



「ゼータ関数」

織田 孝幸 (数理科学研究科 教授)

ゼータ関数と呼ばれる数学的対象が初めて現れたのは、素数分布を論じたリーマン (Bernhard Riemann) の 1859 年の論文であろう。その定義である無限和

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad (\operatorname{Re}(s) > 1)$$

を、有限べき乗和 $\sum_{n=1}^k n^k$ (k は自然数) の変形・一般化と見なせば、江戸時代の数学者関孝和やベルヌーイ (Jacob Bernoulli) の研究したベルヌーイ数に起源があるとも言える。

この論文でリーマンは $\zeta(s)$ を経路積分によって書き直し、全複素 s -平面に有理型に解析接続し、さらに、 $\zeta(s)$ と $\zeta(1-s)$ とを結びつける関数等式や、特殊値と言われる $\zeta(2k)/\pi^{2k}$ や $\zeta(1-2k)$ (k は自然数) の値をベルヌーイ数で表す結果を得た。さらに素数分布を得る方針を提案する過程で、ゼータ関数の零点に関するリーマンの予想が述べられる。

リーマンのゼータ関数の一般化として、ディリクレ (Lejeune Dirichlet) の L -関数や、代数体のデデキンド (Richard Dedekind) のゼータ関数などがある。両者を統合して、ヒルベルト (David Hilbert) の弟子であった、ヘッケ (Erich Hecke) によって、ヘッケの L 関数が定義され、関数等式の証明なども彼が初めて行った。ヘッケの L 関数の性質は、高木貞治の相対類体論における基本的な等式の証明にも用いられた。ゲッチンゲン大学 (Georg-August-Universität Göttingen) にいたヘッケは一時期電子論に興味があったらしく、論文一篇がある。

ヘッケはフルヴィツ (Adolf Hurwitz) のアイデアを一般化して、 $SL(2, \mathbf{Z})$ の合同部分群保型形式の空間に、各素数に付随するヘッケ作用素と今日呼ばれるものを定義し、この同時固有ベクトルになる

保型形式にオイラー積をもつ L 関数を定義した。これを現在ヘッケ理論と呼ぶ。

戦後、アメリカに頭脳流出した日本人整数論研究者も大きく寄与したこの分野は、今やワイルス (Andrew Wiles) その他の、フェルマー予想の証明と結びつけて語られる。

19 世紀末の、クライン (Felix Christian Klein) やポアンカレ (Jules Henri Poincaré) の一変数の研究と同様に、多変数の場合も、高次元代数多様体、半単純代数群の表現論、トポロジーなど多くの分野と関わる。理論物理や少なくとも結晶解析などの実験物理とも関連する。

数理科学研究科で、ゼータ関数と関連する (つまり整数論の) 研究室は、織田孝幸のほか、齋藤毅・寺杣友秀・松本眞・辻雄・志甫淳、各氏の研究室である。



「モンテカルロ積分」

楽 詠瀬 (新領域創成科学研究科 助教, 情報科学科 兼任)

本コラムではコンピューターグラフィックス (CG) におけるモンテカルロ積分の利用について述べる。近年の映画などの映像産業では、CG が盛んに活用されており、高い写実性により実写と区別できない映像も多い。こうした映像制作では、物体や光源、カメラの配置などの数値データを入力とし、光の反射や散乱をシミュレーションして物体の見え方を求めることで、画像生成 (レンダリング) を行う。ある点から射出される輝度を求めるには、放射輸送方程式とよばれる積分方程式にしたがって、その点に入射するあらゆる光について、反射・散乱される成分を足し合わせる積分計算を行う。反射や散乱は通常複数回起こり、そのたびに積分が必要なので、高次元での積分となる。レンダリングでは、計算精度が画質に直結するため、こうした高次元で

の積分を高精度に行うことが重要である。

モンテカルロ積分は積分計算を確率的に行う数値計算法である。モンテカルロ積分では、積分領域内からランダムに複数のサンプル (光の入射方向や散乱までの距離などに対応) を選び、それらのサンプルでの関数値 (輝度) の平均 (期待値) を求めることによって、積分の近似値を求める。サンプル数が多いほど、この近似値は真の値に収束し、その収束速度は積分領域の次元によらない。この収束性と、計算効率が次元によらないという性質により、モンテカルロ積分はレンダリングに広く利用されるようになってきた。

積分計算を効率よく行うには、関数値の大きいところほど高確率にサンプリングすることが重要で、そのための手法が長年研究されている。たとえば、非均質

な煙の中を光が通過する場合、光の減衰効果を表す確率密度関数は複雑になるため、統計的に不偏かつ効率的にサンプリングすることは難しい。これに対して当研究室では、核物理学の方法と情報科学のデータ構造を利用した解決法を開発した。また、複数の反射や散乱を同時に考慮してサンプリングできると、さらに計算効率が上がると期待されるが、確率密度関数の構築が難しい場合が多い。これに対する一解決策として、MCMC (マルコフ連鎖モンテカルロ) 法の利用が注目を集めている。ただし、物体の材質や遮蔽の状況によっては性能が発揮できない場合があり、あらゆる場面でロバストに計算できる手法の開発が今後望まれている。



「トポロジカル絶縁体」

平原 徹 (物理学専攻 助教)

トポロジカル絶縁体とは、物質内部(バルク)では絶縁体なのに、その「エッジ」(2次元系なら端、3次元系なら表面)にスピン偏極した金属状態が生じている物質である。従来の絶縁体、半導体、金属という分類の枠に当てはまらない新物質として注目を集めている。

トポロジー(位相幾何学)とは、もの(図形)のつながり具合を表す数学の概念である。たとえばドーナツとマグカップは同じトポロジーに分類されるが、球はされない。これはドーナツを連続的にマグカップに変形できるが、球にするには穴を埋める必要があるからである。実はこの概念は物理学に適用でき、これまで2次元半導体において低温強磁場下で実現される量子ホール効果が知られ

ていた。この場合、量子化されたホール抵抗の整数値が上記の“トポロジー”に対応する。また量子ホール効果状態では物質内部は絶縁体だがエッジに金属的な状態が必ず存在する。これはエッジがトポロジーの異なる2つの相(真空とバルク)の境界であることに由来し、不純物など乱れの影響を受けない。

いっぽう物質にはスピン軌道相互作用という内部磁場のようなものがある。そこで外部磁場が無くても、スピン軌道相互作用の効果で新たなトポロジカル相が発現することが2005年に予言された。これがトポロジカル絶縁体であり、低温強磁場下でなくても、さらに3次元物質でも実現される。特筆すべきは、強いスピン軌道相互作用とエッジにおける反

転対称性の破れにより、バルクは非磁性だがトポロジカル絶縁体の金属的エッジ状態はスピン偏極する点である。その直線的な分散と合わせて“スピン偏極ディラック粒子”とよばれる。

トポロジカル絶縁体は学術・応用両観点から興味深い。たとえば上記のスピン偏極エッジ状態を用いたスピントロニクス応用が期待できる。また磁性体や超伝導体と接合した際には、これまで自然界で存在が確認されていない磁気単極子やマヨラナ粒子が生成でき、量子コンピュータに应用可能と言われている。

物理学専攻ではトポロジカル絶縁体に関して、青木秀夫・小形正男両研究室で理論、長谷川修司研究室で実験の研究に取り組んでいる。



「AGB 星」

田辺 俊彦(天文学教育研究センター 助教)

星は誕生してから時間と共にその姿を変える。これを星の進化とよぶ。星は、始め水素Hの核融合(天文学では燃焼という言葉を使う)によってエネルギーを出すのが、続いてHe, C, O, と順にその生成物を燃焼しながら姿を変える。C, O以後さらに重い核の燃焼が進まない星は中・小質量星とよばれ、質量が太陽の約8倍以下の星である。

AGB星は、中・小質量星の進化末期の姿で、中心核が電子縮退したC, Oとなり、その外側でHeの燃焼、さらにその外側でHの燃焼が起こっている星である。HR(Hertzsprung-Russell)図上で、赤色巨星分枝に漸近的に近づくかのように進化するので1970年ごろ漸近巨星分枝、すなわちAsymptotic Giant Branch(AGB)という名前が付けられた。中・小質量星が進化の過程でもっとも明るくなる時である。

AGB星は重元素合成に重要な役割を果たす。AGB星ではHeが少なくなると、Heによる核暴走(熱パルス)が起こり急激に明るさを増し、水素の層を外側に押しやって一時水素燃焼を止め、暴走後はいったん急に光度を下げ、水素燃焼のみによって徐々に光度を上げるという現象がくりかえされる。このくりかえしの度に星はどんどんと明るくなる。宇宙における重たい元素の合成は核融合のほかに、原子核が中性子を捕獲してそれが陽子に変わることでも起こる。この熱パルスは、このような元素合成を活性化させると同時にヘリウム層内に対流を発生させる。その結果、合成された重い元素は外側の水素の対流層と接触し星の表面までもち上げられるので、AGB星の表面は次第にこのような合成元素で富んでくる。宇宙においては一般に炭素よりも酸素が多いが、星の表面でこれが逆転して

いる炭素星や安定同位体が存在しないテクネチウムが観測される星などは典型的なAGB星である。

AGB星のもうひとつの特徴は質量放出現象である。中・小質量星は最終的に白色矮星になるが、白色矮星の質量は最大でも1.4太陽質量(チャンドラセカールの質量限界)であるので、星は大部分の質量を進化の途中で失う。これが起こるのがAGBの最終段階の短期間であると考えられているが、その原因やメカニズムについてはほとんど分かっておらず、重要な研究テーマとなっている。質量放出の結果、星の周囲には固体微粒子が形成され、それが星の光を遮るため、AGB星は短期間、可視光線では暗く赤外線でのみ輝く赤外線星となる。筆者は天文学専攻の松永典之助教らとともに、このような短寿命の赤外線星の探査、研究を行っている。



「長周期地震動」

瀬瀬 一起 (地震研究所 教授, 地球惑星科学専攻 兼務)

「地震」を文字通り解釈すれば地面が震える(揺れる)ことを意味するが、専門家は揺れではなく、揺れを発生させる地中の現象を「地震」と呼んでいる。しかし、テレビで「〇×地方で地震がありました」とアナウンスされるなど、「地震」を揺れの意味で使っている例も多い。これでは混乱するので、揺れを意味するときは「動」を追加して「地震動」とよぶことになっている。また、地震動も振動現象の一種であるから、振動の周期が存在する。長周期地震動とは周期が長い、ゆったりと振動する地震の揺れを意味している。

この長周期地震動が広く注目されたのは、2003年十勝沖地震の時である。震源から250 km離れた苫小牧市内で建物の被害がなかったにもかかわらず、大型

の石油タンクだけが被害を受け、そのうち2基で火災が発生した。この奇妙な現象はメディアの注目を集め、取材を受けたわれわれは「地震動」や「長周期」のことを説明したが、報道ではふたつの言葉をひとつにして「長周期地震動」とされることが多かった。つまり、「長周期地震動」は「直下型地震」と同じくメディアの造語である。

大型石油タンクだけが被害を受けた原因はその後の研究で、タンクの固有周期と長周期地震動の卓越周期が合ってしまったことによる、一種の共振現象と確認された。当時、首都圏で急増していた超高層ビルは大型石油タンクと似た固有周期をもっている。もし関東平野で長周期地震動が発生すれば、それらが甚大な被害を受ける可能性が高いということ

で、研究者の注目も集めた。地震学は起きた現象を解析する経験科学の側面が強いが、長周期地震動の研究は実際に超高層ビルが被害を受ける前に研究者が危険性を予想して研究が進められたという特異な例になっている。

私の研究室では三宅弘恵助教や古村孝志教授、鳥取大学等の協力を得て、将来の大地震による長周期地震動をシミュレーションする研究を行ってきた。その結果、平野ごとに長周期地震動の特性が異なることや、南海トラフ沿いの付加体は長周期地震動を伝えやすい性質をもっているなどの発見があった。また、研究成果は「長周期地震動予測地図」としてまとめられ、政府の地震調査委員会から公表されている。



「トポタクティック反応」

近松 彰 (化学専攻 助教)

トポタクティック反応とは、物質の基本骨格が保たれたまま、一部の元素が出入りする反応である。トポタクティック反応の例として、リチウムイオン二次電池の電極で起きる反応が挙げられる。電池の充電時にはリチウムがイオンとして正極(たとえばコバルト酸リチウム)から負極(おもに炭素材料)に侵入し、放電時には逆に負極から正極に戻る。この充放電の前後でこれらの電極物質の基本骨格は変わらない。この反応はトポタクティック反応の中で「挿入・脱離」の部類に入るが、他にも特定の元素やイオンを交換する「置換」、層状物質を付けたり剥がしたりする「接合・剥離」、ある元素だけ取り除く「抽出」などがある。これらの反応を利用した合成手法がトポタクティック合成である。この合成法で

は、無機物質でも比較的低温で反応が進むことが特徴のひとつである。

酸化物半導体や強相関電子系酸化物などの固体酸化物では、物質中の元素を置換することで物性が著しく変化する。陽イオンとなる金属元素などを置換した研究はひじょうに多いが、陰イオンである酸素を窒素やフッ素で置換した研究は少ない。これは、陽イオン置換は固相合成で容易に可能であるのに対して、陰イオン置換は通常は有毒で扱いにくいアンモニアガスやフッ素ガスを用いるなど技術的な困難があるからである。これに替わる簡便な陰イオン置換の方法として最近注目されているのが、有機合成に使われている反応剤を用いた固体酸化物のトポタクティック合成である。たとえば、水素化カルシウムを用いてチタン酸バリウ

ムから酸水素化物を合成したり、フッ素樹脂を用いて層状鉄酸化物から層状鉄酸フッ化物を合成したりする報告が最近なされている。

本研究科化学専攻の長谷川哲也研究室では、トポタクティック反応を用いて、酸化物薄膜から酸水素化物、酸窒化物、および酸フッ化物の薄膜試料の合成を行っている。薄膜試料は体積がきわめて小さいため、トポタクティック反応は試料全体で進行する。すなわち、バルク試料では十分なトポタクティック反応が進行せず合成が困難だった物質も、薄膜試料で合成できる可能性を秘めており、新しい物質の合成や物性の発現が期待できる。



「膜交通」

上田 貴志 (生物科学専攻 准教授)

わが国千年の王城の地である京都と、花の都パリの航空写真をご覧になると、その街の造りが全く異なっていることに気付かれるだろう。京都の方は碁盤の目状に張り巡らされた道路により、市街が方形の坊に区切られているのに対し、パリの方はいくつもの広場が放射状に伸びる道路により結ばれている。それぞれの都市がその歴史や需要を反映し、独自の交通網を発達させてきた結果である。真核生物の細胞の中にも、それぞれの生物の体制や生活環、歩んできた進化の道筋を反映し、独自の発達を遂げた交通網が存在する。

真核細胞の中には、小胞体、ゴルジ体、エンドソーム、リソソーム(植物や菌類では液胞)など、一重の膜によって囲まれたさまざまなオルガネラ(細胞小器官)が存在する。それぞれのオルガ

ネラには、特定のタンパク質群や脂質が存在しており、それらが混じり合うことなくはたらくことにより、オルガネラごとに異なる機能を果たしている。単膜系オルガネラではたらくタンパク質の多くや分泌タンパク質は、まず小胞体で合成され、その後それぞれの目的地へと運ばれる。また、目的地のオルガネラに到着したタンパク質は、別のオルガネラへと間違っ て輸送されてしまうことなく、そのオルガネラに留まり続ける必要がある。このような仕組みを支えているのが、「膜交通(メンブレントラフィック: membrane traffic)である。

小胞状または細管状の膜によって囲まれた輸送中間体を介し、単膜系オルガネラの間で物質のやりとりをおこなう仕組みを、車や鉄道を介した交通システムになぞらえ、「膜交通」とよぶ。膜

交通の分子機構は、酵母や動物細胞を用いた研究によりその大枠が明らかにされており、現在では、被覆複合体, Rab GTPase, SNARE などの進化的に保存された分子が、多様な真核生物のすべての輸送経路で重要な機能を担っていることが明らかとされている。いっぽうで、これらの分子が進化の過程で系統ごとに独自の多様化を果たすことにより、ある生物に特有の膜交通経路が開拓されてきたことも明らかとなりつつある。たとえば植物には、動物にはない独特の構造をもつ Rab GTPase が存在し、これが制御する輸送経路が植物の環境応答に関わることが明らかとなっている(理学部ニュース2011年9月号「研究ニュース」をご参照いただきたい)。



「理学のキーワード」 ついに連載を卒業

広報誌編集委員
牧島 一夫 (物理学専攻 教授)

3月は卒業の季節。2006年5月号で始まって以来、皆様にご愛読いただいた「理学のキーワード」も、ついに今号で7年間にわたる計41回のロングラン企画を完結し、「卒業」することになりました。このシリーズは初年度には、生物学、地球惑星科学、天文学、化学、物理学の5分野から交代で各号に4テーマを、2007年度からは、数理科学と情報科学を加えた計7分野から毎号6件ずつを掲載し続け、採録された「キーワード」は延べ230項目を超えました。

連載の初回に編集委員会がつけた説明は、「理学にとって基本的で、かつ研究の最先端の動向を象徴するような概念を選び、その意味を分かりやすく解説しようというもの。研究科諮問会からいた

いたアドバイスをもとに、編集委員会で練り上げた新企画です。『どこかで耳にしたけれど正確には知らない』というコトバの意味を知ること、理学研究という広大な土地への扉を開ける、『鍵』を手にしてください。』でした。連載は、この表向きの役目とともに、研究科の教員を中心に多くの方々にご執筆に参加してもらおうという、隠れた役目も果たして来たと思います。執筆くださった皆様に、改めてお礼申し上げます。

シリーズのうち、2009年3月号までに掲載された95件は、加筆修正と図の追加ののち、(株)化学同人者から「東大式現代科学用語ナビ」として出版されています。ニュース2009年9月号と2010年9月号にその紹介記事がありますので、ご覧ください。

7年間で何といっても忘れられないのは、東日本大震災の直後の2011年5月号に、理学系研究科・理学部の総力を挙げた11件の「キーワード」を集め、「放射能に関する特集」を組んだことで

す。この特集では、放射能とは何かという物理学の説明に始まり、それが物質に取り込まれる際の化学的視点、そうした物質が大气や海洋・陸水にどう循環してゆくかという地球物理学の問題、その循環を予測する数理的な解析、そして放射性物質が最終的にどのように生物に影響を与えるかという議論まで、一貫した流れをもって「キーワード」を編集しました。この問題を風化させないよう、ぜひ時おり、研究科のホームページでこの号に戻り、目をお通しください。

