

## 65. 臨界制振に近い状態にある地震計の検定

地震研究所 { 工藤一嘉  
嶋悦三  
佐藤泰夫

(昭和43年9月17日発表—昭和43年9月30日受理)

### 1. はじめに

ある線型系への入力と出力の時間関数が解つていれば、その系の周波数特性は両者のフーリエ変換の比として求まる。したがつて、地震観測装置が増幅器その他を含む複雑な構成であつても、例えば入力として振子にインパルスあるいはステップ等の解つた形の力を与え、その応答を得ることにより系の総合的な周波数特性を求めることができる<sup>1)</sup>。

ところで、同一種類の測定器により多成分観測を行い、振幅・位相等の議論を行う場合、各々の総合周波数特性を出来るだけ同じものとするため、個々の装置の特性まで詳しく調べておく必要がある。増幅器や記録器系統の周波数特性は、広帯域で平滑なものが多く、この時系の総合周波数特性は地震計の周波数特性に大きく依存することになる。このような場合には、地震計の常数を十分な精度で求めておく必要が生ずる。

一般に、地震計の動作状態では、減衰常数は臨界制振に近い所を用いることが多いが、従来広く行われている振幅比を用いる検定法<sup>2)</sup>では臨界制振附近の減衰常数を実験的に求めることは困難である。独立に固有周期が精度良く求まる地震計に対して、鈴木・石田<sup>3)</sup>は、インパルス応答より固有周期および振幅を規格化し、減衰常数を図式的に求める方法を考案し、この困難を克服しようとした。

電磁式地震計の減衰は電磁制動による場合が多いが、爆破地震動の観測や地震探鉱等でしばしば用いられる地震計には、もともと減衰が大きいものも少なくない。このような地震計に対しては従来の方法を適用することは困難であり、また鈴木・石田の方法も、固有周期の精度が悪いため、減衰常数を精度良く求めることは困難である。

以上の方法はいずれも時間領域のみで常数を定めるのであるが、MATUMOTO<sup>4)</sup>は常数を求めるのではなく、入力と出力のスペクトル密度の比によつて地震計の周波数特性を求め

1) E. SHIMA and R. P. MEYER, "Total System Calibration of High-Frequency Seismograph System by Use of the Maxwell Bridge", Geophys. Monograph 10 (1966), 538, Amer. Geophys. Union.

2) 例えば、萩原尊礼「振動測定」(宝文館, 1945)。

3) 鈴木次郎・石田治子「地震計の固有振動記録から減衰常数を求める一方法」地震 [ii] 10 (1957), 164. [ii] 12 (1959), 142.

4) Tosimatu MATUMOTO, "Calibration of an Electromagnetic Seismograph by Means of the Frequency Analysis", Bull. Earthq. Res. Inst., 36 (1958), 55.

た。しかしながら先に述べた多成分観測の際には常数でそろえる方が簡便であり、またスペクトル密度を求める計算を野外観測の際行うことは困難である。2. 以下に述べる議論によれば、もともと減衰の大きな地震計や臨界制振付近で測定状態にある地震計の常数(固有周期および減衰常数)を単純な計算により求めることが出来、上記の困難性は除去される。

## 2. 解析

地震計の運動方程式は一般に次のように書ける。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2hn \frac{dx}{dt} + n^2 x = f(t). \quad (1)$$

ここで  $h$ ; 減衰常数  
 $n$ ;  $2\pi f_n$  ( $f_n$  は固有振動数)  
 $f(t)$ ; 外力

両辺をフーリエ変換すると

$$\{(j\omega)^2 + 2hn(j\omega) + n^2\} X(\omega) = F(\omega).$$

ここに  $\omega$ ; 角周波数

$$\begin{cases} X(\omega) \\ F(\omega) \end{cases} = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{cases} x(t) \\ f(t) \end{cases} e^{-j\omega t} dt.$$

したがってシステム関数  $\Phi(\omega)$  は

$$\Phi(\omega) = X(\omega)/F(\omega) = 1/\{(j\omega)^2 + 2hn(j\omega) + n^2\}. \quad (2)$$

で定義される。

### 1) インパルス応答を用いる場合

システム関数はインパルス応答  $k(t)$  のフーリエ変換によつて求められ、インパルス応答はその逆変換によつて得られる。すなわち、

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{-j\omega t} dt.$$

$$k(t) = 1/2\pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

実際の場合には、幾何学的倍率、与えるインパルスの大きさ等を考慮する必要がある。今後システム関数を、上記のことを考慮し任意常数  $A$  を乗じたものに定義し直す。

$$\Phi(\omega) = A/\{(j\omega)^2 + 2hn(j\omega) + n^2\}. \quad (3)$$

今インパルス応答を Fig. 1 のように

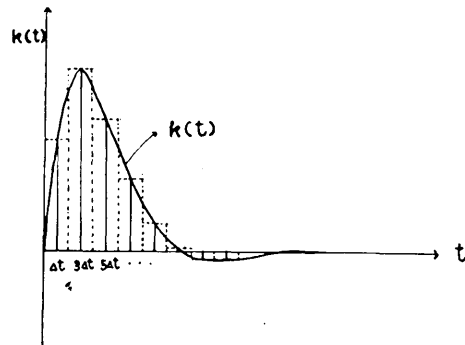


Fig. 1

$2\Delta t$  の幅をもつ矩形波パルス列で近似すると下式になる。

$$k(t) \approx \sum_{m=0}^{\infty} k[(2m+1)\Delta t] \{u[t-2m\Delta t] - u[t-2(m+1)\Delta t]\}. \quad (4)$$

ここで、 $u[t]$  は単位ステップ関数であり、

$$u[t-2m\Delta t] = 1, \quad t > 2m\Delta t$$

$$0, \quad t < 2m\Delta t$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots)$$

(4) 式をフーリエ変換するとシステム関数が得られる。

$$\Phi(\omega) \approx 2\Delta t \sin \Delta t \omega / \Delta t \omega \cdot \sum_{m=0}^{\infty} k[(2m+1)\Delta t] e^{-(2m+1)\Delta t \cdot j\omega}. \quad (5)$$

$\sin(\Delta t \omega)$ ,  $\exp\{-(2m+1)\Delta t \cdot j\omega\}$  を  $\omega$  に関してべき級数に展開すると、(5) 式は、

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) \approx & 2\Delta t \sum_{m=0}^{\infty} k[(2m+1)\Delta t] \\ & - 2\Delta t^2 \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) k[(2m+1)\Delta t] \cdot j\omega \\ & + 2\Delta t^3 \{1/2! \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^2 k[(2m+1)\Delta t] + 1/3! \cdot \sum_{m=0}^{\infty} k[(2m+1)\Delta t]\} (j\omega)^2 \\ & - 2\Delta t^4 \{1/3! \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^3 k[(2m+1)\Delta t] - 1/3! \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) k[(2m+1)\Delta t]\} (j\omega)^3 \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (6)$$

となる。

ところで  $hn > 0$  であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k(t)| dt < \infty$$

で、そのフーリエ変換  $\Phi(\omega)$  は  $-\infty < \omega < \infty$  で有界一様連続である。したがって (3) 式の  $\Phi(\omega)$  を次のように  $\omega$  に関する昇べき級数に展開することが出来、各べきの係数はただ一通りに定まる。

$$\Phi(\omega) = A \{1/n^2 - 2h/n^3 \cdot j\omega + (4h^2 - 1)/n^4 \cdot (j\omega)^2 - 2h(4h^2 + 2)/n^5 \cdot (j\omega)^3 + \dots\} \quad (7)$$

(6) および (7) 式において、等しいべきの係数の最初の 3 項をとると次のようになる。

$$A/n^2 \approx 2\Delta t \sum_{m=0}^{\infty} k[(2m+1)\Delta t].$$

$$2h A/n^3 \approx 2\Delta t^2 \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) k[(2m+1)\Delta t].$$

$$(4h^2 - 1) A/n^4 \approx 2\Delta t^3 \{1/2! \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^2 k[(2m+1)\Delta t] + 1/3! \cdot \sum_{m=0}^{\infty} k[(2m+1)\Delta t]\}.$$

上式の右边をそれぞれ  $a$ ,  $b$ ,  $c$  とおくと、

$$n^2 \approx a^2 / (b^2 - ac)$$

$$h^2 \approx b^2/4(b^2-ac)$$

よつて、地震計の固有周期および減衰常数が求められる。

## 2) ステップ応答を用いる場合

単一のステップ関数を入力とする場合、この応答は収束しないが、 $t_0$  という任意の時間幅を持つ矩形波を考えれば下のように取り扱うことが出来る。入力として、

$$f(t) = W_0 \{u[t] - u[t-t_0]\}. \quad (9)$$

ここに  $W_0$  は矩形波入力振幅。

この応答 (具体的には  $W_0 u[t]$  の応答を得れば、Fig. 2 に示すように、矩形波に対する応答が得られる。) を  $y[t]$  とし、1) と同様に矩形波パルス列で近似し、そのフーリエ変換を  $Y(\omega)$  とすれば、

$$Y(\omega) \approx Y_0 - Y_1 \cdot j\omega + Y_2 (j\omega)^2 - Y_3 (j\omega)^3 + \dots \quad (10)$$

$$\text{ここで、} \quad Y_0 = 2\Delta t \sum_{m=0}^{\infty} y[(2m+1)\Delta t].$$

$$Y_1 = 2\Delta t^2 \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)y[(2m+1)\Delta t].$$

$$Y_2 = 2\Delta t^3 \{1/2! \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^2 y[(2m+1)\Delta t] + 1/3! \cdot \sum_{m=0}^{\infty} y[(2m+1)\Delta t]\}.$$

$$Y_3 = 2\Delta t^4 \{1/3! \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^3 y[(2m+1)\Delta t] - 1/3! \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)y[(2m+1)\Delta t]\}.$$

(9) 式をフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} F(\omega) &= W_0(1 - e^{-j\omega t_0})/j\omega \\ &= W_0 t_0 \{1 - (t_0/2!)j\omega + (t_0^2/3!)(j\omega)^2 - (t_0^3/4!)(j\omega)^3 + \dots\}. \end{aligned} \quad (11)$$

したがつてシステム関数は

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= Y(\omega)/F(\omega) \\ &\approx 1/W_0 t_0 \cdot \{ Y_0 - (Y_1 - t_0/2 \cdot Y_0)j\omega \\ &\quad + (t_0^2/12 \cdot Y_0 - t_0/2 \cdot Y_1 + Y_2)(j\omega)^2 \\ &\quad - (t_0^2/12 \cdot Y_1 - t_0/2 \cdot Y_2 + Y_3)(j\omega)^3 \\ &\quad + \dots \dots \dots \\ &\quad \dots \dots \dots \} \end{aligned} \quad (12)$$

ゆえに (7) 式より

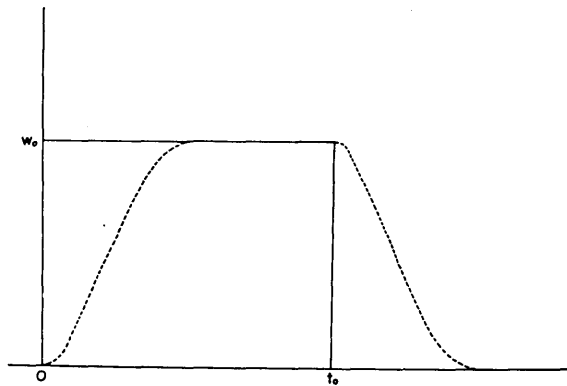


Fig. 2. Combination of two step forces (solid line) and the response due to them (dotted line).

$$\begin{aligned} A/n^2 &\approx Y_0/W_0 t_0 \\ 2h A/n^3 &\approx (Y_1 - t_0/2 \cdot Y_0)/W_0 t_0 \\ (4h^2 - 1) A/n^4 &\approx (t_0^2/12 \cdot Y_0 - t_0/2 \cdot Y_1 + Y_2)/W_0 t_0 \end{aligned}$$

上式において第1項の右辺は1であり、また第2, 3項の右辺をそれぞれ  $b'$ ,  $c'$  とすると、

$$\left. \begin{aligned} n^2 &\approx 1/(b'^2 - c'), \\ h^2 &\approx b'^2/4(b'^2 - c'). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となり、インパルス応答と同様に地震計の常数を求めることが出来る。

電磁式地震計を検定する際には、ガルバノメーターに接続して記録させるのが簡便である。ガルバノメーターの固有振動数が地震計のそれより十分高ければ、ガルバノメーターのふれの角、つまり記録紙上の動きは振子の速度に比例する。したがって、振子にステップ力を与えれば、記録紙上では地震計のインパルス応答を得ていることになり、実用上便利である。

強震計に代表される機械式地震計に対しては、多少計算が複雑になるが、前に述べたステップ応答を用いるのが実用上簡便である。

なお、同べきの項を対応させるのはどの項をとつても良いはずである。しかし高次の項をとると、その係数は高次のモーメントになり、収束が緩やかになるため精度が悪くなる。また計算もそれだけ複雑になるため、はじめの3項を用いた方が良い。

### 3. 精度

この方法によつて  $h$  および  $n$  を決定する際に、主に次の3項に起因する誤差が生ずる。

- 1) インパルス応答 (ステップ応答) は、インパルス力 (ステップ力) が与えられた後、無限時間経過して収束するが、実際には未収束状態を扱わねばならない。
- 2) インパルス応答 (ステップ応答) を矩形波パルス列で近似している。
- 3) 振幅の読み取りは必ずしも正しくない。

ここでは、振幅は十分に正確に読みとれたと仮定して、インパルス力を与えた場合の 1) および 2) のみに起因する誤差について議論する。

インパルス応答の収束状態に依つて誤差がどのように変化するかを Fig. 3 a-3 b に示す。図の上部はそれぞれ  $h = 0.5 \sim 1.5$  のインパルス応答で、下部はそれに伴う誤差 (実線は  $n$ , 鎖線は  $h$  の誤差) を示している。縦軸は百分率で表わした誤差の値で、横軸はインパルス応答の時刻と一致させたサンプルの数 ( $m+1$ ) を示している。つまりサンプリング区間 ( $2\Delta t$ ) を一定 ( $T_n/20$ ) にして、徐々に読み取りの数を増し、計算を実行していった時の誤差の変化を示している ( $T_n$  は地震計の固有周期)。  $h = 0.5$  の時の誤差は振動しながら微小値に収束していく。サンプルの数を40個程度用いると5%以下の誤差になるが、ほぼこの附近が読み取りの限界であろう。  $h$  が大きくなるに従い、誤差の振動性が弱くなり微小値に速やかに収束している。  $h = 1.0$  では20個程度でほぼ5%以下になる。

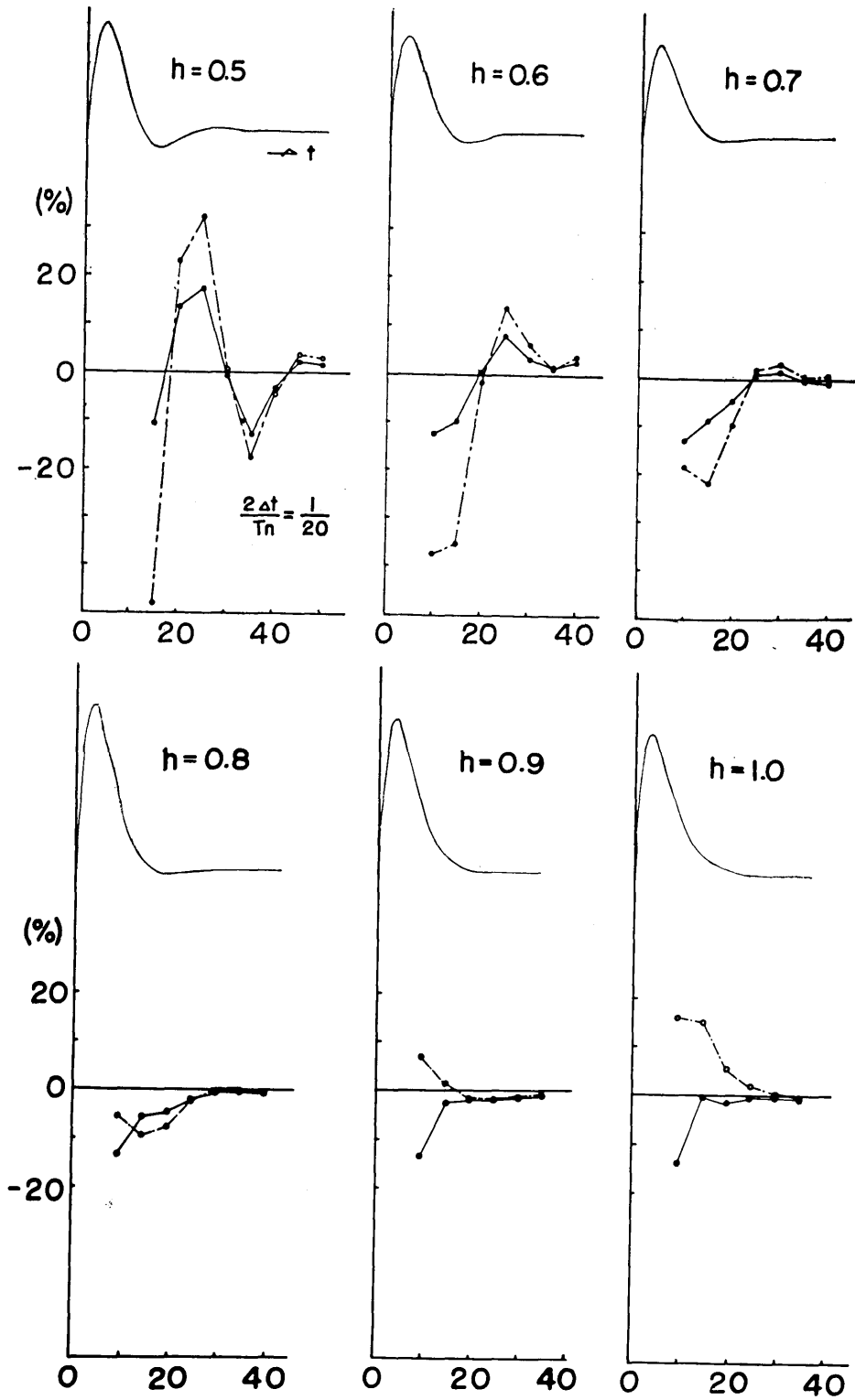


Fig. 3 a

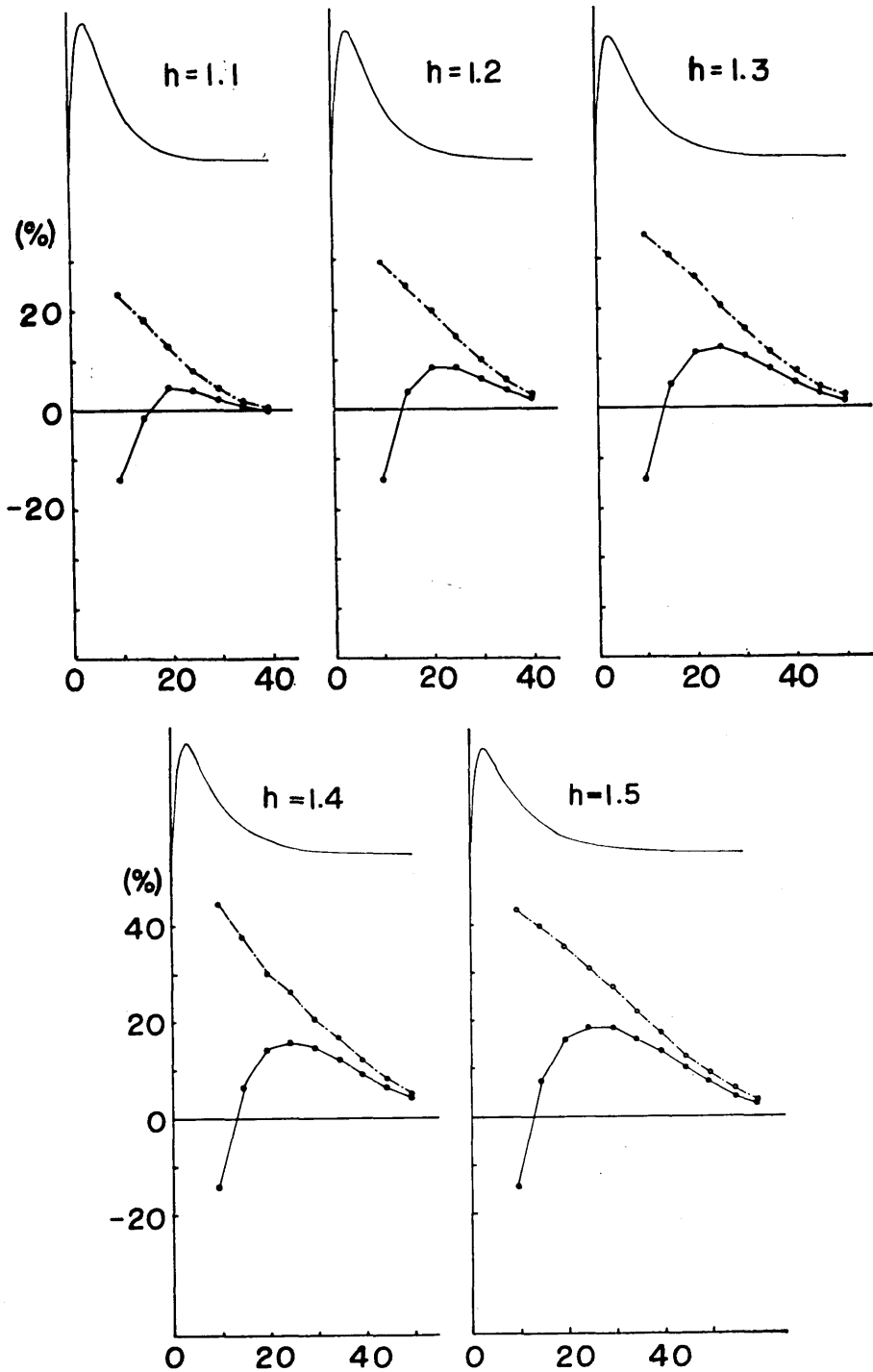


Fig. 3 b

Fig. 3a-3b An impulsive response is shown in the upper part of each figure. The lower part describes the variations of errors due to the truncation of an impulsive response. Solid lines and broken lines show the errors of  $n$  and  $h$ , respectively. The abscissa is the sample numbers.  $2\Delta t$ ; Sample interval.  $T_n$ ; Natural period of seismometer.

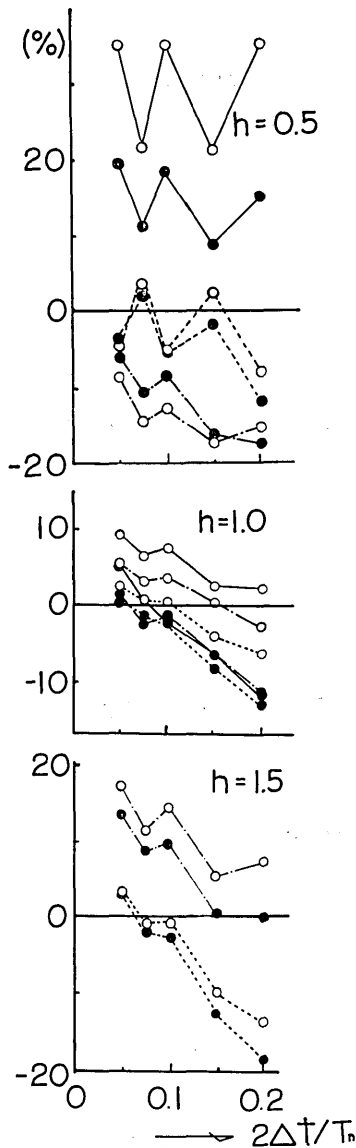


Fig. 4. Errors due to the sampling rates. Samplings were done until the decaying amplitude became 10% (solid line), 5% (part of a dotted line) and 1% (dotted line) of maximum amplitude.  
● for  $n$ , ○ for  $h$  respectively.

$h$ が1.0より大きくなるに従い、振動性はなくなるが収束が緩やかになり、1.5になるとわれわれが必要とする精度（少なくとも10%以下）を得るためには50個程度まで読み取る必要がある。以上のことから、インパルス応答を十分収束しているところまで読み取れば、われわれの必要とする精度は得られることが解る。ただし実用上から言つて、 $h$ が非常に小さい場合、あるいは大きい場合には、この方法では多数個の読み取り、計算を行う必要があるため、従来の検定法に依る方が簡便である。

インパルス応答を矩形波パルス列で近似したことによる誤差は、サンプリング区間を適当に変化させ計算することに依つて推定した。 $h=0.5, 1.0, 1.5$ の例をFig. 4に示してある。縦軸が百分率で表わした誤差で、横軸がサンプリング区間を示す。●, ○はそれぞれ $n, h$ の誤差を示し、計算に用いた最終時点の等しいものを結んである。つまり実線、一点鎖線、鎖線の順で、用いたインパルス応答の最終振幅値がより収束状態に近づいていることを示す。この結果に依れば $h$ の値に依らず十分収束している所まで読み取り、計算を行つた場合には、 $2\Delta t \leq T_n/10$ であればサンプリング区間に依る誤差の変化は少なく、十分な精度で求め得る。したがつてFig. 3に示してある誤差はサンプリング区間が2倍になり、読み取り数が半分になつても変化はほとんどない。

以上のことから、与えられたインパルス応答の最大振幅の1%程度まで収束している所までを15~20個読み取れば、誤差をほぼ5%以内に納めることが出来る。またそれが10%まで許されるような場合には、最大振幅の5%程度までを10個程度読み取り計算すれば良いことが解る。

#### 4. 実験例

爆破地震動研究グループ等で良く用いられている1 cps 上下動地震計および筒型の上下動地震計に対しこの方法を試みた。前者は従来の方法で  $h \ll 1.0$



Table 1. Experimental results for electromagnetic seismometer.

Electromagnetic Seismometer Type-1 ( $f_n = 0.88$ cps)		
External Resistance ( $k\Omega$ )	Natural Frequency $f_n$ (cps)	Damping Coefficient ( $h$ )
3.97	0.90	1.31
5.22	0.87	1.03
6.22	0.85	0.91
7.09	0.86	0.81
8.31	0.83	0.69
10.5	0.89	0.57

Table 2. Experimental results for electromagnetic seismometer, the intrinsic damping of which is high.

Electromagnetic Seismometer Type-2		
External Resistance ( $k\Omega$ )	Natural Frequency $f_n$ (cps)	Damping Coefficient ( $h$ )
0.97	4.7	1.20
2.00	5.0	1.00
3.15	4.8	0.82
3.97	4.9	0.77
6.22	4.8	0.63
21.3	4.6	0.38

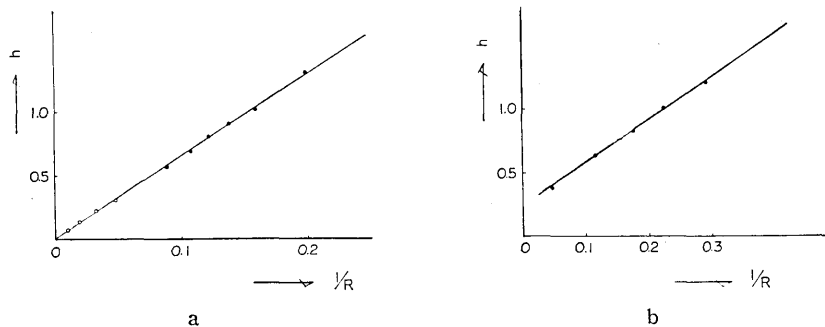


Fig. 5 a-5 b Relation between  $h$  and the reciprocal of total resistance of circuit. Open circles are obtained by using the succeeding maximum amplitude of free oscillation. Filled circles are derived by the method proposed in this paper.

の検定を行いうる地震計で、今回の方法の精度を確かめる目的で行った。後者はもともと減衰が大きくきいているため、固有周期を十分な精度では求めることが出来ず、従来までの方法では検定が困難な地震計である。精度としては5%以内に求めれば実用上さしつかえないという観点から、3. を考慮に入れ、インパルス応答の読み取り数は15~20個にしてある。電磁式地震計であるから、外部抵抗を変えることにより地震計の減衰常数を変えることができる。Table 1, 2 に与えた外部抵抗とそれに伴って得られた常数を示す。固有振動数は3. の考察により想定される精度と同程度に求まっている。また、1 cps 地震計に対し  $h \ll 1.0$  の場合を従来の方で行うと Fig. 5 a の白丸の点になり、今回の方法

Table 3. An example of the calibration of mechanical seismometer.

Given		Calculated	
$n$	$h$	$n$	$h$
6.28	0.5	6.15	0.59
6.28	1.0	6.20	1.25
6.28	1.5	5.44	1.51

Table 4. An example of calculation.

$2m+1 = m'$	$k[m' \Delta t]$ (Amplitude)	$m' \cdot k[m' \Delta t]$	$m'^2 \cdot k[m' \Delta t]$
1	741	741	741
3	1220	3660	10980
5	1116	5580	27900
7	858	6006	42042
9	605	5445	49005
11	406	4466	49126
13	263	3419	44447
15	167	2505	37575
17	104	1768	30056
19	63	1197	22743
21	38	798	16758
23	23	529	12167
25	14	350	8750
27	8	216	5830
29	5	145	4205
+ )	5631	36825	362325

$$a = 5631 \cdot \Delta t = 281.6,$$

$$b = 3683 C \cdot \Delta t^2 = 92.06,$$

$$c = (362300/2 + 5631/6) \cdot \Delta t^3 = 22.77.$$

$$n^2 = a^2/(b^2 - ac) = 38.44,$$

$$h^2 = b^2/4(b^2 - ac) = 0.951,$$

$$f_n = 0.99 \text{ cps.} \quad h = 0.98,$$

$$2\Delta t = 0.1 \text{ sec.}$$

で求めた  $h$  (黒丸の点) と抵抗の逆数値との比例直線と良く一致する。従来の方法では検定が困難な、もともと減衰の大きな地震計も十分な精度で検定が可能である。(Table 2, Fig. 5 b)

機械式地震計に対して、Table 3 に示すごとく、数値実験を行つた。インパルス応答を用いる場合よりも多少精度が悪いが、実用には供せられるであろう。

なお参考のため、計算手順の例を Table 4 に示す。

## 5. おわりに

とらえようとしている波の周波数が固有振動数に比して十分高くなるように地震計を選びさえすれば、振幅・位相等を比較検討するとき、必ずしも地震計の常数を細かく知る必要はないが、一般に自然地震の観測ではそれが許されない場合が起り得る。その意味で地震計の検定は不可欠のことであり、従来検定が困難であつたにもかかわらず用いられて来た臨界制振附近での常数を、今回の方法で求めることが出来る。

最後に、議論して頂いた太田 裕博士に厚く御礼申し上げる。また、図面の作成に協力された永田滋子・渡辺さゆり嬢に謝意を表す。なお計算に、東京大学大型計算機センターの HITAC 5020 E, および UNICON を通じて NCR 315 を使用した。

65. *A Note on the Calibration of a Seismometer;  
in the Case of  $h \approx 1$ .*

By Kazuyoshi KUDO, Etsuzo SHIMA and Yasuo SATÔ,  
Earthquake Research Institute.

It is well known that the frequency response of a seismometer is determined from its constants (natural frequency and damping coefficient). Up to now, however, there has been no method of determining these constants experimentally when  $h \approx 1$ . A simple new method is proposed here to overcome the above mentioned difficulty.

The system function of a mechanical seismometer  $\phi(\omega)$  is given by Eq. 3, in which  $A$  is a constant. A system function  $\phi(\omega)$  and an impulsive response  $k(t)$  are related with the aid of the direct and inverse Fourier transforms.

An impulsive response can be expressed as the sum of a sufficiently large number of pulses, each of which has a width  $2\Delta t$  and height  $k(t)$  (see Fig. 1). Therefore,  $k(t)$  can be expressed approximately as Eq. 4. The Fourier transform of  $k(t)$  is thus approximated by Eq. 5. Eq. 6 describes the ascending power expansion of Eq. 5 with respect to  $\omega$ . In the same way the system function defined by Eq. 3 can be expanded as shown in Eq. 7. We have three unknowns  $n$ ,  $h$  and  $A$ . Comparing the coefficients of the same power between Eq. 6 and 7, we are able to get the constants of seismometer as represented in Eq. 8.

When the electromagnetic seismometer is operated with the galvanometer, natural frequency of which is comparatively higher than that of the seismometer, the deflection angle of the galvanometer is proportional to the time derivative of the displacement of pendulum. Therefore, we can get the impulsive response approximately by giving a step force to the pendulum of the electromagnetic seismometer.

In the same way, we can also get the constants, combining two step responses. (Fig. 2), (Eqs. 9~13). The application of step response is recommended for the mechanical seismometer.

The error is caused mainly by two factors. The first is that an impulsive (or a step) response converges to zero after infinite time, however, we are not able to treat the infinitely long duration. The second is due to the fact that an impulsive (or a step) response is approximated by a series of pulses. Variations of errors caused by the first factor are estimated in Fig. 3 a-3 b. Errors caused by the second factor are evaluated by changing the sampling rates. (Fig. 4) Through these estimations, it is clear that the constants of seismometer can be derived with errors less than 10% if we digitize the impulsive response until the decaying amplitude becomes less than 5% of maximum amplitude. And it is necessary to use the data until the disturbance becomes less than 1% of its maximum amplitude in order that the error should be less than 5%. In the former case, the sample numbers  $(m+1)$  should be more than 10, while in the latter case it should be more than 15.

Examples for two electromagnetic seismometers are given in Tables 1 and 2.

Theoretically,  $h$  is inversely proportional to the total resistance of the circuit. In order to prove our method, experimental results of that relation are shown in Figs. 5 a and 5 b. An example of calibrating the mechanical seismometer, which uses two step responses, is also shown in Table 3.