6. 振子の週期に及ぼす振幅の影響

地震研究所　坪　井　忠　二

(昭和17年12月17日發表——昭和17年12月20日受理)

重力振子，その他の振子の自由振動の週期が，振幅によつて變化するものであることは，よく知られてゐる事柄である．今

T_0　振幅が無限に小さい時の週期

T_α　振幅が α の時の週期

とすれば，T_α は

$$T_\alpha = T_0\left(1+\frac{1}{16}\alpha^2+\frac{9}{1024}\alpha^4+\cdots\cdots\right)$$

で與へられることは，計算の示す通りである．α を $1°$ とすれば，第三項は 10^{-9} 程度のものであるから，精密な重力測定においてもこゝから先の項は不要で，通例は

$$T_\alpha = T_0\left(1+\frac{1}{16}\alpha^2\right)$$

として，取扱はれてゐる．

ところで，此の式を導くには，振子の構造について，或る理想的な假定がおかれてゐるのである．それはいふまでもなく，振子が振動する廻轉軸は，幾何學的の直線であるといふ假定である．重力測定などで，上の式を使つて週期に補正を加へる場合には實際の振子の刄が，この假定の通りに，幾何學的な直線をなしてゐると考へてゐることになるわけであるが，果してそれでよいであらうか．

然らば實驗的の事實はどうであらうか．若し振子の刄が實際に直線になつてゐるものならば，重力振子をいろいろな振幅 α でふらせ，その週期，T_α を測り，上の式によつて補正を加へてみれば，一定の T_0 なる值が得られる筈である．併し事實はなかなかさうはならない．これは實は決して新しい問題ではないので，古くは Helmert[1] 近くは Gebelein[2] などによつて注意せられた通りである．しかし此の問題だけを取上げて，くはしく論じたものが殆んど見當らないといふのは，週期を測るに際して，これ以外の原因から來る誤差があつて，その方の影響もあまり明瞭でないから，結局はつきりした結果を出す事ができない爲であつたと思はれるのである．

---

1) F. R. HELMERT, *Veröff. Kön. Preus. Geod. Inst.*, (1898).
2) H. GEBELEIN, *ZS. f. Geophys.*, 8 (1932), 272.

物理的にいへば，振子の刄が，幾何學的の直線をなしてゐるとは，とうてい考へられない．若し幾何學的の直線ならば，そこにおける壓力は無限大になるべきであるから，刄の材料がそれに耐えられる筈はなく，どうしても，刄は多少の曲率半徑をもつてをり，座との觸れあひは直線ではなく，狹いながらも面接觸をなしてゐると考へる方が當然である．然らばその曲率半徑はどの位の大きさのものであらうか．

これらの問題を，實驗の方から取扱つてゆくのは甚だ困難である．何分にも取扱ふ量は非常に小さいのであるから．あらゆる方面からみて少しの手落ちもない樣にした上でなければとうてい議論を進めるわけにはゆかない．我々の研究室においては，約十年に近く重力振子の製作と實驗とに從事してゐるが，此程漸く略滿足すべきものが出來上つた．此の裝置については何れ詳しく報告するつもりであるが，簡單に述べれば次の通りである．振子の材料は熔融シリカで，刄は高速度鋼，刄の角度は 90° から 120° に落した Repsold 型である．座は瑪瑙の平面である．刄や座の仕上げには最大の注意を拂ひ，顯微鏡による檢査のみならず，光の干渉による檢査も行つて，充分精密を期したのは勿論のことである．振子は合計 4 本あつて，いづれも大きさも形も同じく，(1) と (3) とは觀測點用，(2) と (4) とは基點用で，基點と觀測點との間を短波長の電波で連絡し，(2) (4) の週期を單位として (1) (3) の週期を求める樣にしてゐるのである．振子はいづれも丈夫な眞空の容器のなかで自由に振動し，寫眞によつて一致の曲線が得られ，これから週期が求められるのである．

4 本の振子の振幅を夫々 α_1, α_2, α_3, α_4 とすれば，我々が實測するものは

$$\frac{T_1(\alpha_1)}{T_2(\alpha_2)},\quad \frac{T_1(\alpha_1)}{T_4(\alpha_4)},\quad \frac{T_3(\alpha_3)}{T_2(\alpha_2)},\quad \frac{T_3(\alpha_3)}{T_4(\alpha_4)}$$

である．

今測定の一例として，(1) (4) の組合はせについて，地震研究所に於いて 11 回實驗を繰返して得られた結果を示せば，第 I 表の通りである．

第　I　表

實驗番號	α_1	α_4	$T_1(\alpha_1)/T_4(\alpha_4)$	$1/16\alpha^2$ による補正値	$k_1 = 0.127$ $k_4 = 0.122$ による補正値
1033	$8{\cdot}29\times10^{-3}$	$9{\cdot}35\times10^{-3}$	0·9825609	0·9825621	0·9825629
1034	8·00	9·68	602	621	635
1038	6·75	7·86	616	626	633
1039	9·45	8·70	589	610	636
1047	8·29	8·80	629	634	621
1048	7·87	8·70	618	627	625
1049	8·08	8·70	616	623	631
1050	6·70	8·15	607	620	631
1052	6·21	8·42	594	6[illegible]4	628
1081	7·45	7·72	625	623	629
1087	8·00	8·10	630	631	

此の實驗では，(1) (4) の兩振子は同じ室に置いてあるから，溫度は兩者殆んど同一とみてよく T_1/T_4 なる比には溫度の影響はないとみてよい．又容器の眞空も 0·1 mm Hg 程度で一定であるから，壓力による週期の補正も不要である．即ち T_1/T_4 が上の表の如くまちまちなのは，もつぱら振幅の影響である．

さて我々が測定したものは

$$T=\frac{T_1(\alpha_1)}{T_4(\alpha_4)}$$

であるから，若し週期に對する振幅の補正が $\alpha^2/16$ に從ふものであるならば

$$T=\frac{T_1(0)(1+\alpha_1^2/16)}{T_4(0)(1+\alpha_4^2/16)}$$
$$=\frac{T_1(0)}{T_4(0)}\left\{1+(\alpha_1^2-\alpha_4^2)/16\right\}$$

であるから，

$$\frac{T_1(0)}{T_4(0)}=T\left\{1-(\alpha_1^2-\alpha_4^2)/16\right\}$$
$$\fallingdotseq T-(\alpha_1^2-\alpha_4^2)/16$$

となる筈である．此の式によつて補正を加へた値も第 I 表に示しておいた．

此の補正を加へて得られる値もかなりまちまちで，最大の値と最小の値は

最大	1047	0·9825634
最小	1039	0·9825610

であり，その差は 24×10^{-7} に及んでゐる．これは決して滿足すべき結果ではない．尤も此の測定には他にも缺點があつて，これ以上の精確は期せられないのだと諦めてしまふならば，それ迄の話であるが，こゝではさうは考へないで，補正値がまちまちであつたのは $\alpha^2/16$ といふ形の補正が不適當であつたためであると考へて，最後の結果をもつとよくそろへる爲には如何なる補正を加へたらよいかといふ事を改めて求めてみようといふのである．

そのために 1/16 の代りに k_1, k_4 といふ常數を使つて

$$T=\frac{T_1(0)(1+k_1\alpha_1^2)}{T_4(0)(1+k_4\alpha_4^2)}$$

とおき，11 個の觀測から最小自乘法によつて k_1, k_4 を求めて見よう．此の式は，近似的に

$$\frac{T_1(0)}{T_4(0)}+k_1\alpha_1^2-k_4\alpha_4^2-T=0$$

となり，これが觀測方程式である．かゝる形の方程式が觀測の回數即ち 11 個だけあるわけで，これから最小自乘法によつて k_1, k_4 を求めてみると，

$$k_1 = 0{\cdot}127$$

$$k_4 = 0{\cdot}122$$

が得られる．これ等の値は $1/16 = 0{\cdot}0625$ に較べれば約 2 倍にも達する大きな値である．

これらの k の値を使つて觀測値に補正を入れ，$T_1'(0)/T_4(0)$ を求めた結果は第 I 表に示しておいた．この補正をいれた値の，最大と最小とを較べてみると，

最大	1047	0·9825636
最小	1049	0·9825625

であつて，その差は 11×10^{-7} となり．$\alpha^2/16$ なる補正をいれた時のひらきに較べて約半分になつてゐる．この程度のひらきは先づやむを得ないかと考へられるのである．

ともかく，普通は 1/16 とおく係數が，その約 2 倍の 1/10 程度であるといふのは著るしいことである．それならば何故この様な差が出てきたのであらうか．もとよりこれも容易に解決すべき問題ではない．しかし，試みに，刄が有限の曲率半徑を有しいはゆるころがる振子をなしてゐるとして議論を進めたら，見掛け上どういふことになるであらうか．

ころがる振子の理論によれば，振子の週期は次の式で與へられる．

$$T(\alpha) = T_0\left(1 - \frac{r}{2h} + \frac{1}{16}\alpha^2 + \frac{r}{4L}\alpha^2\right)$$

但し r は刄の曲率半徑，L は相當單振子の長さ，h は振子の重心と刄の曲率の中心との間の距離である．

さて我々が上に得た結果によれば

$$\frac{1}{16} + \frac{r}{4L} = \frac{1}{10}$$

であるから，

$$\frac{r}{L} = 0{\cdot}15$$

となる．我々の振子の週期は大體 1 秒であるから，L を大體 25 cm とすれば，r は實に數 cm となるのである．これは刄といふものに對する我々の常識とは，はなはだかけはなれたものであるといはなければならない．もつとも r が數 cm であるといつても，それだけの曲率を示してゐる部分の幅は極めて僅なものであらう．つまり，鋭

い刄の先の極めて僅の部分だけが恐らく彈性的に變形して，そこだけがかゝる曲率半徑を示してゐるのであらうと考へられるのである．

以上の議論では，單に (1) と (4) との組合はせだけを論じたのであるが，その他に (1) (2)，(3) (2)，(3) (4) といふ組合せもあり，全體で 31 個の觀測がある．これらの材料全部を使つて k_1, k_2, k_3, k_4 を最小自乘法で求めてみると，

$$k_1 = 0{\cdot}0887$$
$$k_2 = 0{\cdot}0650$$
$$k_3 = 0{\cdot}1369$$
$$k_4 = 0{\cdot}1292$$

が得られるのである．これらの觀測や補正の結果は第 II 表に示した．

第 II 表

實驗番號	振幅 (10^{-3}) α_1	α_2	α_2	α_4	觀測値 T	$\alpha^2/16$ による補正値	$k_1=0{\cdot}0887$, $k_2=0{\cdot}0650$, $k_3=0{\cdot}1369$, $k_4=0{\cdot}1292$ による補正値
1033	8·29			9·35	0·9825609	0·9825621	0·9825661
1034	8·00			9·68	602	621	666
1038	6·75			7·86	616	626	656
1039	6·45			8·70	589	610	650
1047	8·29			8·80	629	634	668
1048	7·89			8·70	618	627	661
1049	8·08			8·70	616	623	656
1050	6·70			8·15	607	620	653
1052	6·21			8·42	594	614	652
1081	7·45			7·72	625	628	653
1087	8·00			8·10	630	631	658
平均					0·9825612 ± 4	0·9825623 ± 2	0·9825658 ± 2
1035	8·34	9·01			0·9822002	0·9822009	0·9521993
1036	8·52	8·41			2029	2028	2011
1040	7·42	9·28			1990	2009	1997
1041	8·05	9·03			2015	2025	2011
1045	6·44	9·70			1988	2021	2012
1046	7·33	8·70			1999	2013	2000
1053	6·94	8·75			2004	2022	2011
1055	7·46	8·58			1990	2001	1989
1056	6·44	8·61			1979	1999	1990
1079	6·40	7·87			1997	2010	2001
1080	8·00	8·60			2017	2017	2002
平均					0·9822001 ± 4	0·9822014 ± 3	0·9822002 ± 3

(次頁へ續く)

第 II 表 (續)

實驗番號	振幅 (10^{-3}) α_1	α_2	α_3	α_4	觀測値 T	1/16 α^2 による補正値	$k_1=0{\cdot}0887$, $k_2=0{\cdot}0650$ $k_3=0{\cdot}1369$, $k_4=0{\cdot}1292$ による補正値
1017		9·72	8·37		0·9844460	0·9844475	0·9844426
1018		8·26	7·76		461	466	422
1058		8·95	7·80		455	467	423
1085		7·52	7·96		467	463	417
1086		7·82	7·92		480	479	434
平均					0·9844465 ± 4	0·9844470 ± 3	0·9844425 ± 3
1019			7·16	8·56	0·9848080	0·9848094	0·9848105
1032			8·08	9·57	075	091	104
1060			7·44	9·12	067	084	098
1083			7·36	7·88	087	092	093
平均					0·9848077 ± 4	0·9848090 ± 2	0·9848100 ± 3

此の補正を入れた場合と，$\alpha^2/16$ の補正を入れた場合とで，値の開きを比較して見ると，左の表通りである．

組合はせ	新しい係數によつた場合	$\alpha^2/16$ によつた場合
1—4	18×10^{-7}	24×10^{-7}
1—2	23	29
2—3	17	16
3—4	12	10

新しい係數を入れても，結果が甚だよくなるとは決して云へないけれども，$\alpha^2/16$ に較べれば，多少はよいと認められるのである．

我々の振子といへども決して完全なものではないから，上に得られた k の値自身に大した意味があるとは考へない．たゞこゝに强調しておきたいのは，$\alpha^2/16$ にといふ補正を入れただけで話が濟んだと思つてはいけないのではないかといふことである．さうして，双の曲率半徑といふものは，意外に大きいものなのではないかといふことなのである．

この問題は甚だ重大であるが，又實驗も著るしく困難であるから，はつきりした結論を得るのは容易なことではない．將來更に多くの材料で吟味したいと思つてゐる．

最後に以上の結果に對し興味を持たれ，有益な論議を賜りし長岡半太郎先生に感謝の微意を表したいと思ふ．又實驗に協力せられた宮村攝三，實川顯，島津孝の三君にも感謝する．又此の振子裝置は，文部省科學研究費及學術振興會補助費によつて製作したものである．

6. *Dependence on Amplitude of the Oscillation Period of Gravity Pendulums.*

By Chuji Tsuboi,

Earthquake Research Institute.

The period of oscillation $T(\alpha)$ of a gravity pendulum when it swings with amplitude α is usually given by

$$T(\alpha)=T(0)\left(1+\frac{1}{16}\alpha^2\right).$$

Experiments with our four pendulums with carefully polished steel knife-edge on agate seat do not follow this law, and in order to get consistent results, the coefficient of α^2 must be about 1/10 instead of 1/16. This points to the finite radius of curvature of the knife-edge which is as large as a few cm.