

骨組安全領域の傾斜楕円体近似による簡略化地震応答解析

Simplified Response Analysis of Framed Structures based on an Inclined Ellipsoidal Approximation of Safety Domain

伊 藤 拓 海* · 大 井 謙 一*

Takumi ITO and Kenichi OHI

1. はじめに

鉄骨骨組の塑性化部位における塑性条件は、関連する部材力空間において凸集合を形成する。これらの凸集合端点を組合せ融合演算 (MELD) し、骨組の釣合式を用いて、水平力空間ならびにモード復元力空間に線形写像すると、完全弾塑性骨組の復元力空間における降伏凸多面体の全体像を抽出することが可能となる。骨組の塑性化する要素が少ない場合には、凸集合理論に基づく exhaustive enumeration で復元力空間における安全領域を正確に把握することが可能である。しかし、大規模構造物では端点像の数が極めて大きくなり、降伏面を構成する個々の区分超平面を正確に把握することは非常に困難となる。そこで、本稿では端点像の全体を、超楕円体で近似する簡略化した降伏曲面モデルについて検討する。

多自由度系の弾塑性応答解析における自由度を軽減させ、簡略化した降伏多面体モデルを用いた弾塑性地震応答解析の手法が提案されている。しかし、考慮する降伏面の選定は、崩壊メカニズム形の数え上げを伴う近似信頼性解析を実行する必要がある [1] [2]。また応答解析において、復元力更新時に端点処理の問題が生じる。このような問題に対して、本稿で提案する手法では塑性崩壊に対する安全領域を超楕円体で近似しているため、端点処理の問題も生じない。そこで本稿では、近似降伏曲面モデルを用いた簡略化地震応答解析の可能性を検討する。

2. 解析方法

a) 凸集合理論 [3]

凸集合理論は下記の基本定理に基づくものである。

- (1) 凸集合に属する点はその端点の凸結合で表せる。(凸集合の分解定理)

- (2) E_n の凸集合 S を E_m へ線形写像 (全射) した集合 T は E_m における凸集合になる。

- (3) このとき凸集合 T の端点は凸集合 S の端点像の中に存在する。

部材または骨組要素 (層) の塑性条件を表す凸集合端点を、釣合式によって水平力空間に線形写像すると、図1のように復元力空間における降伏凸多面体の全体像を把握することができる。

b) 主成分分析による近似降伏曲面モデル

前節の例題のように比較的小規模で塑性化する要素が少ない骨組では、降伏面の全体像を正確に計算することが可能であるが、大規模な骨組では塑性化する要素が多くなり、全ての降伏面を把握することは困難となる。Khandelwal, Ohi, Fang は近似信頼性解析 (FORM) により発生しやすいと予想される崩壊機構のみを抽出して安全領域を構成し、簡略化応答解析を行っている [1]。これに対して本稿では、端点像の全体を超楕円体で近似することを考える。ここでは線形写像された端点像に対して主成分分析を行い、以下の手順により楕円体近似を行う。

n 次元モード復元力空間に線形写像された m 個の端点の集合 $\{r_i\}$ に対して次式を評価する。

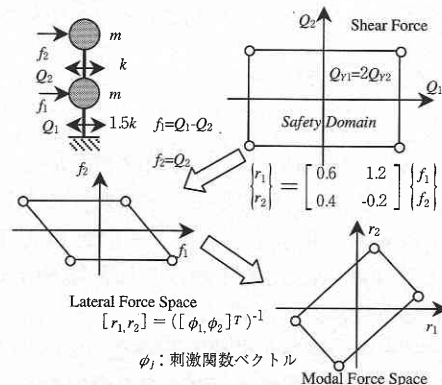


図1 骨組の安全領域の抽出過程

*東京大学生産技術研究所 情報・システム部門

研 究 速 報

$$\{r_1\}, \{r_2\}, \dots, \{r_n\}^T \cdot \{r_1\}, \{r_2\}, \dots, \{r_n\} = [E] \dots \dots \dots (1)$$

式 (1) で求まる [E] の固有ベクトルを評価すると互いに直交する実固有ベクトル $\{u\}$ が n 個求まる.

$$\lambda \cdot \{u\} = [E] \cdot \{u\} \dots \dots \dots (2)$$

さらに $\{u\}$ を正規化した実固有ベクトル $\{n_i\}$ は (超)楕円体の主軸座標の正規直交基底を与える. ここで, モード空間の凸集合を以下の楕円体で近似する.

$$\{r\}^T \cdot [A] \cdot \{r\} = 1 \dots \dots \dots (3)$$

なお, $[A] = [\{n_i\} [Diag(1/a_i^2)] \{n_i\}^T]$ であり, a_i は主軸基底ベクトル $\{n_i\}$ に沿った最外縁の点までの距離, $[\{n_i\}]$ はユニタリ行列, である.

c) Pushover 手法による近似降伏曲面モデル

本節では, 安全領域をより近似的かつ効率的に簡略化した超楕円体で表現する手法について提案する. はじめに, ある荷重パターンによる比例荷重により骨組の極限解析を行い, 崩壊荷重を算定する. 複数の荷重パターンによる極限解析を行うことにより, 骨組の崩壊面上の復元力点を数点求め, この数点で代表させて骨組の安全領域の全体像を近似するものである. 以下に解析手順を示す.

骨組の極限解析では以下の問題が解かれる [3].

Maximize : $\lambda \dots \dots \dots (4)$

Subject to : 骨組の釣合式 $\lambda \{P_0\} = [C] \{M\} \dots \dots \dots (5)$

塑性条件 $|M_j| \leq M_{pj} \dots \dots \dots (5')$

ここで, λ : 荷重係数, $\{P_0\}$: 基本荷重パターンを表すベクトル, $[C]$: 接続マトリクス, $\{M\}$: 部材力 (内力) ベクトル, M_{pj} : 部材力成分 M_j に対応する部材耐力である.

ここで, 弾性地震荷重効果を対象とすると, 係数倍荷重ベクトルは, 次のように弾性振動の古典的規準モードに基づく基本荷重モードの線形結合で表現するのが便利である.

$$\lambda \{P_0\} = [\phi^T]^{-1} \cdot \{r\} = [\psi] \{r\} = r_1 \cdot \{\psi_1\} + r_2 \cdot \{\psi_2\} + \dots + r_n \cdot \{\psi_n\} \dots \dots \dots (6)$$

ここで, $\{\psi_i\}$ は $[\psi] = [\phi^T]^{-1}$ の列ベクトルで与えられる荷重基底ベクトル, r_i は荷重モード乗数, である. 動的応答では r_i は各次の振動応答に基づく弾性地震荷重効果 (ベースシア) の時刻歴であるが, これを以下のように静的な比例荷重条件に置き換える.

通常 1 次モードの応答が卓越するので, 荷重パターンとしては, まず 1 次の基本荷重パターンを選択する.

$$\lambda \{P_0\} = \lambda \{\psi_1\} \dots \dots \dots (7)$$

ここではさらに, 2 次モードの影響を考慮し, 以下の基本荷重パターンを追加する.

$$\lambda \{P_0\} = \lambda \{\psi_1\} \pm \alpha \lambda \{\psi_2\} \dots \dots \dots (7')$$

ただし, $\alpha = m_2^* S_a(T_2) / m_1^* S_a(T_1)$

ここで, m_j^* : 骨組の j 次有効質量, $S_a(T_j)$: 設計用加速度応答スペクトル, である.

以上の 3 つの荷重パターンによる比例荷重で崩壊面上の異なる 3 点が求められるので, その超楕円体 (2 次元の場合は楕円) は確定となる.

d) 近似降伏曲面モデルを用いた地震応答解析

近似降伏曲面モデルを用いた弾塑性地震応答解析では, 以下の解析手順を適用する [4].

① 運動方程式および座標変換

通常の地表面に対する相対変位座標系で粘性減衰と弾塑性履歴復元力とを有する多質点系の運動方程式は次式で表される.

$$[M] \cdot \{\ddot{x}\} + [C] \cdot \{\dot{x}\} + \{f\} = -[M] \cdot \{1\} \cdot \ddot{y} \dots \dots \dots (8)$$

ここで, $[M]$: 質量マトリクス, $[C]$: 減衰マトリクス, $\{x\}$: 変位ベクトル, $\{f\}$: 復元力ベクトル, \ddot{y} : 地動加速度, である. ここでは, 弾性骨組系の古典的規準モードを求め, その刺激関数マトリクス $[\phi]$ を用いて, 次の変位と力の変換を定義する.

変位の変換 : $\{x\} = [\phi] \cdot \{q\} \dots \dots \dots (9)$

力の変換 : $\{f\} = [\phi^T]^{-1} \{r\} = [\psi] \{r\} \dots \dots \dots (10)$

ここで, $\{q\}$: 古典規準モード座標 (以下モード座標) におけるモード変位, $\{r\}$: モード復元力, である. 運動方程式をモード座標で表現すると, 次式のようになる.

$$\ddot{q}_j + 2h_j \omega_j \dot{q}_j + r_j / m_j^* = -\ddot{y} \dots \dots \dots (11)$$

ここで, h_j : j 次モード減衰定数, ω_j : j 次固有角周波数, である.

② モード変位増分の算定

モード変位増分 (時刻 $k\Delta t$ から $(k+1)\Delta t$ への増分) を, 時刻 $k\Delta t$ におけるモード復元力から中央差分法によって求める.

$$\Delta q_j^{(k+1)} = \frac{(1-h_j \omega_j \Delta t)}{(1+h_j \omega_j \Delta t)} \Delta q_j^{(k)} - \frac{\Delta t^2}{(1+h_j \omega_j \Delta t)} \left(\frac{r_j^{(k)}}{m_j^*} + \ddot{y}^{(k)} \right) \dots \dots \dots (12)$$

ここで, $\Delta q_j^{(k+1)} = q_j^{(k+1)} - q_j^{(k)}$ である.

③復元力の更新

②で得られたモード変位増分を、骨組に強制して骨組の弾塑性復元力を以下の手順に従って更新する(図2)。復元力の追跡・更新の方法として、(1)常に全モード復元力空間で追跡して応答解析には必要に応じて部分モード復元力成分のみを使うものと、(2)復元力の追跡更新も部分モード復元力空間のみで行うもの[2]が試みられているが、以下、前者の方法をとる場合を記述する。

モード復元力空間における降伏超楕円体が $\{r\}^T [A] |r| = 1$ で与えられているとする。

時刻 $k\Delta t$ におけるモード変位増分 $\{\Delta q\}$ が得られた場合、系を弾性と仮定するとモード復元力増分が次式で得られる。

$$\{\Delta r_e\} = [K_e] \{\Delta q\} \dots \dots \dots (13)$$

ここで、 $[K_e]$: 考慮する振動モードの規準弾性ばね定数 $k_j^* = \{\phi_j\}^T [K] \{\phi_j\}$ を対角項に配置した剛性マトリクス $[K_e] = \text{Diag} [k_j^*]$ である。時刻 $(k+1)\Delta t$ のモード復元力を以下のように評価する。

$$\{r_{new}\} = \{r^{(k)}\} + \{\Delta r_e\} \dots \dots \dots (14)$$

ここで、 $\{r_{new}\}^T [A] |r_{new}| \leq 1$ を満足する場合、モード復元力空間における軌跡が楕円内部にあるので時刻 $(k+1)\Delta t$ のモード復元力は $\{r^{(k+1)}\} = \{r_{new}\}$ でよい。しかし、 $\{r_{new}\}^T [A] |r_{new}| > 1$ となる場合、軌跡が楕円外部にあるため、以下の手順に従って降伏楕円上に復元力を更新する。

増分プロセスにおける軌跡と降伏楕円との交点を $\{r_{cross}\}$ とすると、 $\{r_{cross}\} = \{r^{(k)}\} + \tau \{\Delta r_e\}$ となる。ここで、

$$\tau = \frac{-\tau_1 + \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2 \cdot (1 - \tau_3)}}{\tau_2} \dots \dots \dots (15)$$

ただし、 $\tau_1 = \{\Delta r_e\}^T [A] |r^{(k)}|$ 、 $\tau_2 = \{\Delta r_e\}^T [A] |\Delta r_e|$ 、 $\tau_3 = \{r^{(k)}\}^T [A] |r^{(k)}|$ 、である。

次に、塑性変形増分 $\{\Delta q_p\}$ は法線則に従うものとし、 $\{r_{cross}\}$ における法線方向 $[A] |r_{cross}|$ で代表すれば、

$$\{\Delta q_p\} = \gamma [A] |r_{cross}| \dots \dots \dots (16)$$

と表現できる。

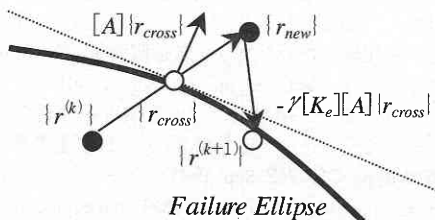


図2 モード復元力の更新

$$\{r^{(k+1)}\} = \{r_{new}\} - \gamma \{n_{pull}\} \dots \dots \dots (17)$$

となる。ここで、 $\{n_{pull}\} = [K_e] [A] |r_{cross}|$ である。 $\{r^{(k+1)}\}$ が降伏楕円上にある条件から未定係数 γ を定めると、次式のようになる。

$$\gamma = \frac{\gamma_1 - \sqrt{\gamma_1^2 - \gamma_2 \cdot (\gamma_3 - 1)}}{\gamma_2} \dots \dots \dots (18)$$

ただし、 $\gamma_1 = \{r_{new}\}^T [A] |n_{pull}|$ 、 $\gamma_2 = \{n_{pull}\}^T [A] |n_{pull}|$ 、 $\gamma_3 = \{r_{new}\}^T [A] |r_{new}|$ 、である。

3. 結果と考察

a) 多層骨組の降伏曲面モデル

多層骨組の塑性崩壊に関する安全領域は、 n 次元超楕円体に近似されるが、地震応答解析に使用する観点から、複数の低次振動モードのみに限定した部分モード応答解析を適用することが考えられる。例えば、2次モードまでを考慮する場合は式(3)において $r_3 = r_4 = \dots = r_n = 0$ とおき、 $r_1 - r_2$ 平面での切断面を図3のように評価する。同図より、主成分分析を応用した近似降伏曲面モデルならびに Pushover を用いて算定した近似降伏曲面モデルは、凸集合理論による精算結果を概略的に近似していることが確認できる。

b) 部材レベルの詳細な応答解析との比較

骨組の復元力モデルを降伏曲面モデルで近似して地震応答解析を行い、通常の部材レベルでの地震応答解析結果と比較して近似降伏曲面モデルの適用性を検討する。EI Centro NS 1940 320 gal を2層1スパンラーメン骨組に対して入力して、以下の4ケースの地震応答解析を検討する。なお、1層と2層の質量比は3:2、柱・梁はそれぞれ同一断面とし、断面2次モーメント比が2.35(梁/柱)、全塑性モーメント比が1.57(降伏点235 MPa)である。また、1次弾性固有周期は $T_1 = 0.762$ 秒、 $T_2/T_1 = 0.52$ 、である。

- 1) 部材レベルの履歴復元力に基づく詳細な弾塑性地震応答解析 [5]
- 2) 骨組の降伏凸多面体モデル(精算結果)に置換した応答解析 [1] [2]
- 3) 主成分分析に基づいて抽出した近似降伏曲面モデルを用いた地震応答解析
- 4) Pushover 手法(3方向載荷)により抽出した近似降伏曲面モデルを用いた地震応答解析

図4に各解析ケースの変位応答の時刻歴、図5にモード復元力空間における復元力の軌跡を示している。同図より、近似降伏曲面モデルを用いた地震応答解析は、部材レベルの詳細な地震応答解析結果を概略的に追跡できることが確認できる。特に、解析ケース4)では、モード復元力空間

研究速報

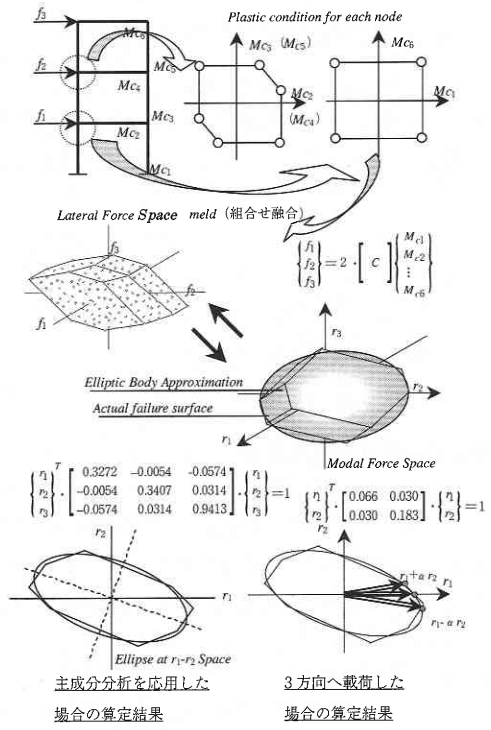


図3 3層骨組の簡略化降伏局面モデル

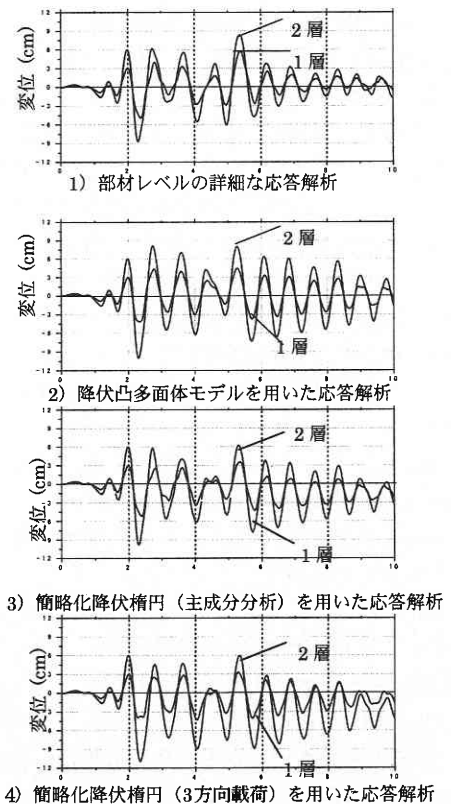


図4 地震応答履歴

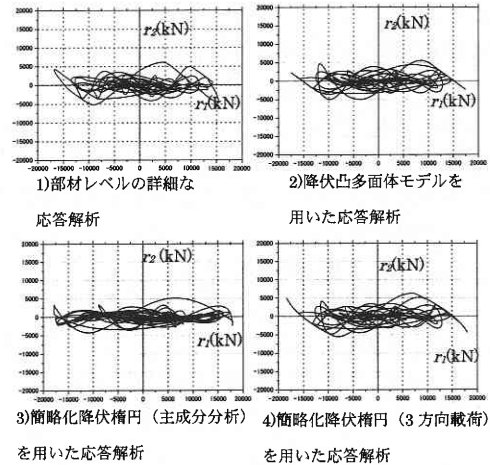


図5 モード復元力空間における復元力の軌跡

における復元力の軌跡が解析ケース2)と非常に一致を示している。複数方向の pushover による簡略化降伏楕円を用いた場合、詳細な地震応答解析を精度よく追跡できることがわかる。

4. 結 論

本稿では、凸集合理論を応用して骨組の塑性崩壊に対する安全領域をモード座標上に抽出する手法について提案し、簡単な例題を示した。また、多層骨組の安全領域 (凸多面体) を楕円体で近似する手法を検討し、凸集合理論による精算凸多面体を概略的に近似できることを例示した。また、得られた近似降伏曲面モデルに対して、弾塑性地震応答解析手法の適用を試みた。部材レベルでの詳細な地震応答解析結果と比較し、そのグローバルな弾塑性応答を追跡できることを確認し、弾塑性応答解析の省力化の可能性を示した。

(2001年9月10日受理)

参 考 文 献

[1] P. Khandelwal, Ohi.K, Fang.P: "A Simple Proposal for Ultimate Seismic Demand Evaluation of Moment Resisting Steel Frames," 日本建築学会構造系論文集, Vol. 545, July, 2001.

[2] 大井謙一, 方沛宇, P. Khandelwal: "鉄骨骨組の降伏凸多面体モデルを用いた部分モード地震応答解析", 第8回鋼構造年次論文報告集. pp. 301-308, Nov. 2000.

[3] 大井謙一, 孫紅, 伊藤拓海: "軸力と曲げの耐力相関を考慮した骨組構造物のマトリクス極限解析法", 日本建築学会構造系論文集, Vol. 539, pp. 71-77, Jan. 2001.

[4] 孫宏, 大井謙一, 陳以一: "多自由度系弾塑性地震応答解析における部分モード応答解析法", 日本建築学会学術講演梗概集 B, pp. 741-742, Sep. 1994.

[5] Dynamic Inelastic ANALYSIS of steel frames, a private program coded by S.H. Gao and K. OHI, The University of Tokyo, 1987.