^3} [\bar{K}] \begin{Bmatrix} u_{t2} \\ u_{n2} \\ R\delta\theta_2 \end{Bmatrix} \quad (44)$$

$$\begin{Bmatrix} u_{t2} \\ u_{n2} \\ R\delta\theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{R^3}{EI} [\bar{F}] \begin{Bmatrix} N_2 \\ Q_2 \\ M_2/R \end{Bmatrix} \quad (45)$$

式(44)と同様に、式(45)の $[\bar{F}]$ は、式(44)の $[\bar{K}]$ の成分から計算されて、次のように表わされる。

$$\bar{F}_{ij} = \frac{\bar{B}_{ij}^{(1)}/\xi^2 + \bar{B}_{ij}^{(2)}/\xi + \bar{B}_{ij}^{(3)}}{A_0/\xi^3 + A_1/\xi^2 + A_2/\xi + A_3} \quad (46)$$

表1は、 $[\bar{F}]$ の対角策1成分 \bar{F}_{11} の表示における

表1 式(46)における \bar{F}_{11} の係数の比較

		$2\beta = 5^\circ$	$2\beta = 10^\circ$	$2\beta = 15^\circ$	$2\beta = 30^\circ$
I	\bar{A}_0	1.3186×10^{-7}	1.0549×10^{-6}	3.5602×10^{-6}	2.8482×10^{-5}
	\bar{A}_1	4.4464	2.2220	1.4799	7.3634×10^{-1}
	\bar{A}_2	2.3771×10^6	7.4852×10^4	9.9827×10^3	3.3393×10^2
	\bar{A}_3	-4.6566×10^{-10}	4.3656×10^{-11}	-8.1855×10^{-12}	-2.2737×10^{-13}
	$\bar{B}_{11}^{(1)}$	4.6028×10^{-8}	7.3644×10^{-7}	3.7282×10^{-6}	5.9652×10^{-5}
	$\bar{B}_{11}^{(2)}$	9.7143×10^{-1}	9.7143×10^{-1}	9.7143×10^{-1}	9.7143×10^{-1}
	$\bar{B}_{11}^{(3)}$	2.0692×10^5	1.2932×10^4	2.5545×10^3	1.5966×10^2
II	\bar{A}_0	-9.7714×10^{-15}	-1.2507×10^{-12}	-2.1370×10^{-11}	-2.7354×10^{-9}
	\bar{A}_1	1.6409×10^{-2}	8.2487×10^{-3}	5.5155×10^{-3}	2.4474×10^{-3}
	\bar{A}_2	2.3735×10^6	7.4397×10^4	9.8470×10^3	3.1626×10^2
	\bar{A}_3	-7.6278×10^{-2}	-3.7965×10^{-2}	-2.5118×10^{-2}	-1.2048×10^{-2}
	$\bar{B}_{11}^{(1)}$	2.3014×10^{-9}	3.6822×10^{-8}	1.8641×10^{-7}	2.9826×10^{-6}
	$\bar{B}_{11}^{(2)}$	5.8489×10^{-1}	5.8527×10^{-1}	5.8591×10^{-1}	5.8938×10^{-1}
	$\bar{B}_{11}^{(3)}$	2.0660×10^5	1.2854×10^4	2.5196×10^3	1.5104×10^2

表2 $[\bar{F}] = [\bar{K}]^{-1}$ の成分の比較 ($R/t = 180, 2\beta = 10^\circ$)

モデル	\bar{F}_{11}	\bar{F}_{12}	\bar{F}_{13}	\bar{F}_{22}	\bar{F}_{23}	\bar{F}_{33}
I	1.17556×10^{-6}	-8.56173×10^{-6}	-9.23749×10^{-6}	1.47235×10^{-4}	1.69562×10^{-3}	5.47827×10^{-2}
I'	1.34224×10^{-5}	-1.14658×10^{-4}	-8.85165×10^{-4}	1.75208×10^{-3}	1.51536×10^{-2}	1.74533×10^{-1}
II	8.15133×10^{-6}	-1.13791×10^{-4}	-8.84830×10^{-4}	1.74296×10^{-3}	1.51906×10^{-2}	1.74533×10^{-1}
II'	8.31117×10^{-6}	-1.15401×10^{-4}	-8.84974×10^{-4}	1.76142×10^{-3}	1.51922×10^{-2}	1.74533×10^{-1}
III	1.37349×10^{-5}	-1.52285×10^{-4}	-1.31910×10^{-3}	1.74551×10^{-3}	1.51158×10^{-2}	1.74533×10^{-1}
IV	8.19627×10^{-6}	-1.14398×10^{-4}	-8.79399×10^{-4}	1.75216×10^{-3}	1.51541×10^{-2}	1.74533×10^{-1}
V	8.23772×10^{-6}	-1.14685×10^{-4}	-8.81620×10^{-4}	1.75211×10^{-3}	1.51539×10^{-2}	1.74533×10^{-1}
VI	1.38555×10^{-5}	-1.53245×10^{-4}	-1.32409×10^{-3}	1.75205×10^{-3}	1.51344×10^{-2}	1.74311×10^{-1}
厳密解	8.51267×10^{-6}	-1.15363×10^{-4}	-8.84747×10^{-4}	1.76143×10^{-3}	1.51922×10^{-2}	1.74533×10^{-1}

$\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_3, \bar{B}_{11}^{(1)}, \dots, \bar{B}_{11}^{(3)}$ をモデル I とモデル II について比較したものである。ただし、モデル II の場合は、 8×8 のマトリックスを 6×6 の大きさに縮約した後の要素剛性マトリックスについて考えている。この表から、モデル I はモデル II に比較して、式(9)の第 1 行の条件を近似的にも満足していないこと (係数 \bar{A}_0, \bar{A}_1 および $\bar{B}_{ij}^{(1)}$ のオーダーで比較する) がわかる。ただし、前に述べたように、 $\bar{A}_3 = 0$ の条件の影響はほとんどない。

表 2 は、モデル I から VI までのモデルについて、その要素剛性マトリックスから計算される要素たわみ性マトリックス $[\bar{F}]$ の六つの独立な成分を示し、式(17)の厳密なたわみ性マトリックスに対する $R^3[\bar{F}]/EI$ の成分と比較したものである。ここに、I' と II' は、式(9)において試みに $B_{ij}^{(1)} = \bar{A}_0 = \bar{A}_1 = \bar{A}_3 = 0$ とおき、他の係数 $B_{ij}^{(2)}, B_{ij}^{(3)}, \bar{A}_2$ についてはそのままとした計算によって得られたもので、それぞれ I および II に比べて、この形式的な計算により改善された結果になっていることがわかる。なお、モデル IV と V が一般的に良い結果を示していることは注目に値する。ただし、表 2 の結果は、 $R/t = 180, 2\beta = 10^\circ$ の場合について得られたものである。

次に、図 5(a) と 5(b) は、図 4(a) の曲がりはり ($2\alpha =$

90°) に対し、それぞれ $R/t = 20$ と 180 の場合について、式(9)の $[\bar{F}]$ の成分 \bar{F}_{11} の収束性を比較したものである。ここに、式(9)を満足するモデル III - VI の場合には解の精度に及ぼす R/t の影響がほとんどないことが注目される。これに対して、モデル II の場合、この深いアーチでは、解の精度に及ぼす R/t の影響が認められる。図 6(a) と 6(b) は \bar{F}_{22} の収束性を示したもので、 \bar{F}_{11} のときと同様の傾向が認められる。

要素数を一定とすると、浅いアーチに対する解の精度は、より深いアーチの場合に比べて、要素あたりの交角

表 3 深さの違うアーチに対する \bar{F}_{11} の比較
(厳密解との百分比 (%) で示す。
要素の角度は $2\beta = 10^\circ$)

要素モデル	$2\alpha = 30^\circ$		$2\alpha = 90^\circ$	
	$R/t = 20$	$R/t = 180$	$R/t = 20$	$R/t = 180$
I	52.852	2.223	17.712	0.373
II	99.965	99.446	99.998	99.870
III	104.625	104.889	99.449	99.449
IV	98.987	98.960	99.139	99.139
V	99.481	99.454	99.568	99.568
VI	105.522	105.802	100.182	100.182

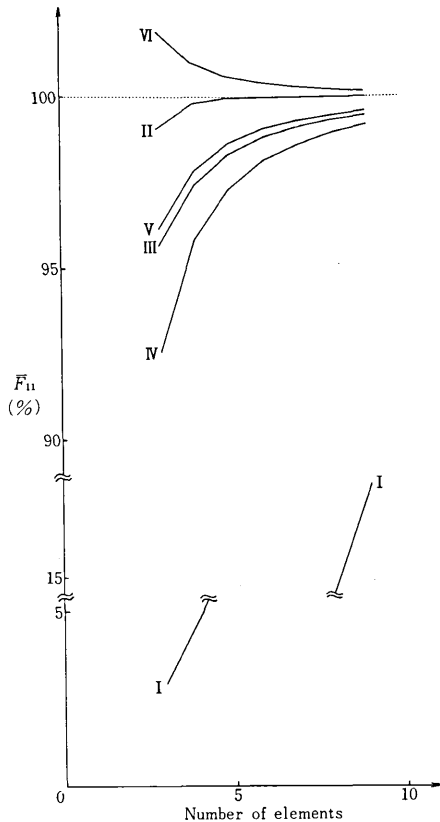


図 5 (a) \bar{F}_{11} の収束曲線 ($2\alpha = 90^\circ, R/t = 20$)
(厳密解との百分比 (%) で示す)

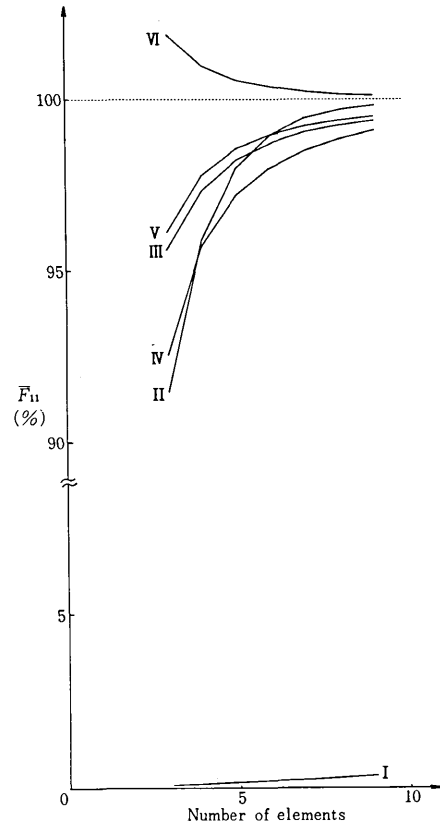


図 5 (b) \bar{F}_{11} の収束曲線 ($2\alpha = 90^\circ, R/t = 180$)
(厳密解との百分比 (%) で示す)

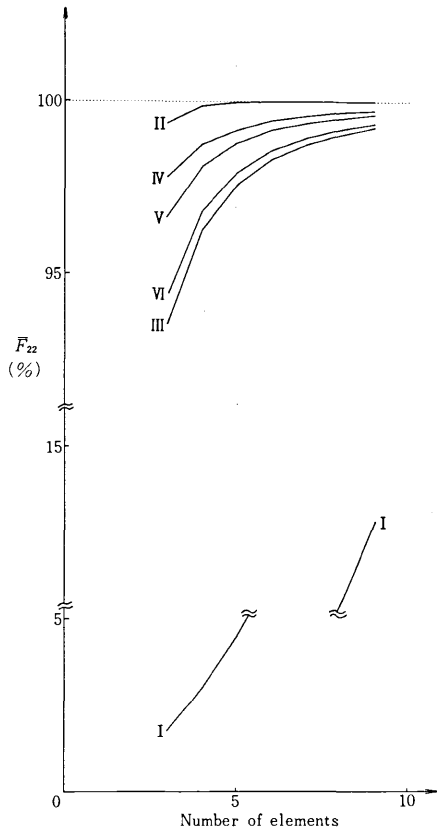


図6 (a) \bar{F}_{22} の収束曲線 ($2\alpha = 90^\circ$, $R/t = 20$)
(厳密解との百分比 (%) で示す)

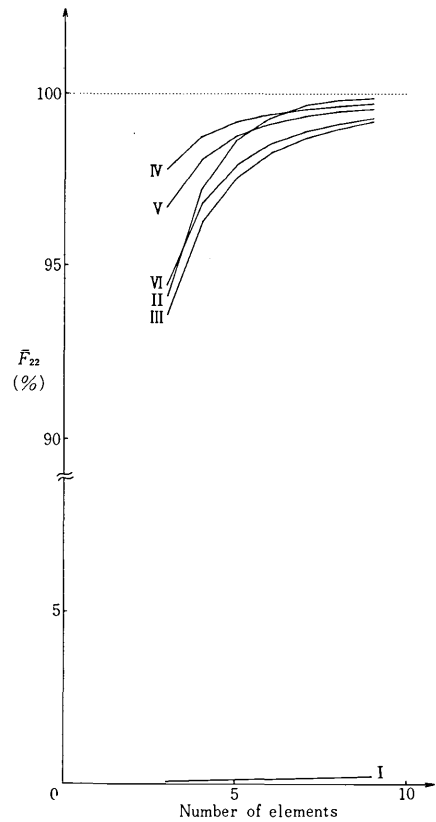


図6 (b) \bar{F}_{22} の収束曲線 ($2\alpha = 90^\circ$, $R/t = 180$)
(厳密解との百分比 (%) で示す)

が小さくなるので一般に良好である。しかしながら、同じ長さの要素を用い、したがってアーチの深さとともに要素数が増す場合には、要素段階ですでに良い精度が保証されるようなモデル II - VI を用いるようにすれば、表 3 にみられるように解の精度はアーチの深さによってほとんど影響を受けることがない。

6. む す び

この研究では、アーチの有限要素解析に用いられるいろいろな近似内挿関数の適性を評価する簡単で直接的な方法を提案し、数値例によってその妥当性を実証した。その結果、いままで行なわれた剛体変形モードによる評価の意味が明らかとなり、本報告の方法がそれを含んだ一般性のあるものであることを示すことができた。アーチに対する本報告の考察は、より一般的な殻構造に対する曲線要素の開発にも役立つものと考えられる。

(1976年9月6日受理)

参 考 文 献

1) H. C. Martin, Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis, McGraw-Hill, New York,

(1966), 邦訳 マトリックス法による構造力学の解法, 培風館 (1967)

- 2) Y. Yamada, Nonlinear Finite Element Analysis, Lecture Note, Institute of Industrial Science, Univ. of Tokyo, (1975)
- 3) D. G. Ashwell and A. B. Sabir, "Limitations of certain curved finite elements when applied to arches", Int. J. Mech. Sci. 13, 133-139 (1971)
- 4) D. G. Ashwell, A. B. Sabir and T. M. Roberts, "Further studies in the application of curved finite elements to circular arches", Int. J. Mech. Sci. 13, 507-517 (1971)
- 5) F. K. Bogner, R. L. Fox and L. A. Schmit, "A cylindrical shell discrete element", AIAA J. 5, 745-750 (1967)
- 6) G. Cantin and R.W. Clough, "A curved, cylindrical-shell, finite element", AIAA J. 6, 1057-1062 (1968)
- 7) D. J. Dawe, "Curved finite elements for the analysis of shallow and deep arches", Computers & Structures, 4, 559-580 (1974)
- 8) D. J. Dawe, "Numerical studies using circular arch finite elements", Computers & Structures, 4, 729-740 (1974)
- 9) G. A. Fonder and R. W. Clough, "Explicit addition of rigid-body motions in curved finite elements",

- AIAA J. 11, 305-312 (1973)
- 10) W. E. Haisler and J. A. Stricklin, "Rigid-body displacements of curved elements in the analysis of shells by the matrix-displacement method", AIAA J. 5, 1525-1527 (1967)
- 11) P. M. Mebane and J. A. Stricklin, "Implicit rigid body motion in curved finite elements", AIAA J. 9, 344-345 (1971)
- 12) T. Moan, "A note on the convergence of finite element approximations for problems formulated in curvilinear coordinate systems", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 3, 209-235 (1974)
- 13) F. Kikuchi, "On the validity of the finite element analysis of circular arches represented by an assemblage of beam elements", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 5, 253-276 (1975)
- 14) I. Fried, "Basic computational problems in the finite element analysis of shells", Int. J. Solids Structures, 7, 1705-1715 (1971)
- 15) I. Fried, "Shape function and the accuracy of arch finite elements", AIAA J. 11, 287-291 (1973)
- 16) 横内康人, "板及び殻の軸対称問題の弾塑性解析", 塑性と加工, 14, 779-787 (1973)
- 17) R. K. Livesley, Matrix Methods of Structural Analysis, 2nd Edition, Pergamon Press, Oxford. (1975)



次号予告 (1月号)

巻頭言

年の初めにあたって 武藤 義一

研究解説

酸化物-水系の等電点 (iep) と零電荷点 (pzc) { 虫明 克彦
増子 昇

研究速報

Sintered Cast Iron as a New Bearing Material
Part II: Friction test { C.S. シャルマ
中川 威雄
松永 正久

多自由度系衝突振動の解析手法について 藤田 隆史

インコヒーレント光ヘテロダイン検波系における収差・回折の影響 { 齊藤 成文
藤井 陽一
山下純一郎

Frictional Behaviour of Sputtered Molybdenum Disulfide { 松永 正久
竹内 芳徳
中川多津夫

活性炭の加熱再生 (第2報)
— PEG吸着炭の細孔変化 — { 河添邦太郎
大沢 利男