

塑性不安定について

On the Plastic Instability

山田嘉昭*・田辺 誠**

Yoshiaki YAMADA, Makoto TANABE

塑性不安定の問題については、今日でもなお様々な議論が行なわれ、結着がついていない。本稿では、この問題を有限要素法の要素レベルでとらえ、要素剛性が平面応力場の二主方向、あるいは特定の方向で零となるときをもって塑性不安定点とする一般的な定式化を試みた。理論は、平面応力場における弾塑性構成方程式を出発点としており、特別な場合として、従来、剛塑性体の理論によって得られていた拡散くびれおよび局部くびれの発生条件式を含んでいる。

1. ま え が き

塑性不安定については、Swift¹⁾およびHill²⁾の研究が原点になっており、今日においてもなお、問題の再提起あるいは問題解明のための数々の試みが繰り返されている³⁾⁻⁵⁾筆者の一人もかつて、薄板の軸対称変形に関連して、2軸引張応力場における塑性不安定の問題を論じたことがある^{6),7)}それより約10年、数値解析法が高度に発達した現在、また実際問題の解について多くの経験が積み重ねられたいま、その蓄積を基礎に塑性不安定の問題を見直すことができないであろうか。これが、本稿で成果を述べる研究の動機である。

塑性力学における長年の難問題解決の端緒は(少くとも筆者の一人にとって)、増分形の弾塑性応力-ひずみマトリックスの誘導にあった^{8),9)}これにより、剛塑性体近以あるいはリミット・アナリシスから弾塑性数値解析への道が拓かれるとともに、材料非線形問題では塑性と粘弾性の両者を包含した統一的な取扱い¹⁰⁾さらに幾何学的非線形性を含んだ複合問題領域へと、非線形問題解析法の増分形式化が進展したのである¹¹⁾⁻¹³⁾その中で、剛性マトリックスの特異性に注目する方法により、弾性座屈の問題を、数値解析的に簡単に(既存の計算機プログラムのわずかな修正のみで)、解く方法に到達したことは、永年の課題である塑性不安定の問題に、再度挑戦することを勇気づけるものであった。

筆者らの見解によれば、弾性座屈の問題は、局部的な座屈が考えられるにしても、主に構造全体としての変形の枝分れ(bifurcation)ないしは変形経路上における最大荷重点(maximum load point)の問題として扱えることができる。数値解析上、このような枝分れおよび最大荷重の二つの極限荷重点は、構造全体の剛性マトリックスが特異となる時点である。そし

て極限荷重点での固有変形モード(eigenmode)を微小擾乱として与え、剛性マトリックスの位(rank)を回復する方法により、変形の状態を、容易に枝分れあるいは最大荷重点を越えた範囲での軌道にのせることができるのである¹³⁾⁻¹⁵⁾

以上とは対照的に、ここでは塑性不安定を、要素レベルにおける剛性マトリックスの特異性による局部的なものとして問題を解明したいと思う。要素レベルとは、有限要素分割によって得られる各要素の状態(物理的には結晶粒レベルの状態)に注目するという意味である。もちろん、単軸引張試験の平行部におけるような一様な変形状態のもとでは、不安定変形の開始(initiation)の時点で、要素レベルでみたものと全体としての変形との間に差異はない。なお、本稿での考え方は、コンピュータによる数値実験に裏付けられて、初めて完全なものとなる性格を有している。これは、数値解析の理論に例外なく要求される重要なことからであるが、ここでは理論的考察のみを述べ、実施中の数値実験の結果については、別報にゆずることとした。

2. 弾塑性応力-ひずみ関係式

σ_1 と σ_2 を主応力とする平面応力場を考えると、増分形の弾塑性応力-ひずみ関係式は、次のように表わされる(たとえば文献10の第3章の式(106)を参照)。

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 &= \left(\frac{E}{1-\nu^2} - \frac{S_1^2}{S} \right) \dot{\epsilon}_1 + \left(\frac{\nu E}{1-\nu^2} - \frac{S_1 S_2}{S} \right) \dot{\epsilon}_2 \\ &= \frac{E}{(1-\nu^2)S} \left[\left(\frac{4}{9} H' \bar{\sigma}^2 + E \sigma_2'^2 \right) \dot{\epsilon}_1 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{4}{9} \nu H' \bar{\sigma}^2 - E \sigma_1' \sigma_2' \right) \dot{\epsilon}_2 \right] \\ \dot{\sigma}_2 &= \left(\frac{\nu E}{1-\nu^2} - \frac{S_1 S_2}{S} \right) \dot{\epsilon}_1 + \left(\frac{E}{1-\nu^2} - \frac{S_2^2}{S} \right) \dot{\epsilon}_2 \\ &= \frac{E}{(1-\nu^2)S} \left[\left(\frac{4}{9} \nu H' \bar{\sigma}^2 - E \sigma_1' \sigma_2' \right) \dot{\epsilon}_1 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{4}{9} H' \bar{\sigma}^2 + E \sigma_1'^2 \right) \dot{\epsilon}_2 \right] \end{aligned} \quad (1)$$

*東京大学生産技術研究所 第1部

**センチュリ・リサーチセンター

ただし

$$S_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\sigma'_1 + \nu \sigma'_2) \quad (2)$$

$$S_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \sigma'_1 + \sigma'_2)$$

$$S = \frac{4}{9} H' \bar{\sigma}^2 + S_1 \sigma'_1 + S_2 \sigma'_2 \quad (3)$$

$$= \frac{4}{9} H' \bar{\sigma}^2 + \frac{E}{1-\nu^2} (\sigma_1'^2 + 2\nu \sigma_1' \sigma_2' + \sigma_2'^2)$$

式(1)は、弾性等方性を仮定したものであるが、塑性変形に関しては、Hillの2次式の異方性材料にまで及んで適用することができる。式(1)の逆関係は⁹⁾

$$\dot{\epsilon}_1 = \left(\frac{1}{E} + \frac{9\sigma_1'^2}{4H'\bar{\sigma}^2} \right) \dot{\sigma}_1 + \left(-\frac{\nu}{E} + \frac{9\sigma_1'\sigma_2'}{4H'\bar{\sigma}^2} \right) \dot{\sigma}_2 \quad (4)$$

$$\dot{\epsilon}_2 = \left(-\frac{\nu}{E} + \frac{9\sigma_1'\sigma_2'}{4H'\bar{\sigma}^2} \right) \dot{\sigma}_1 + \left(\frac{1}{E} + \frac{9\sigma_2'^2}{4H'\bar{\sigma}^2} \right) \dot{\sigma}_2$$

上の諸式において、 E は縦弾性係数、 ν はポアソン比、 F 、 G および H を直交塑性異方性パラメータとして、 σ_1' と σ_2' は

$$\sigma_1' = \frac{(G+H)\sigma_1 - H\sigma_2}{F+G+H} \quad (5)$$

$$\sigma_2' = \frac{(F+H)\sigma_2 - H\sigma_1}{F+G+H}$$

H' は、相当応力($\bar{\sigma}$)—相当塑性ひずみ($\int d\bar{\epsilon}^p$) 曲線のこう配を表わす*。Hillの異方性材料の平面応力場における相当応力 $\bar{\sigma}$ の定義は、主応力で表示して

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2(F+G+H)} \left[(G+H)\sigma_1^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 + (F+H)\sigma_2^2 \right] \quad (6)$$

とくに等方性材料($F=G=H$)では、式(5)の σ_1' と σ_2' が次のように偏差応力に帰一する。

$$\sigma_1' = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{3}, \quad \sigma_2' = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1}{3} \quad (7)$$

相当応力 $\bar{\sigma}$ は

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma_1'^2 - \sigma_1'\sigma_2' + \sigma_2'^2 \quad (8)$$

また、等方性材料での H' は、板材の面から任意の方向に採取した試料の単軸引張応力—塑性ひずみ曲線に引いた接線のこう配である。 H' はひずみ硬化率ともよばれる。

応力が σ_1 のみの単軸応力場においては、式(5)および式(6)に $\sigma_2 = 0$ 、 $\dot{\sigma}_2 = 0$ とおき

$$\sigma_1' = \frac{G+H}{F+G+H} \sigma_1, \quad \sigma_2' = -\frac{H}{F+G+H} \sigma_1 \quad (9)$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} \frac{G+H}{F+G+H} \sigma_1^2 \quad (10)$$

ゆえに、式(4)から

$$\dot{\epsilon}_1 = \left(\frac{1}{E} + \frac{3}{2H'} \frac{G+H}{F+G+H} \right) \dot{\sigma}_1 \quad (11)$$

$$\dot{\epsilon}_2 = -\left(\frac{\nu}{E} + \frac{3}{2H'} \frac{H}{F+G+H} \right) \dot{\sigma}_1 \quad (11)_2$$

とくに、等方性材料の単軸応力 σ_1 の場合では

$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{E+H'}{EH'} \dot{\sigma}_1, \quad \dot{\epsilon}_2 = -\frac{E+2\nu H'}{2EH'} \dot{\sigma}_1 \quad (12)$$

3. 最大荷重点と拡散くびれ

主方向の荷重を P_1 および P_2 、主方向に垂直な面の変形後の断面積を A_1 および A_2 とすると

$$P_1 = A_1 \sigma_1, \quad P_2 = A_2 \sigma_2$$

したがって、荷重増分に対しては

$$\frac{\dot{P}_1}{A_1} = \dot{\sigma}_1 + \frac{\dot{A}_1}{A_1} \sigma_1, \quad \frac{\dot{P}_2}{A_2} = \dot{\sigma}_2 + \frac{\dot{A}_2}{A_2} \sigma_2 \quad (13)$$

質量保存則から、主方向の長さを l_1 および l_2 として、次の関係が成立する。

$$\rho A_1 l_1 = \rho A_2 l_2 = \text{一定}$$

したがって

$$\frac{\dot{A}_1}{A_1} = -\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \dot{\epsilon}_1 \right), \quad \frac{\dot{A}_2}{A_2} = -\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \dot{\epsilon}_2 \right) \quad (14)$$

ただし $\dot{\epsilon}_1 = \dot{l}_1/l_1$, $\dot{\epsilon}_2 = \dot{l}_2/l_2$

塑性変形の非圧縮性を仮定すれば、密度 ρ の変化はすべて弾性変形によるものとなるので

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3) = -\frac{1-2\nu}{E} (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2) \quad (15)$$

式(14)と式(15)の関係を式(13)に代入すれば

$$\frac{\dot{P}_1}{A_1} = \dot{\sigma}_1 + \frac{1-2\nu}{E} (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2) \sigma_1 - \dot{\epsilon}_1 \sigma_1 \quad (16)$$

$$\frac{\dot{P}_2}{A_2} = \dot{\sigma}_2 + \frac{1-2\nu}{E} (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2) \sigma_2 - \dot{\epsilon}_2 \sigma_2$$

ここで前節で得た式(4)の $\dot{\epsilon}_1$ と $\dot{\epsilon}_2$ を式(16)に代入し、以下の式の表示を簡単にするため、パラメータ

$$\lambda = \dot{\sigma}_2 / \dot{\sigma}_1 \quad (17)$$

を用いると、次の結果が得られる。

$$\frac{\dot{P}_1}{A_1} = \left[1 + \frac{1-2\nu}{E} (1+\lambda) \sigma_1 \right] \dot{\sigma}_1 - \left[\left(\frac{1}{E} + \frac{9\sigma_1'^2}{4H'\bar{\sigma}^2} \right) + \left(-\frac{\nu}{E} + \frac{9\sigma_1'\sigma_2'}{4H'\bar{\sigma}^2} \right) \lambda \right] \sigma_1 \dot{\sigma}_1 \quad (18)$$

$$\frac{\dot{P}_2}{A_2} = \left[\lambda + \frac{1-2\nu}{E} (1+\lambda) \sigma_2 \right] \frac{\dot{\sigma}_2}{\lambda} - \left[\left(-\frac{\nu}{E} + \frac{9\sigma_1'\sigma_2'}{4H'\bar{\sigma}^2} \right) + \left(\frac{1}{E} + \frac{9\sigma_2'^2}{4H'\bar{\sigma}^2} \right) \lambda \right] \sigma_2 \frac{\dot{\sigma}_2}{\lambda} \quad (19)$$

比例負荷の状態のもとにおいて、荷重最大の条件は $\dot{P}_1 = \dot{P}_2 = 0$ によって規定される。したがって上の二つの式から

$$1 + \frac{(1-\nu)\lambda - 2\nu}{E} \sigma_1 - \frac{9\sigma_1'(\sigma_1' + \lambda\sigma_2')}{4H'\bar{\sigma}^2} \sigma_1 = 0$$

$$\lambda + \frac{1-\nu - 2\nu\lambda}{E} \sigma_2 - \frac{9\sigma_2'(\sigma_1' + \lambda\sigma_2')}{4H'\bar{\sigma}^2} \sigma_2 = 0 \quad (20)$$

式(20)から

* H' は塑性異方性パラメータ H には関係のない量であることに注意されたい。

$$\frac{1 + [(1-\nu)\lambda - 2\nu]\sigma_1/E}{\lambda + [1-\nu - 2\nu\lambda]\sigma_2/E} = \frac{\sigma'_1 \sigma_1}{\sigma'_2 \sigma_2}$$

λ について解けば

$$\lambda = \frac{\dot{\sigma}_2}{\dot{\sigma}_1} = \frac{E\sigma'_2\sigma_2 - \sigma_1\sigma_2[2\nu\sigma'_2 + (1-\nu)\sigma'_1]}{E\sigma'_1\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2[2\nu\sigma'_1 + (1-\nu)\sigma'_2]} \quad (21)$$

一方において、式(20)から H' の表示を求めると

$$4H'\bar{\sigma}^2 = \frac{9\sigma'_1(\sigma'_1 + \lambda\sigma'_2)\sigma_1}{1 + [(1-\nu)\lambda - 2\nu]\sigma_1/E} \quad (22)$$

または

$$4H'\bar{\sigma}^2 = \frac{9\sigma'_2(\sigma'_1 + \lambda\sigma'_2)\sigma_2}{\lambda + [1-\nu - 2\nu\lambda]\sigma_2/E} \quad (23)$$

式(21)の λ を式(22)または式(23)に代入すれば、比例負荷の状態に到達した最大荷重点における材料のひずみ硬化率 H' を、そのときの二軸応力状態 σ_1 と σ_2 、あるいは σ_1 と両主応力の比

$$\xi = \sigma_2/\sigma_1 \quad (24)$$

の関数として与える表示式が得られる。

簡単のため弾性オーダの微小項を無視すれば、式(21)から

$$\lambda = \frac{\sigma'_2\sigma_2}{\sigma'_1\sigma_1} \quad (25)$$

式(22)または式(23)に代入し、同様に弾性オーダの項を無視すれば

$$4H'\bar{\sigma}^2 = 9\sigma'_1\left(\sigma'_1 + \frac{\sigma'_2\sigma_2}{\sigma'_1\sigma_1}\right)\sigma_1 = 9(\sigma'^2_1\sigma_1 + \sigma'^2_2\sigma_2) \quad (26)$$

上の式に、式(5)を代入すれば

$$H' = \frac{9}{4\bar{\sigma}^2(F+G+H)^2} [(G+H)^2\sigma'^2_1 - H(2G+H)\sigma'^2_2\sigma_2 - H(2F+H)\sigma_1\sigma'^2_2 + (F+H)^2\sigma'^2_2] \quad (27)$$

$F = G$ の面内等方性材料では

$$H' = \frac{9(\sigma_1 + \sigma_2)}{4\bar{\sigma}^2(2F+H)^2} [(F+H)^2\sigma'^2_1 - (F^2 + 4HF + 2H^2)\sigma_1\sigma_2 + (F+H)^2\sigma'^2_2] \quad (28)$$

面内等方性材料についてのLankfordの r 値

$$r = \frac{H}{F} = \frac{H}{G}$$

を用いると、式(28)は

$$H' = \frac{9(\sigma_1 + \sigma_2)}{4\bar{\sigma}^2(2+r)^2} [(1+r)^2\sigma'^2_1 - (1+4r+2r^2)\sigma_1\sigma_2 + (1+r)^2\sigma'^2_2] \quad (29)$$

ただし式(6)により

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2(2+r)} [(1+r)\sigma'^2_1 - 2r\sigma_1\sigma_2 + (1+r)\sigma'^2_2] \quad (30)$$

特別な場合として、等方性材料 ($r=1$) では

$$H' = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)(4\sigma'^2_1 - 7\sigma_1\sigma_2 + 4\sigma'^2_2)}{4\bar{\sigma}^2} \quad (31)$$

これは、Swiftの拡散くびれ(diffuse neck)の条件式として知られている関係である!^{1,2)}

以上の結果は、式(16)に式(4)を代入して得た関係式(18)と式(19)を用い、これに比例負荷における荷重最大の条件 $\dot{P}_1 = \dot{P}_2 = 0$ を適用して導かれたものである。

一方において、式(16)に式(1)の表示を代入して得られる関係は

$$\frac{\dot{P}_1}{A_1} = \frac{E}{(1-\nu^2)S} \left[1 + \frac{1-2\nu}{E}(1+\lambda)\sigma_1 \right] \times \left[\left(\frac{4}{9}H'\bar{\sigma}^2 + E\sigma'^2_1 \right) \dot{\epsilon}_1 + \left(\frac{4}{9}\nu H'\bar{\sigma}^2 - E\sigma'_1\sigma'_2 \right) \dot{\epsilon}_2 \right] - \dot{\epsilon}_1\sigma_1 \quad (32)$$

$$\frac{\dot{P}_2}{A_2} = \frac{E}{(1-\nu^2)S} \left[1 + \frac{1-2\nu}{E} \left(\frac{1}{\lambda} + 1 \right) \sigma_2 \right] \times \left[\left(\frac{4}{9}\nu H'\bar{\sigma}^2 - E\sigma'_1\sigma'_2 \right) \dot{\epsilon}_1 + \left(\frac{4}{9}H'\bar{\sigma}^2 + E\sigma'^2_2 \right) \dot{\epsilon}_2 \right] - \dot{\epsilon}_2\sigma_2 \quad (33)$$

式(32)と式(33)において自明の微小項を無視すると

$$\frac{\dot{P}_1}{A_1} = \left[\frac{E}{(1-\nu^2)S} \left(\frac{4}{9}H'\bar{\sigma}^2 + E\sigma'^2_1 \right) - \sigma_1 \right] \dot{\epsilon}_1 + \frac{E}{(1-\nu^2)S} \left(\frac{4}{9}\nu H'\bar{\sigma}^2 - E\sigma'_1\sigma'_2 \right) \dot{\epsilon}_2 \quad (34)$$

$$\frac{\dot{P}_2}{A_2} = \frac{E}{(1-\nu^2)S} \left(\frac{4}{9}\nu H'\bar{\sigma}^2 - E\sigma'_1\sigma'_2 \right) \dot{\epsilon}_1 + \left[\frac{E}{(1-\nu^2)S} \left(\frac{4}{9}H'\bar{\sigma}^2 + E\sigma'^2_2 \right) - \sigma_2 \right] \dot{\epsilon}_2 \quad (35)$$

比例負荷における最大荷重の条件 $\dot{P}_1 = \dot{P}_2 = 0$ を用い、さらに弾性オーダの微小項を無視すると、式(34)と式(35)からも容易に式(26)の関係が導かれることがわかる。

式(32)と式(33)、あるいは式(34)と式(35)はまとめて次の形に表示することができる。

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1/A_1 \\ \dot{P}_2/A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ \dot{\epsilon}_2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

ここで、ひずみ速度比

$$\mu = \dot{\epsilon}_2/\dot{\epsilon}_1 \quad (37)$$

を導入すれば、式(36)から

$$\frac{\dot{P}_1}{A_1} = (D_{11} + \mu D_{12}) \dot{\epsilon}_1, \quad \frac{\dot{P}_2}{A_2} = \left(\frac{D_{21}}{\mu} + D_{22} \right) \dot{\epsilon}_2 \quad (38)$$

したがって、最大荷重の条件は、式(38)において、右辺の括弧内の係数が同時に零となる条件として理解することができるのである。

ここで最大荷重点に達すれば実際に拡散くびれを生じるか否か、あるいは最大荷重点の以前ではそのようなくびれを生じることがないか否かの検証は、数値実験にまたなければならぬことを述べておかなければならない。しかも検証は、試験片に初めから初期不整を与えておく方法³¹⁻³³⁾でなく、最初は完全性を保有する系に、変形の各段階で適当な局部的変形を攪乱として与える方法によって実行しなければならない。

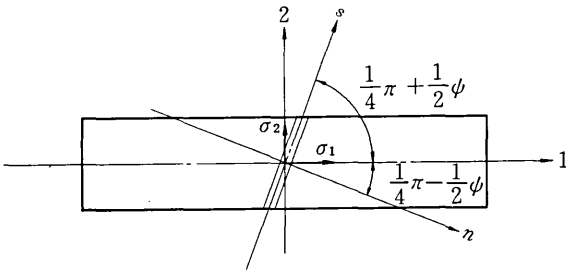


図1 平面応力場における局部くびれ

4. 局部くびれ発生の不安定条件

図1のように、主方向1および2に対して傾きを有する直交2方向をnおよびsとすれば、応力の変換式により、ns-座標における応力変化率は

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_n &= \frac{1}{2}\dot{\sigma}_1(1+\sin\psi) + \frac{1}{2}\dot{\sigma}_2(1-\sin\psi) \\ \dot{\sigma}_s &= \frac{1}{2}\dot{\sigma}_1(1-\sin\psi) + \frac{1}{2}\dot{\sigma}_2(1+\sin\psi) \\ \dot{\tau}_{ns} &= \frac{1}{2}(\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2)\cos\psi \end{aligned} \quad (39)$$

式(17)の応力変化率比 $\lambda = \dot{\sigma}_2 / \dot{\sigma}_1$ を用いて表示すると

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_n &= \frac{1}{2}[(1+\lambda) + (1-\lambda)\sin\psi]\dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_s &= \frac{1}{2}[(1+\lambda) - (1-\lambda)\sin\psi]\dot{\sigma}_1 \\ \dot{\tau}_{ns} &= \frac{1}{2}(1-\lambda)\dot{\sigma}_1\cos\psi \end{aligned} \quad (40)$$

同様に、ひずみ速度については

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_n &= \frac{1}{2}[(1+\mu) + (1-\mu)\sin\psi]\dot{\epsilon}_1 \\ \dot{\epsilon}_s &= \frac{1}{2}[(1+\mu) - (1-\mu)\sin\psi]\dot{\epsilon}_1 \\ \dot{\gamma}_{ns} &= (1-\mu)\dot{\epsilon}_1\cos\psi \end{aligned} \quad (41)$$

ただし、 μ は式(37)によって定義したひずみ速度比である。式(4)を式(37)の μ の表示に代入し、式(17)で与えられるパラメータ λ を用いると

$$\mu = \frac{-\frac{\nu}{E} + \frac{9\sigma_1'\sigma_2'}{4H\bar{\sigma}^2} + \lambda\left(\frac{1}{E} + \frac{9\sigma_2'^2}{4H\bar{\sigma}^2}\right)}{\frac{1}{E} + \frac{9\sigma_1'^2}{4H\bar{\sigma}^2} + \lambda\left(-\frac{\nu}{E} + \frac{9\sigma_1'\sigma_2'}{4H\bar{\sigma}^2}\right)} \quad (42)$$

式(42)を式(41)に代入すると、次の結果が得られる。

$$\frac{2\dot{\epsilon}_n}{\dot{\epsilon}_1}C = A + B\sin\psi, \quad \frac{2\dot{\epsilon}_s}{\dot{\epsilon}_1}C = A - B\sin\psi \quad (43)$$

$$\frac{\dot{\gamma}_{ns}}{\dot{\epsilon}_1}C = B\cos\psi \quad (44)$$

ただし

$$A = \frac{1-\nu}{E} + \frac{9\sigma_1'(\sigma_1'+\sigma_2')}{4H\bar{\sigma}^2} + \lambda\left[\frac{1-\nu}{E}$$

$$+ \frac{9\sigma_2'(\sigma_1'+\sigma_2')}{4H\bar{\sigma}^2}\right] \quad (45)$$

$$B = \frac{1+\nu}{E} + \frac{9\sigma_1'(\sigma_1'-\sigma_2')}{4H\bar{\sigma}^2} + \lambda\left[-\frac{1+\nu}{E} + \frac{9\sigma_2'(\sigma_1'-\sigma_2')}{4H\bar{\sigma}^2}\right] \quad (46)$$

$$C = \frac{\dot{\epsilon}_1}{\dot{\sigma}_1} = \frac{1}{E} + \frac{9\sigma_1'^2}{4H\bar{\sigma}^2} + \lambda\left(-\frac{\nu}{E} + \frac{9}{4}\frac{\sigma_1'\sigma_2'}{H\bar{\sigma}^2}\right) \quad (47)$$

ここで、式(40)や式(41)に含まれている角度 ψ が次のように与えられるものとする。

$$\sin\psi = \frac{\sigma_1'+\sigma_2'}{\sigma_1'-\sigma_2'} = \frac{G\sigma_1+F\sigma_2}{(G+2H)\sigma_1-(F+2H)\sigma_2} \quad (48)$$

式(48)で与えられる角度 ψ の方向は、剛塑性体の平面応力場の理論において、特性曲線の方向として知られているものである^{2),16)}

式(48)を式(43)に代入すれば、パラメータA, BおよびCが式(45)~式(47)で与えられることに注意して

$$\begin{aligned} \frac{2\dot{\epsilon}_n}{\dot{\epsilon}_1}C &= \frac{2\dot{\epsilon}_n}{\dot{\sigma}_1} = \frac{1-\nu}{E}(1+\lambda) \\ &+ \frac{1+\nu}{E}(1-\lambda)\left[\frac{\sigma_1'+\sigma_2'}{\sigma_1'-\sigma_2'} + \frac{9(\sigma_1'+\sigma_2')}{2H\bar{\sigma}^2}(\sigma_1'+\lambda\sigma_2')\right] \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\dot{\epsilon}_s}{\dot{\epsilon}_1}C &= \frac{2\dot{\epsilon}_s}{\dot{\sigma}_1} = \frac{1-\nu}{E}(1+\lambda) \\ &- \frac{1+\nu}{E}(1-\lambda)\frac{\sigma_1'+\sigma_2'}{\sigma_1'-\sigma_2'} \end{aligned} \quad (50)$$

以上により、式(48)のように定義される角度 ψ を用いれば、図1においてsで与えられる方向の垂直ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_s$ は弾性変形のオーダの量であることがわかる。こうして、弾性変形のオーダの微小量を無視することになれば、式(49)と式(50)から

$$\begin{aligned} \frac{2\dot{\epsilon}_n}{\dot{\sigma}_1} &= \frac{9(G\sigma_1+F\sigma_2)}{2H\bar{\sigma}^2(F+G+H)^2}\{(G+H)\sigma_1-H\sigma_2 \\ &+ \lambda[(F+H)\sigma_2-H\sigma_1]\} \\ \dot{\epsilon}_s &= 0 \end{aligned} \quad (51)$$

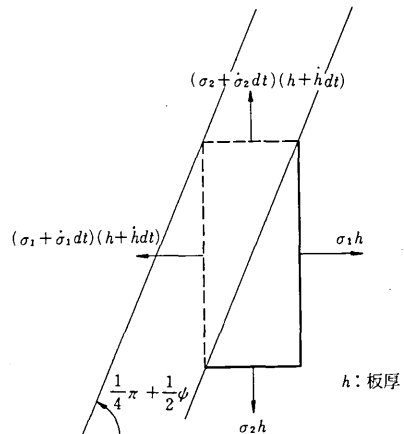


図2 くびれを挟む2領域の力のつり合い

ここでさらに図2を参照し、くびれを挟む二つの領域間の力のつり合いから、 $\dot{\epsilon}_s = 0$ の近似で、次の関係が成立することに注意する。

$$\sigma_1 h = (\sigma_1 + \dot{\sigma}_1 dt)(h + h \dot{d}t)$$

$$\sigma_2 h = (\sigma_2 + \dot{\sigma}_2 dt)(h + h \dot{d}t)$$

したがって高次の微小項を無視した近似において

$$\frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} = \frac{\dot{\sigma}_2}{\sigma_2} = -\frac{\dot{h}}{h} = -\dot{\epsilon}_s \quad (52)$$

ゆえに局部くびれ発生時の条件として

$$\lambda = \frac{\dot{\sigma}_2}{\dot{\sigma}_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \text{ または } \lambda = \xi \quad (53)$$

が成立することがわかる。式(53)を式(51)に代入し、また平面応力場の相当応力 $\bar{\sigma}$ が式(6)で与えられることを用いると

$$\frac{2\dot{\epsilon}_n}{\dot{\sigma}_1} = \frac{3(G\sigma_1 + F\sigma_2)}{H'(F+G+H)\sigma_1} \quad (54)$$

次に、図1における n 方向の荷重を P_n 、それに垂直な面の断面積を A_n とすれば、 P_n の変化率とEulerの真応力の変化率 $\dot{\sigma}_n$ の間に次の関係が成立することに注目する*

$$\frac{\dot{P}_n}{A_n} = \dot{\sigma}_n - \frac{\dot{\rho}}{\rho} \sigma_n - \frac{\partial v_n}{\partial n} \sigma_n - \frac{\partial v_n}{\partial s} \tau_{ns}$$

弾性オーダの微小な項を無視し、さらに n 方向の速度 v_n を s に無関係とすれば、 $\partial v_n / \partial n = \dot{\epsilon}_n$ に注意して

$$\frac{\dot{P}_n}{A_n} = \dot{\sigma}_n - \dot{\epsilon}_n \sigma_n = \dot{\sigma}_n \left(1 - \dot{\epsilon}_n \frac{\sigma_n}{\dot{\sigma}_n}\right) \quad (55)$$

式(53)を用いると、 $\sigma_n / \dot{\sigma}_n = \sigma_1 / \dot{\sigma}_1$ が成立するので

$$\frac{\dot{P}_n}{A_n} = \dot{\sigma}_n \left(1 - \dot{\epsilon}_n \frac{\sigma_1}{\dot{\sigma}_1}\right) \quad (56)$$

式(54)を代入すると

$$\frac{\dot{P}_n}{A_n} = \dot{\sigma}_n \left[1 - \frac{3(G\sigma_1 + F\sigma_2)}{2H'(F+G+H)}\right] \quad (57)$$

局部くびれの条件を、ここで n 方向における剛性が零、すなわち式(48)の ψ によって図1のように定まる n 方向において荷重の変化 \dot{P}_n が零となるような変形段階と定義すれば** 式(57)から $\dot{P}_n = 0$ に対応して

$$H' = \frac{3(G\sigma_1 + F\sigma_2)}{2(F+G+H)} \quad (58)$$

とくに等方性材料($F=G=H$)では

$$H' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (59)$$

式(59)は等方性材料におけるHillの局部くびれ(localized neck)発生条件式として知られている関係である。ここではそれが、 $\dot{P}_n = 0$ の条件から、弾性オー

ダの微小項を無視した近似において導かれたことに注目したい。

上で取り扱った局部くびれ変形発生時における主方向の外荷重変化率の表示式は、式(18)と式(19)に式(53)の関係を代入し、さらに弾性オーダの微小項を無視すれば、次のようになる。

$$\frac{\dot{P}_1}{A_1} = \left[1 - \frac{9\sigma_1'(\sigma_1'\sigma_1 + \sigma_2'\sigma_2)}{4H'\bar{\sigma}^2}\right] \dot{\sigma}_1 \quad (60)$$

$$\frac{\dot{P}_2}{A_2} = \left[1 - \frac{9\sigma_2'(\sigma_1'\sigma_1 + \sigma_2'\sigma_2)}{4H'\bar{\sigma}^2}\right] \dot{\sigma}_2$$

一方において、式(47)から、同じく微小項を無視した近似および式(53)を用いることにより

$$\frac{\dot{\epsilon}_1}{\dot{\sigma}_1} = \frac{9\sigma_1'(\sigma_1'\sigma_1 + \sigma_2'\sigma_2)}{4H'\bar{\sigma}^2\sigma_1}$$

同様に

$$\frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\sigma}_2} = \frac{9\sigma_2'(\sigma_1'\sigma_1 + \sigma_2'\sigma_2)}{4H'\bar{\sigma}^2\sigma_2}$$

上の関係を式(60)に代入して $\dot{\sigma}_1$ と $\dot{\sigma}_2$ を消去し、 σ_1' と σ_2' が式(5)によって与えられることを用いると

$$\frac{\dot{P}_1}{A_1} = \left[\frac{2H'(F+G+H)\sigma_1}{3(G+H)\sigma_1 - H\sigma_2} - \sigma_1\right] \dot{\epsilon}_1 \quad (61)$$

$$\frac{\dot{P}_2}{A_2} = \left[\frac{2H'(F+G+H)\sigma_2}{3(F+H)\sigma_2 - H\sigma_1} - \sigma_2\right] \dot{\epsilon}_2$$

式(61)は、外荷重経路が指定された形の負荷条件のもとで、局部くびれ変形を発生した場合の主ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_1$ と $\dot{\epsilon}_2$ を与える関係式となっている。

これに対し、局部くびれを生じることなく、変形が一樣な状態を維持する場合の $\dot{\epsilon}_1$ と $\dot{\epsilon}_2$ の表示は、弾性オーダの微小量を無視した次の近似式

$$\frac{\dot{P}_1}{A_1} = \dot{\sigma}_1 - \dot{\epsilon}_1 \sigma_1, \quad \frac{\dot{P}_2}{A_2} = \dot{\sigma}_2 - \dot{\epsilon}_2 \sigma_2 \quad (62)$$

と式(4)とから求めることができる。この場合、式(4)においても弾性オーダの項を無視することにすれば、 $\dot{\epsilon}_1 / \dot{\epsilon}_2 = \sigma_1' / \sigma_2'$ となり、この関係に注意すると一樣な変形を続ける場合の $\dot{\epsilon}_1$ と $\dot{\epsilon}_2$ の解として、次の結果が導かれる。

$$\dot{\epsilon}_1 = \left(\sigma_1'^2 \frac{\dot{P}_1}{A_1} + \sigma_1' \sigma_2' \frac{\dot{P}_2}{A_2}\right) / T \quad (63)$$

$$\dot{\epsilon}_2 = \left(\sigma_1' \sigma_2' \frac{\dot{P}_1}{A_1} + \sigma_2'^2 \frac{\dot{P}_2}{A_2}\right) / T$$

ただし

$$T = \frac{4}{9} H' \bar{\sigma}^2 - (\sigma_1'^2 \sigma_1 + \sigma_2'^2 \sigma_2) \quad (64)$$

式(64)は、当然のことであるが、式(64)と式(63)を $\dot{\epsilon}_1$ と $\dot{\epsilon}_2$ について解くことによっても、同様の近似で導くことのできる関係である。

式(61)から得られる荷重-ひずみ曲線は、一般に式(63)から得られるそれとは一致しない。したがって、局部くびれを生じて後は、荷重-ひずみ曲線のこう配に不

* 文献10の第2章の式76を参照。

** 詳しく述べると剛塑性近似の特性曲線方向として、潜在的に局部くびれ発生の可能性のある方向に対し、それに垂直な方向の剛性が零となることによって、局部くびれが誘起されるものと仮定することにあたる。

連続が起り、元の曲線の延長にはならないことが予測される。しかし、単軸試験は例外であって、 $\sigma_2 = 0$ および $\dot{P}_2 = 0$ を式(63)に代入し、単軸応力場の σ_1, σ_2 および相当応力 $\bar{\sigma}$ が式(9)と式(10)で与えられることを用いると

$$\left(\frac{2}{3} \frac{F+G+H}{G+H} H' - \sigma_1\right) \dot{\epsilon}_1 = \frac{\dot{P}_1}{A_1} \quad (65)$$

式(65)は、式(61)の第1式に $\sigma_2 = 0$ の条件を代入して得られる関係に一致する。この結果はまた、式(11)において弾性ひずみのオーダの項 $1/E$ を無視して得られる関係とも矛盾しない。こうして、単軸引張試験では、局部くびれ発生後も、荷重-ひずみあるいは伸び曲線が、くびれ発生前の延長のごとき観を呈するのである。

引張試験あるいは一般に比例負荷の条件のもとで、拡散くびれの発生がつねに局部くびれに先立つことが知られている²⁾。このことを、本稿で取り扱った塑性異方性材料について検証すると、拡散くびれ発生時のひずみ硬化率は、高次の微小項を無視した近似において式(27)で与えられ、これを H_a で表わすことにする。一方において、局部くびれ発生の条件は式(58)の硬化率によって定まり、これを H_b とする。したがって検証すべき条件は

$$H_b \leq H_a$$

式(27)と式(58)の共通因子を約して

$$G\sigma_1 + F\sigma_2 \leq \frac{3}{2\sigma^2(F+G+H)} [(G+H)^2\sigma_1^2 - H(2G+H)\sigma_1\sigma_2 - H(2F+H)\sigma_1\sigma_2^2 + (F+H)^2\sigma_2^2] \quad (66)$$

一方において、局部くびれ発生のためには、式(48)で与えられる角度 ψ が実 (real) でなければならないので

$$-1 \leq \frac{G\sigma_1 + F\sigma_2}{(G+2H)\sigma_1 - (F+2H)\sigma_2} \leq 1$$

したがって

$$0 \geq (G+H)\sigma_1 - H\sigma_2, \quad 0 \geq H\sigma_1 - (F+H)\sigma_2 \quad (67)_1$$

または

$$0 \leq (G+H)\sigma_1 - H\sigma_2, \quad 0 \leq H\sigma_1 - (F+H)\sigma_2 \quad (67)_2$$

式(66)から得られる関係は

$$0 \leq (G+H)H\sigma_1^3 - (FG+FH+H^2)\sigma_1^2\sigma_2 - (FG+GH+H^2)\sigma_1\sigma_2^2 + (F+H)H\sigma_2^3$$

または

$$0 \leq (\sigma_1 + \sigma_2)[(G+H)H\sigma_1^2 - (FG+GH+HF+2H^2)\sigma_1\sigma_2 + (F+H)H\sigma_2^2] \quad (68)$$

応力が $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$ を満足する場では、簡単な計算により、式(67)と式(68)の条件の一致することがわかる。

むすび

本稿では、弾塑性問題で用いられている増分形の構成方程式を出発点として、塑性不安定の問題が、有限

要素分割における要素レベルでの剛性低下として把握できることを示した。拡散くびれの発生は、比例負荷のもとにおいて、二つの主方向における要素剛性が零となる点としてとらえることができ、一方において局部くびれは、剛塑性体の応力場の特性曲線に垂直な方向の剛性が零となる瞬間において可能になるものと考えられる。そして、ここでの理論は、弾性ひずみのオーダの微小量を無視した近似において、剛塑性体における Swift の拡散くびれの条件、および Hill の局部くびれの条件を特別な場合として含んでいる。

以上のような条件が満足されるならば、実際にくびれが発生するであろうか。あるいは発生のためには、どのような攪乱があれば、または与えられればよいか、これは実際に実験を行なう場合にも、またコンピュータによって数値実験を行なう場合にも、別個に検討すべき事項である。しかし、座屈など極限点の問題が、主として構造全体としての不安定に係わるものであるのに対し、引張りが支配的な応力場における塑性不安定は、構造内の局所での内部攪乱が引金となって生起すると考えるのが妥当ではなからうか。本稿の理論は、このことを明かにすることを目的としており、今後の数値実験によって、十分に確かめたいと考えている。

本稿では拡散くびれを比例負荷の条件のもとで論じたが、負荷の条件がひずみ制御型の場合には、式(18)と式(19)あるいは式(32)と式(33)において、 \dot{P}_1/A_1 あるいは \dot{P}_2/A_2 のいずれか一方が零となる条件をもって、拡散くびれ発生の時点とすることができる。たとえば $\dot{\epsilon}_2 = 0$ の平面ひずみ条件のもとでは、式(32)および式(33)から高次の微小項を無視して

$$\frac{\dot{P}_1}{A_1} = \frac{E}{(1-\nu^2)S} \left[\frac{4}{9} H\bar{\sigma}^2 + E\sigma_1^2 + (1-2\nu)(1+\lambda)\sigma_1\sigma_2^2 - \frac{1-\nu^2}{E} S\sigma_1 \right] \dot{\epsilon}_1 \quad (69)$$

$$\frac{\dot{P}_2}{A_2} = \frac{E}{(1-\nu^2)S} \left[\frac{4}{9} \nu H\bar{\sigma}^2 - E\sigma_1^2\sigma_2^2 - (1-2\nu)\left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2 \right] \dot{\epsilon}_1 \quad (70)$$

パラメータ S が式(3)で与えられることを用い、さらに微小項を無視することにすれば、式(69)が 0 となる条件から

$$H = \frac{9[(\sigma_1^2 + 2\nu\sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_2^2)\sigma_1 - (1-2\nu)(1+\lambda)\sigma_1\sigma_2^2 - E\sigma_1^2]}{4\sigma^2} \quad (71)$$

式(70)が 0 となる条件からは

$$H = \frac{9[E\sigma_1^2\sigma_2^2 + (1-2\nu)(1+1/\lambda)\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2]}{4\nu\sigma^2} \quad (72)$$

式(71)と式(72)のどちらが早く満足されるか否か、それは恐らく式(71)であろうが、正確には実際に数値解を求

めた上でなければ、結論を述べることはできない。式(7)に $\sigma_z = 0$ とおけば、その結果は比例負荷の式(26)に同様に $\sigma_z = 0$ において得られる関係に一致する。しかし、このような一致だけで、普通よく行なわれているように、比例負荷の場合ばかりでなく、平面ひずみその他のひずみ制御形の場合に式(27)の条件式を適用しようとすることにはなお検討の余地がある。

最近では、有限要素法によっていろいろな問題の数値解析が可能となってきている。したがって不安定問題の取扱いも、以前に考えられていたほど、至難のことではなくなったと思う。筆者らは、本稿で述べた塑性不安定の理論を指針として、一様な二軸応力場ばかりでなく、液圧バルジ試験にみられるような不均一応力場、さらに剛体工具によるプレス加工などを含めて、数値実験が進み、長年の問題に解答が与えられることを期待したい。著者ら自身もまた、開発した2次元大変形問題解析プログラムにより、数値実験を行なう計画であり、その結果を別の機会に発表したいと考えている。

(1975年5月13日受理)

参考文献

- 1) Swift, H. W., Plastic Instability Under Plane Stress, *J. Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 1, 1952, pp. 1-18.
- 2) Hill, R., On Discontinuous Plastic States, With Special Reference to Localized Necking in Thin Sheets, *J. Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 1, 1952, pp. 19-30
- 3) Sowerby R., and Duncan, J. L., Failure in Biaxial Tension, *Int. J. mech. Sci.*, Vol. 13, 1971, pp. 217-229.
- 4) Tadros, A. K., and Mellor, P. B., Some Comments

- on the Limit Strains in Sheet Metal Stretching, *Int. J. mech. Sci.*, Vol. 17, 1975, pp. 203-210.
- 5) W. H. Chen., Necking of a Bar, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 7, 1971, pp. 685-717.
- 6) Yamada, Y., and Aoki, I., On the Tensile Plastic Instability in Axi-symmetric Deformation of Sheet Metals, *Int. J. mech. Sci.*, Vol. 8, 1966, pp. 665-682.
- 7) 山田嘉昭, 青木至, 薄板の軸対称変形における塑性不安定について, 塑性と加工, Vol. 7, 1966, pp. 393-406.
- 8) 山田嘉昭, 弾塑性問題における剛性マトリクス, 生産研究, Vol. 19, No. 3, 1967, pp. 75-76.
- 9) 山田嘉昭, 弾塑性問題とマトリクス法, 生産研究, Vol. 20, No. 5, 1968, pp. 199-205.
- 10) 山田嘉昭, 塑性・粘弾性, コンピュータによる構造工学講座, II-2-A, 培風館, 1972.
- 11) Yamada, Y., Incremental Formulation for Problems with Geometric and Material Nonlinearities, *Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design*, UAH Press, The University of Alabama in Huntsville, 1972, pp. 325-355.
- 12) Yamada, Y., Takatsuka, K., and Iwata, K., Nonlinear Analysis by the Finite Element Method and Some Expository Examples, *Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis*, University of Tokyo Press, 1973, pp. 125-138.
- 13) Yamada, Y., Iwata, K., Kakimi, T. and Hosomura, T., Large Deformation and Critical Loads Analysis of Framed Structures, *Computational Methods in Non-linear Mechanics*, The Texas Institute for Computational Mechanics, 1974, pp. 819-828.
- 14) 岩田耕司, 山田嘉昭, 有限要素法による構造物の非線形安定性解析, 日本機械学会論文集, 第41巻に掲載予定.
- 15) 山田嘉昭, 岩田耕司, 有限要素法による不安定現象の解析, 日本鋼構造協会, 第9回大会研究集会, マトリクス構造解析法研究発表論文集, 1975, pp. 57-64.
- 16) 山田嘉昭, 塑性力学, 日刊工業新聞社, 1965.