論文の内容の要旨

論文題目：
Uniform Estimates for Distributions of Sums of i.i.d. Random Variables with Fat Tail.

和訳：
分布がファットテールをもつ場合の独立同分布の確率変数和の分布の一様評価について

氏名：中原 健二

本論文では独立同分布の確率変数和の分布の一様評価について論じる．特に分布関数を $F(x)$, 上側分布関数 $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ とおくとき $\bar{F}(x)$ が指数 $-\alpha$ $(\alpha > 0)$ の regularly varying 関数と呼ばれるクラスに属する場合について述べる．これは大雑把にいうと $\bar{F}(x)$ が $x^{-\alpha}$ のオーダーで減衰する場合である．このような場合, 分布はファットテールを持つといわれる．このとき和の分布もファットテールを持つ．

以下, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に独立同分布な確率変数列 $X_1, X_2, \cdots$ で $E[X_1] = 0$ となるものをとり、その和の分布について考える．また X_1 の分布 μ, 分布関数を F, 上側分布関数を $\bar{F}$ とおく．すなわち $F(x) = \mu((-\infty, x])$, $\bar{F}(x) = \mu((x, \infty)) = 1 - F(x)$ とおく．このとき $E[X_1^2] < \infty$ ならば中心極限定理が成り立つ．つまり $\sigma = E[X_1^2]^{1/2}$ とおくと

$$P(\sum_{k=1}^{n} X_k > \sigma n^{1/2} s) \to \Phi_0(s), \qquad n \to \infty,\ s \in \mathbb{R}$$

が成り立つ．ここで $\Phi_0(s) = \int_s^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ とおいた．和の分布の正規分布による近似は平均値の周りでは精度は良いが平均値から大きく離れたところでは精度が悪くなる．正規分布による近似がどの範囲まで有効に成り立つかという問題もよく研究されている．この問題については Cramér[2] による次の結果が有名である．以下 $E[X_1^2] = 1$ とする．

Theorem 1. ある $c > 0$ が存在して $E[\exp(c|X_1|)] < \infty$ が成り立つとする．このとき任意の $a \in (0, 1/6)$ と任意の非増加正数列 $\varepsilon(n) \to 0$ に対して $c_n = n^a \varepsilon(n)$ とおくと

$$\sup_{s \in [1, c_n]} \left| \frac{P(\sum_{k=1}^{n} X_k > n^{1/2} s)}{\Phi_0(s)} - 1 \right| \to 0, \qquad n \to \infty \tag{1}$$

が成り立つ．

一方で平均値から大きく離れたところ (大偏差) の和の分布を求めることは大偏差の問題と呼ばれ多

くの研究がなされている．特に分布関数が regularly varying 関数と呼ばれるクラスに属するときは極限の形がきれいにでることもあり，多くの研究がなされている．以下では次を仮定する．

（A1） ある $\alpha > 0$ に対して，$\bar{F}(x)$ は指数 $-\alpha$ の regularly varying 関数

次が成り立つことが知られている．

Theorem 2. $\alpha > 1$ に対して (A1) を仮定する．このとき任意の $\gamma > 0$ に対して

$$\sup_{s \geq \gamma n^{1/2}} \left| \frac{P(\sum_{k=1}^{n} X_k > n^{1/2}s)}{n\bar{F}(n^{1/2}s)} - 1 \right| \to 0, \qquad n \to \infty$$

が成り立つ．

この定理は $1 < \alpha < 2$ の場合に Heyde[4]，$\alpha > 2$ の場合に A. Nagaev[5],[6] が，一般の場合には Cline-Hsing[1] が示した．

中心極限定理と大偏差の問題を合わせて和の分布を実数軸上または $[1, \infty)$ 上で一様に評価する研究も行われている．応用上，和の分布の平均値の近くとも大偏差ともいえないところの値を評価したい場合がある．このときは和の分布の一様評価が必要となる．一様評価については $\bar{F}(x)$ が指数 $-\alpha$ $(\alpha > 2)$ の regularly varying 関数の場合に A. Nagaev[5] と S. Nagaev[7] は独立に次を示した．

Theorem 3. $\alpha > 2$ に対して (A1) と次の (A2) を仮定する．

（A2） ある $\delta_0 > 0$ に対して $\int_{-\infty}^{0} |x|^{2+\delta_0}\mu(dx) < \infty$.

また $E[X_1^2] = 1$ とする．このとき

$$\sup_{s \geq 1} |\frac{P(\sum_{k=1}^{n} X_k > n^{1/2}s)}{\Phi_0(s) + n\bar{F}(n^{1/2}s)} - 1| \to 0, \qquad n \to \infty \tag{2}$$

一様評価については Rozovskii[8] らによってより一般の場合に示された．A. Nagaev らの評価は収束の速さについては議論されていなかったが，指数 $-\alpha$ $(\alpha > 2)$ の regularly varying 関数の場合に収束の速さを込めた評価が Fushiya-Kusuoka[3] によって示された．

本論文では $\bar{F}(x)$ が指数 -2 の regularly varying 関数の場合についての結果を示す．$\bar{F}(x)$ が指数 $-\alpha$ $(0 < \alpha < 2)$ の regularly varying 関数の場合は和の極限分布は指数 α の安定分布になり $\bar{F}(x)$ が指数 $-\alpha$ $(\alpha \geq 2)$ の regularly varying 関数の場合には正規分布 (指数 2 の安定分布) になることが知られている．したがって指数 -2 の場合がちょうど境界の値となっており，そのため和の分布の評価を示すことも難しい．

さらにこの場合は必ずしも $E[X_1^2] < \infty$ ではないことに注意しておく．(A1),(A2) に加えて次を仮定する．

(A3) μ は密度関数 $\rho : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ をもち，さらに ρ は右連続関数で有界な全変動をもつとする．

まず $E[X_1^2] < \infty$ の場合の結果を述べる．

$v_n = \int_{-\infty}^{n^{1/2}} x^2\mu(dx)$, $t_n = v_n^{1/2}n^{1/2}$, $L(x) = x^2(\bar{F}(x))$, $x \geq 1$ とおき，$H_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$H_1(n, s) = \Phi_0(s) + n\int_{-\infty}^{s} \bar{F}(t_n(s - x))\Phi_1(x)dx - n\left(t_n^{-1}\Phi_1(s)\int_0^{\infty} x\mu(dx) + t_n^{-2}\frac{\Phi_2(s)}{2}\int_0^{n^{1/2}} x^2\mu(dx)\right)$$

と定義する．このとき次を示した．

Theorem 4. $\alpha = 2$ に対して (A1), (A2), (A3) を仮定する．また $E[X_1^2] = 1$ と仮定する．このとき任意の $\delta \in (0,1)$ に対してある $C > 0$ が存在して

$$\sup_{s\in[1,\infty)} |\frac{P(\sum_{k=1}^n X_k > n^{1/2}s)}{H_1(n, v_n^{-1/2}s)} - 1| \le CL(n^{1/2})^{1-\delta}, \qquad n \ge 1 \tag{3}$$

が成り立つ．特に

$$\sup_{s\in[1,\infty)} |\frac{P(\sum_{k=1}^n X_k > n^{1/2}s)}{\Phi_0(v_n^{-1/2}s) + n\bar{F}(n^{1/2}s)} - 1| \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{4}$$

注意．仮定 (A1), (A2) のもと $L(n^{1/2}) \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．

$\Phi_0(v_n^{-1/2}s) + n\bar{F}(n^{1/2}s)$ が s の範囲によって $\Phi_0(v_n^{-1/2}s)$ と $\bar{F}(n^{1/2}s)$ のどちらが大きいかを考える．次のことを示すのは難しくない．

任意の $a \in (0,2)$ に対して $n \to \infty$ のとき

$$n(\bar{F}(n^{1/2}s)) = o(\Phi_0(v_n^{-1/2}s)), \qquad 1 \le s < (-av_n \log L(n^{1/2}))^{1/2}.$$

同様に任意の $b \in (2,\infty)$ に対して $n \to \infty$ のとき

$$\Phi_0(v_n^{-1/2}s) = o(n\bar{F}(n^{1/2}s)), \qquad (-bv_n \log L(n^{1/2}))^{1/2} < s < \infty.$$

よって $\Phi_0(v_n^{-1/2}s) + n(\bar{F}(n^{1/2}s)$ は $s \in [1, (-av_n \log L(n^{1/2}))^{1/2})$ では $\Phi_0(v_n^{-1/2}s)$ が主要項で，$s \in ((-bv_n \log L(n^{1/2}))^{1/2}, \infty)$ では $n\bar{F}(n^{1/2}s)$ が主要項であることがわかる．

$\alpha = 2$ の場合には一般には式 (2) は成り立たない．式 (2) が成り立つための条件として次を示した．

Theorem 5. $\alpha = 2$ に対して (A1), (A2) を仮定する．また $E[X_1^2] = 1$ と仮定する．このとき次が成り立つ．

(1) $\limsup_{n\to\infty}(1 - v_n) \log \dfrac{1}{L(n^{1/2})} = 0$ ならば

$$\sup_{s\in[1,\infty)} |\frac{\Phi_0(v_n^{-1/2}s) + n\bar{F}(n^{1/2}s)}{\Phi_0(s) + n\bar{F}(n^{1/2}s)} - 1| \to 0, \qquad n \to \infty \tag{5}$$

が成り立つ．

(2) $\limsup_{n\to\infty}(1 - v_n) \log \dfrac{1}{L(n^{1/2})} > 0$ ならば式 (5) は成り立たない．

これより $\limsup_{n\to\infty}(1 - v_n) \log \dfrac{1}{L(n^{1/2})} = 0$ のときは式 (2) は成り立ち，そうでなければ成り立たないことがわかる．

Theorem 4 では $E[X_1^2] = 1$ と仮定したが一般に $E[X_1^2] < \infty$ とは限らない場合にも同様の結果が成り立つ．$\tilde{t}_n = \sup\{t > 0;\ \int_{-\infty}^t x^2\mu(dx) > t^2\}$, $\tilde{v}_n = \int_{-\infty}^{\tilde{t}_n} x^2\mu(dx)$ とおく．$\tilde{t}_n = \tilde{v}_n^{1/2}n^{1/2}$ となることに注意しておく．また $H_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$H_2(n,s) = \Phi_0(s) + n\int_{-\infty}^s \bar{F}(\tilde{t}_n(s-x))\Phi_1(x)dx - n\left(\tilde{t}_n^{-1}\Phi_1(s)\int_0^\infty x\mu(dx) + \tilde{t}_n^{-2}\frac{\Phi_2(s)}{2}\int_0^{\tilde{t}_n} x^2\mu(dx)\right)$$

と定義する．このとき次を示した．

Theorem 6. $\alpha = 2$ に対して (A1), (A2), (A3) を仮定する．このとき任意の $\delta \in (0,1)$ に対してある $C > 0$ が存在して

$$\sup_{s\in[1,\infty)} \left|\frac{P(\sum_{k=1}^{n} X_k > \tilde{t}_n s)}{H_2(n,s)} - 1\right| \leq C(n\bar{F}(\tilde{t}_n))^{1-\delta}, \qquad n \geq 1 \tag{6}$$

が成り立つ. 特に

$$\sup_{s\in[1,\infty)} \left|\frac{P(\sum_{k=1}^{n} X_k > \tilde{t}_n s)}{\Phi_0(s) + n\bar{F}(\tilde{t}_n s)} - 1\right| \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{7}$$

注意. 仮定 (A1), (A2) のもと $n\bar{F}(\tilde{t}_n) \to 0,\ n \to \infty$ が成り立つ．

本論文では第 1 章で全体を概観し, 第 2 章で $\bar{F}(x)$ が指数 -2 の regularly varying 関数で分散が存在する場合についての結果を示す．第 3 章で分散が必ずしも存在するとは限らない場合についての結果を示す．

参考文献

[1] Cline, D.B.H. and Hsing, T. Large deviation probabilities for sums and maxima of random variables with heavy or subexponetial tails. preprint, Texas A&M University (1991).

[2] Cramér, Sur un nouveau théorème limite de la théorie des probabilités. *Actualités Sci. Indust.* **736** Paris (1939).

[3] Fushiya, H., and S. Kusuoka, Uniform Estimate for Distributions of the Sum of i.i.d. Random Variables with Fat Tail, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **17** (2010), 79-121.

[4] Heyde, C.C., A contribution to the theory of large deviations for sums of independent random variables, *Z. Wahrscheinlichleitstheorie verw. Gebiete* **7** (1967), 303-308.

[5] Nagaev, A.V., Limit theorems for large deviations where Cramér's conditions are violated (in Russian). *Izv. Akad. Nauk UzSSR. Ser. Fiz.-Mat. Nauk.* **6** (1969) 17-22.

[6] Nagaev, A.V., Integral limit theorems taking large deviations into account when Cramer's condition does not hold. I,II. *Theory Probab. Appl.* **14** (1969), 51-64; 193-208.

[7] Nagaev, S.V., Large deviations of sums of independent random variables, *Ann. Probab.* **7** (1979), 745-789. 625-644.

[8] L.V. Rozovskii, Probabilities of large deviations on the whole axis, *Theory Probab Appl.* **38** (1994), 53-79.