

16. 分枝過程によって生ずる破壊の 規模別度数分布—初等的解析

地震研究所 丸山卓男

(昭和53年4月28日受理)

1. ま え が き

地震の規模別度数分布の解釈に関連してはいくつかの実験や理論,たとえばMOGI (1962, 1963), SCHOLZ_ら(1968), 竹内・水谷 (1968), 南雲 (1969) 等がある. 大塚 (1971, 1972) のモデルもその1つであるが原理が簡単であるという点で興味深い. 大塚は1つの地震も微細に見ると連鎖反動的メカニズムによって生成されていると考えた. ここで連鎖反応というのは, ある原因による結果がつぎの新しい原因となるという過程をくり返しつつ成長するメカニズムである.

大塚はこの考えを具体的にモデル化して碁盤上の白石と黒石によるゲームを考え, これを「碁石モデル」と名づけたが, 実際のシミュレーションでは最初これを単純化したモデルを用いた (大塚, 1971; OTSUKA, 1972). この単純化したモデルに対して斎藤他 (1973) は解析解を予想し, この解が大塚のシミュレーションの結果と一致することを示した. また, これを地震のマグニチュードの度数分布へ適用した場合の Gutenberg-Richter の係数について論じた. 実際の地震のマグニチュードの度数分布との対応は本来の「碁石モデル」の方がこの単純化したモデルより良好であるとはいえない (丸山, 1975b, c).

この単純化したモデルの原理を箇条書きにするとつぎのようになる:

- i) 破壊はすべてただ1個の単位破壊からひとつながりの破壊過程によって生成される.
- ii) 単位破壊はある確率法則でいくつかの単位破壊を生じ, それらはおのおの独立に同一の確率法則でまたいくつかの単位破壊を生ずる. こうして「子」の単位破壊がそれぞれつぎの段階あるいは世代で1回「親」になる過程は, たまたま新しい破壊が生じない段階がくるまでくり返される. この過程が終了したとき単位破壊の総数 (もとなつた1個を含めて) s をこの破壊の大きさとする.
- iii) 単位破壊からはつねに σ 個の方向の分枝が可能で, 1つの方向では1個の単位破壊が可能であるとし, 1つの方向で単位破壊を生ずる確率 p をつねに一定とする.

ここで段階あるいは世代と呼んだものを時助変数とみればこれは Galton-Watson 分枝過程 (数学辞典第2版) の特別な場合である. 一般の Galton-Watson 分枝過程では, 各分枝は相互に干渉しないという条件は上記のものと変わらないが, 1個の分枝が0個, 1

個, 2個, ... の分枝を生ずる確率をそれぞれ p_0, p_1, p_2, \dots と一般的に表わす. これは基本的な分枝過程で種種の応用をもつ (HARRIS, 1963). この過程はマルコフ過程であるために上記の場合のように分枝の総数を問題にすることは少ない. しかし1つの個体から生じた最初の k 世代までの個体の総数やここで $k \rightarrow \infty$ の極限の場合の個体の総数に対しては確率母関数の性質が知られている (GOOD, 1949; OTTER, 1949; HARRIS, 1963). これを利用して斎藤他 (1973) の予想した結果に達することは容易である (付録1参照).

その後大塚 (1975) は「基石モデル」は浸透過程のモデルであることを注意している. 浸透の理論は不規則な媒質中における粒子または流体のランダムな運動を統計的に扱う理論である (堀, 1972).

浸透の理論では浸透媒質がリニア・グラフで表わされる場合が特によく研究されているようである. リニア・グラフの頂点を原子, 辺をボンドと呼ぶ. 各原子から出るボンドの平均個数を配位数という. 浸透過程はこれに確率を導入する方式によって原子浸透とボンド浸透に分けられる. 原子浸透では, ボンドはどれも流体を通すが原子はランダムに流体を受け入れたり受け入れなかったりすると考える. 各原子は他の原子とは無関係に一定の確率 p で流体を受け入れ, 確率 $q=1-p$ で流入をさまたげるとするのが一般的である. 浸透の問題においてボンドでつながった濡れた原子の集団をクラスターと呼ぶ. 原子浸透のとき1つのクラスターに属する濡れた原子の個数をこのクラスターの大きさと呼ぶ.

浸透媒質として最も簡単なものが樹木状グラフである. いま配位数 $\sigma+1$ の樹木状グラフにおいて, ある1つの原子を濡らすとき, これを含む大きさ s のクラスターが生ずる確率を問題にするならば, さきに述べた破壊過程とよく似た問題になる. 樹木状グラフでの浸透は解析的に取り扱われる (FISHER and ESSAM, 1961). この方法によってこの問題をとくこともできる (付録1参照).

最近 VERE-JONES (1976) は, 既存の微小な割れ目が外部から加えられる応力の増大とともに相互に連合することによって成長するという考えのもとに, 割れ目の伝播について分枝過程のモデルを提案した. ここでは1つの割れ目が伸長の期間に遭遇する割れ目の個数に対する確率母関数, 連合した割れ目の全長に対する分布関数などを用いて, 一般的な仮定のもとに, 簡潔に解析がなされている. ここには SCHOLZ (1968) のモデルに対する批判も含まれている. また VERE-JONES (1977) は割れ目の伝播に関する統計的理論の総合的な評論を行ない, 割れ目の伝播に対する分枝モデルを発展させている.

かくして, 破壊が単純化した大塚のモデルに従う場合ばかりでなく, 一般の分枝過程に従う場合も, その破壊の大きさ s の分布は既に知られた事柄であり, またそれを地震の規模別度数分布へ適用した場合 Gutenberg-Richter の係数 b についても VERE-JONES (1976, 1977) によって論じられている.

小論の目的は, 破壊が一般の分枝過程に従う場合その破壊の大きさ s の分布の考察に確率母関数によらない初等的方法を用い, これを大塚の単純化したモデルの場合と樹木状グラフの浸透におけるクラスターの大きさの分布に適用することである. 一般に確率母関数による方法が強力であるが, 小論のような初等的方法もときに事柄を考え易くするという点で無用ではないであろう. なお小論の最後に s が非常に大きいときの漸近的表現に

注意し、地震に伴う破壊が一般の分枝過程に従うと仮定したときの地震の規模別度数分布について付記する。本稿は以前の草稿 (丸山, 1974; 1975a, b, c) の一部に加筆したものである。

2. Galton-Watson 分枝過程の場合

破壊が Galton-Watson 分枝過程に従うと仮定して、1 個の単位破壊から 0 個, 1 個, 2 個, ... の単位破壊を生ずる確率をそれぞれ p_0, p_1, p_2, \dots とする。このとき当然

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots = 1 \quad (1)$$

である。また、単位破壊から最大限 1 個しか単位破壊を生じないというつまらない場合を除外すれば一般に

$$p_0 + p_1 < 1 \quad (2)$$

と仮定してよい。このとき破壊過程が必ず終了するための必要十分条件は 1 単位破壊から生ずる単位破壊の個数の平均値 μ が 1 以下であること、すなわち

$$\mu = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots \leq 1 \quad (3)$$

が成り立つことである (HARRIS, 1963)。またこのとき (1), (2), (3) により

$$p_0 > 0 \quad (4)$$

となる。

簡単のために破壊はすべて 1 個の単位破壊からひとつながりの破壊過程によって生ずると仮定する。この過程が終了したとき、終了するまでの分枝の生じ方の 1 例を Fig. 1 に示す。仮定により第 0 段階での単位破壊の個数 s_0 は 1、一般に第 l 段階で破壊が終了したとして、第 1, 第 2, ..., 第 $l+1$ 段階での単位破壊の個数をそれぞれ s_1, s_2, \dots, s_{l+1} とし、この破壊全体の大きさを s とすれば

$$s_0 = 1, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0, \quad \dots, \quad s_l \geq 0, \quad s_{l+1} = 0 \quad (5)$$

$$s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_l = s \quad (6)$$

となる。

Fig. 1 に示した破壊過程はまた Fig. 2 のように 0 または正の整数の配列によって表わすことができる。この図の第 1 行は第 0 段階の 1 個の頂点から第 1 段階で 3 個の分枝が生じたこと、第 2 行はそれに対応する 3 個の頂点からつぎに 2, 0, 2 個の分枝が生じたことを表わす。第 3 行は第 2 行の 4 個の頂点からそれぞれ 0, 0, 2, 0 個の分枝が生じたことを表わし、第 4 行は第 3 段階での 2 個の頂点からはどちらも分枝を生ぜず、従ってこの過程はここで終了したことを表わす。Fig. 2 を見ると、第 1 行は 1 個の整数、第 2 行はその整数に等しい個数の整数が書かれ第 3 行には第 2 行の整数の和に等しい個数の整数が書かれていること、最後の行は 0 だけから成ることがわかる。一般に第 k 行の整数の和は第 $k+1$ 行の整数の個数に等しくなっているという規則によって、Fig. 2 の整数の配列を横に 1 行に書いて Fig. 3 のように表わしてもこれから容易に Fig. 2 を復元することが

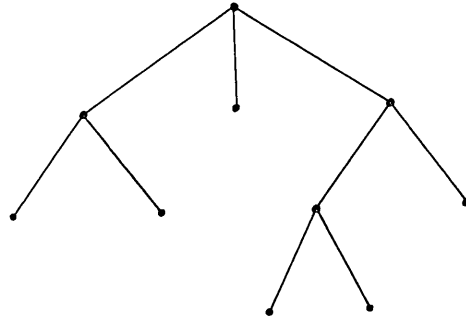


Fig. 1. An example of the branching process. The number of individuals or vertices in the k -th generation is denoted by s_k . Here s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 are 1, 3, 4, 2, 0, respectively.

できる. たとえば Fig. 3 から Fig. 2 を復元するには, まず左端の箱を1つとってこの内容を第1行に書き, これに含まれる整数の個数だけ箱を右に数えてその内容を第2行に書く. つぎに第2行に含まれる整数の和に等しい個数の箱を右に数えて, その内容を第3

3
2 0 2
0 0 2 0
0 0

行に書く, 以下これをくり返せばよい. 第4行に含まれる整数の和は0なのでつぎに右に数えてとるべき箱はなく, ちょうど Fig. 2 で第5行がないことに対応する. 箱に左から 1, 2, ... と番号をつけると, No. r の箱は最初の頂点を No. 1 として各段階では左から番号をつけたとき通し番号 No. r の頂点に対応し, 箱の中の数字はそこから出ている分枝の数 (下に出ている辺の数) に対応する.

Fig. 2. A simplified representation of the process in Fig. 1.

一般の破壊過程に対しては Fig. 4 のような箱の並びが得られる. この箱の上側に書いた数字は Fig. 3 と同様に箱の個数を表わし, 下側に書いた数字は分枝の数の和を表わす. いま箱 No. r すなわち頂点 No. r が第 k 段階に属するとしよう. まず

この頂点がこの段階の最右端ではなかったとすると Fig. 4 の箱の個数 (上側の数) に注目して

$$1 + s_1 + s_2 + \dots + s_k > r,$$

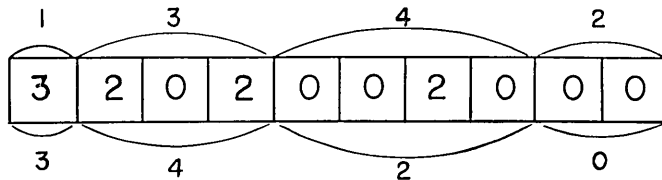


Fig. 3. Representation of the process in Fig. 1 by a row of cells. Numbers on the upper and lower sides correspond to the numbers of cells and branches respectively.

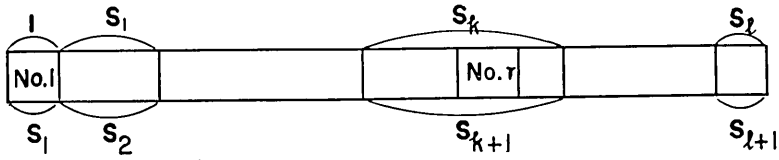


Fig. 4. Representation of a general branching process by the row of cells. Numbers on the upper and lower sides correspond to the numbers of cells and branches respectively. The cell No. r corresponds to the vertex No. r , and the non-negative integer in the cell corresponds to the number of branches extended from the vertex.

分枝の数 (下側の数) に注目して

$$\sum_{i=1}^r J_i \geq s_1 + s_2 + \dots + s_k$$

ここに J_i は箱 No. i の中の整数すなわち頂点 No. i から出る分枝の数とする。これら 2 式から不等式

$$\sum_{i=1}^r J_i > r - 1 \tag{7}$$

が得られる。つぎに頂点 No. r が第 k 段階の最後であったとすると、同様にして

$$1 + s_1 + s_2 + \dots + s_k = r,$$

$$\sum_{i=1}^r J_i \geq s_1 + s_2 + \dots + s_k.$$

この第 2 式で等号が成り立つのは第 k 段階に生じている分枝がないときに限る。それは第 k 段階が最後の段階になっているとき、すなわち頂点 No. r が最後の頂点になっているときである。このとき上の 2 式から ($r=s$ として)

$$\sum_{i=1}^s J_i = s - 1, \tag{C 1}$$

第 k 段階が最後の段階でないときはやはり (7) が成り立つことになるから結局

$$\sum_{i=1}^r J_i > r - 1 \quad (r=1, 2, \dots, s-1) \tag{C 2}$$

が成り立つ。

さて Fig. 1 の分枝過程の場合、これに対応する負でない整数の順列は

3 2 0 2 0 0 2 0 0 0

であるが、この順列を巡回させると

2 0 2 0 0 2 0 0 0 3
 0 2 0 0 2 0 0 0 3 2
 2 0 0 2 0 0 0 3 2 0
 0 0 2 0 0 0 3 2 0 2

0 2 0 0 0 3 2 0 2 0
 2 0 0 0 3 2 0 2 0 0
 0 0 0 3 2 0 2 0 0 2
 0 0 3 2 0 2 0 0 2 0
 0 3 2 0 2 0 0 2 0 0

という順列が得られるが、このどれも条件 (C 2) を満たさない。

一般に条件 (C 1) を満たす s 個の任意の負でない整数の順列 J_1, J_2, \dots, J_s について、これに巡回置換を行うと s 個の相異なる順列が得られ、そのうちただ 1 個だけが条件 (C 2) を満たすことを証明することができる (付録 2 参照)。

大きさ s の破壊過程において、 $0, 1, 2, \dots$ 個の分枝を出す頂点の個数をそれぞれ $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots$ とするとまず頂点の数から

$$\sum \nu_i = s, \quad (8)$$

条件 (C 1) から

$$\sum i\nu_i = s-1, \quad (9)$$

破壊過程に対応する数列で ν_0 個は 0, ν_1 個は 1, ν_2 個は 2, \dots ということから、これからできる相異なる順列の数は

$$\frac{s!}{\nu_0! \nu_1! \nu_2! \dots}$$

であるが上に述べたことからこのうち条件 (C 2) を満たすものはその $1/s$ になる。

したがって大きさ s の破壊が生ずる確率 P_s はつぎのように表わされる:

$$P_s = \sum \frac{(s-1)!}{\nu_0! \nu_1! \nu_2! \dots} p_0^{\nu_0} p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots \quad (10)$$

ここで和は条件

$$\sum \nu_i = s, \quad \sum i\nu_i = s-1 \quad (11)$$

を満たすすべての 0 または正の整数の組み合わせにわたる。

3. 簡単化した大塚のモデル

つぎに破壊過程が §1 の条件 (iii) を満たしている場合を考える。このとき破壊の大きさを s とすれば、Fig. 4 で表わした箱のつながりにおいて、各箱にはそれぞれ σ 個の辺が用意されているものとして、条件 (C 1), (C 2) を満たすように各箱から順次 J_1 個, J_2 個, \dots, J_s 個を分枝として選びとることにあたる。

まず条件 (C 1) により、相異なる辺の総数 σs 個の中から $(s-1)$ を選ぶ仕方の数は

$$\binom{\sigma s}{s-1}$$

であるが、§2 と同様このうち条件 (C 2) を満たすものはその $1/s$ である (付録 2, 補題 2)。したがって大きさ s の分枝過程が生ずる確率 P_s は

$$P_s = \frac{1}{s} \binom{\sigma s}{s-1} p^{s-1} q^{\sigma s - s + 1}, \quad q = p-1 \quad (12)$$

と表わされ、斎藤他 (1973) の予想した結果に一致する。

4. 樹木状浸透の場合

Fig. 5 の例は配位数 4 ($\sigma=3$) の樹木状グラフを示す。頂点 A が濡れているとき、 A を含むクラスターを §3 の破壊過程の場合と比較すれば、 A から出る辺の数は 4 であるが他の頂点では「子」へつながり得る辺の数はどこでも 3 である。このように見るとき A が特別の点になることが §3 の場合との違いである。

一般に配位数 $\sigma+1$ の樹木状グラフの原子浸透においてその 1 つの原子 A が濡れているとき、 A が大きさ s のクラスターに属する確率は

$$P_s^* = C_s^* p^{s-1} q^{\sigma s - s + 2}, \quad q = 1 - p \quad (13)$$

と表わされる。この式が (12) と異なるのは係数 C_s^* と q の指数である。 q の指数はクラスターの大きさが s の場合、流体の流入をせきとめる関係原子の数が $s(\sigma-1)+2$ であることから得られる。

係数 C_s^* は原子 A を含む大きさ s のクラスターの個数である。原子 A から出るボンドの他端の原子の 1 つを B とするとき (Fig. 5), C_s^* は B を含まないクラスターの個数 C_s と B を含むクラスターの個数 C_s^{AB} の和である:

$$C_s^* = C_s + C_s^{AB}. \quad (14)$$

この C_s は §3 の式 (12) に現われる係数に他ならず

$$C_s = \frac{1}{s} \binom{\sigma s}{s-1} \quad (15)$$

である。

一方 B を含むクラスターは A から生ずる分枝過程と B から生ずる分枝過程の結合と見ることができる。このおのおのは §2 のように箱のつながりによって表わすことができ、それらに対応する整数列を J_1, J_2, \dots, J_u ($u \geq 1$) と $J'_1, J'_2, \dots, J'_{u'}$ ($u' \geq 1$) とすれば、つぎの条件が満たされなければならない:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^u J_i &= u-1, & \sum_{i=1}^r J_i &> r-1 & (r=1, 2, \dots, u-1) \\ \sum_{i=1}^{u'} J'_i &= u'-1, & \sum_{i=1}^r J'_i &> r-1 & (r=1, 2, \dots, u'-1) \\ s &= u+u' \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

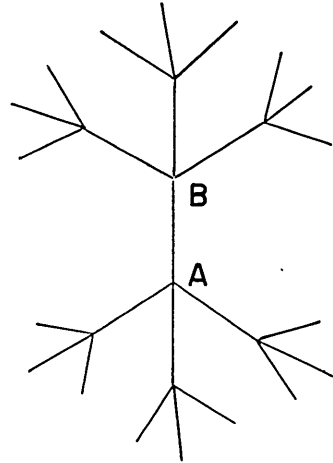


Fig. 5. Tree-like lattice in the percolation process. Coordination number of the lattice $\sigma+1=4$.

§3 の考え方を応用するためにこの2つの整数列をつなげて

$$J_1, J_2, \dots, J_u, J'_1, J'_2, \dots, J'_u$$

とすれば、この数列に対応する箱のつながりは途中で1回だけ切れ目があることになる。切れ目の前の部分を A に、後の部分を B に対応させることに決めておく。§2 と同様に上の数列の順回順列を考えると

$$J'_1, J'_2, \dots, J'_u, J_1, J_2, \dots, J_u$$

に対応する箱のつながりには途中で1回だけ切れ目ができて条件 (16) を満たすが、これ以外の順回順列には条件を満たすものがないことが容易にわかる。また逆に条件

$$\sum_{i=1}^s J_i = s - 2 \quad (17)$$

を満たす整数列 J_1, J_2, \dots, J_s があれば、これに順回置換をほどこして得られる s 個の順列のうち2個が条件 (16) を満たすことを付録2補題2と同様にして証明することができる。整数列 J_1, J_2, \dots, J_s に対応する箱のつながりが途中で1回だけ切れるという条件を除けば場合の数は各 σ 個の辺をもつ s 個の箱から $(s-2)$ 個の辺を選ぶ仕方の数に等しいから §3 と同様にして C_s^{AB} は

$$C_s^{AB} = \frac{2}{s} \binom{\sigma s}{s-2} \quad (18)$$

となる。(14), (15) と (18) により C_s^* は

$$C_s^* = \frac{\sigma+1}{(\sigma-1)s+2} \binom{\sigma s}{s-1} \quad (19)$$

と表わされる。

5. 漸近式と地震の規模別度数分布

これまでに得られた厳密解から s の大きいときの漸近式を得ることができる。§3 の破壊過程で単位破壊から大きさ s の破壊を生ずる確率 P_s と §4 の樹木状浸透で単位のクラスターから大きさ s のクラスターを生ずる確率 P_s^* は、Stirling の公式を用いて $s \rightarrow \infty$ のときそれぞれつぎのように表わされる：

$$P_s \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \frac{1}{p\sigma} \left(\frac{\sigma-p\sigma}{\sigma-1} \right) r^s s^{-3/2}, \quad (20)$$

$$P_s^* \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma+1}{\sqrt{\sigma(\sigma-1)}} \frac{1}{p\sigma} \left(\frac{\sigma-p\sigma}{\sigma-1} \right)^2 r^s s^{-3/2}, \quad (21)$$

ただしここに

$$r = p\sigma \left(\frac{\sigma-p\sigma}{\sigma-1} \right)^{\sigma-1} \quad (22)$$

である。

§3 の破壊過程で無限に大きい破壊が生じないためには、また §4 の浸透過程で無限に

大きいクラスターが生じないためには p はある臨界の確率 p_c より大きくてはならない。 p_c は分枝過程において1つの頂点からでる平均の分枝数 μ が1となること

$$p_c \sigma = 1 \quad (23)$$

より定まる。

式 (22) で γ を p の関数として p で微分すると

$$\frac{d\gamma}{dp} = \frac{\sigma^\sigma}{(\sigma-1)^{\sigma-1}} (1-p)^{\sigma-2} (1-p\sigma)$$

であるから、 $p=1/\sigma$ のとき $\gamma=1$ 、 $p<1/\sigma$ では $\gamma<1$ であることがわかる。

一般の Galton-Watson 分枝過程においても、 s が大きいとき、(20), (21) と同じ形の

$$P_s \sim C \xi^\sigma s^{-3/2} \quad (24)$$

が成り立つ (OTTER, 1949; HARRIS, 1962)。ただしここに C は定数、(2), (4) の他に

$$p_1 > 0$$

を仮定する。(24) で一般に

$$\xi \leq 1 \quad (25)$$

であるが、破壊が無限に大きくなる臨界点すなわち $\mu=1$ のとき $\xi=1$ となる。

大塚 (1971) と同様に破壊の大きさ s が地震のエネルギー E に比例する、すなわち κ を定数として

$$s = \kappa E \quad (26)$$

とおき、 E は地震のマグニチュード M と

$$\log_{10} E = \alpha + \beta M \quad (27)$$

という関係で結ばれると仮定して、地震のマグニチュードが M と $M+dM$ の間にある地震の度数を $n(M)dM$ とすると (24), (26), (27) により

$$\log_{10} n(M) = a - \frac{1}{2} \beta M - c 10^{\beta M} \quad (28)$$

となる。Gutenberg-Richter に従って

$$\beta = 1.5$$

とすれば

$$\log_{10} n(M) = a - 0.75M - c 10^{1.5M} \quad (29)$$

となる。(28), (29) で a は定数、

$$c = \kappa 10^\alpha \log_{10} \left(\frac{1}{\xi} \right) \geq 0 \quad (30)$$

で $\mu \rightarrow 1$ のとき $c \rightarrow 0$ である。(29) は斎藤他 (1973) の得た式と同じ形である (なお VERE-JONES (1976, 1977) を参照)。

これより地震にともなう破壊が一般の分枝過程に従う場合に式 (28) が成り立ち、 $\log_{10} n(M)$ と M との関係は $\mu=1$ の臨界の場合に直線でその傾きは $-\beta/2$ 、それ以外の場合には上に凸の曲線で、接線の傾きは M が増すにつれて急になることが知られる。

〔謝 辞〕 草稿を読んで有益な助言をくださった東京工業大学堀素夫教授、最近の文献について注意してくださった本研究所宇津徳治教授に厚くお礼申し上げる。

文 献

- FISHER, M. E. and J. W. ESSAM, 1961, Some cluster size and percolation problems, *J. Math. Phys.*, **2**, 609-619.
- GOOD, I. J., 1949, The number of individuals in a cascade process, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **45**, 360-363.
- HARRIS, T. E., 1963, *The Theory of Branching Processes*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.
- 堀 素夫, 1972, 浸透の理論とその応用, 日本統計学会誌, **3**, 19-28.
- 丸山卓男, 1974, “基石モデル”の解析解の証明, 昭和49年度地震学会講演予稿集, No. 2, 120.
- 丸山卓男, 1975a, 基石モデルと浸透理論との関係, 昭和50年度地震学会講演予稿集, No. 1, 134.
- 丸山卓男, 1975b, 2次元格子・3次元格子の浸透におけるクラスターの大きさの分布, 昭和50年度地震学会講演予稿集, No. 1, 135.
- 丸山卓男, 1975c, 「基石モデル」についての注意, 昭和50年度地震学会講演予稿集, No. 2, 9.
- Mogi, K., 1962, Magnitude-frequency relation for elastic shocks accompanying fractures of various materials and some related problems in earthquakes (Second paper), *Bull. Earthq. Res. Inst.*, **40**, 831-853.
- Mogi, K., 1963, The fracture of a semi-infinite body caused by an inner stress origin and its relation to the earthquake phenomena (Second paper),—The case of the materials having some heterogeneous structures—, *Bull. Earthq. Res. Inst.*, **41**, 595-614.
- 南雲昭三郎, 1969, 変形～破壊の関係式から石本—飯田公式を導くこと, 地震 **2**, **22**, 136-143.
- 大塚道男, 1971, 地震の起り方のシミュレーション, 第二部地震の規模別頻度分布, 地震 **2**, **24**, 215-227.
- OTSUKA, M., 1972, A chain-reaction type source model as a tool to interpret the magnitude-frequency relation of earthquakes, *J. Phys. Earth*, **20**, 35-45.
- 大塚道男, 1972, 地震の起り方のシミュレーション, 第四部断層面に於ける破壊の成長, 地震 **2**, **25**, 275-282.
- 大塚道男, 1975, 基石モデルと浸透理論, 地震 **2**, **28**, 96-97.
- OTTER, R., 1949, The multiplicative process, *Ann. Math. Statist.*, **20**, 206-224.
- 斎藤正徳・菊地正幸・工藤和男, 1973, 地震の“基石モデル”の解析解, 地震 **2**, **26**, 19-25.
- SCHOLZ, C. H., 1968, The frequency-magnitude relation of microfracturing in rock and its relation to earthquakes, *Bull. Seism. Soc. Amer.*, **58**, 399-413.
- 竹内 均・水谷 仁, 1968, 地震発生と脆性破壊との関係, 科学, **38**, 622-624.
- VERE-JONES, D., 1976, A branching model for crack propagation, *Pageoph*, **114**, 711-725.
- VERE-JONES, D., 1977, Statistical theories of crack propagation, *J. Math. Geology*, **9**, 455-481.

(付録 1)

ここには確率母関数を用いた解法を付記する。ただし母関数を用いる方法にも多くのものがあり、ここにあげたものはその一例にすぎない。

一般の Galton-Watson 分枝過程において、第 0 世代の個数を 1, 各世代において 1 つの個体から生ずる「子」の個数に対する確率母関数を

$$F(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots \quad (\text{a-1})$$

とし、第 0 世代を含めてこれより第 r 世代までの個体の総数に対する確率母関数を $G_r(z)$ とすると

$$G_1(z) = zF(z), \quad G_{r+1}(z) = zF(G_r(z)) \quad r=1, 2, \dots \quad (\text{a-2})$$

と表わされる¹⁾。したがってこの分枝過程が終了するときは

$$w = \lim_{r \rightarrow \infty} G_r(z)$$

が存在するから (a-2) により

$$w = zF(w). \quad (\text{a-3})$$

式 (4) により $p_0 \neq 0$ であるから $z=0$ の近傍で w は正則で

$$w = P_1 z + P_2 z^2 + \dots \quad (\text{a-4})$$

とおくと $z=0$ をまわる積分路により、 P_s は

$$P_s = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{w}{z^{s+1}} dz$$

と表わされる。これを (a-3) により変形すると、 w 平面上の原点をまわる十分小さな閉曲線を積分路として

$$sP_s = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{[F(w)]^s}{w^s} dw \quad (\text{a-5})$$

と表わすことができる。この式は sP_s が $[F(z)]^s$ における z^{s-1} の係数であることを示すから式 (10), (11) が得られる。

§3 の場合

$$F(z) = (q + pz)^s, \quad q = p - 1 \quad (\text{a-6})$$

と表わされるから (a-5) により

$$\begin{aligned} sP_s &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(q + pw)^{\sigma s}}{w^s} dw \\ &= \binom{\sigma s}{s-1} p^{s-1} q^{\sigma s - s + 1} \end{aligned}$$

となり式 (12) に一致する。

1) 第 0 世代を含めないときはつぎようになる (HARRIS, 1963):

$$G_1(z) = F(z), \quad G_{r+1}(z) = F(zG_r(z)) \quad r=1, 2, \dots$$

つぎに配位数 $\sigma+1$ の樹木状グラフの場合を FISHER and ESSAM (1961) に従って考える。このグラフの原子浸透において大きさ s のクラスターが存在するときこのクラスターを周囲から孤立させる原子の数 (perimeter) t は

$$t = (\sigma-1)s + 2 \quad (s \geq 1) \quad (\text{a-7})$$

と表わされる。したがってクラスターの大きさ s に対する母関数 $A(x, y)$ は

$$\zeta = xy^{\sigma-1} \quad (\text{a-8})$$

とおけば

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \sum_{s=1}^{\infty} C_s^* x^s y^t \\ &= y^2 \sum_{s=1}^{\infty} C_s^* \zeta^s. \end{aligned} \quad (\text{a-9})$$

この級数が収束するとき、 $A(p, 1-p)$ は1つの原子が有限のクラスターに属する確率に等しい。無限に大きいクラスターが存在しなければ、有限のクラスターに属する確率はその原子が濡れている確率 p に等しいから、 x が十分小さいとき

$$x = y^2 \sum_{s=1}^{\infty} C_s^* \zeta^s, \quad y = 1 - x.$$

これより

$$\begin{aligned} C_s^* &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{x}{y^2} \frac{1}{\zeta^{s+1}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1 - \sigma x}{x^s (1-x)^{(\sigma-1)s+3}} dx \\ &= \frac{\sigma+1}{(\sigma-1)s+2} \binom{\sigma s}{s-1}, \end{aligned}$$

上の式の積分路はそれぞれ ζ 平面、 x 平面で原点をまわる十分小さな閉曲線である。この C_s^* を用いて、任意の1つの原子が大きさ s のクラスターに属する確率は (a-9) により $C_s^* p^s q^{(\sigma-1)s+2}$ ($q=1-p$)、またある原子を濡らすとき、それが大きさ s のクラスターに成長する確率 P_s^* は

$$P_s^* = C_s^* p^{s-1} q^{(\sigma-1)s+2} \quad (\text{a-10})$$

と表わされ、(13) および (19) に一致する。

(付録 2)

(補題 1) §1 の条件 (C 1) を満たす 0 または正の整数の任意の順列

$$J_1, J_2, \dots, J_s \quad (s > 1)$$

に巡回置換を行って生ずる s 個の順列は相互に異なる。

(証明) 数列 J_1, J_2, \dots, J_s を反復することによって J の添字を任意の整数にまで拡張することができる。このとき任意の整数 i について

$$J_{s+i} = J_i \quad (\text{a-11})$$

が成り立つ.

もし数列 J_1, J_2, \dots, J_s に巡回置換を行って得られた数列 $J_{r+1}, J_{r+2}, \dots, J_s, J_1, \dots, J_r$ ($1 \leq r < s$) がもとの数列と一致するならば, これらを反復して生ずる数列も相互に一致せねばならないから, 任意の整数 i について

$$J_{r+i} = J_i \quad (\text{a-12})$$

が成り立つ.

いま整数 r, s の最大公約数を g とすれば適当な整数 a, b を選んで

$$as + br = g$$

とすることができる. (a-11), (a-12) をくり返し用いれば任意の整数 i について

$$J_{g+i} = J_{as+br+i} = J_i \quad (\text{a-13})$$

が成り立つことがわかる. (a-13) により数列 J_1, J_2, \dots, J_s の反復は実はその部分数列 $J_{d+1}, J_{d+2}, \dots, J_{d+g}$ の反復に他ならないことがわかる (d はある整数). よって条件 (C 1) により

$$\frac{s}{g} \sum_{i=1}^g (J_{d+i} - 1) = -1 \quad (\text{a-14})$$

ところが仮定 $1 \leq r < s$ により $g \neq s$ であるから (a-14) は不合理である. したがって条件 (C 1) を満たす順列に順回置換を行って生ずる s 個の順列は相互に異ならなければならない.

(補題 2) 条件 (C 1) を満たす 0 または正の整数の任意の順列を

$$J_1, J_2, \dots, J_s \quad (s > 1)$$

とすると, これに順回置換を行って生ずる順列の中に条件 (C 2) を満たすものがあり, しかもそれはただ 1 つである.

(証明) 条件 (C 1) を満たす数列 J_1, J_2, \dots, J_s ($s > 1$) について, 順次 $r=1, 2, \dots$ として部分

$$K_r = \sum_{i=1}^r (J_i - 1)$$

を見て行って, それが -1 に等しくなったならばそこまでを 1 つの区分とする.

まず任意の i について $J_i - 1 \geq -1$ であるから

$$K_1 = -1 \quad \text{または} \quad K_1 \geq 0.$$

$K_1 = -1$ であれば J_1 だけで 1 つの区分とする. もし $K_1 \geq 0$ であれば

$$K_2 = -1 \quad \text{または} \quad K_2 \geq 0.$$

$K_2 = -1$ であれば J_1, J_2 を 1 つの区分とする. $K_2 \geq 0$ であれば更に先へ進む. こうして行けばある r_1 について

$$K_1 \geq 0, K_2 \geq 0, \dots, K_{r_1-1} \geq 0, K_{r_1} = -1$$

となるような r_1 がある. このとき J_1, J_2, \dots, J_{r_1} を1つの区分とする. もし $r_1 = s$ であれば初めにとった数列がすでに条件 (C 2) を満たしていたのである. そこで $r_1 < s$ と仮定する.

$r_1 < s$ のとき J_{r_1+1} から右に並ぶ数列についてまた順次 $r=1, 2, \dots$ として部分

$$K_r = \sum_{i=r_1+1}^{r_1+r} (J_i - 1)$$

を見て行き, この部分 and が -1 に等しくなるところまでをとって第2の区分とする.

以下同様にしてつきつぎに区分を作っていくと, f 個 ($f \geq 1$) の区分ができたあと, いかなる部分 and も -1 にならない部分が残る. この部分を

$$J_{h+1}, J_{h+2}, \dots, J_s$$

とすると条件 (C 1) により

$$\sum_{i=h+1}^s (J_i - 1) = f - 1 \quad (\text{a-15})$$

となる. そこでこの数列のあとに J_1, J_2, \dots, J_h をおいた順列

$$J_{h+1}, J_{h+2}, \dots, J_s, J_1, J_2, \dots, J_h$$

を考えると, この順列は条件 (C 2) を満たしていることが (a-15) からわかる.

つきにこうして得られる順列の中に条件 (C 2) を満たすものはただ1つしかないことを示す. 実際順列 $J_1, J_2, \dots, J_k, J_{k+1}, \dots, J_s$ とこれに巡回置換を行って得られた順列 $J_{k+1}, J_{k+2}, \dots, J_s, J_1, \dots, J_k$ ($1 \leq k < s$) が共に条件 (C 2) を満たしているとする. 2つの順列から

$$\sum_{i=1}^k (J_i - 1) \geq 0, \quad \sum_{i=k+1}^s (J_i - 1) \geq 0,$$

したがって

$$\sum_{i=1}^s (J_i - 1) \geq 0$$

となりこれは条件 (C 1) に反する.

16. *Frequency Distribution of the Sizes of Fractures
Generated in the Branching Process—
Elementary Analysis.*

By TAKUO MARAYAMA,
Earthquake Research Institute.

The chain reaction process adopted by Otsuka as a model of fracturing to interpret the magnitude-frequency relation of earthquakes is a special case of the Galton-Watson branching process. In the model of fracturing according to the Galton-Watson branching process, the total number of objects generated in all the generations corresponds to the size of the fracture. The distribution of the total number has already been solved by the use of probability generating functions. An elementary approach in the present paper, however, may have some advantages for the understanding of the model.

If $s (>1)$ denotes the size of the fracture generated in the Galton-Watson branching process, the process can be represented by a sequence of non-negative integers J_1, J_2, \dots, J_s , where two conditions should be satisfied:

$$\sum_{i=1}^s (J_i - 1) = -1, \quad (\text{C } 1)$$

$$\sum_{i=1}^r (J_i - 1) \geq 0 \quad \text{for } r=1, 2, \dots, s-1. \quad (\text{C } 2)$$

It is proved that, for any sequence of non-negative integers satisfying (C 1), there exists one and only one sequence satisfying (C 2) among the cycles of length s of the original sequence. Applying this rule, we can elementarily obtain the size distribution for fractures generated in Otsuka's simplified process. The size distribution for clusters generated in the percolation in a tree-like structure is also obtained elementarily.

If the fracture by an earthquake follows the model of the Galton-Watson process, with the assumptions that the size s is proportional to the seismic energy E and that E is proportional to $10^{1.5M}$ after Gutenberg and Richter, the frequency, $n(M)dM$, of earthquakes with magnitude between M and $M+dM$ can be obtained from the asymptotic expression for large s . We have

$$\log_{10} n(M) = a - 0.75M - c10^{1.5M}.$$

where a is a constant and $c (\geq 0)$ tends to zero as μ tends to the critical value 1. Here μ denotes the mean number of branches extending from a vertex, and for μ greater than the critical value, the probability of generation of fracture with an infinite size is not zero.