4. 灣口に於ける水位變化に伴ふ灣内海水の運動 (其の 2)

地震研究所 { 西村源六郎 / 高山威雄 / 金井清

(昭和 9 年 10 月 15 日發表——昭和 9 年 12 月 20 日受理)

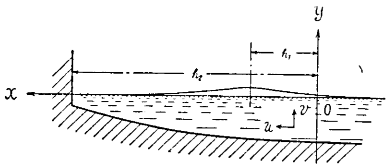
緒　　言

曩にストークスの解析方法を利用して灣口に於ける水位變化に伴ふ灣内海水の運動を一般的に研究し，そして深さの一定な長方形の灣内に於ける海水の運動を圖をもつて研究した.[1]　本論文，第 1 章では海水内に運動抵抗があつて，海水の水平方向の速さに比例した反力が作用してゐる場合の一般解を求め，第 2 章では深さ一定な梯形の灣に就て，そこに起される波動の週期，位相を研究してある.

第 1 章　灣口に於ける水位變化に伴ふ灣内海水の運動

第 1 圖を參照してオイラーの海水運動方程式は，$u\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 等の量，及び垂直方向卽ち重力方向の海水の加速度を考へなければ，次の様になる.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+2f\frac{\partial \xi}{\partial t}=-g\frac{\partial \eta}{\partial x}. \tag{1}$$



第　1　圖

勿論 u は海水分子の水平方向の速度，η は海水の表面の靜止面 $y=0$ よりの上昇量，ξ は海水分子の水平變位量，g 及び t は夫々重力による加速度及び時間を表はしてゐる. 尙 f は海水運動に伴ふ水平方向の速度に比例した抵抗の抵抗係數である. 海水運動の連續方程式

$$\eta b(x)=-\frac{\partial}{\partial x}\{\xi b(x)h(x)\} \tag{2}$$

によつて，(1) は次式 (3) に書き改める事が出來る. 尙 (2) に於て，$b(x)$, $h(x)$ は夫々港灣の幅，深さを表はし，これ等の量は，水平軸 x のみの函數と考へる.

---

1) 西村源六郎，金井淸　地震研究所彙報別冊 1 (1930), 182.

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=\frac{g}{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left\{b(x)\,h(x)\frac{\partial\eta}{\partial x}\right\}-2f\frac{\partial\eta}{\partial t}. \tag{3}$$

さて (3) なる運動方程式を海水運動の始めの條件，及び灣口 $x=h_1$，灣頭 $x=h_2$ に於ける境界條件

$$t=0\,;\quad \eta=0,\quad \frac{\partial\eta}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=0, \tag{4}$$

$$x=h_1\,;\quad \eta=\varphi(t), \tag{5}$$

$$x=h_2\,;\quad \frac{\partial\eta}{\partial x}=k\eta \tag{6}$$

によつて解く事は全く前論文と同じ．前論文を參照して

$$\frac{1}{b(x)}\frac{d}{dx}\left\{b(x)h(x)\frac{d\chi_s(x)}{dx}\right\}+\frac{\lambda_s^2}{h_1}\chi_s(x)=0 \tag{7}$$

なる方程式の積分值 $\chi_s(x)$ は

$$\left.\begin{aligned}&\chi_s(h_1)=0,\\&\frac{d\chi_s(h_2)}{dh_2}=k\chi_s(h_2)\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

を滿足する時は直交函數である事を知つてゐる．この $\chi_s(x)$ を利用して式 (3) に於ける各項を $\chi_s(x)$ を項とする級數に展開する時は，

$$\eta(x,t)=\sum_{s=1}^{\infty}A_s\chi_s(x), \tag{9}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{dA_s}{dt}\chi_s(x), \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{d^2A_s}{dt^2}\chi_s(x), \tag{11}$$

$$\frac{1}{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left\{b(x)\,h(x)\frac{\partial\eta}{\partial x}\right\}=\sum_{s=1}^{\infty}\chi_s(x)\frac{b(h_1)h(h_1)\dfrac{d\chi_s(h_1)}{dh_1}\varphi(t)-\dfrac{\lambda_s^2}{h_1}A_s\displaystyle\int_{h_1}^{h_2}b(x)\chi_s^2(x)dx}{\displaystyle\int_{h_1}^{h_2}b(x)\chi_s^2(x)dx} \tag{12}$$

を得．勿論此れ等の展開式を得るには (5), (6), (7), (8) の關係は利用してゐる．然る時 式 (3) より

$$\frac{d^2A_s}{dt^2}+2f\frac{dA_s}{dt}+g\frac{\lambda_s^2}{h_1}A_s=\frac{gb(h_1)h(h_1)\dfrac{d\chi_s(h_1)}{dh_1}}{\displaystyle\int_{h_1}^{h_2}b(x)\chi_s^2(x)dx}\varphi(t). \tag{13}$$

(13) を解くには, (4) より $t=0$ の場合

$$\left.\begin{aligned} A_s&=0, \\ \frac{dA_s}{dt}&=0, \\ \frac{d^2A_s}{dt^2}&=0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

なる條件によつて式 (13) の積分を求むればよい事がわかる. (14) の最後の條件 $\frac{d^2A_s}{dt^2}=0$ 即ち $\frac{d^2\eta}{\partial t^2}=0$ は, $\varphi(t)$ のなかに含めておけばよいから, 式 (13) を解くには (14) の初めの 2 條件のみに着眼しておればよい. 然る時

$$A_s=\frac{gb(h_1)h(h_1)\dfrac{d\chi_s(h_1)}{dh_1}e^{-ft}}{\sqrt{\left(\dfrac{g}{h_1}\lambda_s^2-f^2\right)}\displaystyle\int_{h_1}^{h_2}b(x)\chi_s^2(x)dx}\int_0^t e^{f\alpha}\sin\left\{\sqrt{\frac{g}{h_1}\lambda_s^2-f^2}\,(t-\alpha)\right\}\varphi(\alpha)d\alpha. \tag{15}$$

故に求むる灣內海水の運動は次式によつて解決する事が出來る.

$$\eta=gb(h_1)h(h_1)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\dfrac{d\chi_s(h_1)}{dh_1}\chi_s(x)e^{-ft}}{\sqrt{\left(\dfrac{g}{h_1}\lambda_s^2-f^2\right)}\displaystyle\int_{h_1}^{h_2}b(x)\chi_s^2(x)dx}$$

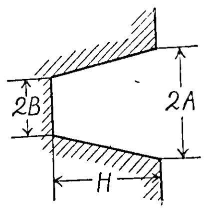
$$\cdot\int_0^t e^{f\alpha}\sin\left\{\sqrt{\frac{g}{h_1}\lambda_s^2-f^2}\,(t-\alpha)\right\}\varphi(\alpha)d\alpha. \tag{16}$$

勿論式 (16) に於ける $\varphi(t)$ は $\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}$ が $t=0$ の場合零になる樣な形である事が必要である.

第 2 章 水深一樣な梯形灣內に於ける海水の運動問題

第1章の一般解を利用して深さ一定, 灣口が $2A$, 灣頭が $2B$, 奧行 H なる梯形灣內の海水運動を解く. 第2圖を參照して,

$$\left.\begin{aligned} b(x)&=\gamma+\delta x, \\ h(x)&=D. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$



第 2 圖

但し

$$\left.\begin{aligned} \gamma&=\frac{Ah_2-Bh_1}{H}, \\ \delta&=\frac{B-A}{H} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

である．求むべき直交函數 $\chi_s(x)$ の滿足すべき方程式は (7) より，

$$\frac{d^2\chi_s(x)}{dx^2}+\frac{\delta}{\gamma+\delta x}\frac{d\chi_s(x)}{dx}+\frac{\lambda_s^2}{h_1D}\chi_s(x)=0. \tag{19}$$

(8) なる條件に於て $k=0$[2] とせる場合，即ち

$$\left.\begin{aligned}\chi_s(h_1)&=0,\\ \frac{d\chi_s(h_2)}{dh_2}&=0\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

を滿足する $\chi_s(x)$ は

$$\chi_s(x)=Y_0\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta h_1)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}J_0\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta x)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}-J_0\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta h_1)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}Y_0\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta x)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\} \tag{21}$$

であり，λ_s は次式の第 s 番目の根である．s は $1,2\cdots\cdot$ 等の正の整數を意味す．

$$Y_0\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta h_1)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}J_1\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta h_2)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}-J_0\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta h_1)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}Y_1\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta h_2)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}=0. \tag{22}$$

式 (22) によつて，この灣內に起される海水運動週期は決定される．

さて

$$\begin{aligned}U_0\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta x)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}&=Y_0\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta h_1)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}J_0\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta x)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}\\&\quad-J_0\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta h_1)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}Y_0\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta x)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}\end{aligned} \tag{23}$$

とおく時[3]，

---

2) $\dfrac{d\chi_s(h_2)}{dh_2}=k\chi_s(h_2)$ に應ずる解は (21) である事は全く同じであるが，たゞ λ_s が

$$Y_0\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta h_1)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}J_1\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta h_2)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}-J_0\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta h_1)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}Y_1\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta h_2)}{\delta\sqrt{h^1D}}\right\}$$

$$=-\frac{k\sqrt{h_1D}}{\lambda_s}\left[Y_0\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta h_1)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}J_0\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta h_2)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}-J_0\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta h_1)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}Y_0\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta h_2)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}\right]$$

を滿足する方程式の根となる．從つて灣內に起される海水の自由運動週期も k の値によつて色々異つて來るが，今は單に $k=0$ の場合のみを取扱ふ事にする．

3) (24) を求めるには

$$U_0\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta h_1)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}=0,$$

$$U_1\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta h_2)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}=0$$

及び圓壔函數に關するロンメルの公式を利用してゐる．

$$I=\int_{h_1}^{h_2} b(x)\chi_s^2(x)dx=\int_{h_1}^{h_2}(\gamma+\delta x)\,U_0^2\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta x)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}dx$$

$$=\frac{(\gamma+\delta h_2)^2}{2\delta}U_0^2\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta h_2)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}-\frac{2}{\pi^2}\frac{\delta h_1D}{\lambda_s^2} \tag{24}$$

を得. 故に求むる海水の運動は

$$\eta=\frac{2\delta gD}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{U_0\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta x)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}e^{-ft}}{\sqrt{\left(\frac{g}{h_1}\lambda_s^2-f^2\right)}\left\{\frac{2}{\pi^2}\frac{\delta h_1D}{\lambda_s^2}-\frac{(\gamma+\delta h_2)^2}{2\delta}U_0^2\left\{\frac{\lambda_s(\gamma+\delta h_2)}{\delta\sqrt{h_1D}}\right\}\right\}}$$

$$\cdot\int_0^t e^{f\alpha}\varphi(\alpha)\sin\sqrt{\left(\frac{g}{h_1}\lambda_s^2-f^2\right)}(t-\alpha)\,d\alpha \tag{25}$$

によつて示される. 勿論 λ_s は (22) の根である.

(25) より $B>A$, $B<A$ 及び $A=B$ なる場合を求めてみる.

$B>A$ なる場合

$$\eta=\frac{2(B-A)gD}{\pi H}$$

$$\cdot\sum_{s=1}^{\infty}\frac{U_0\left\{\frac{\lambda_s\{(Ah_2-Bh_1)-(A-B)x\}}{(B-A)\sqrt{h_1D}}\right\}e^{-ft}}{\sqrt{\left(\frac{g}{h_1}\lambda_s^2-f^2\right)}\left\{\frac{2}{\pi^2}\frac{(B-A)}{H}\frac{h_1D}{\lambda_s^2}-\frac{B^2H}{2(B-A)}U_0^2\left(\frac{\lambda_sBH}{(B-A)\sqrt{h_1D}}\right)\right\}}$$

$$\cdot\int_0^t e^{f\alpha}\varphi(\alpha)\sin\sqrt{\left(\frac{g}{h_1}\lambda_s^2-f^2\right)}(t-d)\,d\alpha. \tag{26}$$

但し λ_s[4] は

$$Y_0\left\{\frac{\lambda_sAH}{(B-A)\sqrt{h_1D}}\right\}J_1\left\{\frac{\lambda_sBH}{(B-A)\sqrt{h_1D}}\right\}-J_0\left\{\frac{\lambda_sAH}{(B-A)\sqrt{h_1D}}\right\}Y_1\left\{\frac{\lambda_sBH}{(B-A)\sqrt{h_1D}}\right\}=0 \tag{27}$$

の根である.

---

4) (27) の圓壔函數のアーギュメントが大になればこの函數の漸近展開を利用して, λ_s は

$$\sin\left\{\frac{\lambda_sH}{\sqrt{h_1D}}-\frac{\pi}{2}\right\}=0$$

の根となり, λ_s は A 及び B に無關係となる.

$B<A$ なる場合

$$\eta=\frac{2(A-B)gD}{\pi H}$$

$$\cdot\sum_{s=1}^{\infty}\frac{U_0\left\{\dfrac{\lambda_s\{(Ah_2-Bh_1)-(A-B)x\}}{(A-B)\sqrt{h_1D}}\right\}e^{-ft}}{\sqrt{\left(\dfrac{g}{h_1}\lambda_s^2-f^2\right)}\left\{\dfrac{2}{\pi^2}\dfrac{(A-B)}{H}\dfrac{h_1D}{\lambda_s^2}-\dfrac{B^2H}{2(A-B)}U_0^2\left(\dfrac{\lambda_sBH}{(A-B)\sqrt{h_1D}}\right)\right\}}$$

$$\cdot\int_0^t e^{f\alpha}\varphi(\alpha)\sin\sqrt{\left(\frac{g}{h_1}\lambda_s^2-f^2\right)}(t-\alpha)\,d\alpha. \tag{28}$$

但し λ_s[5] は次式の根である．

$$Y_0\left\{\frac{\lambda_sAH}{(A-B)\sqrt{h_1D}}\right\}J_1\left\{\frac{\lambda_sAH}{(A-B)\sqrt{h_1D}}\right\}-J_0\left\{\frac{\lambda_sAH}{(A-B)\sqrt{h_1D}}\right\}Y_1\left\{\frac{\lambda_sBH}{(A-B)\sqrt{h_1D}}\right\}=0 \tag{29}$$

$A=B$ なる場合

この時は

$$\eta=\frac{4\sqrt{g}}{\pi\sqrt{h_1}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda_s\sin\left\{\dfrac{\lambda_s(x-h_1)}{\sqrt{h_1D}}\right\}e^{-ft}}{\sqrt{\left(\dfrac{g}{h_1}\lambda_s^2-f^2\right)}\left\{\dfrac{2\lambda_s}{\sqrt{h_1D}}-\sin\left(\dfrac{2\lambda_sH}{\sqrt{h_1D}}\right)\right\}}$$

$$\cdot\int_0^t e^{f\alpha}\varphi(\alpha)\sin\sqrt{\left(\frac{g}{h_1}\lambda_s^2-f^2\right)}(t-\alpha)\,d\alpha \tag{30}$$

となり，λ_s は

$$\lambda_s=\left(s-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\sqrt{h_1D}}{H}. \tag{31}$$

今 (27), (29) 及び (31) を用ひて，$\dfrac{A}{B}$ の色々の値に應じて灣内に起される海水の自由運動週期を求めると次表を得．これは $s=1$, $s=2$, $s=3$ 及 $s=4$ の場合に就て夫々圖示計算法によつて求めたのである．勿論本計算結果は $\dfrac{A}{B}$ が 1 より餘り小さくとも又大きくとも適用し難いものであるが，$\dfrac{A}{B}$ の値による週期の變化狀態を定性的に知るには不都合がない故第 I 表を求めておいた．これを圖示すると第 3 圖を得．$s=1$ の場合即ち灣内に節のない時以外は，週期は殆んど灣の形即 $\dfrac{A}{B}$ には無關係にな

---

5) (27) と同じく漸近展開が用ひ得る範圍となれば，(29) の代りに λ_s は

$$\sin\left\{\frac{\lambda_sH}{\sqrt{h_1D}}+\frac{\pi}{2}\right\}=0$$

の根となり，A, B に無關係になる事は前と同じ．

る. $s=1$ の場合には週期は $\frac{A}{B}$ が大になる程小となる傾向がある. 勿論灣の長さ H

第 I 表　灣内海水の自由運動週期 $\left(單位=\frac{\sqrt{gD}}{H}\right)$

s \ A/B	0·20	0·40	0·60	0·80	1·00	1·20	1·50	2·00	2·50
1	5·61	4·87	4·41	4·19	4·00	3·855	3·70	3·50	3·38
2	1·38	1·359			1·333		1·32	1·31	1·30
3	0·800	0·80	0·80	0·80	0·80	0·80	0·80	0·80	0·80
4	0·572	0·572	0·572	0·572	0·572	0·572	0·572	0·572	0·572

には比例し, 深さ D に就ては $D^{1/2}$ に逆比例して變化する事は明かである. 尙 $s=2$ 以上では $\frac{B}{A}$ の値に無關係に週期 T は

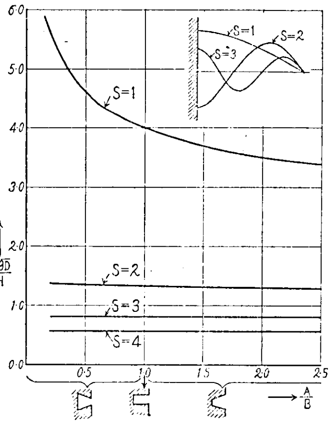
$$T\approx\frac{2H}{\sqrt{gD}}\left(s-\frac{1}{2}\right)^{-1} \tag{32}$$

で表される.

灣口 $x=h_1$ に於て水位が次式で示される樣な變化をする時, 卽ち

$$\varphi(t)=\eta_0\left(\frac{\sqrt{gD}}{H}t\right)^3 e^{-\beta\frac{\sqrt{gD}}{H}t} \tag{33}$$

の時は,



第 3 圖

$$\int_0^t \xi^3 e^{-a\xi}\sin b(t-\xi)\,d\zeta$$

$$=\left[\frac{bt^3e^{-at}}{(a^2+b^2)}+\frac{babt^2e^{-at}}{(a^2+b^2)^2}+\frac{b(3a^2-b^2)bte^{-at}}{(a^2+b^2)^3}+\frac{24ab(a^2-b^2)e^{-at}}{(a^2+b^2)^4}\right.$$
$$\left.+\frac{6(a^4-6a^2b^2+b^4)}{(a^2+b^2)^4}\sin bt-\frac{24ab(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^4}\cos bt\right] \tag{34}$$

なる關係を用ひて, (25) 或は (26), (28), (30) によつて夫々の灣内での海水運動を研究する事が出來る. 卽ちかくする事によつて, (4) なる加速度までも $t=0$ の時零にする條件も完全に滿足さす事が出來る. 具體的な海水面變化の研究は次の機會に讓つておく.

4. *On the Long Waves in a Bay of Variable Section Generated by the Changes in the Elevation at the Mouth of It.*

By Genrokuro NISHIMURA, Takeo TAKAYAMA and Kiyoshi KANAI,

Earthquake Research Institute.

Taking into account water friction proportional to the horizontal velocity of water particle, we obtained a general expression for the surface elevation of water in a bay of variable section due to changes in the elevation at the mouth of it. As in the previous paper, we ignore the decay of wave motion in the bay that occurs from the fact that a part of the energy of the reflected wave in the bay is propagated in the open sea as circular wave of diverging type.

Using the general expression of the water elevation thus obtained, we studied the case of a trapezoidal bay of rectangular section and with horizontal bed.