

Schubert polynomials, Kraskiewicz-Pragacz modules and highest weight categories

| | |
|----------|---|
| その他のタイトル | Schubert多項式 , Kraskiewicz-Pragacz加群と最高ウェイト圏 |
| 学位授与年月日 | 2016-03-24 |
| URL | http://doi.org/10.15083/00073910 |

論文審査の結果の要旨

氏名 渡部正樹

論文提出者の博士論文「Schubert polynomials, Kraśkiewicz–Pragacz modules and highest weight categories」は、代数的組合せ論で見つけた問題に対し、表現論的な問題を解決することによって意味と解答を与えたものである。

きっかけは、通常は対称式と対称式の対、例えばシューア (Schur) 関数とシューア関数の対に対して定義される一種の合成の演算であるプレシズム (plethysm) を、シューア関数と、シューベルト (Schubert) 多項式という対称でない多項式とに対して実験してみたところ、シューベルト多項式の正整数係数の和になるらしい (係数が正であるところが要点) と予想したことである。

シューア関数は一般線型群の既約表現の指標であり、2つのシューア関数のプレシズムは、2つの表現を写像の合成の意味で接続してできる表現の指標となって、既約表現の指標であるシューア関数の正整数係数の和になることが簡明にわかる。この和の係数を組合せ論的に記述したいという問題は組合せ論で注目を集めていたが、そうではなくプレシズム自体をシューベルト多項式に拡張してみようという着眼自体、人を驚かせるものと言える。

シューベルト多項式は、旗多様体のコホモロジー環の重要な基底であるシューベルト類を、コホモロジー環の多項式環の商環としての表示において代表するものとして導入され、組合せ論的にも研究が進んだ多項式で、そのシューベルト類がグラスマン多様体からくる場合にはシューア関数に一致するという意味で、シューア関数の一般化とも見なされる。シューベルト多項式を指標とする表現として、博士論文の表題にあるクラシュキーヴィチュ (Kraśkiewicz) とプラガチュ (Pragacz) の定義した上半三角行列のなす群の表現 (KP 加群と呼ぶ) があり、それに一般線型群の表現を接続すれば、シューベルト多項式とシューア関数のプレシズムを指標にもつ表現 (シューア関手像と呼ぶ) が作れはするが、それを考えただけでは、KP 加群は上半三角行列群の既約表現というわけではないので、シューア関手像の指標がシューベルト多項式の指標の正整数係数和になることは直ちには従わない。上半三角行列群の表現には完全可約性もないため、表現論的に正係数性を証明するとしたら考えられる方法は、例えば KP 加群のシューア関手像が、KP 加群を隣接項間の商とするようなフィルトレーション (KP フィルトレーションと呼ぶ) を持つことを示すといった、新たな問題を解くことである。

渡部氏はこれに挑んで成功させた。

その過程で、渡部氏はより基本的な事実として、2つの KP 加群のテンソル積も KP フィルトレーションを持つことを示した。表現論的に見れば、これがこの研究の主要結果と見られる。(同じ上半三角行列群の表現で、少し KP 加群と似たところのあるデマズール (Demazure) 加群についてはテンソル積が同種の加群を商にもつフィルトレーションを持つという結果は成り立たないため、この結果は少しく驚きだった。) また、KP フィルトレーションを持つのはいつかということの分析から、シューア関手像に関する結果はテンソル積に関する結果から従うことを示した。また上半三角行列群の有限次元表現の圏に対し、ウェイト間の順序を普通に代数群の表現の理論などで想像される順序と変えて工夫することにより、KP 加群を標準加群とするような最高ウェイト圏の構造を入れることにも成功し、これも有効に用いている。KP 加群の定義自体は渡部氏の与えたものではないが、KP 加群に関して論文提出者が示したこれらのことは、上半三角行列群の表現論としてすべて全く新しい事実であり、KP 加群を上半三角行列群の表現論において新たに注目すべきよい対象として浮かび上がらせた。

組合せ論的にも、シューベルト多項式とシューア関数のプレシズムのシューベルト正値性 (シューベルト多項式の正整数係数和になること) は鮮やかな新結果である。また、シューベルト多項式の積のシューベルト正値性は、コホモロジー類としての意味から既知の結果だったが、それにも全く違う代数的な証明を与えたことになる。シューベルト多項式に関しては、既知の事実・予想含めて大変豊富な公式があるが、その背後に表現論的な事物や事実を想定し、それを用いて表現論的に証明するという新たな世界をも開いた。

以上のように、この博士論文は国際的に認められるレベルのすぐれたものである。よって論文提出者渡部正樹は、博士 (数理学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。