

# 16. 地球磁場の地方的異常及び永年變化に就て (第 II 報)

地震研究所 永田 武

(昭和18年5月18日發表—昭和18年12月20日受理)

## 1. 緒 言

前論文<sup>1)</sup>に於いて、地球磁場の主磁場が中心双極子の磁場によつて與へられ、この主磁場による地殻の誘導磁化が高次の地方的異常を生ずると云ふ諸大家<sup>2)</sup>の推定を、實際に數値的に吟味する方法を述べ、且つその特殊の場合に就いて、實際の地球磁場を吟味した結果を報告した。茲に特殊の場合といふのは、地球の主磁場が地軸と一致する方向を持つ双極子と假定した場合である。この場合には地球磁場の  $P_1(\cos \theta)$  項、即ち係数  $g_1^1$ ,  $h_1^1$  が理論上は零にならなくてはならないといふ事になり、實際の場合は  $\sqrt{(g_1^1)^2 + (h_1^1)^2}$  が決して小さくはない事と良く調和しない。従つて、次には第二次の近似として  $g_1^0$ ;  $g_1^1$ ;  $h_1^1$  の方向を持つ中心双極子磁場を主磁場として採用する。この考へは今日の主磁場の概念としては最も妥當なものである。<sup>3)</sup> 扱て、この場合の數理的取扱ひは、地軸を  $\theta=0$  軸とする球座標に就いて導いた前論文の方法を、そのまゝ今度は磁軸を  $\theta=0$  軸として採れば良い譯であるが、主として地理的緯度  $50^\circ$  以下の中低緯度地方で觀測された結果を、地磁氣座標による球函數にて展開する事は、精度その他の點で思はしくない。従つて、此處では座標系としては地理的經緯度を使用し、中心双極子の磁化方位が任意の場合の一般式を導入し、之によつて實際の場合を吟味する方針を採つた。

## 2. 方 法

前述の如く、主磁場を方向  $g_1^0$ ;  $g_1^1$ ;  $h_1^1$  を持ち磁氣能率  $8.1 \times 10^{25}$  e.m.u.<sup>4)</sup> なる双極子に因る磁場と假定し、又地殻としてはその厚さ  $d$ 、帶磁率 (熱殘留磁氣係數<sup>5)</sup> を含む) を  $\kappa$  とする時、半径  $b$ 、帶磁率  $\kappa \times d$  なる充分薄い球殻を以て代表する。

1) 永田 武 震研彙報 20 (1942), 107.

2) 文獻 9), 10), 11), 12).

3) 例へば S. Chapman and J. Bartels, Geomagnetism II. 639.

4) 同 上.

5) 永田 武 震研彙報 21 (1943), 82.

$$\kappa \times d = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) \{a_n^m \cos m\phi + b_n^m \sin m\phi\} \quad (1)$$

とする時、この球殻の中心に置かれた単磁化  $\sigma$  によつて、球殻は半徑方向に磁化しその強度分布は

$$M(\theta, \phi) = \frac{\sigma}{b^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) \{a_n^m \cos m\phi + b_n^m \sin m\phi\} \quad (2)$$

となり、この磁化に因る球殻の外側の磁氣ポテンチアル  $V_+$  は

$$V_+ = \frac{4\pi\sigma}{b^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{n}{2n+1} \left(\frac{b}{r}\right)^{n+1} P_n^m(\cos \theta) \cdot \{a_n^m \cos m\phi + b_n^m \sin m\phi\} \quad (3)$$

で與へられる。然る時、單磁化  $\sigma$  の代りに、方向餘弦  $(\alpha, \beta, \gamma)$  で與へられる方向を持ち、能率  $J$  なる双極子を置けば、この双極子の磁場による球殻の磁化に起因する球殻外の任意の點の磁氣ポテンチアル  $W$  は

$$W = \frac{J}{\sigma} \left( \alpha \frac{\partial V_+}{\partial x} + \beta \frac{\partial V_+}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V_+}{\partial z} \right) \quad (4)$$

で與へられる。

即ち

$$\begin{aligned} W = & -\frac{2\pi J}{b^2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{n+1}}{r^{n+1}} \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} P_{n+1}^1(\cos \theta) \cdot a_n^2 (\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi) \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{b^{n+1}}{r^{n+1}} \frac{n}{2n+1} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(n-m+1)(n+m+2)} \cdot P_{n+1}^{m+1}(\cos \theta) \cdot \{ \alpha a_n^m - \beta b_n^m \} \cos \overline{m+1} \phi \\ & \quad \left. + (\alpha b_n^m + \beta a_n^m) \sin \overline{m+1} \phi \right] \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{b^{n+1}}{r^{n+1}} \frac{n}{2n+1} \sqrt{\delta_{m+1}(n-m+1)(n+m+2)} \cdot P_n^m(\cos \theta) \{ (\alpha a_n^m + \beta b_n^m) \cos \overline{m-1} \phi \\ & \quad \left. + (\alpha b_n^m - \beta a_n^m) \sin \overline{m-1} \phi \right] \\ & + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{b^{n+1}}{r^{n+1}} \cdot \frac{n}{2n+1} \sqrt{(n+1)^2 + m^2} \cdot P_{n+1}^n(\cos \theta) (a_n^m \cos m\phi + b_n^m \sin m\phi) \quad (5) \end{aligned}$$

茲に  $\delta_0 = 2; \quad \delta_n = 1 \quad n \geq 1.$

之に對して地球表面，即ち  $r=R$  球面上で求められる磁氣ポテンシャルを

$$W_0 = R \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{M=0}^N \left( \frac{R}{r} \right)^{N+1} P_N^M(\cos \theta) (g_N^M \cos M\phi + h_N^M \sin M\phi) \quad (6)$$

とすれば，この中  $W_1 = \frac{R^2}{r} \{g_1^0 P_1^0(\cos \theta) + P_1^0(\cos \theta)(g_1^0 \cos \phi + h_1^1 \sin \phi)\}$  は主磁場であつて， $\alpha : \beta : \gamma = g_1^0 : g_1^1 : h_1^1$  である．従つて (5) 式に對應する異常磁場は

$$W_r = R \sum_{N=2}^{\infty} \sum_{M=0}^N \left( \frac{R}{r} \right)^{N+1} P_N^M(\cos \theta) \cdot (g_N^M \cos M\phi + h_N^M \sin M\phi) \quad (7)$$

となる筈である．

故に (5) 式と (6) 式との對比から  $(g_N^M, h_N^M)$  と  $(a_N^M, b_N^M)$  との間の關係が得られる．即ち

$$-\gamma N \alpha_{N-1}^0 + \frac{\sqrt{2N(N-1)}}{2} (\alpha \alpha_{N-1}^1 + \beta b_{N-1}^1) = \frac{R^{N+2}}{2\pi J b^{N-2}} \cdot \frac{2N-1}{N-1} \cdot g_N^0 \quad (8)$$

( $N \geq 2$ )

$$\left. \begin{aligned} & -\sqrt{N^2-1} \alpha_{N-1}^1 \gamma - \sqrt{\frac{N(N+1)}{2}} \alpha_{N-1}^0 \alpha + \sqrt{\frac{(N-2)(N-1)}{2}} (\alpha \alpha_{N-1}^2 + \beta b_{N-1}^2) \\ & = \frac{R^{N+2}}{2\pi J b^{N-2}} \cdot \frac{2N-1}{N-1} \cdot g_N^1 \\ & -\sqrt{N^2-1} b_{N-1}^1 \gamma - \sqrt{\frac{N(N+1)}{2}} \alpha_{N-1}^0 \beta + \sqrt{\frac{(N-2)(N-1)}{2}} (\alpha b_{N-1}^2 + \beta a_{N-1}^2) \\ & = \frac{R^{N+2}}{4\pi J b^{N-2}} \cdot \frac{2N-1}{N-1} h_N^1 \end{aligned} \right\} (9)$$

( $N \geq 3$ )

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\sqrt{2N(2N-1)}}{2} (\alpha \alpha_{N-1}^{N-1} - \beta b_{N-1}^{N-1}) = -\frac{R^{N-2}}{2\pi J b^{N-2}} \cdot \frac{2N-1}{N-1} g_N^N \\ & \frac{\sqrt{2N(2N-1)}}{2} (\alpha b_{N-1}^{N-1} - \beta a_{N-1}^{N-1}) = -\frac{R^{N+2}}{4\pi J b^{N-2}} \cdot \frac{2N-1}{N-1} h_N^N \end{aligned} \right\} (10)$$

( $N \geq 2$ )

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{N^2 - (N-1)^2} \gamma \alpha_N^N + \sqrt{\frac{(N-1)(2N-1)}{2}} (\alpha \alpha_{N-1}^{N-2} - \beta b_{N-1}^{N-2}) \\ & = -\frac{R^{N+2}}{4\pi J b^{N-2}} \cdot \frac{2N-1}{N-1} \cdot g_N^{N-1} \\ & \sqrt{N^2 - (N-1)^2} \gamma b_N^N + \sqrt{\frac{(N-1)(2N-1)}{2}} (\alpha b_{N-1}^{N-2} + \beta a_{N-1}^{N-2}) \\ & = -\frac{R^{N+2}}{4\pi J b^{N-2}} \cdot \frac{2N-1}{N-1} \cdot h_N^{N-1} \end{aligned} \right\} (11)$$

( $N \geq 3$ )

$$\left. \begin{aligned}
 & \tau_1 \sqrt{N^2 + M^2} a_{N-1}^M + \frac{\sqrt{(N+M-1)(M+N)}}{2} (\alpha a_{N-1}^{N-1} + \beta b_{N+1}^{M-1}) \\
 & \quad - \frac{\sqrt{(N-M-1)(N-M)}}{2} (\alpha a_{N+1}^{M+1} + \beta b_{N-1}^{M+2}) \\
 & = -\frac{R^{N+2}}{4\pi J b^{N-2}} \cdot \frac{2N-1}{N-1} \cdot g_N^M \\
 & \tau_1 \sqrt{N^2 - M^2} b_{N-1}^M + \frac{\sqrt{(N+M-1)(N+M)}}{2} (\alpha b_{N-1}^{M-1} + \beta a_{N-1}^{M-1}) \\
 & \quad - \frac{\sqrt{(N-M-1)(N-M)}}{2} (\alpha b_{N-1}^{M-1} - \beta a_{N-1}^{M+1}) \\
 & = -\frac{R^{N-2}}{4\pi J b^{N-2}} \cdot \frac{2N-1}{N-1} \cdot h_N^M \\
 & \quad (N \geq 4, N-2 \geq M \geq 2)
 \end{aligned} \right\} (12)$$

従つて  $(g_N^M, h_N^M)$  の値から  $(a_N^M, b_N^M)$  が上の聯立方程式を解く事によつて與へられる筈であるが、上式に明らかなる如く、 $(a_N^M, b_N^M)$  の未知數の決定に當つて常に方程式が一つ多い。従つて前論文及び本論文の緒言に述べた如き考が實際の場合に嚴密に成立するならば、 $(g_N^M, h_N^M)$  は一つの條件式を満足しなければならない。實際の計算に當つては、 $\beta=0$  とする事は  $\phi=0$  子午線を移動する事によつて、新しい座標系に對する  $g_N^M, h_N^M$  を求める事は精度を損せず且つ容易に計算出来るから、以下  $\beta=0$  の場合について考究する。此の場合に  $g_N^M, h_N^M$  が満足すべき條件式は次の如き形である。

$$\left| \begin{array}{cccccccc}
 \tau N & -\frac{\sqrt{2N(N-1)}d}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & g_n^M \\
 \frac{\sqrt{N(N+1)}d}{2} & \sqrt{N-1} \tau & -\frac{\sqrt{N-2N-1}d}{2} & \dots & \dots & 0 & 0 & g_n^M \\
 0 & \frac{\sqrt{N(N+2)}d}{2} & \sqrt{N-2} \tau & \dots & \dots & 0 & 0 & g_n^M \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{\sqrt{2N(N-2N-1)}d}{2} & \sqrt{N-1} \tau & 0 & g_n^M \\
 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{\sqrt{2M(2N-1)}d}{2} & 0 & g_n^M
 \end{array} \right| = 0 \quad (13)$$

但し  $G_N^M \equiv \frac{R^{N+2}}{4\pi J b^{N-2}} \cdot \frac{2N-1}{N-1} g_N^M, N \geq 2$

## 3. 地球の永久磁場の解析

前節の方法によつて、Dyson 及び Furner<sup>7)</sup> の與へた  $g_n^m, h_n^m$  に就いて實際の計算を行つた。第 I 表に  $g_n^m, h_n^m$  を與へる。之等の諸係数は、東西、南北及び鉛直の三成分から別々に計算した値の平均値を採用したものである。更に第 I 表の値から  $G_n^m$  を求める。茲に  $G_1^1, H_1^1$  は  $h_1^1=0$  (即ち  $\beta=0$ ) なる様に、經度の零方位を東經  $11^\circ 53'$  に變換した座標に就いての値である。斯くして得られた ( $G_n^m, H_n^m$ ) は條件式 (13) を必しも嚴密には満足しない。依つて ( $a_n^m, b_n^m$ ) は實は一義的に定らず、地球の永年磁場が双極子主磁場とそれによる地殻の誘導磁化によつて、その悉くを説明する譯には行かない事を示してゐる。然し此處では (8) 乃至 (12) の聯立方程式から最小自乗法によつて與へられた ( $a_n^m, b_n^m$ ) を求める値として採用する事にする。  $R=6360$  km,  $b=6330$  km として計算した係數 ( $a_n^m, b_n^m$ ) の値は第 II 表に示す如くであつて、之等

第 I 表 地球磁場の地理座標に對する球函數展開の係數

$g_n^m$								
$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6	
1	-0.3095	-0.0226						
2	-0.0089	+0.0299	+0.0144					
3	+0.0102	-0.0157	+0.0118	+0.0076				
4	+0.0088	+0.0068	+0.0079	-0.0040	+0.0018			
5	-0.0023	+0.0026	+0.0018	-0.0004	-0.0009	+0.0000		
6	+0.0007	+0.0011	+0.0001	-0.0020	-0.0006	+0.0003	-0.0006	

$h_n^m$							
$w \backslash m$	1	2	3	4	5	6	
1	+0.0592						
2	-0.0124	+0.0084 <sub>e</sub>					
3	-0.0044	+0.0012	+0.0024				
4	+0.0025	-0.0015	-0.0013	-0.0003			
5	-0.0015	+0.0001	+0.0001	-0.0013	0.0000		
6	+0.0002	+0.0009	+0.0004	-0.0003	0.0000	-0.0004	

(單位=C.G.S. 電磁單位)

の値から (1) 式によつて、 $\kappa \times d$  の球面分布を求めたのが第 1 圖である。茲に第 II 表に示す係數の値は、前論文に於けるそれとの比較を容易にする爲に、Greenwich を  $\phi=0$  とする普通の地理座標に換算してある。

他方最小自乗法によつて決定した ( $a_n^m, b_n^m$ ) の値を (8)~(12) 式に代入する事に

第 II 表  $\kappa \times d$  の球面調和級数展開の係数值

$a_n^m$		0	1	2	3	4	5
$n \backslash m$							
1		-1449	+1204				
2		+1345	-2406	+2285			
3		+834	+654	+760	+237		
4		-147	+208	+151	+26	+108	
5		-44	+63	-6	+18	-19	+73

$b_n^m$		1	2	3	4	5
$n \backslash m$						
1		-3078				
2		-1103	-2339			
3		+410	-61	+671		
4		-125	+44	+41	-129	
5		15	+70	+136	-56	-18

(單位=10<sup>-3</sup> c. u. 單位)

よつて ( $g_n^m, h_n^m$ ) の残余 ( $\Delta g_n^m, \Delta h_n^m$ ) を求め、之等から残余地磁気ポテンチアルを

$$\Delta W = R \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) (\Delta g_n^m \cos m\phi + \Delta h_n^m \sin m\phi)$$

計算した結果は、第 2 圖に示す如くである。

第 1 圖と前論文の之に對する圖とを對照すれば、一見して明らかなる如く兩結果は大勢に於いて殆んど差異なく、等しく  $\kappa \times d$  の負異常が大東亞地域に在り且つ正異常が大西洋南部にある。たゞ今回の結果に於いては  $\kappa \times d$  の極小域がマライ半島附近とハワイ諸島附近の二ヶ所に分離してゐる點に定性的な違ひがあるのみである。従つて前論文に爲した計算結果に對する論議は殆んどそのまま今回の場合にも適用される。地殻の厚さ  $d=50$  km とすれば、 $\kappa_{max} - \kappa_{min} = 3.2$  c.m.u. に達する。即ち一樣な厚さの地殻の帶磁率  $\kappa$  が場所によつて 3 e. m. u. 違ふと考へても良い譯であるし、又地殻の厚さが場所によつて異ると考へても良いのであるが結局  $\Delta \kappa \times d$  の場所による違ひの最大値は上記の値に達する。この値は地殻を構成する岩石の帶磁率の大きさを遙かに越えたものであり、殆んど磁鉄鏽のそれの値に近い。又熱残留磁氣<sup>7)</sup> の生成及び消滅を考慮しても猶ほ到底及ばないのであるが、然し火成岩の飽和磁氣<sup>8)</sup> の値に對しては數分の一の程度であるから、若し地下に於いては何等かの事情で帶磁率が増加すると

7) 永田 武 震研彙報 21 (1943), 1.

8) 永田 武 震研彙報 本號論文参照。

假定すれば、地殻の磁化として考へられない値といふ譯ではない。

次に残余ポテンチアル  $\Delta W$  の大きさは最大 2500  $\gamma$  程度であつて、磁軸方向双極子主磁場に於ける今回の場合の方が、地軸方向双極子主磁場に於ける前回の場合より遙かに小さい。然しその分布は決して不規則でなく、且つその値も無視し得る大きさといふ譯には行かない。従つて、地殻磁場の地方的異常のすべてを双極子主磁場による地殻の誘導磁化に歸する事は不可能である。

上述の結果は Wilde<sup>9)</sup> 以來 Rücker<sup>10)</sup> Nippoldt<sup>11)</sup>, Haalck<sup>12)</sup> 等によつて、斷片的に種々議論されて來たこの問題に對して、一應總括的に且つ數的な解答を與へたつもりである。然しその結果、地球磁場の地方的異常分布の問題は依然不確定のまま將來に持越される事となつた。恐らく永年變化に關する充分な資料が集積されれば、その方面からこの問題に對する重要な示唆が與へられるのではないかと思ふ。

第 III 表  $\kappa \times d$  の球面分布

緯度 \ 經度	0	20	40	60	80	100	120	140	100°E
80°N	+ 159	+ 132	+ 92	+ 49	+ 9	- 20	- 43	- 43	- 40
60	+ 333	+ 227	+ 69	- 95	- 219	- 275	- 266	- 226	- 193
40	+ 474	+ 271	- 19	- 302	- 492	- 540	- 461	- 342	- 280
20	+ 633	+ 341	- 49	- 405	- 635	- 689	- 585	- 439	- 382
0	+ 831	+ 507	+ 83	- 303	- 564	- 664	- 617	- 526	- 511
20	+ 998	+ 721	+ 334	- 43	- 329	- 488	- 533	- 541	- 577
40	+ 1013	+ 822	+ 531	- 216	- 55	- 246	- 362	- 442	- 520
60	+ 797	+ 695	+ 527	+ 326	+ 131	- 35	- 165	- 265	- 339
80	+ 369	+ 372	+ 322	+ 256	+ 184	+ 113	+ 51	+ 3	- 27

緯度 \ 經度	180°	160°	140	120	100	80	60	40	20
80°N	- 31	- 15	+ 7	+ 36	+ 70	+ 107	+ 139	+ 162	+ 170
60	- 184	- 182	- 161	- 107	- 10	+ 221	+ 221	+ 316	+ 361
40	- 302	- 352	- 354	- 270	- 112	+ 280	+ 280	+ 446	+ 529
20	- 439	- 518	- 512	- 375	- 133	+ 414	+ 414	+ 627	+ 727
0	- 582	- 642	- 588	- 379	- 53	+ 612	+ 612	+ 842	+ 941
20	- 649	- 672	- 571	- 307	+ 64	+ 766	+ 766	+ 988	+ 1084
40	- 582	- 577	- 453	- 202	+ 135	+ 767	+ 767	+ 967	+ 1108
60	- 375	- 352	- 251	+ 75	+ 151	+ 591	+ 591	+ 739	+ 811
80°S	- 34	- 17	+ 25	+ 88	+ 164	+ 369	+ 315	+ 369	+ 398

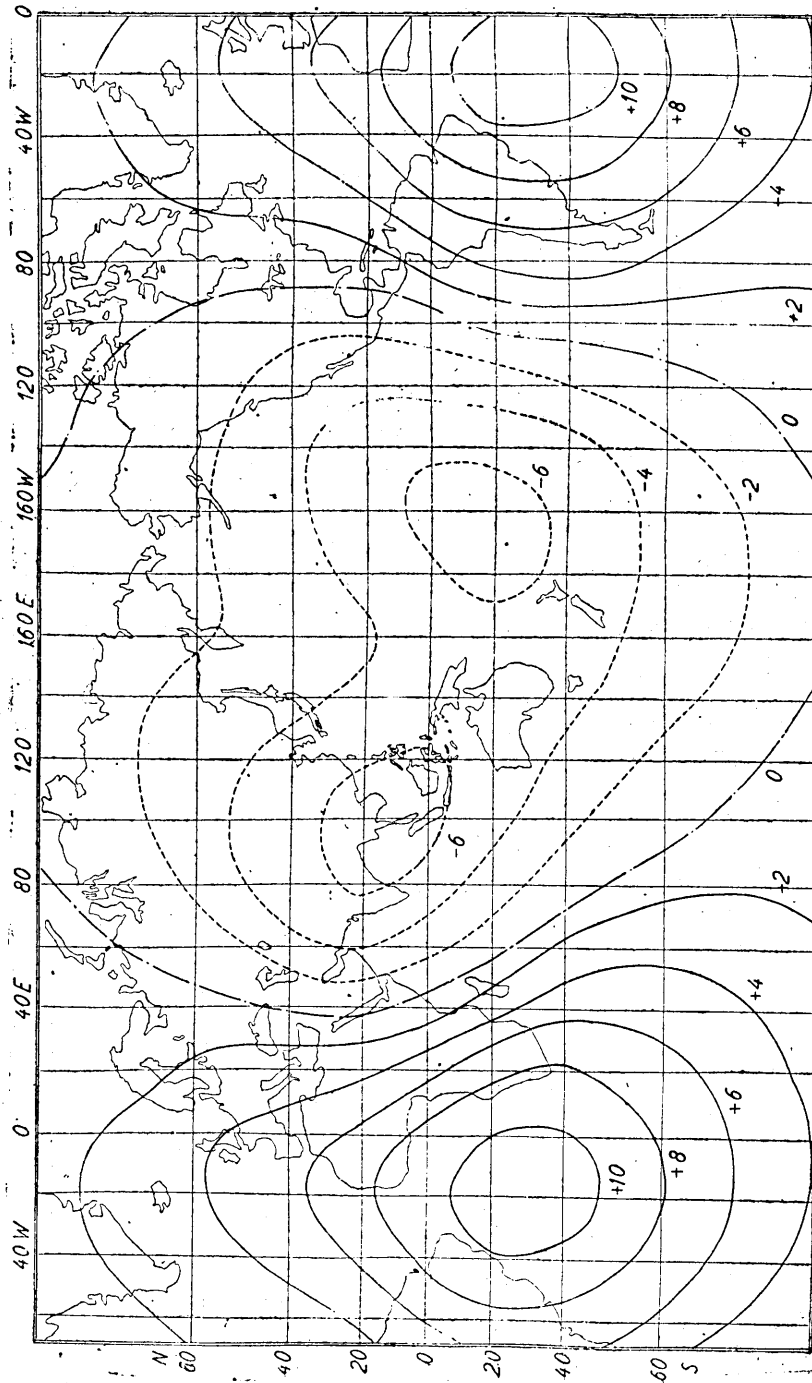
(單位=10<sup>4</sup> c. m. u.)

9) H. WILDE, *Proc. Roy. Soc. London A.*, 55 (1894), 210.

10) A. W. RÜCKER, *Terr. Mag.* 4 (1899), 113.

11) A. NIPPOLDT, *Terr. Mag.* 26 (1921), 99.

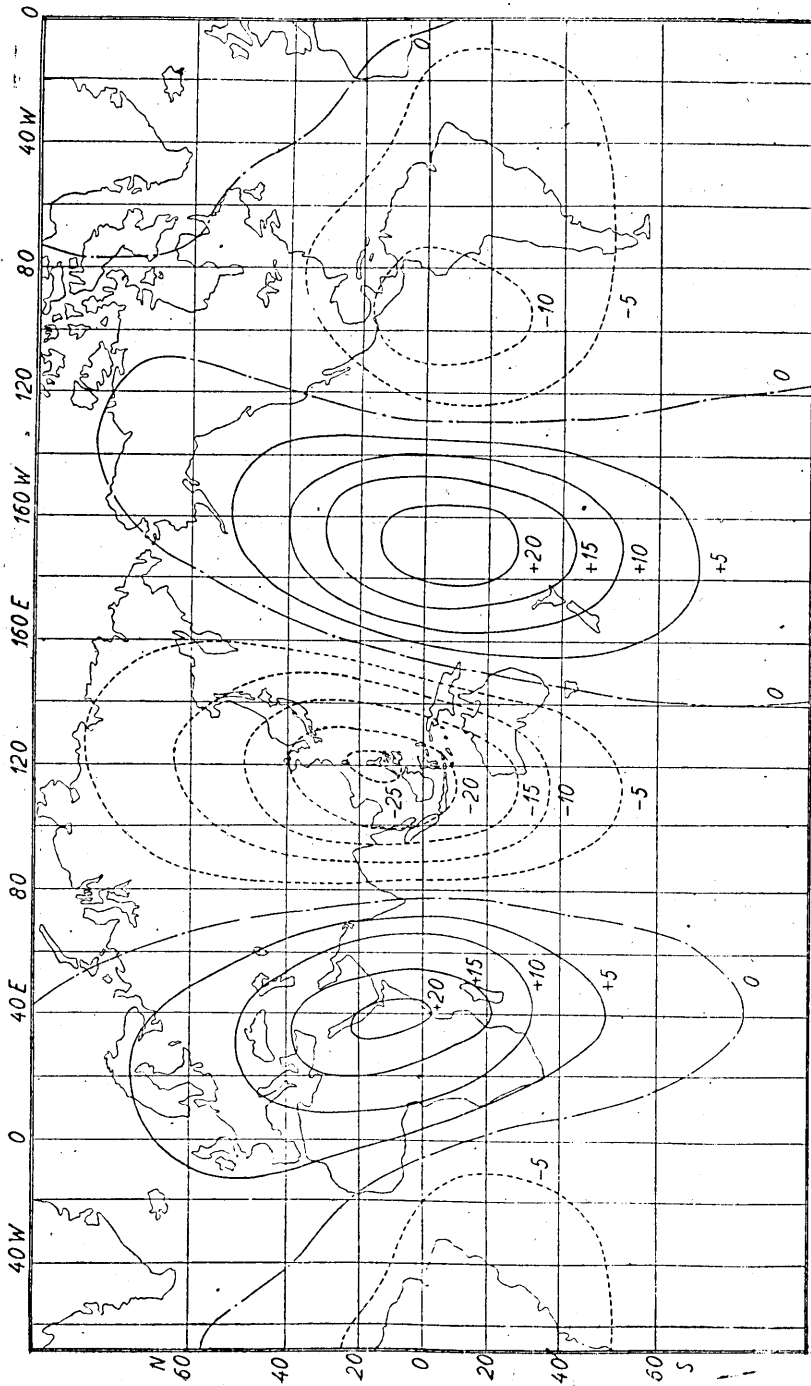
12) H. HAALCK, *Z. S. Geophys.*, 8 (1932), 154. *Beitr. Geophys.* 52 (1938), 243.,



(單位 =  $10^5$  e. m. u.)

第1圖 地表下に於ける ( $\epsilon \times d$ ) の分布





(単位= $10^{-3}$  e. m. u.)

第 2 圖 地殻の誘導磁化によつては生じ得ない残留地磁気ポテンチアル (dW) の地球表面に於ける分布

*16. Regional Anomaly and Secular Variation in Geomagnetism.*

By Takesi NAGATA,

Earthquake Research Institute.

In this note, under the assumption that the primary main geomagnetic field can be substituted by the centred dipole with the magnetizing direction specified by the ratios  $g_1^0$ ;  $g_1^1$ :  $h_1^1$ , the distribution of subterranean permeable mass, which is responsible for the regional anomaly on the earth's surface, was calculated. The mode of distribution of the permeable mass is shown in Fig. 1. This result does not much differ from that of the similar computation made under the assumption that the centred dipole is coaxial with the direction of axis of rotation of the earth.

In the present case also, just as in the case mentioned in the previous paper, it was concluded that the actual geomagnetic potential contains the exceptional part for which the subterranean mass cannot be responsible, though the amount of this exceptional part was much smaller than that in the case concerned in the previous paper.

---